Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník IX číslo 7

Řešení témat

Téma 1 – Cesta na Mars

Do redakcie došli dve riešenia. Pretože z väčšej časti opakujú myšlienky publikované už skôr, uverejňujeme iba nové nápady.

Mgr.^M^M Jozef Cmar sa domnieva, že astronauti by sa cestou na Mars nemali moc unaviť. Dôvodom by bola vysoká spotreba jedla. Rastliny by sa mali pestovať priamo na lodi – už bolo urobených niekoľko experimentov pestovať rastliny pri zníženej gravitácii. Rád by taktiež pre budúce generácie vytvoril okolo Marsu sieť GPS satelitov. Uvažuje o tom, že budú neoceniteľným pomocníkom pri kolonizácii.

Dr.^M^M Lenka Studničná sa domnieva, že skupina kozmonautov by mala mať medzi sebou:

- Lekára – v prípade nejakej nehody je treba zasiahnuť okamžite.
- Geológa – nemusí sa jednať o najšpičkovejšieho odborníka, pretože väčšina vzoriek bude aj tak preskúmaná až po návrate na Zem. Mal by mať ale také znalosti, aby vedel, aké vzorky treba zbierať, a dokázal urobiť predbežnú analýzu.
- Matematika – ten sa hodí všade.
- Fyzika a technika – človeka, ktorý sa vyzná v stavbe lodi. Uplatní sa v prípade poruchy – navrhne (v spolupráci so Zemou) opravu a vykoná ju.
- Mikrobiológa – prieskum života je nutný ihneď na mieste. Jeho objavenie by dalo misii úplne iný smer a naviac je nutná izolácia tohto života od posádky, aby nedošlo k obojstrannej nákaze.
- Psychológa/psychiatra – pomáhal by riešiť ponorkovú chorobu.

Bzučo

Téma 2 – Tetris

Mgr.^M^M Tereza Klimošová se zabývala třemi problémy, které byly zmíněny v minulém čísle.

Barvení kostiček

Mgr.^M^M Tereza Klimošová

Pro dvourozměrné kostičky existoval dotyk vrcholem (0D) a stranou (1D), pro třírozměrné kostičky přibyl dotyk stěnou (2D). Ve čtvrté dimenzi bude existovat ještě dotyk 3D stěnou, tedy vlastně krychlí. Obecně v n-té dimenzi bude n druhů dotyků.

Například v rovině (2D) při uvažování dotyku stranou (1D) potřebujeme $2^{2-1} = 2$ barvy, pro 3D prostor a dotyk bodem (0D) potřebujeme $2^{3-0} = 8$ barev, pro 3D prostor a dotyk hranou (1D) potřebujeme $2^{3-1} = 4$ barvy. Dalo by se tedy očekávat, že obecně je pro k-dimenzionální dotyk v n-té dimenzi potřeba

$$2^{n-k}$$

barev.

Pozn. red.: Barvení n-rozměrných kostiček bylo realizováno jako n-dimenzionální šachovnice, tedy pokud se pohybujeme ve směru nějaké osy, neustále se střídají krychličky dvou barev. Počet barev, který stačí na obarvení libovolné kostičky, je tedy stejný jako počet barev, který je potřeba na obarvení kostičky

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\,\text{krát}}\,.$$

Počet krychliček v této kostičce je samozřejmě 2^n. V případě dotyku vrcholem se dotýká každá krychlička s každou, tedy je třeba 2^n barev. Pokud se uvažuje dotyk k-dimenzionálním útvarem, dotýká se v „$(n-k)$-dimenzionální vrstvě“[1] každá kostička s každou. Proto je potřeba nejméně 2^{n-k} barev. Na druhou stranu lze obarvovat vrstvy na střídačku (jako n-rozměrnou šachovnici), tedy je tento počet i postačující.

Ze kterých kostiček dostaneme otočením v prostoru vyšší dimenze kostičku jinou?

Mgr.^MM^ Tereza Klimošová

Kostička se otočením v třírozměrném prostoru nezmění, pokud je osově souměrná. V tom případě ji můžeme otočit o 180° okolo libovolné osy ležící v rovině kostičky (i okolo té, podle které není osově souměrná), a dostaneme stejnou kostičku nanejvýš pootočenou oproti původní poloze. Není-li kostička osově souměrná podle žádné osy, otočením v třírozměrném prostoru dostaneme kostičku jinou (takové kostičky byly v předchozích číslech označeny symbolem „2×“). Obzvlášť zajímavý důsledek má toto pravidlo pro „lineární“ kostičky[2] z troj-

[1] *Což je vlastně kostička*

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{(n-k)\,\text{krát}} \times \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{k\,\text{krát}}\,.$$

[2] Tedy kostičky, které mají jeden rozměr minimální (tj. 1) a druhý rozměr maximální (tj. n).

úhelníků. Osově souměrné jsou totiž jen ty, které se skládají ze dvou nebo z lichého počtu trojúhelníků. Pro kostičky ze sudého počtu (a ne ze dvou) trojúhelníků budou existovat vždy dvě verze. U čtverců a šestiúhelníků k tomu nedochází, protože mají rovnoběžné protilehlé strany.

V dvourozměrném prostoru jsme kostičky otáčeli okolo bodu, ve třírozměrném prostoru okolo přímky, dalo by se tedy očekávat, že v n-rozměrném prostoru budou kostičky rotovat okolo $(n-2)$-rozměrného útvaru. Tedy ve čtyřrozměrném prostoru by tělesa měla rotovat okolo roviny.

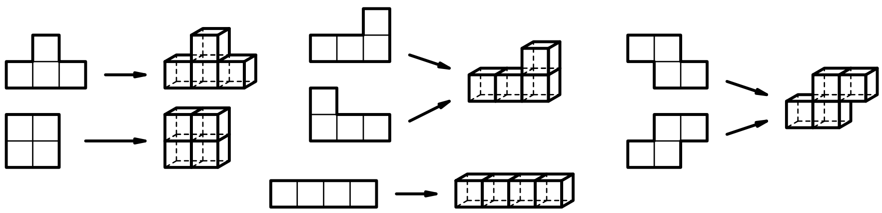
Pozn. red.: Obecné otočení v n-rozměrném prostoru má vždy $(n-1)$ stupňů volnosti (např. v rovině je otočení určeno jedním úhlem a v prostoru dvěma). Aby měla rotace pouze jeden stupeň volnosti, musím jí $(n-2)$ stupňů volnosti sebrat. Tedy rotace je určena $(n-2)$-rozměrným útvarem a rotuje se okolo $(n-2)$-rozměrného útvaru.

Jiné vysvětlení: Vždy můžu zvolit takovou rotaci, abych rotoval pouze ve dvou souřadnicích a ostatní zůstaly konstantní. Tato rotace je určena výběrem $(n-2)$ souřadnic, které zůstanou konstantní, tedy vlastně $(n-2)$-rozměrným útvarem. Ale rotace samozřejmě nemůže záviset na volbě souřadné soustavy, a tak to platí i pro obecnou rotaci.

Nové kostičky ve vyšší dimenzi

Mgr.^{MM} Tereza Klimošová

Jak vznikají kostičky vyšší dimenze z kostek nižší dimenze si předvedeme na přechodu od 2D k 3D pro čtyři krychličky (pro menší počet se nám neprojeví všechny vlastnosti tohoto přechodu).

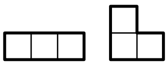


Obr. 1

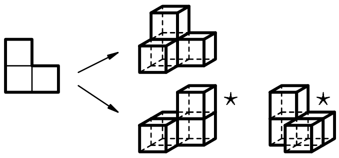
Při sestavování postupujeme takto:

a) Z každé 2D kostičky vytvoříme 3D kostičku tak, že čtvereček nahradíme krychličkou. Pokud jsou ale dvě kostičky zrcadlově převrácené, získáme takto pouze jednu 3D kostičku (viz obr. 1).

b) Všechny kostičky vytvořené způsobem a) jsou „placaté“ (jejich rozměr v jednom směru je jedna). Abychom vytvořili opravdu prostorovou kostičku, vezmeme kostičku ze tří čtverečků, která není ve 2D „placatá“ (kostička na obr. 2 vlevo „placatá“ je, kostička vpravo není), upravíme ji způsobem a), a pak k ní vhodným způsobem přidáme čtvrtou krychličku (viz obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

Pokud bychom nyní chtěli odvodit stejným způsobem kostky ze čtyř krychliček ve 4D, stačil by pouze krok a), protože všechny kostky ze tří krychlí jsou ve 3D „placaté“. Z kostek označených $\star$ by se stala jedna, protože jsou souměrné podle roviny a protože ve 4D se rotuje kolem roviny (viz rozbor předchozího problému). Pro přechod z n-D do $(n+1)$-D pro kostičky z p krychlí tedy platí:

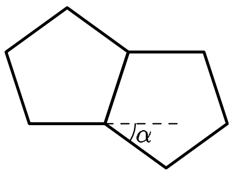
1) Pokud $p \leq n+1$, budou v $(n+1)$-D všechny kostky „placaté“.
2) Z kostek, které jsou spolu v n-D souměrné podle $(n-1)$-D „osy“, se v $(n+1)$-D stane kostička jedna.

