M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník IX číslo 6

Uzávěrka témat 31. 7. 2003

Milí řešitelé,

devátý ročník se blíží ke konci, takže do výše uvedeného termínu ještě můžete poslat své poslední příspěvky k tématům a poté bude vydáno a rozesláno závěrečné, sedmé, číslo tohoto ročníku.

Redakce

Zadání úloh

Pro ty, kteří mají o prázdninách ještě náladu přemýšlet o matematice, tu máme zadání poslední úlohy tohoto ročníku.

Úloha 6.1 – Trojúhelník II (5b)

Vyřešte úlohu 5.1 konstrukčně, tj. pouze použitím pravítka a kružítka. Pro ty z vás, kteří zadání už zapomněli, jej zopakujme:

Mějme trojúhelník ABC s délkami stran $|BC| = 3$, $|AC| = 4$ a $|AB| = 5$. Na úsečku AC umístíme bod D tak, aby kružnice vepsané trojúhelníkům BCD a BDA měly stejný poloměr. Najděte velikost poloměru těchto kružnic.

Řešení témat

Téma 1 – Mise na Mars

Redakciu teší množstvo riešení, ktoré nám neustále zasielate. Prosíme vás ale, aby ste si prečítali staršie príspevky. Mnoho vašich nápadov sa neustále opakuje. V prípade, že zasielate prehľadový článok, člente ho dostatočne prehľadne a rozlišujte myšlienky, ktoré už boli publikované a ktoré ešte nie.

Orbitální dělo

Mgr.^{MM} Michal Růžek

Reaguji na poznámku od *Mgr.^{MM} Jozefa Cmara*. Skutečnost, že dělem lze uvádět předměty na různé balistické dráhy je nezpochybnitelná. Při určité hlavňové rychlosti lze dosáhnout i toho, že projektil již nikdy nespadne, bude donekonečna obíhat po oběžné dráze okolo Země. Tato možnost fascinovala mnohé myslitele v dobách minulých. *Isaac Newton* se ve svých myšlenkových pokusech zaobíral též možností, že se vystřelený projektil navždy usídlí na oběžné dráze. *Jules Verne* pak popularizoval problém svým románem o výpravě na Měsíc. Dodnes se uvádí v mnoha učebnicích fyziky omyly, kterých se při popisu dopustil. V době meziválečné se skupina německých raketových fyziků jako *Oberth* a *von Braun* též zabývala myšlenkou opravení Verneova projektu v souladu s moderními znalostmi. Jejich projekt připouštěl možný úspěch tohoto děla, ale byl spíše teoretický, prakticky těžko proveditelný.

Na druhou stranu myšlenka vystřelování vesmírných projektilů není úplně zcestná. V 50. a 60. letech se díky úsilí *Dr. Bulla*[1] uskutečnilo několik projektů nazvaných HARP (High Altitude Research Program), kdy děla sloužila k vystřelování projektilů do výše 100 až 200 km. Není třeba příliš zdůrazňovat, že se nejednalo o žádné těžké projektily (jejich hmotnost se pohybovala převážně mezi 10 a 30 kg). Nejčastěji byly tyto projektily používány jako atmosférické sondy pro měření ve vrchních částech atmosféry.

V našem případě bychom ale potřebovali, aby vystřelený projektil nespadl zpátky na zem jako projektil HARP, nýbrž aby zůstal na oběžné dráze. K tomu je ale zapotřebí o mnoho větší energie a rychlost v ústí hlavně.

Abychom přemístili předmět o hmotnosti m do výšky h nad zemský povrch, musíme mu udělit takovou kinetickou energii E_{k}, aby se rovnala součtu práce (změně potenciální energie E_{p}) vykonané při přemístění předmětu o hmotnosti m na vyšší hladinu a kinetické energie, kterou má na této vyšší dráze:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{k0}} &= \frac{1}{2} m v_0^2 \,, \\ E_{\mathrm{k1}} &= \frac{1}{2} m v_1^2 \,, \\ W &= \Delta E_{\mathrm{p}} = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \,, \\ E_{\mathrm{k0}} &= \Delta E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k1}} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Z těchto rovnic jsme schopni vyjádřit hledaný vztah pro počáteční rychlost v oblasti hlavně v_0

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{1}{2} v_1^2 + \kappa M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \right)} \,. \tag{2}$$

[1] Dr. Bull měl pohnutý osud. Celý život zasvětil dalekonosným kanónům. Po odchodu z USA se snažil prosadit v JAR a posléze se věnoval stavbě gigantického tzv. Babylonského děla, kterým se chtěl na přelomu 80. a 90. let vyzbrojit Irák. Jeho činnost ale byla trnem v oku Izraeli, který ho opakovaně vyzýval, aby zanechal práce na dělu. Když odmítl, byl v roce 1990 zavražděn agenty Mosadu.

Zde je R poloměr a M hmotnost Země. Rychlost na oběžné dráze (kruhové) se určí, jak naznačil *Mgr.*[MM] *Jan Olšina* a jiní dříve:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}}\,. \tag{3}$$

Jak vyplývá ze vzorce (2) nezáleží rychlost potřebná k vystřelení tělesa na oběžnou dráhu na hmotnosti tělesa. Například pro dráhu ve výšce 200 km (což je nejmenší výška, kterou lze považovat za vhodnou pro vystřelování vesmírných těles) činí tato rychlost 8 040 m s^{-1}. Doposud nejlepší zařízení HARP vystřelovala projektily rychlostí okolo 1 650 m s^{-1}. Pravděpodobně se nenajde zastánce lidskou osádkou obývaného projektilu. Vždyť dělo HARP (dlouhé 16,8 m) urychlovalo projektily průměrným zrychlením 81 000 m s^{-2}. Je diskutabilní jaké přetížení snesou přístroje, ale není pochyby o tom, že takové přetížení by žádný živý organismus nevydržel. Ani případné prodloužení hlavně (bylo by tak jako tak nutné) by situaci příliš neulehčilo. Pokud je délka hlavně d, pak:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}at^2\,, \\ t &= \frac{v_0}{a}\,, \\ d &= \frac{v_0^2}{2a}\,, \quad \text{tedy} \quad a = \frac{v_0^2}{2d}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Pro hlaveň délky 200 m a rychlosti 8 040 m s^{-1} můžeme odhadovat přibližné (ale nejmenší možné v daném případě) průměrné zrychlení 160 000 m s^{-2}. To je úctyhodná hodnota. Je otázkou, do jaké míry by se podařilo vyprodukovat účinný pohonný prostředek, který by poskytoval takové zrychlení. Velice ožehavá je i otázka teplot vznikajících při odpalu, určitě se nebude jednat o zanedbatelné hodnoty. Na druhou stranu má vystřelování do kosmu i pozitivní hlediska. Především je to nízká cena a možnost vysílat velké množství sond za každého počasí. Právě tak se ale zdá nepravděpodobné, že by šlo dělem v blízké budoucnosti vystřelovat tunová závaží na oběžnou dráhu. K vystřelení tunového tělesa na kruhovou dráhu ve výšce 200 km je zapotřebí 32 GJ energie, která se musí uvolnit během několika setin sekundy. Například pro oněch 0,05 s dostávám výkon 0,65 TW. Příkon bude pochopitelně mnohem větší, může dosahovat i 2 TW. Zatím nejsilnější sedmipalcové dělo HARP 7-1 mělo výkon přibližně 1,8 GW.

Pozn. red.: Článok sa redakcii veľmi páčil, najmä po stránke zrozumiteľnosti je veľmi kvalitný. Myšlienka orbitálneho dela je značne stará, bolo postavených niekoľko experimentálnych prototypov, ale žiaden z nich zatiaľ nebol nasadený do bežnej prevádzky. Uvidíme, či orbitálne delo je skutočne ten správny spôsob, ako posielať materiál na obežnú dráhu.

Napriek tomu si dovoľujeme upozorniť na to, že rovnice (1) a (2) nie sú celkom presné. Autor nezobral do úvahy odpor vzduchu. Riešenie sa tým diametrálne zmení, za istých podmienok vystrelené teleso dokonca zhorí v atmosfére *(minimálna potrebná rýchlosť je 5–10 km/s v závislosti na materiále). Redakciu poteší, ak niekto zahrnie do pohybových rovníc (1) aj prácu odporových síl a spočíta podmienky, za ktorých projektil prežije let atmosférou.*

Nekonečný príbeh

Doc.MM Tomáš Štec

Výpočet synodickej obežnej doby

Ak P_1 je obežná doba jednej planéty a P_2 druhej, je pri pohľade zo Slnka denný rozdiel ich elongácie $(360°/P_1 - 360°/P_2)$. Na dosiahnutie jedného synodického obehu potrebujeme, aby tento rozdiel dosiahol 360° za dobu synodického obehu S, teda

$$S\left(\frac{360°}{P_1} - \frac{360°}{P_2}\right) = 360°\,,$$

z čoho po úprave dostaneme

$$S = \frac{1}{\dfrac{1}{P_1} - \dfrac{1}{P_2}}\,, \qquad (1)$$

kde P_1 a P_2 vyberáme tak, aby platilo $P_1 \leq P_2$.

Pozn. red.: Synodická doba je čas medzi dvoma opozíciami (konjunkciami) toho istého telesa.

Autor sa ďalej zamýšľa nad výpočtom polohy Marsu na pozemskej oblohe v čase štartu rakety, resp. polohy Zeme v okamihu štartu z Marsu. Jeho úvahy nad uhlovou vzdialenosťou od Slnka boli bohužiaľ scestné.

Gravitačný prak

Ako je to s využitím Mesiaca a Venuše na nabratie rýchlosti gravitačným prakom? Pri letoch k Venuši musíme prekročiť druhú kozmickú rýchlosť (aby sme sa odpútali od Zeme), teda nám to veľkú úsporu paliva neprinesie, zato čas letu sa podstatne predĺži.

Mesiac sa dá dosiahnuť už rýchlosťou menšou ako druhá kozmická rýchlosť (na obežnej dráhe okolo Zeme s veľkou excentricitou) a ďalší rýchlostný zisk závisí iba od toho, ako blízko sme ochotní preletieť nad mesačným povrchom.[*1] Problém je v presnosti. Pre takýto gravitačný katapult budú koridory široké iba niekoľko kilometrov. (Čo sa ale ukázalo ako dosť pre sondu Voyager 2, ktorá ho úspešne využila na let od Jupitera k Saturnu, od Saturnu k Uránu a od Uránu k Neptúnu.)[*2]

Mesiac nám môže pri dostatočne tesnom prelete „poza“ neho dodať celkom slušné množstvo kinetickej energie v potrebnom smere (teda v smere k Marsu). Rovnaké množstvo kinetickej energie síce aj sám stratí, ale to nie je vďaka nepomeru hmotností zaujímavé. Naopak, ak by sme (trebárs pri ceste späť) preleteli tesne „popred“ Mesiac, ten by nás k sebe pritiahol a zároveň spomalil. Stojí za zváženie.

Štartujeme v perihéliu alebo aféliu?

K planéte je výhodnejšie štartovať tak, aby sme ju dostihli práve keď bude v perihéliu. Potom sa nám budú štartovacie okná otvárať vždy po spoločnom násobku synodickej a anomalistickej obežnej doby.[*3] Pre také Pluto to bude ale výhodné (aj keď nie úplne najvýhodnejšie) vždy v období jeho prechodu perihéliom (aj 10 až 20 rokov okolo prechodu perihéliom). Pri lete k Venuši sa na takéto detaily vykašleme, pretože obieha po temer kruhovej dráhe.

Dráha Marsu je na rozhraní. Ja obvykle pri výpočte štartovacích okien zmenu vzdialenosti zanedbávam (rátam so strednou vzdialenosťou). Pre „ľahké“ sondy to veľký vplyv nemá, treba ale uvažovať, že vzhľadom na veľkosť lode s ľudskou posádkou by prílet k Marsu v perihéliu znamenal značnú úsporu paliva.

Pri odlete za 450 dní by bol Mars od Slnka ďalej, ako je jeho stredná vzdialenosť. Ak by sme prileteli o niečo skôr, budeme pri odlete blízko afélia, čo je dosť nevýhodné. Preto vychádza prílet zhruba ku koncu perihéliovej časti obežnej dráhy a odlet pri jej začiatku ako najlepšie riešenie. Bolo by to síce na Marse strávené zimné obdobie, ale to má aj svoje výhody. Ak si správne pamätám, tak najhoršie počasie na Marse je v jarnom období, kedy nastáva najviac prachových búrok.

Pristávací modul

Čo sa týka pristávacieho modulu, tak porovnanie, ktoré použila *Dr.*MM *Zuzana Rozlívková* (s modulom Apollo) je nemiestne. Pristávací modul Apollo bol určený na misiu trvajúcu asi týždeň. Tomu zodpovedali zásoby vzduchu, vody, jedla a ďalšieho nutného vybavenia. Určený bol iba pre troch astronautov.

Zatiaľ čo na Mesiaci je gravitačné zrýchlenie zhruba šestinou pozemského, na Marse je to už jedna tretina, teda dvakrát viac. Ďalej súdružka nesprávne predpokladala, že v hmotnosti modulu Apollo 11 je aj vozidlo *Lunar Rover*, lenže to viezli iba expedície Apollo 15, 16 a 17. Na Marse bude potrebné omnoho komplexnejšie vozidlo s pretlakovou kabínou a možnosťou pobytu v jeho vnútri bez skafandra. Keď už som pri skafandri, ten bude musieť byť pre Mars ľahší ako pre Mesiac, keďže bude vážiť dvakrát viac.[*4]

Ďalšia (a asi najvýznamnejšia) vec je, že bol zanedbaný detail v podobe marťanskej atmosféry. Pri povrchu je síce zhruba stokrát redšia ako pozemská, ale aj tak bude spôsobovať problémy pri vstupe. Ako to dopadne, keď sa odflákne tepelná ochrana, nám elegantne predviedol raketoplán Columbia.

Spôsob pristátia

Modul Apollo klesal za stáleho ťahu brzdiaceho motora postupne k povrchu a pred samotným pristátiu sa spomalil na pár metrov za sekundu a dosadol na štyri „tykadlá“. Na Marse sa nám ale bude ohromne hodiť možnosť preletieť sa pred pristátím v atmosfére a po nájdení vhodného miesta aj dosadnúť.[*5]

Na Marse neexistuje vodná hladina (na ktorú pristávali staršie americké lode), naviac po pristátí na ňu je to s opätovným štartom asi najzložitejšie (pokiaľ nemáme ponorku schopnú dosiahnuť únikovú rýchlosť inak ako pomocou atómového výbuchu).*6 Pristátie na pevnú zem je z tohto hľadiska oveľa výhodnejšie. Lenže zasa, pristáť elegantne ako Boeing 747 na linke Paríž–New York na Marse nebude kde, kedže nám tam nebude mať kto vyvalcovať runway. (Ono priemerný Vogon*7 nikdy nevie ...) Teda jediná možnosť je pristáť a zastaviť na pár metroch (rádovo maximálne desiatky), alebo jednoducho pristáť na povrchu kolmo. Je to síce energeticky náročnejšie riešenie, ale na Marse nám pomôže tretinová tiaž, ak už nič iné.

Pristávací modul 2

Pomaly sa nám teda formuje pristávací modul. Veľkosťou sa podobá dopravnému lietadlu, má krídla a trup je tiež tvarovaný ako vztlakové teleso. Pokrytý je tepelnoizolačnou ochrannou vrstvou. Väčšinu vnútorného priestoru zaberajú zásoby paliva*8 na pohyb v atmosfére a návrat k materskej lodi, ktorá do atmosféry nevstupuje. Poháňaný je raketovým motorom, kedže atmosféra Marsu má nielen mizerný tlak, ale aj smiešny obsah kyslíka (0,15 % podľa [1]). To znamená viezť so sebou aj palivo aj okysličovadlo. Z hľadiska spoľahlivosti (kedže motor tohoto modulu je pre misiu životne dôležitý) je najvýhodnejšia samozápalná palivová zmes, z hľadiska výkonu je to kryogénna zmes H_2 a O_2. Voľba paliva závisí aj od perspektívnej možnosti jeho doplnenia na povrchu. Z tohto hľadiska sa určite ľahšie vyrába čistý kyslík a vodík ako uhľovodíky,*9 ktoré sú súčasťou väčšiny samozápalných zmesí. Napokon, kryogénne motory raketoplánov dosahujú veľmi vysokú spoľahlivosť.

Pristávací modul by mal poskytovať priestor pre celú posádku, alebo aspoň pre jej väčšiu časť. Jeho súčasťou by malo byť aj úplne samostatné povrchové vozidlo s ubytovacím priestorom pre dvoch až troch výskumníkov.

Miesto pristátia

Zvolenie miesta pristátia je ďalšia zložitá otázka. Zrejme bude veľa sporov medzi vedcami, ktoré miesto nakoniec vybrať. Práve preto sa bude hodiť modul, ktorý sa bude môcť po Marse presúvať. S ohľadom na piesočné búrky sa vyhneme najstarším častiam Marsu v oblasti Hellas, kedže väčšina veľkých búrok vzniká práve tam. Prvotné miesto pristátia budeme vyberať v rovníkovej oblasti, kedže môžeme očakávať (aspoň na rovine) rovnejší a vhodnejší povrch ako v blízkosti polárnych čiapočiek.

Ďalším faktorom je, že navedenie na polárnu dráhu je (najmä energeticky) náročnejšie ako na rovníkovú a to v oboch smeroch.*10 (Aj pri prílete k Marsu aj pri štarte z povrchu, kedže pri naberaní rovníkovej dráhy si môžeme pomôcť rotáciou planéty.) Naviac pri navádzaní na polárnu dráhu, na ktorej bude materská loď, by sme mohli štartovať len dvakrát denne (keď by naše miesto pristátia prechádzalo rovinou tejto dráhy), zatiaľ čo na rovníkovú dráhu môžeme štartovať hocikedy (a na stretnutie riadiť zmenami výšky). Naviac len pripomínam, že vzájomná zmena rovníkovej a polárnej obežnej dráhy je asi najťažší manéver uskutočniteľný na obežnej dráhe, ktorý sa zatiaľ nikdy neskúšal, keďže neexistovala loď, ktorá by na to niesla motory a palivo.

Denný režim

Ako by mal vyzerať denný režim posádky? Veľkou výhodou je, že marťanský deň sa trvaním veľmi podobá na pozemský, rozdiel 37 minút nehrá žiadnu významnú úlohu. (Dokonca som niekde počul, že ľudia sú naladení na marťanský biorytmus, ale zrejme je to iba nejaký dríst z magazínu o okultizme a nadprirodzených silách.)

6:30	posádka vstáva
6:40	raňajky a osobná hygiena
7:00	ranná kontrola lodných systémov
8:00	začiatok vedeckého programu
13:30	pauza na obed
14:15	následne pokračovanie vedeckého programu
18:30	osobné voľno a prípadné spracovávanie výsledkov
19:30	večera
20:00	osobné voľno
22:45	osobná hygiena, večerná kontrola a upratanie lode, prípadná príprava programu nočnej služby
23:30	večierka (nezabúdajme, že na Marse hodiny dosiahnu až 24:37, naviac kto nebude chcieť spať, bude môcť brať čas po večierke ako pokračovanie osobného voľna)

Tento program je stavaný veľmi veľkoryso, s časom na spánok osem[*11] hodín, čo si kozmonauti pri pobyte na Marse (trvajúcom viac ako 400 dní) určite budú môcť dovoliť. Pre tak dlhý pobyt zároveň navrhujem, aby boli dodržané víkendy a to tak, že osobné voľno by bolo počas nich predĺžené na úkor vedeckých a pracovných programov. Výnimkou zo všetkých týchto plánov sú dlhodobé expedície mimo loď a akékoľvek núdzové situácie. Tento program by vyhovoval aj pre let lode (prípadne počas letu pozvoľna prejsť z dňa trvajúceho 24 hodín a 37 minút na klasický 24hodinový deň, či naopak pri ceste na Mars).

Vedecký program

Počas letu

- Sledovanie vlastností okolitého priestoru,
- hustoty elektromagnetického a korpuskulárneho žiarenia (slnečný vietor),
- slnečnej aktivity,
- útlmu elektromagnetických signálov zo Zeme,
- rozloženia medziplanetárnej hmoty (stretnutia s kozmickým prachom či dokonca väčšími časticami),

- pozorovanie hviezdnej oblohy najmä v oblastiach spektra, ktoré sú silne tlmené zemskou atmosférou (napr. vzdialená infračervená oblasť, navrhujem napr. pozorovania a hľadanie terestrických exoplanét),
- sledovanie známych objektov slnečnej sústavy (planét, asteroidov, komét, mesiacov ...),
- sledovanie gravitačného poľa okolitých telies a ich vplyv na pohyb lode,
- meranie kozmickej radiácie.[2]

Cestou späť naviac pribudnú priebežné pokusy o nájdenie hocičoho, čo by mohlo žiť vo vzorkách marťanskej pôdy. (Kedže jej naberieme zrejme značné množstvo, dokonca možno tony, jej skúmanie na Marse by zabralo zbytočne veľa času potrebného na ďalšie experimenty.)

Na Marse: denný program

- Priamy výskum povrchu a atmosféry, ich zloženia, dokumentácia typov hornín v rôznych hĺbkach,
- hľadanie vody, hľadanie stôp po tečúcej vode,
- hľadanie znakov existujúceho, alebo bývalého života,
- výpravy do „lukratívnych" oblastí ako oblasť kaňonov Valles Marineris, oblasť sopiek Tharsis, najstaršie časti v oblasti Hellas, oblasti južne od rovníka, kde sa pozorovali útvary podobné tým, ktoré na Zemi spôsobuje tečúca voda atď.
- Na týchto miestach zriadiť stále automatické pozorovacie stanice sledujúce počasie a geologické podmienky (napr. marsotrasenia).
- Materská loď preskúma mesiačiky Phobos a Deimos (najlepšie asi samostatnými automatickými pristávacími modulmi).

Na Marse: nočný program

- Sledovanie zakalenia atmosféry a jej pohybov na základe absorpcie svetla hviezd a ich scintilácie.
- Ďalej na rozhraní dňa a noci sledovať postup ochladzovania povrchu a atmosféry.
- Zopár romantických fotiek západov Slnka. ;-)

Menšia úvaha na tému prečo menšie rakety

Je jasné, že to vyzerá nelogicky. Veď s menšími raketami napokon vynesieme na obežnú dráhu oveľa viac zbytočného železa (telá rakiet), máme väčšiu šancu, že nám spadne jedna z kľúčových komponent (pri predpokladanej rovnakej spoľahlivosti) a naviac vzhľadom k obmedzenému počtu kozmodrómov na Zemi

[2] Kým pri Zemi sú kozmonauti pred kozmickým žiarením chránení magnetickým poľom Zeme, v tejto oblasti ich bude chrániť len plášť lode. Okolo Zeme sú prejavom radiácie tzv. *van Allenove pásy*, ktoré ako prvá pozorovala prvá americká družica *Explorer 1*.

a obmedzenému počtu štartov (rozhodne nie jeden štart týždenne) aj oveľa dlhšiu dobu, kým dostaneme loď na obežnú dráhu. Ale kto to kedy riešil menšími raketami?!? Nikto nikdy! Veď aj americký Saturn V aj sovietská N1 boli obrami, ktoré vynášali všetky komponenty pre let k Mesiacu naraz.