Proč u kostiček z pětiúhelníků stačí na obarvení jen dvě barvy

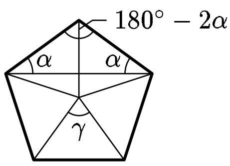
Dr.$^{\text{MM}}$ Lenka Studničná

Pozn. red.: V minulém čísle jsme otiskli příspěvek Mgr.$^{\text{MM}}$ Jozefa Cmara, ve kterém rozebírá kostičky z pětiúhelníků a sedmiúhelníků. Také, avšak bez důkazu, zmiňuje, že na obarvení pětiúhelníkových kostiček stačí dvě barvy. Dr.$^{\text{MM}}$ Lenka Studničná nám poslala důkaz tohoto tvrzení.

Představme si jeden dílek – pětiúhelník. Můžeme k němu připojit další, který musí být vzhledem k původnímu dílku pootočen o úhel α (viz obr. 4).



Obr. 4



Obr. 5

K tomuto dílku můžeme připojit další, který bude pootočen opět o úhel α. Vůči původnímu bude tedy otočen buď o úhel $\alpha - \alpha = 0°$, nebo o úhel $\alpha + \alpha = 2\alpha$. Úhel 2α je ale stejný jako středový úhel γ (viz obr. 5), a překlopením dílku tak získáme kostičku o stejném obrysu, jako měla kostička původní.

Podobně můžeme pokračovat při přidávání dalších kostiček, z čehož vyplývá, že se v „řetízku“ střídají dvě kostičky různě natočené (natočení A a natočení B, které se liší o úhel α). Libovolný uzavřený cyklus tak musí mít sudý počet kostiček. Při lichém počtu by buď byly vedle sebe dvě kostičky typu A, nebo dvě kostičky typu B, což, jak jsme ukázali, není možné. Na obarvení tedy stačí dvě barvy.

Tento postup je obecný, a platí tak nejen pro pětiúhelník, ale pro libovolný n-úhelník s lichým n (pro sudá n není třeba kostičky natáčet).

Pozn. red.: Toto tématko uzavřeme příspěvkem Dr.^MM Lenky Studničné o historii hry Tetris.

Něco málo z historie

Dr.^MM Lenka Studničná

Všechno začalo v červnu roku 1985. Programátor počítačového centra Moskevské akademie věd *Alexej Pažitnov* se inspiroval dětskou hrou Pentominoes (skládání kostiček do krabice) a vytvořil na počítači Elektronika 60 první verzi této hry. Program byl *Vadimem Gerasimovem* přepsán pro PC a začal se šířit Moskvou. Nicméně za něj ani jeden z tvůrců nezískal ani rubl.

Hned po měsíci se Tetris dostal do rukou maďarským programátorům, a ti jej předělali i pro Apple II a Commodore 64. Tyto verze upoutaly ředitele britské softwarové společnosti Andromeda *Roberta Steina*, který se rozhodl odkoupit od Pažitnova práva na Tetris v PC verzi a od maďarského týmu i na verze jiné a komerčně jich využít. Práva však prodal Microsoftu UK ještě dříve než Pažitnova vůbec kontaktoval. Později se snažil oficiální smlouvu získat, ale Sovětský svaz (jehož majetkem hra podle tehdejších zákonů byla) odmítl, aby tak získal šanci dohnat zpoždění na světovém trhu elektronických her. Stein tedy použil lsti – prohlašoval, že Pažitnov hru pouze okopíroval od Maďarů.

Aniž by tedy Robert Stein vlastnil práva, prodával se Tetris po celém světě, a zejména na západě se stal velmi populárním. Distribuce v té době probíhala spolu s ryze ruskými motivy – Gagarinovým letem do vesmíru, přistáním Matthiase Rusta s jeho Cessnou na Rudém náměstí a samozřejmě se nezapomnělo ani na láhve s vodkou.

Problémy Steinovi nastaly až v lednu 1988, kdy v CBS Evening News vystoupil Pažitnov jako autor hry. Na nátlak *Alexandra Alexinka*, ředitele společnosti ELORG (Elektronorgtechnika), která převzala veškerá vyjednávání, se Stein vzdává svých práv. Nicméně hned v květnu podepisuje s touto společností smlouvu, která mu zaručuje práva na „arcade and handheld versions, and any other mediums which we did not dream about yet“. Mezitím již bylo prodáno více než dva miliony kusů Tetrisu.

Ale nespaly ani ostatní společnosti – Microsoft prodal Atari Games práva pro Severní Ameriku a pro Japonsko a její dceřiná společnost Spectrum Holobyte zase společnosti Bullet-Proof Software (BPS) tytéž práva pro Japonsko. Tetris se stává nejprodávanější hrou v USA a ve Velké Británii.

A aby toho nebylo málo, vstupuje v listopadu 1988 na scénu Nintendo. Od koho má ale koupit platný copyright? Začíná série tahanic a soudních sporů. Postupně odstupují jednotlivé strany, a to rozhodně ne s prázdnýma rukama (už tehdy se výdělky každé ze společností počítaly v desítkách milionů dolarů), ale poslední soudní proces mezi Nitendem a Atari je ukončen až v roce 1993.

Jaká je tedy bilance? Na světovém trhu byly prodány miliony kusů různých společností, přestože vlastnictví licence bylo sporné. Největšími vítězi se stali

Henk Rogers, prezident BPS, a Nintendo – vždyť jen Game Boyů s Tetrisem se prodalo 30 milionů! Po celou dobu sporů se však nikde nevyskytlo jméno původního tvůrce Alexeje Pažitnova. Ten vyšel naprázdno a částečné zadostiučinění se mu dostává až po letech přiznáním autorství. Roku 1996 pak za finanční podpory Henka Rogerse zakládá The Tetris Company LLC.

Použité webové stránky:
`http://www.atarihq.com/tsr/special/tetrishist.html`[3]
`http://tetriszone.gbadvanzed.com`

Martin Krsek

Téma 5 – Solitér

K téme Solitér prišlo viacero pekných riešení. Na prvom mieste chcem pochváliť *Doc.MM Tomáša Šteca*, ktorému sa podarilo klasifikovať riešiteľné rozostavenia kolíkov na priamke. Ďalšie pekné príspevky poslali *Mgr.MM Lukáš Vozdecký*, *Dr.MM Lenka Studničná* a *Dr.MM Jan Olšina*, ktorý naprogramoval generátor riešiteľných rozostavení kolíkov v rovine.

Solitér na priamke

Doc.MM Tomáš Štec

Budeme sa zaoberať problémom riešiteľnosti jednorozmerného solitéru, teda na priamke. Celý problém si najskôr rozdelíme podľa počtu kolíkov na začiatku:

Jeden kolík je riešením.

Dva kolíky musia stáť tesne vedľa seba, aby jeden mohol preskočiť druhý, a ostať tak na ploche sám. Z toho si sformulujeme lemu:

Lema 1. *Riešiteľné sú len tie schémy, z ktorých sa môžeme dopracovať k dvom vedľa seba stojacim kolíkom.*

Uvažujme tri kolíky. Ak stoja tesne vedľa seba, je jediná možnosť pohybu, že stredný preskočí jeden z krajných. Potom ale dostaneme stav [k m m k], kde kolík značíme k a medzeru m. Tento stav nespĺňa lemu 1, takže je neriešiteľný. Postavme kolíky do schémy [k m k k]. V tejto schéme (a v zrkadlovo symetrickej) existuje jediná možnosť skoku, ktorá vedie k stavu [k k]. Tento stav je riešiteľný. Pokiaľ usporiadame kolíky do stavu [k m k m k], nemôžeme skákať, a teda je to neriešiteľná schéma. Ďalšie zväčšovanie medzier nemá zmysel. Z toho potom vyplýva nasledujúca veta:

Veta 1: *Pri viac ako troch kolíkoch sú riešiteľné len tie situácie, ktoré vedú k stavu [k m k k].*

Každý problém prevedieme teda na problém existencie kombinácie skokov, ktorými sa dopracujeme k stavu [k m k k]. Najskôr ale vyslovíme ešte jednu vetu, ktorá sa nám zíde:

---

[3] *Pozn. red.: V současné době je odkaz nefunkční.*

Veta 2: *Žiadny problém, v ktorom sa vyskytuje medzera väčšia ako dve políčka, nie je riešiteľný.*

Pseudodôkaz. Položme si základný problém s medzerou veľkosti tri. To znamená situáciu [... k m m m k ...]. Aby bola schéma riešiteľná, musíme stlačiť počet medzier medzi ľavou a pravou časťou na jedno políčko a zároveň mať na jednej strane hneď vedľa druhý kolík (tak vyzerá riešiteľná schéma pre tri kolíky). Takže preskočme kolíky ohraničujúce medzeru ich vonkajšími susedmi. Dostaneme (nutne!) situáciu [m m k m k m m]. Máme dva kolíky oddelené jednou medzerou (neriešiteľný stav) a nemáme možnosť, ako k nim dostať tretí, kedže aj pri najväčšej snahe zistíme len, že dostávame rad [... k m ...] zakončený [... m k] [4]. Tým pádom je medzera o veľkosti tri neriešiteľná, a tým aj každá väčšia medzera.

V ďalšom budeme postupovať dozadu, t.j. vyjdeme zo situácie, ktorá spĺňa vetu 1, a budeme postupne odskakovať.

Povedzme si ešte, že medzera v [k m k k] nemohla vzniknúť posledným odskokom, kedže okolo nej stoja kolíky (ak by sa z nej skákalo, musel by byť odstránený niektorý priľahlý kolík). Podľa pravidiel vidíme, že posledný kolík, ktorým sa skákalo, je jeden z okrajových. Budeme skákať oboma v dvoch schémach. Po prvom skoku pre prvý z nich dostaneme [k k m m k k], pre druhý [k m k m k k]. Tieto dva stavy sú jediné riešiteľné stavy so štyrmi kolíkmi. Zatiaľ sa zaujímajme o prvý z nich. Vidíme, že odskočiť môžeme každým zo štyroch kolíkov, a to vonkajšími ďalej von, alebo vnútornými do vnútra. Vyskúšajme obe varianty (opäť v dvoch samostatných schémach), dostaneme: [k m k k k k] a [k k m k m m k k]. Všimnime si, že keď vezmeme prvú schému, odskočíme ľavým kolíkom [k k m m k k k k] a následne pravým vnútorným, dostaneme situáciu [k m k k k k k k]. Táto situácia je riešiteľná a každým ďalším použitím týchto dvoch krokov ju predĺžime o dva kolíky. Dostaneme teda celistvý rad o $2n$ kolíkoch a jeden kolík oddelený od tohto radu jednou medzerou. Môžeme vysloviť lemu:

Lema 2. *Každé postavenie s párnym (sudým) počtom kolíkov v jednoliatom rade a s jedným kolíkom vzdialeným od tohto radu o medzeru je riešiteľné.*

Vráťme sa teraz k stavu [k m k k k k] a odskočme pravým kolíkom. Dostaneme [k m k k k m k k]. Môžeme opäť odskočiť pravým kolíkom. Dostaneme [k m k k k m k m k k]. Pri ďalšom opakovaní dôjdeme k nekonečnému radu, kde sa bude opakovať [... k m ...] a ktorý bude zakončený [... k k]. Tento rad je riešiteľný, kedže každým skokom ho skrátime o jednu [k m] skupinu a na konci nám ostane [k m k k], teda riešiteľná trojica. Zaujímavý je ale aj ľavý koniec, ktorý sme si chvíľu nevšímali. Ostalo nám tam [k m k k], teda riešiteľná trojica.

---

[4] *Pozn. red.: Pre budúcnosť doporučujeme riešiteľom, aby vysvetlili podobné poznámky podrobnejšie. Text sa číta príjemnejšie, keď človek nemusí po každej vete premýšľať.*

Podobnými pokusmi môžeme nakoniec dôjsť k nasledujúcemu vzťahu pre ľubovoľný počet kolíkov na pláne:

$$([\mathrm{k\ k\ m}] + n_1 \times [\mathrm{k\ m}]) + [\mathrm{m}] + ((2n_2 + 1) \times [\mathrm{k}]) + [\mathrm{m}] + (n_3 \times [\mathrm{k\ m}] + [\mathrm{k\ k}])\,.$$

Tento vzťah vysvetlíme. Máme ho rozdelený na tri časti (ohraničené zátvorkami), medzi ktorými sú vložené medzery [m]. Všimnime si, že je zložený z troch častí – pravej, prostrednej a ľavej. Každá z týchto častí je vypustiteľná, pričom pri jej vypustení ju nahrádzame nasledovne: ľavú časť nahradíme [k], prostrednú časť nenahradíme, ale vypustíme jednu medzeru a pravú časť nahradíme pridaním [k] k prostrednej časti, pričom vypustíme aj vloženú medzeru.[5] Teda ak nahrádzame pravú aj strednú časť, vypustíme obe medzery okolo stredu a nahradíme ich jedným kolíkom. Tento princíp nahrádzania je založený na spôsobe, akým boli jednotlivé časti pri odskakovaní vytvárané. Vzťah po vypustení ľavej časti vyzerá nasledovne:

$$[\mathrm{k\ m}] + ((2n_2 + 1) \times [\mathrm{k}]) + [\mathrm{m}] + (n_3 \times [\mathrm{k\ m}] + [\mathrm{k\ k}])\,,$$

po vypustení pravej časti zas takto:

$$([\mathrm{k\ k\ m}] + n_1 \times [\mathrm{k\ m}]) + [\mathrm{m}] + (2n_2 + 2) \times [\mathrm{k}]\,.$$

Ak by sme vypustili strednú časť, vzťah by vyzeral takto:

$$([\mathrm{k\ k\ m}] + n_1 \times [\mathrm{k\ m}]) + [\mathrm{m}] + (n_3 \times [k\ m] + [\mathrm{k\ k}])\,.$$

Ak by sme vypustili obe okrajové časti, dostali by sme

$$[\mathrm{k\ m}] + (2n_2 + 2) \times [\mathrm{k}]\,,$$

čo je ale vzťah, ktorý už poznáme (lema 2). Ak by sme vypustili jednu okrajovú časť spolu s prostrednou a doplnili podľa pravidiel, dostali by sme

$$[\mathrm{k\ k}] + (n + 1) \times [\mathrm{m\ k}]\,,$$

resp. zrkadlový obraz, podľa toho, ktorú časť by sme ponechali. Táto situácia je samozrejme riešiteľná, keďže postupnými preskokmi sa nám skupina [k k] posúva celým radom [... m k ...] až k poslednému [k].

Pozn. Chaos, ktorý vznikol pri nahrádzaní vypúšťaných častí je spôsobený tým, že pravá aj ľavá časť sú v podstate symetrické, ale jedna z nich je od stredu oddelená medzerou veľkosti dva a druhá len jednou medzerou. Ak by sme

[5] *Pozn. red.: Toto je treba chápať ako popis možných riešiteľných situácií, a nie návod, jak jednotlivé zátvorky vyskákať. Je zaujímavé, že prostrednú zátvorku nemožno „vyskákať“ bez spolupráce s krajnými časťami, kým pravú aj ľavú časť možno „vyskákať“, aj keby tam ostatné neboli.*

medzeru veľkosti dva rozdelili medzi okrajovú a stredovú časť a druhú medzeru by sme pridali k okrajovej časti, okrajové časti by sa nahrádzali kolíkom a prostredná by sa nenahrádzala. Môžeme si to aj názorne ukázať na príklade, kde máme: [k k m k m][m k k k][m k m k k]. Po nahradení napr. pravej a strednej časti (zátvorky) by sme dostali [k k m k m][k], čo je v poriadku.