ISS je síce vynášaná postupne, ale jej komponenty napĺňajú nosnosť raketoplánov a ruských rakiet Proton. Rusi majú síce silnejšie Energie, ale tie sú dosť nespoľahlivé pre tak významný projekt (a naviac sa do Energie asi aj tak nevopchá viac ako jeden hlavný modul ISS). Takže ako sa zdá, nikto zatiaľ vynášanie komponentov na obežnú dráhu neriešil zbytočne veľkým počtom malých rakiet a zrejme sa to tak riešiť ani nebude, ale jednoducho loď na Mars bude tak veľká, že naraz sa vyniesť nebude dať.

Vplyv tiažového zrýchlenia na štart rakety

Pozn. red.: Vzhľadom na matematické chyby v riešení, redakcia tieto opravila a časť príspevku preformulovala.

Čo sa týka tvrdenia, že s rastúcim g stúpa hmotnosť rakety exponenciálne, má sa to asi takto:

Potrebujeme dosiahnuť aspoň prvú kozmickú rýchlosť. Platí

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}}\,, \tag{1.1}$$

čo sa dá zapísať ako

$$v = \sqrt{gR}\,. \tag{1.2}$$

Ak vydelíme druhé mocniny rýchlostí, vyjde nám, že ich pomer je rovný pomeru gravitačných zrýchlení. Nuž a teraz podmienky pre výpočet rýchlosti. Tu bude celkom dobre vyhovovať *Ciolkovského rovnica* (viď [2])

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{M_\mathrm{p}}{M(t)}\right)\,, \tag{2}$$

kde $v(t)$ rýchlosť rakety v čase t, u je rýchlosť výtokových plynov, M_p štartovacia hmotnosť rakety a $M(t)$ hmotnosť rakety v čase t.

Ak si zoberieme dve rôzne rakety, po odstránení logaritmov a $M(t)$ (predpokladáme, že na konci budú mať rakety bez paliva rovnakú hmotnosť) dostaneme

$$\frac{M_\mathrm{p2}}{M_\mathrm{p1}} = \exp\left(\frac{v_1 - v_2}{u}\right)\,, \tag{3}$$

pričom M_p1 a M_p2 sú štartovacie hmotnosti rakiet.

S využitím rovnice (1.2) dostaneme

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= \sqrt{R}\,(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}) = u\ \ln\left(\frac{M_\mathrm{p2}}{M_\mathrm{p1}}\right)\,,\\ v_1 + v_2 &= \sqrt{R}\,(\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2}) = u\ \ln\left(\frac{M_\mathrm{p1}M_\mathrm{p2}}{M_\mathrm{kon}^2}\right)\,,\\ \Delta g = g_1 - g_2 &= \frac{u^2}{R} \cdot \ln\left(\frac{M_\mathrm{p2}}{M_\mathrm{p1}}\right) \cdot \ln\left(\frac{M_\mathrm{p1}M_\mathrm{p2}}{M_\mathrm{kon}^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Takže je tu pomer štartovacích hmotností a *nie je* exponenciálne závislý od rozdielu gravitačných zrýchlení. Inak hodnoty u sme mohli považovať za rovné vďaka tomu, že predpokladáme v oboch prípadoch raketu s rovnakým motorom (nepredpokladáme, že by jedna raketa mala motorček anihilačný a druhá chemický) a zároveň aj dráhu v rovnakej výške nad planétou.

Marťanské GPS

Keď som minule tvrdil, že GPS by na Marse použiť nešlo, pomýlil som sa vo výške obežnej dráhy družíc. Správne obiehajú vo výške asi 20 200 km (zdroj: mapy od VKÚ Harmanec). To ale nič nemení na tom, že na Marse GPS použiť nepôjde.

Poloha sa bude dať zisťovať, ale iným spôsobom. Už teraz je na obežnej dráhe okolo Marsu niekoľko sond (Mars Odyssey, Mars Global Surveyor) a ďalšie by sa k nim mali pridať už tento rok (NOZOMI apod.).

Pri tak veľkom počte aktívnych zariadení (naviac ešte dve pripravované americké povrchové vozidlá s nosnou sondou a sonda ESA) by mohli mať sondy problém dovolať sa prostredníctvom americkej Deep Space Network domov, teda na Zem. Toto sa spomínalo v súvislosti s otvorením nového komunikačného centra ESA. No a aby som sa vrátil k pôvodnej myšlienke, také veľké množstvo sond bude vedieť poskytnúť pristávaciemu modulu údaje o jeho presnej polohe, aj keď s istým oneskorením. Takže si vlastne postupne okolo Marsu, ako ďalšieho cieľa, budujeme novú variantu GPS.

Literatura:

[**1**] *Kalmančok, D., Pittich, E.,* Obloha na dlani; Obzor; 1981

[**2**] *Hajduk, A., Štohl, J. a kolektiv,* Encyklopédia astronómie; Obzor; Bratislava 1987

Poznámky v texte

**1 Bude to maximálne dvojnásobok obežnej rýchlosti Mesiaca,* 2 km/s. *Vedeli by ste túto hodnotu odvodiť? Ako naopak musíme letieť, aby nás Mesiac spomalil? Ktoré teleso stratí koľko energie a ktoré naopak energiu získa?*

**2 Počiatočná chyba polohy niekoľko metrov vedie po manévri k chybe o mnoho väčšej. S časom táto chyba rastie veľmi rýchlo, bez ohľadu na to, či sme použili gravitačný prak alebo nie. Dráha sondy Voyager 2 bola počas letu mnohokrát mierne korigovaná, práve kôli týmto malým odchylkám od potrebnej rýchlosti a polohy.*

**3 Treba si uvedomiť, že dĺžka synodickej doby* P_{syn} *a anomalistickej doby* P_{a} *nie sú prirodzené, ale reálne čísla. Preto taký pojem ako najmenší spoločný násobok prakticky nemá význam. Hľadáme také násobky periód* m, n, *aby rozdiel* $mP_{\mathrm{syn}} - nP_{\mathrm{a}}$ *bol oveľa menší ako* P_{syn} *a* P_{a}.

**4 Domnievam sa, že tento názor nie je úplne správny. Skafandre nemajú príliš veľkú hmotnosť, na Marse by sa v nich dalo chodiť celkom slušne. Čo je ale dôležitejšie, marťanské skafandre budú musieť byť omnoho pohodlnejšie* *a obratnejšie, ako boli skafandre misií Apollo. Smiešne poskakovanie na povrchu určite nezvýši množstvo práce, ktoré kozmonauti vykonajú.*

*5 *Domnievam sa, že miesto pristátia bude zvolené dávno dopredu (ešte skôr, ako loď odštartuje zo Zeme) na základe marťanských máp získaných pomocou kozmických sond.*

*6 *V súčasnej dobe existujú projekty vypúšťania rakiet zo špeciálne upravených lodí.*

*7 *Narážka na najneprívetivejší národ v celej Galaxii v kultovej novele Douglasa Adamsa – Stopárov sprievodca po Galaxii –, ktorý zrovnal Zem so zemou pri výstavbe transgalaktickej diaľnice.*

*8 *Redakcia sa domnieva, že výroba paliva na povrchu Marsu zlacní misiu niekoľkonásobne, ako v ďalšom správne podotýka Mgr.^MM Karla Procházková. Pristávací modul naberie palivo na povrchu, pri strete s materskou loďou a opätovnom návrate potrebuje neporovnateľne menej – iba na manévrovanie.*

*9 *Uhľovodíky sa takmer výhradne vyrábajú z ropy, o ktorej sa predpokladá, že je pozostatkom prastarých biologických materiálov – uhynutých tvorov.*

*10 *Povedal by som, že to je najdôležitejší argument, prečo by mal modul štartovať z rovníkovej oblasti. Všetky ostatné sú voči nemu nepodstatné.*

*11 *Skutočne osem?! :-)*

Shrnutí dosavadních vědomostí

Mgr.MM Karla Procházková

Shrnula bych různé body plánované mise, na které by se měl brát zřetel a o kterých si myslím, že bych je mohla trochu doplnit.

Cena

V nynější době nejožehavější téma. Jelikož k výpravě nenutí politické důvody, které by ji velmi zlevnily, musí být cena na její uskutečnění co nejnižší, aby obstála vedle velkých válečných výdajů. To se podařilo Zubrinovi, který snížil cenu letu na 40 mld. dolarů (místo 400 mld. dolarů, které uvedla NASA v roce 1989). V této ceně jsou započítány i náklady na eventuální vývoj nových technologií (jaderné, elektrické motory, ...).

Způsob dopravy

Zase bych se vrátila ke Zubrinovi.[*12] Udělala bych ale několik změn. On počítá s vysláním dvou nákladních lodí na výrobu paliva na Marsu o hmotnosti asi 40 tun a poté pilotovanou loď. Myslím, že není vhodné spoléhat se na to, že všechno potřebné palivo bude vyrobeno na Marsu. Mnohem lepší by bylo mít s sebou nějakou pojistku. Například vyslat napřed plně natankovanou loď (cca 75 tun), která by se zachytila na oběžné dráze (ERV – Earth Return Vehicle). Po ní by již letěla i loď na výrobnu paliva (66 tun – kapalný vodík, jaderný reaktor na podvozku a jídlo na dobu pobytu, mohla by vyrábět i vodu a kyslík pro posádku), která by přistála na Marsu a tam začala vyrábět. Po něm by následovala pilotovaná loď (cca. 38 tun, měla by mít prostor pro automatické přístroje a sondy, obytný modul a rover), která by přistála někde v blízkosti landeru na výrobu paliva. Pak již není problém, aby letěly na oběžnou dráhu další nákladní lodě a výrobny paliva, což umožní i start dalších posádek. Dobré by bylo, aby s předcházející posádkou vždy letěly již nákladní lodě a výrobna paliva pro následující posádku. Všechny lety by bylo nejlepší podnikat přímo ze Země – sníží se tím mnohokrát cena i náročnost (přece jen montáž na oběžné dráze není nejpříjemnější). Bohužel se tím omezí tvar lodí, ale s tím se nedá nic dělat. Samozřejmě, že by se dalo startovat i z vyšší oběžné dráhy Země, kam by byl náklad dopraven pomocí jaderných[*13] (iontových) motorů, a tím by se snížily nároky jednak na tvar, a pak i na pohonné látky.

Také je třeba dvakrát větší rozsah rychlostí než u projektu Apollo. Loď bude muset zrychlovat a zpomalovat při vstupu do atmosféry Marsu o 5 km/s. Bude nutné zrychlit o 3,5 km/s, abychom se dostali na oběžnou dráhu Marsu. Pak o 1,5 km/s při navedení na dráhu k Zemi a pak o 3,5 km/s při brzdění k Zemi. Celkem tedy bude muset využít rychlostí v rozsahu 20 km/s.[*14]

Hohmannova elipsa je sice nejekonomičtější způsob dopravy se současnými (chemickými) raketovými motory, ale tento způsob také trvá nejdéle. Proto by bylo mnohem luxusnější využít rychlejší dráhu po hyperbole[*15] s pomocí výkonnějších jaderných motorů. Ale to snad až pro další posádky.

Palivo

Jaderný reaktor přivezený lodí by mohl být odvezen do bezpečné vzdálenosti (do prohlubně), spojen kabelem*[16] s landerem a aktivován automatickým zařízením. Pak by začal z místní atmosféry pomocí kompresorů a kapalného vodíku vyrábět palivo pro ERV (metan) a vodu, z ní pak kyslík*[17] (rovněž pro pohon) a znovu vodík pro další výrobu paliva (za rok zařízení vyrobí přes 100 tun metanu a kapalného kyslíku). Toto palivo sice nebude stejně účinné jako směs vodíku a kyslíku, ale loď dokáže odstartovat z Marsu díky slabší gravitaci (asi třetina pozemské).