Nakoniec by sa ešte patrilo vysvetliť čísla n_i. Všetky sú to čísla prirodzené alebo nula.

Zhrnutie z predchádzajúcich odstavcov označme ako vetu 3:

Veta 3: *Majme nasledovné postupnosti:* $a_1 = [\mathrm{k\ k}] + n_1 \times [\mathrm{m\ k}] + [\mathrm{m}]$*;* $a'_1 = [\mathrm{k}]$*;* $a_2 = [\mathrm{m}] + (2n_2 + 1) \times [\mathrm{k}]$*;* $a'_2 = \emptyset$*;* $a_3 = [\mathrm{m}] + n_3 \times [\mathrm{k\ m}] + [\mathrm{k\ k}]$*;* $a'_3 = [\mathrm{k}]$*, kde* n_1*,* n_2*,* n_3 *sú prirodzené čísla alebo nula, potom ich nasledovné kombinácie (a zrkadlové obrazy týchto kombinácií) vyjadrujú všetky možné riešiteľné rozmiestnenia kolíkov v jednorozmernom solitéri:*

$a_1 + a_2 + a_3$	$a_1 + a_2 + a'_3$	$a_1 + a'_2 + a_3$
$a_1 + a'_2 + a'_3$	$a'_1 + a_2 + a_3$	$a'_1 + a_2 + a'_3$
$a'_1 + a'_2 + a_3$	$a'_1 + a'_2 + a'_3$	[k]

Trocha historie

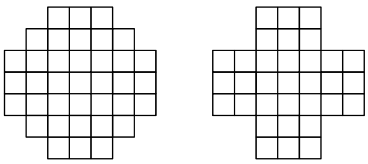
Dr.^{MM} Lenka Studničná

Hra (nebo možná lépe řečeno hlavolam) Solitér je stará zhruba tři sta let. První zmínky se totiž objevují v roce 1697 ve Francii. Nicméně první písemný zápis pochází z roku 1710 a publikoval jej Gottfried Wilhem Leibniz na berlínské Akademii. Stojí za zmínku, že se jednalo o Solitér „naruby" – na prázdnou hrací desku se položí jeden kámen (resp. kolík), přeskočí se s ním volné pole a na toto přeskočené pole se položí další kámen (cílem hry tak je zaplnění celé plochy až na jedno pole). Na trhu se Solitér vyskytl poprvé v roce 1803 v Bestelmeier's catalog – např. Námořníkův solitér (hra osamělých mořských vlků) nebo Rodeo (hráli jej údajně i pastevci krav). U nás se zpočátku prodávala pod názvem To mi nedá pokoj.

Možnosti hry

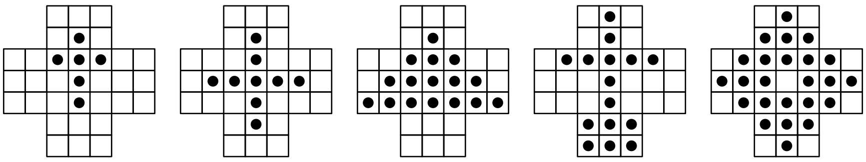
Dr.^{MM} Lenka Studničná

Pravidla samotné hry už byla vysvětlena ve druhém čísle M&M, takže jenom dodávám, že nejobvyklejšíhracími deskami jsou francouzská a anglická (viz obr. 1).



Obr. 1

Jediným neobsazeným polem na začátku hry je zpravidla levý horní roh nebo pole uprostřed. Komu by se zdál úkol příliš jednoduchý, může si zvolit pole, na kterém musí zůstat poslední kámen. Naopak



Obr. 2

zjednodušení dosáhneme jiným uspořádáním kamenů na začátku hry. Na internetu jsem objevila varianty znázorněné na obr. 2 (všechny se mi podařilo vyřešit).

Některá alternativní pravidla hry:

- Cílem hry je nechat ne desce co nejvíc osamocených kamenů, které už nelze odstranit.
- Zhruba do poloviny hrajeme normálně, pak přejdeme na Leibnizův solitér (tj. Solitér „naruby").
- Hra ve dvou hráčích. Hráči se střídají po tahu – kterou kuličku v tomto tahu přeskočí, tu si započítají. Cílem je samozřejmě získat co nejvíce kuliček, přičemž jsou povoleny vícenásobné skoky (podobně jako u dámy). Možná je i „žravá" verze – tj. získat co nejméně kuliček.
- Vůbec nejlepší je vymýšlení vlastních pravidel. Mně se osvědčila akční verze hry ve dvou hráčích – hráči se nestřídají po tazích, záleží pouze na jejich rychlosti.

Použité webové stránky:
`http://www.sweb.cz/lada.chytrackova/hry/soliter.htm`

Solitérové rovinné n-tažky

Dr.[MM] *Jan Olšina*

Mějme v rovině takový solitér, že kameny jsou umístěny v mřížových bodech (tj. jde o „čtvercovou síť"). Pak hledejme všechny pozice s n kameny, které lze vyhrát (tedy existuje sekvence tahů taková, že po jejím skončení zůstává jediný kámen). Pravděpodobně neexistuje žádná přímá cesta, jak se přesvědčit, zda je pozice vyhratelná, ačkoliv lze snadno rozpoznat některé prohrané pozice (pokud je například některý kámen příliš vzdálen od ostatních). Proto jsem napsal program, který vyhledává všechny vyhratelné pozice s n kameny.

Základní algoritmus:

1) Zadá se závěrečná pozice obsahující jeden kámen.
2) V hloubce n se projde každá pozice s $(n-1)$ kameny. Pro každý kámen se prověří každý ze čtyř směrů. Jsou-li pole do vzdálenosti 2 volné, je záměna těchto dvou prázdných polí za kameny a dotyčného kamene za prázdné pole hledaný možný tah.
3) Vygenerují se všechny možné tahy s n kameny.
4) Přechod do hloubky $n+1$.

Tento algoritmus sice nalezne všechny pozice, ale je velmi pomalý. Udělejme (velmi hrubý) horní odhad počtu pozic v závislosti na počtu kamenů. Pro každý kámen z $(n-1)$-ní hloubky existují (nejvýše) 4 tahy. Potom je počet pozic $x_n \approx 4nx_{n-1}$, tedy $x_n \approx 4^{n-1}(n-1)!$ Počet pozic tedy s rostoucím n roste velmi rychle. Po použití našeho algoritmu vznikne mnoho pozic, které jsou (až na otočení či zrcadlení) stejné. Je časově velmi výhodné odstranit je (navíc pokud chceme výsledky programu nějak interpretovat, je lépe, neopakují-li se stejné pozice). Proto zvolíme nový algoritmus, který právě nalezenou hloubku zbaví duplicitních pozic.

Pozn. red.: V ďalšom Dr.MM Jan Olšina ďalej vysvetľuje základnú myšlienku svojho algoritmu: z každého zoskupenia kolíkov, ktoré je riešiteľné, urobí všetky možné otočenia a zrkadlenia, zapamätá si ich a pri ďalšom prehľadávaní ich už ignoruje. Tak nájde len pozície, ktoré nie sú ekvivalentné. Ako jeden z výsledkov programu je nasledujúca tabuľka, udávajúca pre $n \leq 8$ počet neekvivalentných riešiteľných pozícií p:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p	1	1	2	14	89	694	5539	45399

Peťo

Téma 7 – Zpracování aritmetických výrazů

Formy zápisu výrazu

Z běžného života jsme zvyklí na zápis aritmetických výrazů v podobě:

$$15 - (25 + 3 \cdot 2)/(6 + 4)\,.$$

Tomuto zápisu se říká infixová notace (zkráceně infix), protože každý operátor leží mezi příslušnými operandy.

Dalšími dvěma formami zápisu, se kterými se můžeme setkat, jsou prefixová a postfixová notace. Liší se tím, že binární operátor je umístěn před (u prefixu), případně za (u postfixu) svými dvěma operandy. Výhodou těchto dvou forem zápisu je to, že nepotřebují závorky, pořadí vyhodnocení je plně určeno umístěním operandů a operátorů ve výrazu. Jinou nespornou výhodou je jednodušší a rychlejší vyčíslení výrazu. Pro člověka jsou však tyto dvě notace na první pohled docela nepřehledné:

prefix:	$-\ 15\ /\ +\ 25\ \cdot\ 3\ 2\ +\ 6\ 4$
postfix:	$15\ 25\ 3\ 2\ \cdot\ +\ 6\ 4\ +\ /\ -$

Vyhodnocení výrazu

Nejjednodušší je vyhodnocení výrazu zapsaného v postfixové notaci. Potřebujeme k tomu pouze zásobník (co vložíme jako první, vyjmeme jako poslední) na ukládání načtených číselných hodnot. Když načteme operátor, vyjmeme ze zásobníku vrchní dvě čísla a provedeme s nimi požadovanou operaci. (Pozor musíme dát na pořadí operandů u nekomutativních operátorů ($-$ a $/$), kde první vyjmutý prvek ze zásobníku je vpravo!) Výslednou hodnotu vložíme zpět na vrchol zásobníku. Při správně zadaném výrazu jsou při přečtení operátoru v zásobníku alespoň dvě čísla a po skončení výpočtu číslo jediné – výsledná hodnota.

Prefix můžeme vyhodnotit podobně. Pokud není výraz příliš dlouhý, můžeme si ho celý načíst a uložit do paměti a od konce vyhodnotit jako postfix (s jedinou drobností – u nekomutativních operátorů je první vyjmutý prvek vlevo). Druhou možností je načítat prvky postupně a ukládat je do zásobníku. Načtený operátor rovnou vložíme do zásobníku, při načtení číselné konstanty musíme zkontrolovat, co je na vrcholu zásobníku. Pokud je to operátor, číslo vložíme do zásobníku. Pokud je to číslo, vyjmeme jej společně s následujícím operátorem (nikdy se nám nemůže stát, že bychom vložili dvě čísla po sobě) a provedeme požadovanou operaci. Výslednou hodnotu zpracujeme jako načtené číslo (tj. opět zkontrolujeme vrchol zásobníku). Pokud nebyl výraz špatně zadán, máme po vyhodnocení výrazu v zásobníku jediné číslo – výslednou hodnotu.

Při vyčíslování infixu máme opět na výběr z několika metod. První způsob vyhodnocení spočívá v nahrazování dílčích podvýrazů jejich hodnotami. Vyhledávání podvýrazů je však docela složité a celý postup je zbytečně pomalý. Jinou možností je použití rekurzivního algoritmu známého pod označením rozděl a panuj. Algoritmus vyhledá nejprve poslední operátor. Je to ten stojící mimo závorky, s nejnižší prioritou, nejvíce vpravo. Pokud jsou výrazy vpravo či vlevo složené (tj. nejsou to pouze číselné hodnoty), opět se aplikuje stejný algoritmus. Pokud už žádný operátor nestojí mimo závorky, odstraní se *nejnižší* závorky, tj. ty, které začínají nejvíce vlevo. Volání algoritmu končí, až jsou všechny operátory analyzovány a rozloženy na elementární. Poté začne samotné vyhodnocování. Vždy se vyhodnotí ty operátory, které mají nalevo i napravo číselné hodnoty. Tím místo výrazu získáme číslo a můžeme vyhodnocovat dále. Jako poslední se pak vyhodnotí výraz, který jsme zadali jako první (dle principu algoritmu). Hledání posledního operátoru je však celkem náročné a v nejhorším případě má algoritmus až kvadratickou časovou složitost.

Velmi elegantní je podle mého názoru převedení infixu na postfix pomocí algoritmu s lineární časovou složitostí a následné vyhodnocení postfixového výrazu. Výsledný algoritmus má vždy lineární časovou složitost.

Převod infixu na postfix

Jednotlivé notace se liší pořadím operátorů, nikoliv však operandů. Náš algoritmus pracuje následovně:

1) Kdykoliv načte číselnou konstantu, přímo ji zapíše do vznikajícího postfixového zápisu.
2) Při přečtení operátoru (včetně závorek) postupuje takto:

a) levou závorku vloží do zásobníku;
b) znaménko (+, −, ·, /) vloží do zásobníku, ale ještě před tím zkontroluje, co je na vrcholu, a znaménka stejné a vyšší priority vypíše zleva doprava;
c) při přečtení pravé závorky vypíše všechny operátory až do příslušné levé závorky, kterou pouze vyjme ze zásobníku.

3) Po skončení načítání infixu zapíše všechna znaménka, co zbyla v zásobníku.

Tím máme z infixového zápisu postfix, který již umíme snadno vyhodnotit.

Toto jsou návrhy algoritmů, které by se vám mohly hodit při vymýšlení vlastních programů. Příjemné chvilky strávené u počítače přeje

B.B.

Řešení úloh

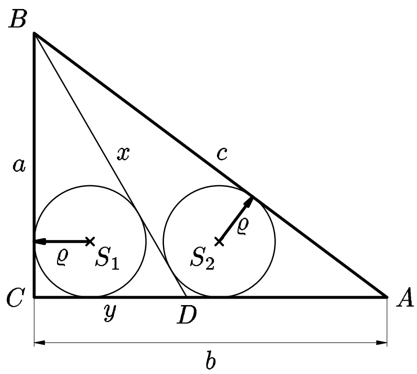
Úloha 5.1 – Trojúhelník (3b)

Zadání:

Mějme trojúhelník ABC s délkami stran $|BC| = 3$, $|AC| = 4$ a $|AB| = 5$. Na úsečku AC umístíme bod D tak, aby kružnice vepsané trojúhelníkům BCD a BDA měly stejný poloměr. Najděte velikost poloměru těchto kružnic.

Řešení:

Jak lehce ověříme např. pomocí Pythagorovy věty, zadaný trojúhelník je pravoúhlý s přeponou AB. Situace je načrtnuta na obr. 1.



Obr. 1

Označme $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|BD| = x$ a $|CD| = y$. V tabulkách najdeme (nebo odvodíme) vztah mezi obsahem (obecného) trojúhelníku S, jeho obvodem o a poloměrem jemu vepsané kružnice ρ:

$$\rho = \frac{2S}{o}\,. \qquad (1)$$

Pro pravoúhlý trojúhelník BCD tak můžeme psát

$$\rho_1 = \frac{2ay/2}{a+x+y} \qquad (2)$$

a obdobně pro tupoúhlý trojúhelník ADB

$$\rho_2 = \frac{2(b-y)a/2}{(b-y)+c+x}\,. \qquad (3)$$

Dle zadání je $\rho_1 = \rho_2$, označme tedy oba poloměry ρ a položme do rovnosti pravé strany rovnic (2) a (3):

$$\frac{ay}{a+x+y} = \frac{(b-y)a}{(b-y)+c+x} \,. \tag{4}$$

Dosazením číselných hodnot ze zadání ($a = 3$, $b = 4$, $c = 5$) a zřejmými úpravami dostáváme rovnici

$$xy - 2x + 4y - 6 = 0 \,. \tag{5}$$

Využijeme-li toho, že trojúhelník BCD je pravoúhlý, snadno zjistíme vztah mezi délkami x a y:

$$x = \sqrt{y^2+9} \,. \tag{6}$$

Dosadíme do (5) za x výraz ze (6) a upravujeme:

$$(y-2)\sqrt{y^2+9} = 6 - 4y \,, \tag{7}$$

po umocnění vychází rovnice čtvrtého stupně pro y:

$$y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 12y = 0 \,. \tag{8}$$

Tu lze řešit např. na programovatelné kalkulačce, lépe však následující jednoduchou úpravou. Nejprve vytkneme na levé straně rovnice y a zaměníme pořadí druhého a třetího členu:

$$y(y^3 - 3y - 4y^2 + 12) = 0 \,, \tag{9}$$

z první i druhé dvojice členů v závorce lze vytknout výraz $(y^2 - 3)$, takže

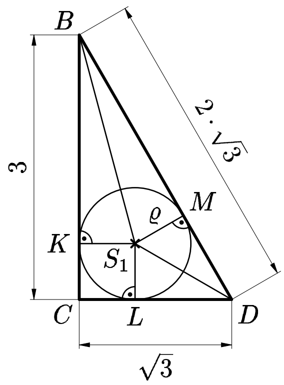
$$y(y^2-3)(y-4) = 0 \,. \tag{10}$$

Tato rovnice má 4 kořeny:

$$y_1 = 0 \,, \quad y_2 = -\sqrt{3} \,, \quad y_3 = \sqrt{3} \quad \text{a} \quad y_4 = 4 \,.$$

Z geometrické povahy úlohy vyplývá, že vhodnou délkou úsečky CD je jedině $\sqrt{3}$.