Přistání

Bylo by dobré použít napřed aerobraking (brzdění o atmosféru), jak jsem již jednou navrhovala. Poté by se rozvinuly padáky, jako tomu bylo u Mars Pathfinder. Kolem sekce, která by přistávala na povrchu, by se nafoukly obrovské airbagy. Také by byly zapáleny rakety, které by dopad brzdily. Samozřejmě, že by nestačila ochrana, která byla užita u Pathfinderu, jelikož lidská posádka je přece jen podstatnější a hlavně celý přistávací modul by vážil mnohem více. Muselo by se použít nějaké speciální vyztužení (více vrstev) a dokonalý ochranný systém. Také by samozřejmě museli být astronauti perfektně upevněni v sedadlech a vypolstrováni.*[18] Přece jen dopad nemůže být naprosto přesně naplánován, protože neznáme povrch Marsu dokonale. Po dosednutí a uklidnění lodi by mohli astronauti vystoupit a začít s experimenty.

Umělá gravitace

Je více možností, jak dosáhnout umělé gravitace:

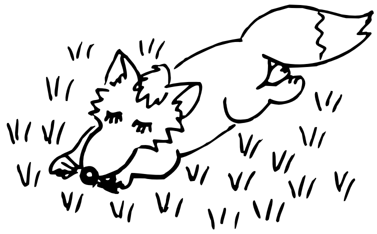
1. Při přeletu je horní stupeň (který loď navedl na dráhu k Marsu) spojen 1 500 m dlouhým lanem s lodí a rotací soustavy je vyvolána umělá gravitace (u Marsu je pak vše rozpojeno).*[19]
2. Středová kabina, která by rotovala, a vytvářela tak pro posádku umělou gravitaci. Samozřejmě by to bylo výhodné i z toho důvodu, že by tato kabina mohla být zároveň odstíněna proti kosmickému záření.

Minimálně zde ale bude potřebná nějaká centrifuga na posílení ochablých svalů a různé posilovací přístroje. Je to nepostradatelné, protože po déle než dva roky trvající misi by se nebyli schopni ochablí astronauti vrátit na Zemi. To ale není největší problém, protože na Zemi už jsou specialisté, kteří jsou schopni jim pomoci. Horší je, že při příletu na Mars musí být také v dobré kondici. Takže i při pobytu na Marsu budou muset posilovat, aby jim kosti a svaly příliš neochably.

Posádka

Je jisté, že posádka musí být minimálně čtyřčlenná (velitel, zástupce velitele, lékař a snad nějaký zástupce lékaře), ale přece jen by bylo lepší zůstat u počtu šesti. S ponorkovou nemocí by neměl být až takový problém, ale přece jen po šesti měsících na Miru byli kosmonauti trochu zdeptaní – snad je bude na Marsu povzbuzovat jejich poslání.

Spánek během cesty



Spánek je nepostradatelnou součástí plánů, i když se na něj mnohdy zapomíná. Již projekt Gemini měl za úkol zjistit nejlepší možnosti naplánování spánku posádky. Nejlepší by bylo, kdyby posádka spala vždy ve stejnou dobu, aby se vzájemně ze spánku nerušili. Samozřejmě, že by bylo vhodné zařídit i nějaké zastínění okének, aby byla na lodi co největší tma.

Experimenty na Marsu

Posláním mise bude samozřejmě podniknout co nejvíce experimentů. Minimálně bude muset: provádět vizuální pozorování a průzkum okolí přistání, sbírat vzorky hornin a atmosféry (ze vzdálenosti až desítek kilometrů), rozmisťovat na povrchu automatické přístroje, provádět hlubinné geologické vrty a odběr hloubkových vzorků, provádět aktivní seismickou sondáž pomocí malých náloží a samozřejmě se pokusit o nalezení možného života. Také by se zde dala vybudovat malá elektrárna, menší skleník s rostlinami, prozkoumat dostupnost zdrojů surovin a vody. Dále se v okolí budou rozmisťovat roboti a přístroje pro výzkum. Je to všechno nezbytné, pokud plánujeme další návštěvy Marsu a snad i budoucí trvalé obydlení.

Voda a suroviny na Marsu

Voda bude nezbytnou součástí pobytu astronautů na Marsu. Bude dovezena spolu s palivem. Ale k delšímu přežívání na planetě by bylo mnohem vhodnější začít využívat místní zdroje. Voda na povrchu nemůže existovat kvůli nízkému tlaku. Tekutá může být při tlaku nad 61 kPa a teplotě mezi 0,01 ℃ a bodem varu. Na Marsu je průměrný tlak necelých 610 Pa. Při tak nízkém tlaku bude na Marsu pouze led a sníh nebo pára. Pro budoucnost je nutné vytvořit nejprve atmosféru, tím pozvednout hodnotu tlaku, a pak až uvažovat o řekách a jezerech.

A kde by mohla být voda nyní? Mars má horké jádro. V hloubce 5–10 km (na pólech) je dostatečný tlak i teplota, takže by zde mohla být vrstva tekuté vody zhruba 50–500 m silná. Při geotermální aktivitě by mohla vystupovat až k povrchu a snad někde by mohla být i pouhých 500 m pod povrchem. Také permafrost by mohl být vytvořen až z poloviny z ledu. Polární čepičky mají tloušťku nejméně 2,5 km – led z nich může tvořit maximálně jeden objem grónského ledovce. Bohužel většina obrovských zásob vody, které na Marsu kdysi byly (jak dokládají obrovská řečiště a zbytky po možných oceánech), se vypařila do vesmíru. V atmosféře je jen nepatrné množství vodních par. Ranní mlhy se tvoří v noci, kdy voda v atmosféře mrzne a tvoří mračna složená z krystalků.

Snad se nám podaří zase někdy spatřit Mars ve své bývalé kráse někdy před 4–3,5 miliard let, kdy tu tekla voda a tvořila ohromná řečiště a vznikaly zde katastrofické záplavy.

Stálá posádka na Marsu

Pokud se již jednou na Mars dostane posádka lodi, není již tak velký problém vytvořit zde stálou posádku.*[20] Po jejím doletu by se mohl vytvořit například nafouknutím modulu jakýsi skleník (byl by asi na 800 dní pobytu). Tento prvotní skleník by zajistil možnost návratu. Život na Marsu není takovým problémem jako život v kosmu, protože zde je přece jenom možnost využití místních surovin (vody, hornin, ...). Dalo by se každé 2–3 roky vypouštět jednu expedici.

Prach

Marťanský prach by mohl velmi znepříjemnit celou misi. Díky větru se zde tvoří velké prašné bouře. Prach je jemný a dostane se do každé štěrbiny. Mohly by se zadrhnout kovové klouby skafandrů, spoje náprav, zahltit průzory a přední skla vozítek, ... A tak bude třeba mít všude dokonale chráněná ložiska. A také snad vyvinout nové skafandry, které by se obešly bez kovových kloubů. Bylo by možná vhodné postříkat okolí příletu nějakou látkou (s podobnými vlastnostmi, jako má voda), která by prach usadila (jako se to dělá na tenisových dvorcích). Prach by se pak při chůzi nevířil. Alespoň jedna pozitivní zpráva – díky nízkému tlaku (1/1000 pozemského) nejsou vichřice zuřící silou 300 km/h nebezpečné, protože mají sílu jako vítr o rychlosti 45–60 km/h.

Atmosféra

Uvažuje se o jejím zhuštění přidáním skleníkových plynů. Daly by se zde vysadit fotosyntetizující rostliny, kterým by se napřed dodával kyslík, a postupně by si ho začaly vytvářet samy. Kdysi byla atmosféra na Marsu hustší, než je tomu dnes. Tehdy byla voda na povrchu patrně velice rozšířena. Ale hlavní součást atmosféry, kysličník uhličitý, se rozpouštěl ve vodě, reagoval tam s křemičitany a vytvářel uhličitany. Tak se ztrácel z atmosféry a atmosféra se ztenčovala a tlak klesl pod kritickou hodnotu, při kterém nemůže na povrchu existovat voda v tekutém stavu. To samé se děje i na Zemi, ale aktivní sopky oxid uhličitý „recyklují“ a dodávají zpět do atmosféry (a my máme momentálně opačný problém – příliš mnoho CO_2 v atmosféře).

Život a organismy na Marsu

Už dávno jsme opustili pohádkovou myšlenku zelených Marťanů, kteří pobíhají po „rudé“ planetě (která ve skutečnosti není ani trochu rudá). Ale co když zde existují nějaké mikroorganismy? Ze zkušeností na Zemi víme, že život je skutečně přizpůsobivý a nečiní mu problémy uchytit se kdekoliv. A tak snad i zde najdeme alespoň malou známku čehosi podobného živému organismu. Byl by to pro člověka neskutečný objev. Musíme hlavně dát pozor, abychom náhodou neobjevili například pozemské viry, které se sem někdy v minulosti dostaly. Nebezpečí přenosu je skutečně obrovské.

Navigace

Nebudeme sice používat GPS, ale i tak je navigace vcelku „jednoduchá“. Za použití přídavných iontových motorů, které by loď řídily, nebo i hlavního jaderného motoru, nebude navigace snad až takovým problémem. Největším úskalím zůstávají kosmická tělesa, která by mohla ohrozit loď.

Dorozumívání

Pro posádku bude jistě dorozumívání se Zemí klíčovou věcí. Budou se k němu upínat, jelikož jiné spojení s ostatními lidmi nebudou mít. Jakékoli přerušení by mohlo ohrozit psychiku astronautů. Signál na Mars doletí za 20 minut, a tak bude muset posádka pracovat samostatně a rozhodovat se dle svého uvážení okamžitě.

Kosmické záření a další nebezpečí vesmíru

Kosmické paprsky by mohly být zčásti odstíněny speciálními materiály, které zabrání jejich proniknutí do lodi. Odstínění by mohl zajistit např. supravodivý elektromagnet.[*21] Uprostřed lodi by mohla být odstíněná kabina. Toto řešení se však bude muset před letem ještě ozkoušet.

I na Marsu budou astronauti vystaveni přibližně dvakrát větší radiaci než na Zemi.

Kromě kosmického záření je zde i problém mikrometeoroidů. Musel by být nasazen naprosto perfektní detekční systém, který by posádku vždy včas informoval o blížícím se nebezpečí. I kamínek o velikosti 1 cm při rychlosti 50 km/s může způsobit obrovské škody a fiasko celé mise.

Návrat

Po 600 dnech na povrchu Marsu (s několika vyjížďkami do vzdálenosti až 500 km a trvajícími až 10 dní) by posádka odstartovala v lodi, která si již za dobu pobytu vyrobila dostatečné množství paliva. Na oběžné dráze Marsu se spojí s natankovanou mateřskou lodí, společně přejdou na dráhu k Zemi, u Země se může oddělit palivová sekce a posádka přistane na Zemi jako Apollo.[*22]

Karanténa

Bude nutná vysoká opatrnost při příchodu na Mars. Posádka musí být bez jakýchkoli bakterií, skafandry musí být perfektně dezinfikovány … Nechceme přece, abychom při výzkumu, jestli na Marsu kdy existoval život, objevili později pouze pozemské organismy.

Při příletu bude nutná přísná karanténa posádky i materiálů, které s sebou přiveze. Nejlepší by bylo zavřít posádku na ISS, ale z praktických důvodů možná bude vhodnější uzavřít ji až přímo na Zemi. Pak je ale samozřejmě nutné, aby byl systém ochrany dokonalý. Zatím se vše testuje. Nesmí to dopadnout jako se vzorky z Měsíce. Kdyby obsahovaly jakékoli organismy, klidně se mohly rozutéct po Zemi. Testovací stanice se nachází blízko Houstonu. Je jisté, že vše musí proudit z méně nebezpečné zóny do zóny s větším nebezpečím. Vše se dezinfikuje pomocí lyzolu. I voda, která vytéká, je s lyzolem mísena a prochází varem. Další problém je zabezpečení přístupu vědců k organismům. Nejde přece jen o to je zničit, ale také se snažit je poznat.