Zbývá určit poloměr ρ. Můžeme pomocí y zpětně vypočítat délku x a dosadit do rovnice (2) či (3). Pro zajímavost ale uveďme jiný postup využívající geometrický náhled. Na obr. 2 je pravoúhlý trojúhelník BCD a jemu vepsaná kružnice o středu S_1. Jeho přepona má délku x, tj. $2 \cdot \sqrt{3}$. Zakreslíme-li postupně do obrázku body dotyku vepsané kružnice se stranami BC, CD a BD, dostaneme po řadě



Obr. 2

body K, L, M. Ze shodnosti trojúhelníků BKS_1 a BMS_1, resp. DLS_1 a DMS_1, (shodnost plyne z věty ssu) a z toho, že čtyřúhelník CLS_1K je čtverec, dostaneme následující rovnosti:

$$|BK| + |LD| = |BD|\,,$$
$$(a-\rho) + (y-\rho) = x\,,$$
$$\rho = \frac{a-x+y}{2}\,.$$

Číselně vychází $\rho = \left(3-\sqrt{3}\right)/2$ a jsme hotovi.

Mirek

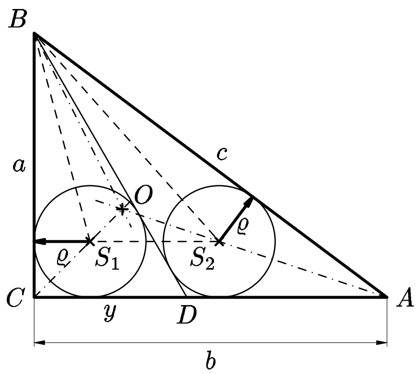
Úloha 6.1 – Trojúhelník II (5b)

Zadání:

Vyřešte úlohu 5.1 konstrukčně, tj. pouze použitím pravítka a kružítka.

Řešení:

Úloha je zadána jako polohová, proto by její úplné řešení mělo obsahovat všechny náležitosti (rozbor, popis konstrukce, diskuse počtu řešení, ...). My se zde omezíme na provedení rozboru úlohy a naznačíme postup konstrukce. Ostatní si snadno doplníte sami.



Obr. 1

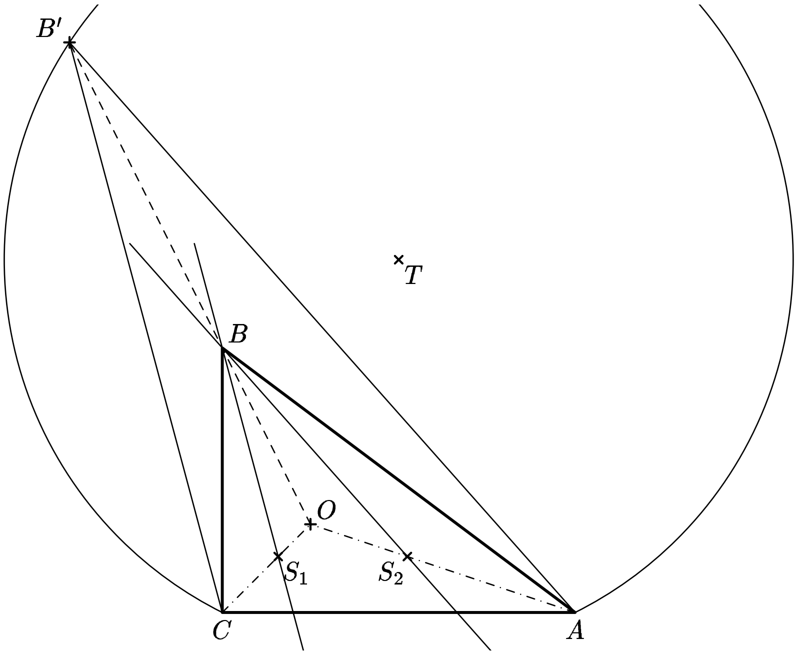
Cílem rozboru úlohy je nalézt vhodnou množinu bodů, které lze zkonstruovat a ze kterých určíme řešení. Tímto „klíčem" k řešení úlohy je $\triangle S_1S_2B$. Pokuste se s pomocí obr. 1 a následující osnovy určit jeho vlastnosti, na základě kterých provedeme jeho konstrukci:

1. Je znám nějaký vrchol či strana v tomto trojúhelníku?
2. Co víme o bodech S_1 a S_2?
3. Známe nějaký vnitřní úhel?
4. Jakou vlastnost má strana S_1S_2?

Tady jsou odpovědi:

1. Vrchol B je zadán, a tedy znám.
2. Středy S_1, S_2 vepsaných kružnic leží na osách úhlů BCA a CAB.
3. Jednoduchým výpočtem zjistíme $|\sphericalangle S_1BS_2|$. Platí totiž rovnosti:

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA|\,, \tag{1}$$
$$|\sphericalangle S_1BS_2| = |\sphericalangle S_1BD| + |\sphericalangle DBS_2|\,, \tag{2}$$
$$|\sphericalangle S_1BD| = {}^1\!/_2\,|\sphericalangle CBD|\,, \tag{3}$$
$$|\sphericalangle DBS_2| = {}^1\!/_2\,|\sphericalangle DBA|\,, \tag{4}$$



Obr. 2

přičemž poslední dvě vyplývají z vlastností středů vepsaných kružnic. Dosazením (3), (4) a nakonec (2) do (1) dostáváme:

$$|\sphericalangle S_1BS_2| = {}^1\!/_2\, |\sphericalangle CBD| + {}^1\!/_2\, |\sphericalangle DBA| = \\ = {}^1\!/_2 \left(|\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA|\right) = {}^1\!/_2\, |\sphericalangle CBA|\,. \qquad (5)$$

4. Z náčrtu nahlédneme, že přímka S_1S_2 je rovnoběžná s přímkou CA. Je to důsledek stejné vzdálenosti bodů S_1 a S_2 od přímky CA.

Rozmyslete si, že ke každé dvojici kružnic splňující zadání úlohy existuje právě jeden $\triangle S_1S_2B$ a naopak každý trojúhelník s vlastnostmi dle bodů 1 až 4 určuje právě jednu dvojici kružnic ze zadání! Stačí tedy narýsovat všechny takové trojúhelníky; nalezení jim odpovídajících kružnic a jejich poloměrů je triviální.

Ukažme, jak takové trojúhelníky zkonstruovat. Využijeme stejnolehlost $\mathcal{H}$ se středem v bodě O, která zobrazí body S_1 na C, S_2 na A a B na B', jinými slovy zobrazí $\triangle S_1S_2B$ na $\triangle B'AC$, který ale snadno zkonstruujeme. Body A, C jsou totiž dány, bod O je průsečík os úhlů BCA a CAB a bod B' nalezneme jako průnik polopřímky OB s množinou všech bodů X, pro něž je úhel $|\sphericalangle AXC| = {}^1\!/_2\, |\sphericalangle CBA|$ (tj. bodů, ze kterých „vidíme úsečku AC“ pod úhlem $|\sphericalangle S_1BS_2| = {}^1\!/_2\, |\sphericalangle CBA|$). Nalezení této množiny bodů X patří k základním středoškolským znalostem (jsou to kružnicové oblouky nad úsečkou CA).

Konstrukce $\triangle ACB'$ je teď zřejmá. Body S_1 a S_2 nalezneme např. sestrojením rovnoběžek se stranami AB' a $B'C$ procházejícími bodem B. Postup názorně ukazuje obr. 2.

Na závěr se ještě můžete pokusit určit, kdy jsme v konstrukci využili vlastnosti z bodů 1 až 4.

Mirek

Úloha 5.2 – Potápěč (4b)

Zadání:

Krátkozraký potápěč nosí běžně (na souši) brýle se sedmi dioptriemi. Protože nechce mít pod vodou dvoje brýle přes sebe, rozhodl se, že si do svých potápěčských brýlí nechá dát dioptrická skla. Jak musí taková skla vypadat, aby viděl pod vodou bez problémů i do dálky? A jak s těmito brýlemi uvidí ještě předtím, než skočí do vody?

Řešení:

Budeme zkoumat, jak zobrazuje předměty čočka, která je z jedné strany obklopena vodou a z druhé vzduchem. Při dalším zkoumání se omezíme pouze na předměty ležící poblíž optické osy čočky. Budeme předpokládat, že paprsky se šíří zleva doprava, a vzdálenosti na optické ose budeme chápat jako kladné tehdy, když je dané místo vpravo od čočky, a jako záporné tehdy, když je vlevo. Poloměr křivosti je kladný, pokud střed leží vpravo od kulové plochy, a záporný v opačném případě.

Paprsky procházejí postupně prostředími s indexy lomu n_1 (voda nebo vzduch), n_2 (čočka) a n_3 (vzduch). Mezi prvními dvěma prostředími je kulová plocha s poloměrem křivosti r_1 a mezi druhými dvěma plocha s poloměrem křivosti r_2. Podle vztahů pro lom paraxiálních paprsků na kulové ploše[6] se přes první rozhraní zobrazí předmět na optické ose v bodě a_1 do bodu a_1' podle rovnice

$$\frac{1}{a_1'} = \frac{n_1}{n_2}\frac{1}{a_1} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1}. \tag{1}$$

Obdobně přes druhé rozhraní

$$\frac{1}{a_2'} = \frac{n_2}{n_3}\frac{1}{a_2} + \frac{n_3 - n_2}{n_3 r_2}. \tag{2}$$

Optická mohutnost čočky nám v předchozích rovnicích vyjde na levé straně tehdy, když za a_1 nebo za a_2 dosadíme nekonečno.

Pokud budeme brýle považovat za tenkou čočku, platí $a_2 \approx a_1'$ a z rovnic (1) a (2) vychází zobrazovací rovnice pro celé brýle ($a \equiv a_1$, $a' \equiv a_2'$)

$$\frac{1}{a'} = \frac{n_1}{n_3}\frac{1}{a} + \frac{n_2 - n_1}{n_3 r_1} + \frac{n_3 - n_2}{n_3 r_2}. \tag{3}$$

[6] Tyto vztahy se dají odvodit jednoduchými geometrickými úvahami pouze na základě zákona lomu a za předpokladu malých úhlů.

Vzhledem k tomu, že je potápěč krátkozraký, je potřeba, aby se libovolný bod zobrazil do vzdálenosti menší nebo rovné $1/D$ (kde $D = -7\,\mathrm{D}$), protože vzdálenější body již není schopný vidět ostře. Navíc je vhodné, aby se předměty ve vzdálenosti odpovídající blízkému bodu[7] zdravého oka zobrazili do blízkého bodu oka potápěče. Na souši tyto podmínky splňuje rozptylka s optickou mohutností D. Ve vodě se ovšem změní index lomu okolí (n_1) a zobrazovací rovnice bude mít tvar (3).

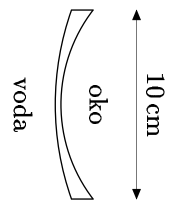
Na první pohled je vidět, že za předpokladu $n_1 \neq n_3$ se před vzdáleností předmětu objeví koeficient různý od jedničky. To znamená, že vzdálenosti budou zkresleny. Pokud $n_3 = 1$ (vzduch), bude se vše zdát n_1-krát bližší. Tento jev ovšem postihne každého potápěče bez ohledu na to, jestli má brýle dioptrické nebo ne.

Další členy rovnice jsou mnohem zajímavější. Můžeme libovolně volit r_1 a r_2, a tím měnit vlastnosti brýlí. Místo složitého počítání je dobré všimnout si, že index lomu n_1 (který se po ponoření do vody jediný změní) je obsažen pouze ve členu s r_1. Pokud toto rozhraní zvolíme rovinné (tedy $r_1 = \infty$), přejde rovnice (3) na tvar (zároveň dosazuji jedničku místo indexu lomu vzduchu)

$$\frac{1}{a'} = \frac{n_1}{a} + \frac{1 - n_2}{r_2}\,. \tag{4}$$

Vhodné brýle tedy mají vnější stranu rovnou a vnitřní vydutou právě tak, aby celková optická mohutnost byla $D = -7\,\mathrm{D}$. S těmito brýlemi uvidí bez problémů na souši a po ponoření do vody se mu pouze zkreslí vzdálenosti a poněkud vzdálí blízký bod. Ovšem potápěč se zdravýma očima na tom bude stejně.

Nejvyšší běžný index lomu brýlových skel je asi $n_2 = 1{,}9$ a z toho vychází potřebný poloměr křivosti $r_2 \doteq 13\,\mathrm{cm}$. Takové čočky budou mít ještě celkem rozumnou tloušťku kolem jednoho centimetru. Předpoklad, že je lze považovat za tenkou čočku je sice poněkud neoprávněný, ovšem pokud rovnice (1) a (2) spojíme na základě vztahu $a_2 = a'_1 + d$, způsobí to pouze další mírné zhoršení vidění na blízko. Blízký bod se v závislosti na d o několik centimetrů vzdálí.



Obr. 1

Z hlediska výroby by byla ještě výhodnější čočka s vypouklou plochou směrem do vody a vydutou směrem k oku, jak nám napsal *Doc.MM Tomáš Štec*. Vhodným zvolením poloměrů r_1 a r_2 můžeme získat lepší tvar skla podobný klasickým brýlím. Navíc nám v tomto případě vyšší optická hustota vody pomáhá, protože snižuje lom na prvním rozhraní (které se chová jako spojka) a vydutá plocha může mít menší křivost než u běžných brýlí. Index lomu vody

[7] Blízký bod je nejbližší bod, ve kterém ještě můžeme vidět předmět ostře. Vzdálenost tohoto bodu závisí na konkrétním oku a narůstá se stářím. Za zdravé oko považujeme takové, které má vzdálenost blízkého bodu menší než konvenční zrakovou vzdálenost, což je 25 cm.

je $n_1 = 1{,}3$ a našeho skla $n_2 = 1{,}9$. Při volbě poloměrů křivosti $r_1 = 15{,}0\,\mathrm{cm}$ a $r_2 = 8{,}2\,\mathrm{cm}$ získáme čočku, která má pod vodou požadovanou optickou mohutnost. Její tvar je na obrázku 1. Na souši se bude chovat jako rozptylka s mohutností $-5\,\mathrm{D}$, takže do moře potápěč trefí i s těmito brýlemi.

Marble

Úloha 5.3 – Koule (3b)

Zadání:

Spočítejte, jaký tvar bude mít stín koule, položené na rovném stole, když ji osvětlíme hodně vzdáleným zdrojem (např. Sluncem). Jak se situace změní, jestliže bude koule osvětlena z blízkého bodového zdroje?

Řešení:

V dalším předpokládáme, že zdroj není pod stolem, protože jinak by na stůl nedopadalo žádné světlo, a tedy ani nevznikal žádný stín.

Koule osvětlená nekonečně vzdáleným zdrojem

Kouli osvětlí paprsky, které budou mít všechny stejný směr. Paprsky určující hranici stínu budou tečné ke kouli a jejich vzdálenost od středu koule bude vždy rovna poloměru. Útvar, který takto vytvoří, bude povrch nekonečného válce. Chceme-li zjistit, jaký tvar bude mít stín, musíme najít množinu bodů, které jsou průnikem povrchu válce a roviny, na které stojí koule.

Vztažnou soustavu BÚNO[8] zvolíme tak, že rovina, na které stojí koule, má rovnici $z = 0$ a osa válce leží v rovině xz a osa válce prochází bodem $[0, 0, 0]$. Případ, kdy je stínový kužel je rovnoběžný s deskou, rozebereme zvlášť.

Analytickou rovnici takto orientovaného válce získáme tak, že analytickou rovnici válce kolmého na rovinu $z = 0$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

otočíme pomocí transformačních rovnic

$$x := x \cos\varphi + z \sin\varphi\,,$$
$$z := -x \sin\varphi + z \cos\varphi\,,$$

kde φ je úhel, pod kterým dopadají paprsky na rovinu $z = 0$, tedy úhel sklonu válce. Výsledná rovnice bude:

$$x^2 \cos^2\varphi + 2xz \sin\varphi \cos\varphi + z^2 \sin^2\varphi + y^2 = r^2\,.$$

Průnikem s rovinou $z = 0$ získáme rovnici:

$$x^2 \cos^2\varphi + y^2 = r^2\,.$$

[8] Bez újmy na obecnosti – běžná zkratka v matematických textech.