Význam této mise v současnosti

Země se momentálně nachází v krizi nedostatku dopravních lodí. Máme pouze Sojuzy (staré 36 let) a raketoplány (4 kusy, staré 25 let). A ještě je nutné dokončit ISS. Před tím si můžeme nechat o cestě na Mars jenom zdát. A aby toho nebylo málo, havaruje Columbia, která měla problémy s tepelnou ochranou již při prvních zkouškách. Teď se nachází Amerika ve velkém problému. Nové raketoplány vyvíjet nechce, není na to dostatek financí, a zastavit veškeré lety se jí také příliš nelíbí. A tak i přes havárii pravděpodobně opraví Columbii a bude dál používat své ošoupané vybavení.[*23]

V technickém uvažování o této misi je otázka lidské posádky přebytečná, avšak ve skutečnosti je jedna z nejdůležitějších. V mnoha věcech může člověka na Marsu nahradit automatický robot. Zatím sice nejsou dostatečně vybaveni možností vlastního úsudku, ale i v tomto bodě byl učiněn obrovský pokrok. Automatická zařízení, která již Mars navštívila, se byla schopna v některých situacích sama rozhodnout a odhadnout nebezpečí. Člověk by na výpravě byl takovým tím lidským faktorem, který do projektu přináší zvláštní myšlenky. Zatím se nám nepodařilo nahradit obyčejný lidský mozek s jeho nápaditostí – a snad ještě dlouho nepodaří, ale člověk by v žádném případě nemohl bez technického vybavení nic dokázat. Musí odpočívat a jeho mozek má velice omezenou kapacitu. Zato přístroje odpočinek nepotřebují, mohou snést extrémní teploty, nepotřebují jídlo ani vzduch.[*24] V mnohém jsou nenáročnější. Přesto by bylo chybou opustit myšlenku pilotovaného letu k Marsu. Není to jen věda (ta je sice nejpodstatnější), ale celková snaha člověka vidět nové věci, dobrodružství, zábava. Snad by se uvolnilo sevření, ve kterém se nacházíme na Zemi.

Poznámky v texte

*12 *Redakcia prosí autorov, aby pri citácii citovali nielen meno, ale aj publikáciu, z ktorej čerpali svoje nápady a námety.*

*13 *Domnievam sa, že používať jadrové motory v zemskej atmosfére a na nízkej obežnej dráhe je pomerne nebezpečné. Atómový výbuch v atmosfére by mal globálny dopad na celú civilizáciu.*

*14 *To samozrejme neplatí, nesčitujeme rýchlosti, ale energie. To znamená, že budeme sčitovať druhé mocniny rýchlostí ($E = 1/2mv^2$). Môžete sa pokúsiť prepočítať tento variant.*

*15 *Prečo práve po hyperbole? Pri počiatočnom impulze to môže byt ľubovoľná kužeľosečka, ak bude raketa používať motory nepretržite, tak to hyperbola vôbec nebude (ani žiadna iná kužeľosečka). Dokáže niekto spočítať tvar dráhy k Marsu, ak má motor lode neustále rovnaký výkon?*

*16 *Káble majú tiež veľkú hmotnosť. Odhadne niekto rádovo hmotnosť kábla na jednotku dĺžky a prúdu?*

*17 *Domnievam sa, že kyslík sa bude oveľa ľahšie získavať z povrchových zdrojov ako z atmosféry. V atmosfére Marsu sa voda prakticky nevyskytuje.*

*18 *Určitú hmotnosť budú mať aj vrecúška na zvratky. :-))) „Tak vydechnout a vyprat kalhoty!“*

*19 *Skúste odhadnúť parametre takéhoto lana, aby sa s loďou dalo pohodlne manévrovať a aby nehrozilo nebezpečenstvo pretrhnutia lana.*

*20 *Redakcia si dovoľuje s týmto názorom silne nesúhlasiť. Pristátie na Mesiaci neznamenalo automaticky jeho osídlenie. A Mars je predsa len trošku ďalej ako Mesiac.*

*21 *A čo častice γ? Tie predsa nie sú elektricky nabité.*

*22 *Palivová sekcia sa musí oddeliť. Zbytočne by zaťažovala manévrovanie v atmosfére Zeme. Domnievam sa ale, že posádku aj materiál znesie späť na Zem raketoplán.*

*23 *Vzhľadom na poškodenia raketoplánu Columbia sa domnievam, že tento nebude nikdy opravený, ale možno postavený odznova.*

*24 *Potrebujú ale energiu – batérie si musia voziť so sebou, alebo byť pripojené na externý zdroj elektrickej energie. V tomto ohľade je človek oveľa flexibilnejší ako roboty.*

Několik nápadů

Mgr.^{MM} Jana Babováková

Myslím si, že na Mars je lepší posílat roboty. Jen pozor na písek, ten strojům nedělá dobře.

Astronautům ochabují svaly kvůli gravitaci. Sice cvičí, ale je to stále málo, protože cviky je zatěžují méně než v gravitačním poli. Napadl mě malý zdroj energie, jako přídavek k motorům. A to, že když astronauti cvičí na rotopedu, mohli bychom to využít. Zabijeme dvě mouchy jednou ranou. Ale jistě je to jen nepatrná část potřebné energie. Další částí mohou přispět solární články.[3]

Četla jsem o jisté antigravitační vestě, kterou vymyslela jedna textilní firma. Funguje na principu toho, že je napuštěna héliem. Funguje to ale jen na Zemi.[4]

Pozn. red.: A nakoniec doporučenie Mgr.^{MM} Jany Babovákovej: „Pozor na dlaždičky!“

Bzučo

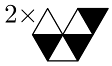
[3] *Pozn. red.: Spočíta niekto množstvo energie, ktoré sú schopné dodávať solárne články lodi?*

[4] *Pozn. red.: Prečo to funguje iba na Zemi?*

Téma 2 – Tetris

Na úvod se chci omluvit za jednu chybu, na kterou jsem samozřejmě přišel těsně poté, co šlo minulé číslo do tisku. :-(Mezi kostičkami složenými z šesti trojúhelníků je uvedena kostička na obr. 1 dvakrát (ve dvou natočeních), zatímco kostička na obr. 2 chybí. (Označení 2× znamená – stejně jako v minulém čísle –, že ke kostičce existuje kostička zrcadlová.)

Obr. 1



Obr. 2

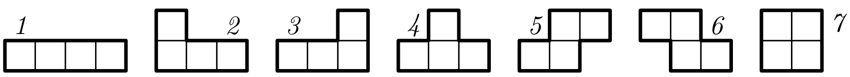
Problémem skládání obdélníků a „větších" kostiček se zabývaly *Dr.*^{MM} *Zuzka Rozlívková* a *Dr.*^{MM} *Lenka Studničná*. Jak poznamenala *Dr.*^{MM} *Rozlívková*, nelze složit „větší" kostičku pro případ šestiúhelníků, protože poskládaný útvar by neměl rovné hrany. Skládáním útvarů z trojúhelníků se nikdo nezabýval. Protože řešení *Dr.*^{MM} *Studničné* je v podstatě zahrnuto v řešení *Dr.*^{MM} *Rozlívkové*, otiskujeme řešení *Dr.*^{MM} *Rozlívkové*.

Skládání útvarů z tetrisových kostiček

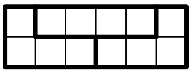
Dr.^{MM} *Zuzka Rozlívková*

- $n = 1$. Můžeme složit čtverec i tu jednu kostičku.
- $n = 2$. Čtverec nesložíme, ale máme obdélník 1×2 a kostičku samotnou.
- $n = 3$. Máme dvě kostičky, to je celkem 6 čtverečků. Protože 6 není čtvercem žádného přirozeného čísla, nemůžeme z těchto dvou kostiček složit čtverec. Ani žádnou z kostiček ve větším vydání složit nemůžeme, protože pak by na jeden velký čtvereček připadaly dva malé a dvojka není čtvercem žádného přirozeného čísla. Mohl by jít složit obdélník 2×3, ale když se na ty kostičky podíváme, vidíme, že to nejde.
- $n = 4$. Máme 7 kostiček, tedy dohromady 28 čtverečků, a to není čtverec žádného přirozeného čísla, takže čtverec z těchto kostiček nesložíme. Nemůžeme složit ani žádnou kostičku, protože by na každý velký čtvereček připadalo 7 malých, a to není čtverec žádného přirozeného čísla. Obdélník 4×7 by možná mohl jít složit, obdélník 2×14 nikoliv.

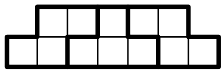
  Pozn. red.: Autorce se důkaz posledního tvrzení nalézt nepodařilo. Šlo by postupovat například takto. Máme tyto kostičky:



S výjimkou útvarů 2, 3 a 4, které mohou být i vzhůru nohama, musí být kostičky v poloze, ve které jsou na obrázku. Aby do sebe útvary zapadly, *je třeba uspořádat kostičky podle obrázku* 3 *(až na otočení, ale i tak bude výsledná kostička stejná).*



Obr. 3



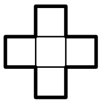
Obr. 4

Ze stejného důvodu je nutná i kombinace na obr. 4 *(až na otočení, výsledná kostička pak bude vzhůru nohama, to nám ale nepomůže).*

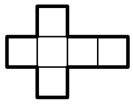
Z kostiček na obrázcích 3 *a* 4 *a útvaru 7 však zřejmě obdélník* 2×14 *složit nelze.*

- $n = 5$. Máme 18 kostiček, tedy dohromady 90 čtverečků. To není čtverec žádného přirozeného čísla, takže čtverec nesložíme. Nejde složit ani žádnou kostičku, protože 18 není čtvercem žádného přirozeného čísla. Obdélník 2×45 nejde složit kvůli kostičce na obr. 5.

  Možná by mohly jít složit obdélníky 3×30, 5×18, 6×15 a 9×10.



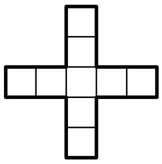
Obr. 5



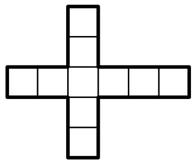
Obr. 6

- $n = 6$. Máme 60 kostiček a 360 čtverečků. Ani jedno z těchto čísel není druhou mocninou přirozeného čísla, tedy nejde vytvořit ani čtverec ani kostička ve větším provedení. Obdélník 2×180 nejde vytvořit např. kvůli kostičce na obr. 6. Možná by mohly jít složit obdélníky 3×120, 4×90, 5×72, 6×60, 8×45, 9×40, 10×36, 12×30, 15×24 a 18×20.
- $n = 7$. Máme 196 kostiček a 1372 čtverečků. Čtverec sice složit nepůjde, protože 1372 není druhou mocninou přirozeného čísla, ale 196 je 14^2, tedy jednotlivé kostičky by se mohly dát vytvořit. Čtverec 2×686 samozřejmě vytvořit nepůjde, protože máme kostičky, které jsou „vyšší“ i „širší“ než dva čtverečky. Mohly by jít složit obdélníky 4×343, 7×196, 14×98 a 28×49.
- $n = 8$. Máme 704 kostiček a 5632 čtverečků. Ani jedno z těchto čísel není druhou mocninou přirozeného čísla, tedy nepůjde složit ani čtverec ani větší kostička. Mohly by jít složit obdélníky 4×1408, 8×704, 11×512, 16×352, 22×256, 32×176, 44×128 a 64×88.
- $n = 9$. Máme 2500 kostiček a 22500 čtverečků. Protože platí $2500 = 50^2$ a $22500 = 150^2$, mohl by jít vytvořit jak čtverec, tak větší kostička. Obdélníky 2×11250, 3×750 a 4×5625 nepůjdou složit např. kvůli kostičce na obr. 7.