Za předpokladu $\cos\varphi \neq 0$ můžeme tuto rovnici přepsat na tvar

$$\frac{x^2}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{y^2}{r^2} = 1\,,$$

což je rovnice elipsy. Vidíme, že velikost vedlejší poloosy (šířka stínu) bude vždy r a velikost hlavní poloosy (délka stínu) se bude měnit v závislosti na úhlu osvětlení: $b = r/\cos\varphi$.

Případ $\cos\varphi = 0$ znamená, že stínový válec je rovnoběžný s deskou stolu. V tom případě vrhá na stůl stín jediný bod, a to bod, kterým se koule dotýká stolu.

Koule osvětlené zdrojem v konečné vzdálenosti

Předpokládejme, že zdroj světla není přímo na kouli (jinak by stín na stole tvořil polorovinu, resp. rovinu). Tečné paprsky se budou protínat v bodě zdroje, a budou tak tvořit kužel.

Položme nejprve počátek souřadné soustavy do středu koule a rovinu xy zvolme rovnoběžnou s deskou stolu.

Kužel v obecné poloze získáme otočením kužele s osou kolmou na rovinu xy. Je-li vzdálenost vrcholu kužele od středu koule t, bude mít tento kužel rovnici

$$x^2 + y^2 = \left(r_0 - \frac{r_0}{t}\cdot z\right)^2,$$

kde $r_0 = t \cdot r/\sqrt{(t^2 - r^2)}$. Po dosazení z transformačních rovnic dostaneme

$$(x\cos\varphi + z\sin\varphi)^2 + y^2 = r_0^2 \cdot \left(1 - \frac{-x\sin\varphi + z\cos\varphi}{t}\right)^2.$$

V naší souřadné soustavě má deska stolu rovnici $z = -r$, tedy tvar stínu získáme, dosadíme-li do rovnice kužele $-r$ za z:

$$(x\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + y^2 = r_0^2 \cdot \left(1 - \frac{-x\sin\varphi - r\cos\varphi}{t}\right)^2.$$

Toto je rovnice druhého stupně, tedy se může jednat o elipsu (speciálně pak kružnici), parabolu nebo hyperbolu.

Protože rovnice je tvaru $y^2 = ax^2 + bx + c$, k určení nám stačí znát koeficient u x^2 (tj. a). Ten určíme snadno:

$$a = r_0^2 \cdot \left(\frac{\sin\varphi}{t}\right)^2 - \cos^2\varphi = \frac{r^2}{t^2 - r^2}\cdot\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi\frac{t^2}{t^2 - r^2} - 1\,.$$

Je-li tento koeficient $a = 0$, jedná se o parabolu, je-li $a < 0$, jde o elipsu, a je-li $a > 0$, jedná se o hyperbolu.

Podobně jako u zdroje v nekonečné vzdálenosti, existuje i zde limitní případ, kdy vrhá stín pouze bod, kterým se koule dotýká stolu, a to v případě, že zdroj leží na stole.

Tibor, Martin K. & Jirka

Výsledková listina po 7. sérii

			Úlohy									
Pořadí	**Jméno**	$\sum_{-1}$	**t1**	**t2**	**t3**	**t5**	**t7**	**r1**	**r2**	**r3**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Štec	179				18		2	3	2	25	134
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Studničná	70	3	6		5					14	70
3.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Demín	234					8	2	0		10	68
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Rozlívková	83									0	60
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Olšina	55				10					10	55
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Demín	53					8	1	4	1	14	53
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Chvátal	70									0	45
8.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Tibor Vansa	307									0	44
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Růžek	43									0	43
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jiří Danihelka	42					2				2	42
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Klimošová	39		6							6	39
12.–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Stanislav Basovník	64									0	34
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Vozdecký	34				1					1	34
14.–15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Helena Kubátová	43									0	26
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková	26									0	26
16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar	25	3		1						4	25
17.–18.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Bališ	82						1	0	0	1	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojta Kubáň	25									0	20
19.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Dana Beránková	77									0	18
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Gulaš	17						2			2	17
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Malá	15									0	15
22.–24.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Šikulová	30									0	14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Darina Šuglová	14						1	1	1	3	14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vladimír Vinařský	14									0	14
25.–26.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Vašek Cviček	208									0	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Kusák	13									0	13
27.–29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Pavlovský	37									0	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Rieger	12									0	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Dungl	12									0	12
30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Honzl	11									0	11
31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jindra Soukup	10								2	2	10
32.–33.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Babováková	34									0	8
	Marián Galovič	8									0	8
34.–35.	Monika Babjarová	7									0	7
	Tomáš Gavenčiak	7									0	7
36.–39.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Špiřík	33									0	6
	Jan Vrba	6									0	6
	Lucie Phamová	6									0	6
	Zuzana Králová	6									0	6

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy t1	t2	t3	t5	t7	r1	r2	r3	$\sum_0$	$\sum_1$
40.–42.	Marek Ovčáček	5									0	5
	Monika Martinisková	5									0	5
	Pavla Grubhofferová	5									0	5
43.–46.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Luboš Uličný	17									0	4
	Jan Bulánek	4									0	4
	Vojtěch Krejčiřík	4									0	4
	Štěpánka Mohylová	4									0	4
47.	Jan Kaštil	3									0	3
48.–51.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Svobodová	30						1			1	2
	Richard Bobek	3									0	2
	Petra Guhlová	2									0	2
	Vendula Dvořáková	2									0	2
52.–55.	Michal Rychnovský	5									0	1
	Michal Kočař	1									0	1
	Michal Matějů	1							0	0	0	1
	Zuzana Míčová	1									0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Výsledková listina IX. ročníku

Pořadí	Jméno	Série 1	2	3	4	5	Celkem
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Štec	13	63		33	25	134
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Studničná	24	8	12	12	14	70
3.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Demín	19	18	13	8	10	68
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Rozlívková	20	12	14	14		60
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Olšina	13		23	9	10	55
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Demín	7	15	9	8	14	53
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Chvátal	18		13	14		45
8.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Tibor Vansa	23	8	6	7		44
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Růžek	17	10	7	9		43
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jiří Danihelka	17	9	9	5	2	42
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Klimošová	5	7	10	11	6	39
12.–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Stanislav Basovník	8		8	18		34
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Vozdecký	13	8	8	4	1	34
14.–15.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Helena Kubátová	9	13		4		26
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková			10	16		26
16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar			13	8	4	25
17.–18.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Bališ	12		6	1	1	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojta Kubáň	8		4	8		20
19.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Dana Beránková	10		6	2		18
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Gulaš	6	7		2	2	17
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Malá	7		6	2		15
22.–24.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michaela Šikulová	6			8		14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Darina Šuglová				11	3	14
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vladimír Vinařský	5		9			14
25.–26.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Vašek Cviček	13					13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Kusák	4			9		13
27.–29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Pavlovský	12					12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Rieger			5	7		12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Dungl	5			7		12
30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Honzl	11					11
31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jindra Soukup		8			2	10
32.–33.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Babováková	1			7		8
	Marián Galovič	8					8
34.–35.	Monika Babjarová	3		4			7
	Tomáš Gavenčiak	7					7
36.–39.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Špiřík	6					6
	Jan Vrba	1			5		6
	Lucie Phamová	4		2			6
	Zuzana Králová	6					6

Pořadí	Jméno	Série 1	2	3	4	5	Celkem
40.–42.	Marek Ovčáček	5					5
	Monika Martinisková	2		1	2		5
	Pavla Grubhofferová	3			2		5
43.–46.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Luboš Uličný				4		4
	Jan Bulánek	4					4
	Vojtěch Krejčiřík	4					4
	Štěpánka Mohylová	4					4
47.	Jan Kaštil	1	2				3
48.–51.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Svobodová	1		0		1	2
	Richard Bobek			2			2
	Petra Guhlová	2					2
	Vendula Dvořáková	2					2
52.–55.	Michal Rychnovský	1					1
	Michal Kočař	1					1
	Michal Matějů			1		0	1
	Zuzana Míčová	1					1

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.