  Mohly by jít složit obdélníky 5×4500, 6×3750, 9×2500, 10×2250, 12×1875, 15×1500, 18×1250, 20×1125, 25×900, 30×750, 36×625, 45×500, 50×450, 60×375, 75×300, 90×250 a 100×225.
- $n = 10$. Máme 9189 kostiček a 91890 čtverečků. Ani jedno z těchto čísel není druhou mocninou přirozeného čísla, tedy nepůjde složit ani čtverec



Obr. 7



Obr. 8

ani větší kostička. Obdélníky 2×45945 a 3×30630 nepůjdou složit např. kvůli kostičce na obr. 8. Mohly by jít složit obdélníky 5×18378, 6×15315, 9×10210, 10×9189, 15×6126, 18×5105, 30×3063, 45×2042 a 90×1021.

- $n = 11$. Máme 33896 kostiček a 372856 čtverečků. Ani jedno z těchto čísel není druhou mocninou přirozeného čísla, tedy nepůjde složit ani čtverec ani větší kostička. Protože máme kostičky, které jsou „vyšší“ i „širší“ než čtyři čtverečky, nepůjdou složit obdélníky 2×186428 a 4×93214. Mohly by jít složit obdélníky 8×46607, 11×33896, 19×19624, 22×16948, 38×9812, 44×8474, 76×4906, 88×4237, 152×2453, 209×1784, 223×1672, 418×892 a 446×836.
- $n = 12$. Máme 126759 kostiček a 1521108 čtverečků. Ani jedno z těchto čísel není druhou mocninou přirozeného čísla, tedy nepůjde složit ani čtverec ani větší kostička. Obdélníky 2×760554, 3×507036 a 4×380277 složit nepůjdou. Mohly by jít složit obdélníky 6×253518, 9×169012, 12×126759, 18×84506, 29×52452, 31×49068, 36×42253, 47×32364, 58×26226, 62×24534, 87×17484, 93×16356, 94×16182, 116×13113, 124×12267, 141×10788, 174×8742, 186×8178, 188×8091, 261×5828, 279×5452, 282×5394, 348×4371, 372×4089, 423×3596, 522×2914, 558×2726, 564×2697, 846×1798, 899×1692, 1044×1457 a 1116×1363.

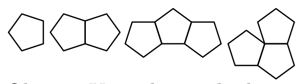
Kostičky z pětiúhelníků a sedmiúhelníků a něco k obarvení

Mgr.[MM] Jozef Cmar

Pozn. red.: Mgr.[MM] Jozef Cmar nám zaslal obrázky kostiček z trojúhelníků, z pětiúhelníků, ze šestiúhelníků a ze sedmiúhelníků. Protože se útvary z trojúhelníků a ze šestiúhelníků objevily v minulém čísle, nebudeme se jim již věnovat.

Redakce ale má k útvarům z pětiúhelníků a ze sedmiúhelníků jednu námitku – nelze jimi pokrýt rovina, tedy Tetris by s nimi hrát nešel – při hře by zůstávaly „díry“.

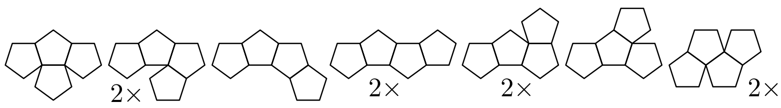
Kostičky z jednoho, ze dvou a ze tři pětiúhelníků jsou na obr. 9, kostičky ze čtyř pětiúhelníků jsou na obr. 10. Na obarvení nám v případě doteku hranou stačí dvě barvy, v případě doteku vrcholem barvy tři.



Obr. 9 – Kostičky z jednoho až ze tří pětiúhelníků

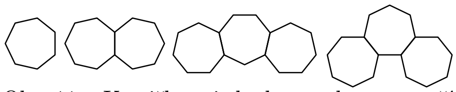
Pozn. red.: Toto tvrzení není úplně triviální. Při pokrývání roviny pětiúhelníky sice vznikají „díry“, ale na druhou stranu lze vytvořit různé „smyčky“ –

uspořádání, kde se „řetízky“ pětiúhelníků někde spojí. Uměl by někdo dokázat, že je daný počet barev dostačující?

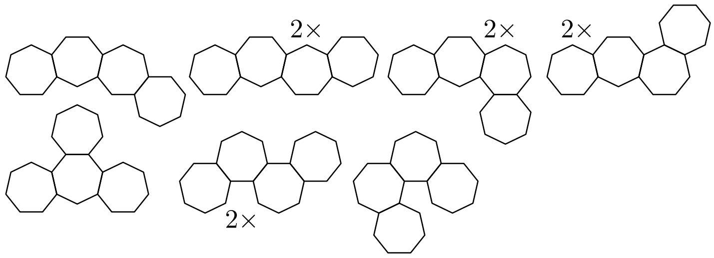


Obr. 10 – Kostičky ze čtyř pětiúhelníků

Kostičky ze sedmiúhelníků jsou na obrázcích 11 a 12.



Obr. 11 – Kostičky z jednoho, ze dvou a ze tří sedmiúhelníků



Obr. 12 – Kostičky ze čtyř sedmiúhelníků

Nyní k obarvování krychliček. Máme tři možnosti, jak chápat dotyk. Buď za dotyk považujeme dotyk stěnou, nebo dotyk hranou, nebo dotyk vrcholem.

- V případě, že se omezíme na dotyk stěnou, stačí nám 2 barvy a obarvení bude při pohledu ze všech stran připomínat šachovnici.
- V případě dotyku hranou potřebujeme 4 různé barvy.
- V případě dotyku vrcholem potřebujeme 8 barev.

Martin Krsek

Téma 4 – Kolíčky

Do tohoto čísla nám přišel pouze příspěvek od *Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáše Štece*. Snaží se v něm zkoumat chování kolíčků z hlediska působících sil podobně jako *Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Demín* ve svém článku ve čtvrtém čísle.

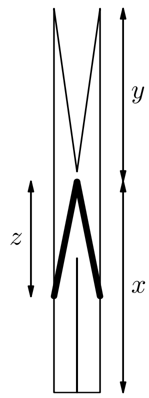
Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Štec oproti původnímu článku přidal některé konkrétní závěry a doložil je i pozorováním.

Štipce

Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Štec

Pozn. red.: Vzhledem k některým faktickým chybám jsou z autorova článku vybrány pouze určité části.

No, takže hneď na začiatok musím povedať, že sa nebudem zaoberať žiadnymi „kolíčkami“, ale „štipcami“. Dúfam, že vám tento drobný rozdiel nebude robiť žiadne väčšie problémy ;-). Nadefinujme si na začiatok štandardný štipec, v skratke len štipec (obr. 1).



Obr. 1

Na obrázku je vyznačených niekoľko vzdialeností: x je dĺžka prednej časti štipca, ktorou prichytávame prádlo (ďalšie štipce), meraná je od špičky štipca až po stred pružiny (os otáčania). Vzdialenosť y je potom zvyšok štipca, teda vzdialenosť „mačkacích“ ramien od osi. Napokon, vzdialenosť z je dĺžka ramien pružiny. Predpokladáme, že platí: $x > y > z$ (takto vyzerajú reálne štipce, ktoré mám k dispozícii, ako plastové, tak aj drevené). Na začiatok obmedzíme naše rozsiahle pátranie na jeden štipec. Uvažujeme nasledovne: Pružina sa správa počas celého kroku štipca podľa Hookovho zákona. To znamená, že so zväčšujúcim sa napnutím pružiny (výchylkou ramien štipca), bude sila pôsobiaca na štipec rásť priamo úmerne.[5] Vzhľadom na konštrukciu štipca bude táto sila pôsobiť vo vzdialenosti z od osi otáčania, teda na samotnej osi tým vytvorí nejaký moment sily. Aby sme štipec otvorili, budeme musieť tento moment prekonať. To sa dá dvoma (troma) spôsobmi: buď pôsobením sily na konce „mačkacích“ ramien, alebo pôsobením sily z vnútornej strany na konce „štipcujúcich“ ramien, alebo pôsobením obidvoch týchto síl.

Fajn, takže zhruba vieme, ako sa správa jeden štipec. Teraz teda k nemu pridáme druhý, konce prvého zmačkneme druhým presne podľa zadania. Teda pružina prvého pôsobí silou F_p na ramene z. Potom na ramene x bude pôsobiť silou $F = F_{\mathrm{p}1} \cdot z/x$. Takou istou silou (len opačnou) bude pôsobiť aj druhý štipec. Problém je ale ten, že táto sila bude voči jeho pružine na ramene y. Teda bude platiť aj, že $F = F_{\mathrm{p}2} \cdot z/y$. Keď si posledné dva vzťahy dáme do rovnosti a za sily F_p dosadíme ich hodnoty podľa Hookovho zákona, dostaneme[6]

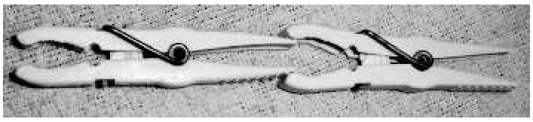
$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_2} = \frac{x}{y}\,.$$

Keďže sme ale na začiatku pre reálne štipce povedali, že $x > y$, tak aj α_1 bude väčšia ako α_2, teda druhý štipec by mal byť menej otvorený ako prvý, ktorý ho zviera (viď obr. 2). Teraz k nim pripojíme aj tretí. Už vopred môžeme predpokladať, že prostredný štipec, na ktorý pôsobia sily z oboch strán, bude otvorený najviac (obr. 3).

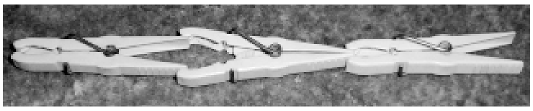
Ako by to vyzeralo, keby sme pridali štvrtý štipec? No, moment sa bude kompenzovať medzi dvojicami štipcov, teda taký výrazný rozdiel ako pri troch

[5] *Pozn. red.: Lépe řečeno, síla bude růst lineárně s výchylkou. Přímá úměrnost by platila jen tehdy, kdyby jsme za nulový úhel brali klidovou polohu samotné pružiny. Ve skutečnosti je pružina napnutá i u zavřeného kolíčku.*

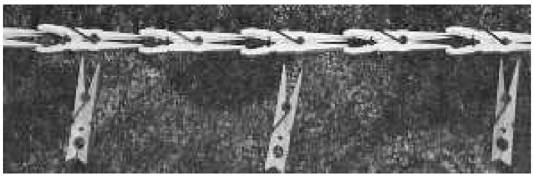
[6] *Pozn. red.: Tento vztah byl oproti autorovu vztahu upraven. Úhel α_0 je rozdíl mezi klidovou polohou pružiny a jejím rozevřením u zavřeného kolíčku.*



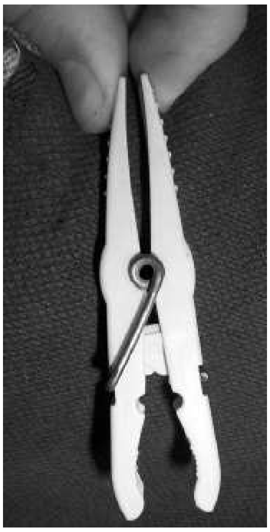
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

štipcoch nebude pozorovaný. Keďže na prvý štipec v rade (ten, v ktorého čeľustiach nie je žiaden ďalší) pôsobia štipce dlhšou pákou (x) ako na posledný (y), bude pravdepodobne aj viac otvorený. Zaujímavý je jav, ktorý sa objavil pri nepárnych počtoch štipcov a ktorý sme pozorovali už pri troch štipcoch: Štipce na párnych pozíciách budú výrazne otvorenejšie ako štipce na nepárnych pozíciách (viď obr. 4). Prečo? Posledný štipec (nepárny) otvára predchádzajúci štipec (párny) a zároveň ho otvárajú všetky ostatné, tých je zas nepárny počet, teda ich posledný štipec (tretí od konca) zas mačká štipec pred ním (párny), ten je naviac otváraný celým nepárnym zvyškom … A takto môžeme postupovať uberaním dvojíc až po tri štipce. Všimnime si teraz, že táto vlastnosť štipcového radu sa dá použiť trebárs na posielanie informácií, keď máme štipcový rad s párnym počtom štipcov. Ak na koniec pridáme ďalší štipec (nepárny), tak sa predposledný štipec na druhej strane tiež pootvorí. A môžeme posielať morzeovku.

Osobne som zostavil najdlhší rad z 52 rovnakých plastových štipcov. Celkovú dĺžku mal 3,75 m a tiahol sa cez celú izbu. V takto dlhom rade už rozdiely temer zanikli a všetky čeľuste boli zhruba rovnako pootvorené. Vlastne už ani nemá zmysel skúšať posielať „správu“. Trenie v štipcoch a minimálna zmena celkového momentu po pridaní ďalšieho štipca spôsobia, že zmena nebude pozorovateľná.

Zaujímavé je, že som použil plastové štipce. Najprv som mal pocit, že prehnutie je zanedbateľné, ale potom som sa na štipec pozrel pozornejšie. Prehnutie je značné (obr. 5).

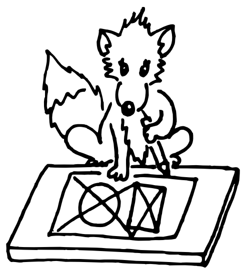
Nakoniec tu máme ďalší extrém. Nerovnaké sily pružín. Tie sa ku mne dostali prostredníctvom drevených štipcov. Pokus ukázal nasledovné. Pokiaľ na koniec radu pridám štipec so silnejšou pružinou, tento svojou silou až oddelí predcházajúci štipec z radu, teda zaradením štipcov so silnejšou pružinou na určité miesta môžeme zabezpečiť rozpad radu. Rad môže pokračovať od silnejšieho štipca ďalej, výnimkou je prípad, keď je uhol otvorenia čeľustí v ďalšom rade väčší ako uhol „mačkacej“ časti silnejšieho štipca. Takto môžeme vytvárať dvojice slabší–silnejší štipec. Pri dostatočnom nepomere síl pružín sa tieto dvojice nebudú dať spojiť.

Istou celkom zaujímavou variantou je nekonečný rad štipcov. Reálne nekonečný rad asi nespravíme, takže si pomôžeme jednou fintou: štipce zapojíme do kruhu. Môžeme predpokladať, že vo výslednom útvare budú všetky štipce otvorené rovnako, veď za každým z nich je „nekonečno“ ďalších. Nekonečno ale muselo putovať do zátvoriek, keďže to reálne nekonečno nie je. Veď ten štipec pôsobí aj sám na seba. Tu už na popis správania moje momentové vzťahy nestačia. Veď by museli mať obrovské množstvá nezanedbateľných členov až do lišiak-vie-ktorého obehnutia kruhu.[7]

Marble

Téma 6 – Vepisování a opisování

K tomuto tématu přišlo poměrně hodně příspěvků, bohužel se ale velká část řešitelů uchýlila k opisování vzorečků z knížek. Většinou se pak zabývali opsanou a vepsanou kružnicí. Pouze řešení *Dr.^{MM} Standy Basovníka* obsahovalo i zajímavé poznatky k vepsanému čtverci, otiskujeme tedy jeho článek. Na závěr potom zveřejňujeme alternativní přístup k pravidlům pro existenci opsané a vepsané kružnice, jak nám jej zaslalo několik autorů.



Kružnice opsaná a vepsaná a vepsaný čtverec

Dr.^{MM} Stanislav Basovník

Čtyřúhelník s kružnicí opsanou

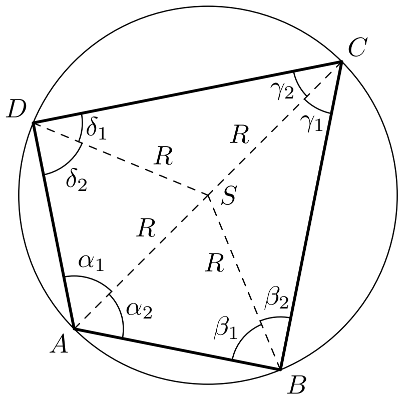
Pro úhly čtyřúhelníka na obr. 1 platí:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\,, \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2\,, \qquad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2\,, \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2\,. \tag{1}$$

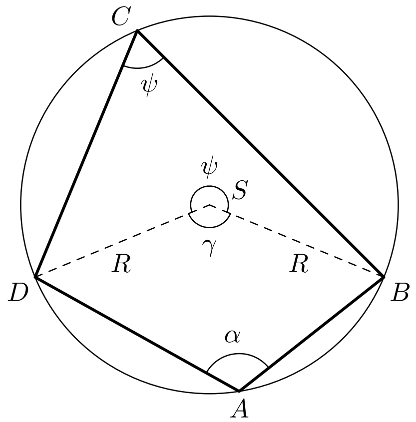
Trojúhelníky ABS, BCS, CDS a DAS jsou rovnoramenné (dvě jejich strany mají délku R), tedy platí

$$\alpha_1 = \delta_2\,, \qquad \alpha_2 = \beta_1\,, \qquad \gamma_1 = \beta_2\,, \qquad \gamma_2 = \delta_1\,. \tag{2}$$

[7] *Pozn. red.: Je to skutečně nutné? Podle názoru redakce stačí k popsání rovnovážného stavu pouze jedna rovnice pro každý kolíček.*



Obr. 1



Obr. 2

Dosadíme (2) do (1) a upravíme:

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma &= (\alpha_1+\alpha_2)+(\gamma_1+\gamma_2) = \\ &= (\delta_2+\beta_1)+(\beta_2+\delta_1) = \\ &= (\beta_1+\beta_2)+(\delta_1+\delta_2) = \beta+\delta\,.\end{aligned}$$

Tedy součty protilehlých úhlů si musí být rovny:

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta\,.$$

Stejný vztah lze získat i z věty o obvodovém a středovém úhlu. Na obrázku 2 platí

$$\psi = 2\alpha\,, \qquad \varphi = 2\gamma\,. \tag{3}$$

Úhly φ a ψ dohromady tvoří plný úhel:

$$\varphi+\psi = 360^\circ. \tag{4}$$

Dosadíme-li rovnici (3) do rovnice (4), dostaneme

$$2\alpha+2\gamma = 360^\circ,$$

tedy po vydělení rovnice dvěma

$$\alpha+\gamma=180^\circ.$$

Stejnou úvahu bychom mohli provést také pro úhly β a δ, proto platí

$$\alpha+\gamma = 180^\circ = \beta+\delta\,.$$

Čtyřúhelník s kružnicí vepsanou

Pro strany čtyřúhelníka na obr. 3 platí:

$$a=a_1+a_2\,, \qquad b=b_1+b_2\,, \qquad c=c_1+c_2\,, \qquad d=d_1+d_2\,. \tag{5}$$

Trojúhelníky ASE a ASF jsou shodné – mají společnou jednu stranu, tedy platí $|SE|=|SF|=r$ a úhly AES a AFS jsou oba pravé. Stejnou úvahu bychom mohli provést i pro trojúhelníky DFS a DGS, resp. CGS a CHS, resp. BHS a BES, musí tedy platit tyto rovnosti:

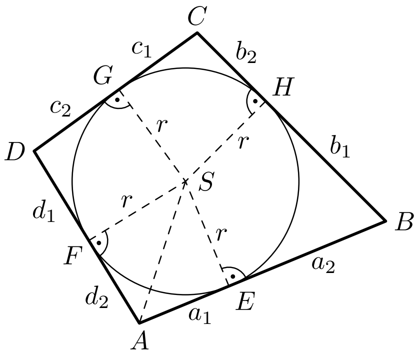
$$a_1=d_2\,, \qquad a_2=b_1\,, \qquad c_1=b_2\,, \qquad c_2=d_1\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li tyto rovnice do rovnice (5), dostaneme

$$
\begin{aligned}
a + c &= (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2) = \\
&= (d_2 + b_1) + (b_2 + d_1) = \\
&= (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2) = \\
&= b + d\,.
\end{aligned}
$$

Tedy pokud má čtyřúhelník kružnici vepsanou, musí pro jeho strany platit

$$a + c = b + d\,. \tag{7}$$

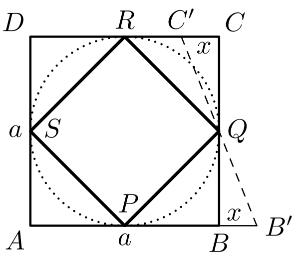


Obr. 3

Vepsání čtverce a kružnice není ekvivalentní

Čtverci $ABCD$ se stranou hrany a lze zřejmě vepsat čtverec $PQRS$ (viz obr. 4). Stejný čtverec lze vepsat i čtyřúhelníku $AB'C'D$. Čtverci $ABCD$ lze samozřejmě vepsat i kružnici a platí pro něj podmínka (7). Pro délky stran čtyřúhelníku $AB'C'D$ ale platí:

$$|AB'| = a + x\,, \qquad |B'C'| > a\,, \qquad |C'D| = a - x\,, \qquad |DA| = a\,.$$



Obr. 4

Sečteme-li příslušné strany, dostaneme

$$|AB'| + |C'D| = a + x + a - x = 2a\,,$$

$$|B'C'| + |AD| > a + a = 2a\,.$$

Dostáváme

$$|AB'| + |C'D| < |B'C'| + |AD|\,,$$

a podmínka (7) tedy není splněna, takže tento čtyřúhelník nemá kružnici vepsanou.

Alternativní pravidla pro existenci opsané a vepsané kružnice

kolektiv autorů

Při odvozování pravidel pro existenci kružnice vepsané a opsané je též možno vyjít z analogie s trojúhelníky.

Střed kružnice vepsané trojúhelníku leží na průsečíku os úhlů, které se potkají všechny v jednom bodě. Je tomu tak proto, že osa úhlu je množina bodů, která má od přilehlých stran stejnou vzdálenost. Tedy pokud se osy uhlů potkají všechny v jednom bodě, bude existovat kružnice vepsaná čtyřúhelníku.

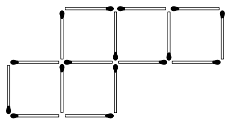
Střed kružnice opsané trojúhelníku leží na průsečíku os stran, které se potkají všechny v jednom bodě. Je tomu tak proto, že osa strany je množina bodů, která má od přilehlých vrcholů stejnou vzdálenost. Tedy pokud se osy stran potkají všechny v jednom bodě, bude existovat kružnice opsaná čtyřúhelníku.

Řešení úloh

Úloha 4.1 – Sirky (4b)

Zadání:

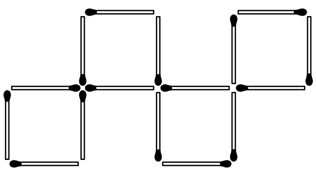
Máme 16 sirek rozmístěných podle obrázku. Vymyslete, jak přemístit dvě sirky, aby zůstaly pouze 4 čtverce. Dokážete přemístěním dvou sirek získat i obrazec se šesti čtverci? Existuje více možností, jak tyto úkoly vyřešit? Jaké?



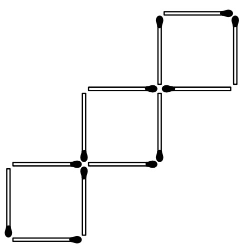
Řešení:

Protože obrazce se mají skládat pouze ze čtyř (respektive šesti) čtverců, neuznávali jsme za řešení obrazce, kde přebývají nějaké sirky, které netvoří stranu čtverce.

Přemístěním dvou sirek můžeme dostat tento obrazec, který se skládá pouze ze čtyř čtverců (obr. 1).



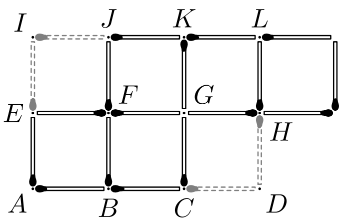
Obr. 1



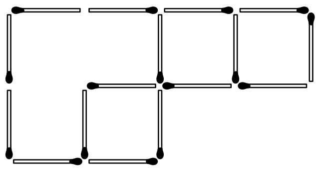
Obr. 2

Když chceme poskládat čtyři stejné čtverce se stranou z jedné sirky ze šestnácti zápalek, nemůžou mít žádné společné strany, mohou se pouze dotýkat rohy nebo se nedotýkat vůbec. Obrazec, který by obsahoval čtverce spojené rohově tak, že tři čtverce budou jako na obr. 2 a čtvrtý bude k nim někde připojen také rohově, nejde z původního uspořádání přeskládáním dvou sirek získat. Nelze ani najít takový obrazec, kde by byl nějaký ze čtyř čtverců samostatně. Proto je na obrázku 1 jediné řešení pro čtyři malé čtverce.

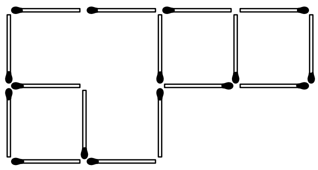
Další možnost je, že postavíme jeden velký čtverec, který má stranu o délce dvou sirek. Ten může vzniknout přemístěním dvou zápalek pouze na místech ACKI nebo BDLJ (obr. 3). V případě čtverce ACKI musíme doplnit roh EIJ. K tomu můžeme použít dvojice JF a EF, JF a GF, GF a BF, BF a EF, podle toho pak vzniknou čtyři různé obrazce (obr. 4 až 7). Abychom dostali čtverec BDLJ, je třeba doplnit roh CDH. Použijeme jednu z těchto dvojic sirek: HG a KG, KG a FG, FG a CG, CG a HG. Vzniknou tak opět čtyři obrazce (obr. 8 až 11). Nelze použít jiné dvojice na doplnění rohů, aniž bychom někde nechali nějaký „zbytek“.



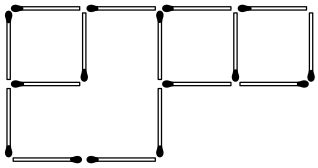
Obr. 3



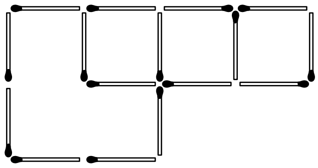
Obr. 4



Obr. 5

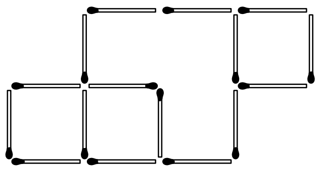


Obr. 6

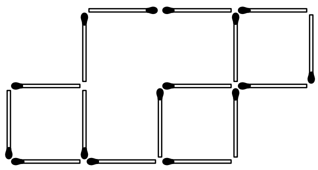


Obr. 7

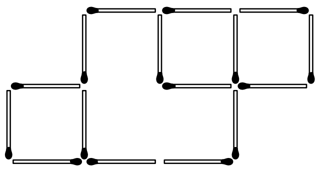
Řešení na obrázcích 4 až 11 tedy tvoří jeden velký čtverec a tři malé. Je pravda, že vzniká také obrazec (např. ABFGKI na obr. 4), který není čtverec, ale protože ho tvoří strany velkého a malého čtverce, tato řešení jsme uznávali. Řešení pro čtyři čtverce jsou tedy na obrázcích 1 a 4 až 11.



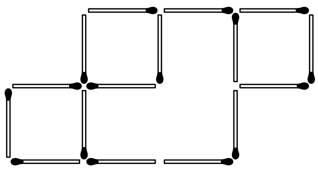
Obr. 8



Obr. 9

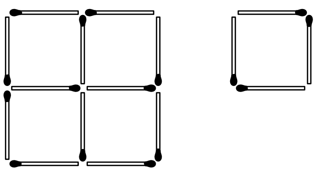


Obr. 10



Obr. 11

Obrazec se šesti čtverci vytvoříme jiným přeskládáním sirek – čtyři malé čtverečky tvoří jeden velký a jeden čtvereček zůstane samostatně (obr. 12). Neexistuje jiné řešení. Ukážeme to takto: v obrazci může být šest malých čtverců nebo tam může být jeden velký složený ze čtyř malých. Šest malých čtverců poskládaných z šestnácti sirek by muselo mít osm společných stran, ale můžete si zkusit, že pokud dáme šest čtverců k sobě, mají společných stran jen sedm, takže tato možnost je vyloučena. Proto musíme vytvořit velký čtverec. Na obrázku 12 je jediná možnost, jak tento velký čtverec složený ze čtyř ma-



Obr. 12

lých čtverečků vytvořit, aby nám zbyl navíc jeden malý šestý čtvereček a nic jiného.

Lenka

Úloha 4.2 – Zvuk (4b)

Zadání:

Do dvou reproduktorů, vzdálených od sebe 10 m*, je ze stejného zdroje puštěn tón o frekvenci* 400 Hz*. Co uslyšíte, když půjdete stálou rychlostí* $0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *od jednoho reproduktoru přímo k druhému?*

Reproduktory jsou umístěny ve volném prostoru a rychlost zvuku ve vzduchu je $340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Řešení:

Majme dve telesá pohybujúce sa navzájom k sebe. Nech sa teleso A pohybuje voči stojatému prostrediu rýchlosťou v. Zdroj zvuku B sa pohybuje oproti nemu, rýchlosťou u voči stojatému prostrediu. Písmenom c budeme, ako je zvykom, značiť rýchlosť zvuku.

Podľa Dopplerovho javu bude pozorovateľ spojený s telesom B počuť zvuk (ktorý vydáva A) s frekvenciou

$$f_\mathrm{B} = f_\mathrm{A}\frac{c \pm v}{c \mp u}\,. \tag{1}$$

kde horné znamienka platia pre pohyb telies smerom k sebe.

V našom prípade sa reproduktor B nepohybuje. Ak sa pohneme smerom k nemu, budeme počuť zvuk s frekvenciou

$$f_\mathrm{B} = f\frac{c+v}{c} = f\left(1+\frac{v}{c}\right)\,. \tag{2.1}$$

Zároveň ale počujeme aj zvuk z reproduktoru A za nami s frekvenciou

$$f_\mathrm{A} = f\frac{c-v}{c} = f\left(1-\frac{v}{c}\right)\,. \tag{2.2}$$

Frekvencie podľa rovníc (2.1) a (2.2) sa budú navzájom skladať. Predpokladajme, že oba reproduktory majú nastavenú rovnakú hlasitosť. Potom pre amplitúdu výsledného vlnenia dostaneme

$$\begin{aligned} A =&A_\mathrm{A} + A_\mathrm{B} = A_0\sin 2\pi f_\mathrm{A} t + A_0 \sin 2\pi f_\mathrm{B} t = \\ =&A_0\left(\sin 2\pi f_\mathrm{A} t + \sin 2\pi f_\mathrm{B} t\right)\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tento vzorec platí pre polohu na osi oboch reproduktorov presne v strede. V obecnom prípade, že nie sme presne v strede medzi reproduktormi a tieto majú rozličnú hlasitosť, bude výsledná amplitúda

$$A = \frac{C\cdot A_\mathrm{A}}{r_\mathrm{A}}\sin\left(2\pi f_\mathrm{A}\left(t+\frac{r_\mathrm{A}}{c}\right)\right) + \frac{C\cdot A_\mathrm{B}}{r_\mathrm{B}}\sin\left(2\pi f_\mathrm{B}\left(t+\frac{r_\mathrm{B}}{c}\right)\right)\,, \tag{3.2}$$

kde C je konštanta. Vektor rýchlosti môže byť sklonený voči smeru k reproduktoru pod uhlom θ, f_A bude potom

$$f_\mathrm{A} = f\frac{c \pm v\cos\theta}{c \mp u}\,. \tag{3.3}$$

Vráťme sa však k prípadu, keď sa pohybujeme po priamke od jedného reproduktoru k druhému. Podľa súčtového vzorca

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

upravíme rovnicu (3.1):

$$A = 2A_0\cdot\sin 2\pi\frac{f_\mathrm{A}+f_\mathrm{B}}{2}t\cdot\cos 2\pi\frac{f_\mathrm{B}-f_\mathrm{A}}{2}t\,. \tag{4}$$

Dosadením (2.1) a (2.2) do (4) dostaneme

$$A = 2A_0\cdot\sin 2\pi ft\cdot\cos 2\pi f\frac{v}{c}t\,. \tag{5}$$

Frekvencia f je pôvodných 400 Hz, frekvencia kosínového člena je

$$\bar{f} = f\frac{u}{c} = 400\,\mathrm{Hz}\cdot\frac{0{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \doteq 0{,}6\,\mathrm{Hz}\,. \tag{6}$$

Budeme tedy počuť zvuk jednej frekvencie f, ktorého intenzita sa bude meniť (bude modulovaná) s frekvenciou $\bar{f}$, budeme počuť rázy.

Bzučo

Úloha 4.3 – Numera (5b)

Zadání:

Zkuste se zamyslet nad následujícími problémy. Zajímají nás (obecná) odvození a zdůvodnění výsledků, ne čísla, která získáte zkoušením na kalkulačce (na počítači).

- *Číslo* 10! *má na konci dvě nuly. Kolik nul bude ale mít na konci číslo* (100!)*? Dokážete určit, kolik nul bude na konci libovolného faktoriálu?*
- *Číslo 25 je čtvercem přirozeného čísla. Má tu vlastnost, že když ke každé jeho cifře přičteme jedničku, dostaneme opět čtverec přirozeného čísla. Zkuste najít všechny čtverce přirozených čísel s touto vlastností.*
- *Platí* $4^2 = 2^4$. *Najdete všechny takovéto příklady?*
- $1^3 + 2^3 = (1+2)^2$. *Je to jen náhoda nebo nějaké hlubší pravidlo?*

Řešení:

a. Funkce faktoriál ($n!$) je definována jako součin $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Obecné číslo má na konci tolik nul, kolikrát je beze zbytku dělitelné číslem 10. Vzhledem k tomu, že v rozkladu čísla $n!$ je více čísel 2 než 5, stačí nám zjistit, kolikrát je faktoriál dělitelný číslem 5. Číslem 5 jsou v součinu faktoriálu dělitelná následující čísla: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ..., tedy každé páté číslo. Navíc si ale musíme uvědomit, že čísla 25, 50, 75, 100, 125, 150, ... jsou dělitelná dvěma pětkami, čísla 125, 250, ... třemi pětkami atd. Důležitá je tedy dělitelnost čísla n čísly 5, 25, 125, 625, ... – obecně mocninami pětky (5^i). Číslo $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ nám říká, kolikrát se v součinu $n!$ vyskytuje číslo dělitelné pěti. (Funkce $\lfloor x \rfloor$ se jmenuje *dolní celá část* a vrátí jako výsledek nejbližší menší nebo rovné celé číslo k x.) Celkem je číslo $n!$ dělitelné pětkou:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_5 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor \tag{1}$$

krát.

Ještě odpovíme na otázku, kolik nul má na konci číslo (100!). Stačí abychom dosadili do uvedeného vzorce:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_5 100 \rfloor} \left\lfloor \frac{100}{5^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24\,. \tag{2}$$

Alternativní řešení:

Tuto úlohu je možné řešit také v pětkové soustavě. Nejprve si na příkladu ukážeme, jak se převádí čísla mezi číselnými soustavami. Zvolme si libovolné číslo, např. 954 (v desítkové soustavě). Platí

$$\begin{aligned} 12\,304_{(5)} &= 1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 4 = \\ &= 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4 = 954_{(10)} \end{aligned} \tag{3}$$

Toto číslo má tedy v pětkové soustavě tvar 12 304.

Číslo $12\,304_{(5)}!$ má ve svém součinu $1\,230_{(5)} + 123_{(5)} + 12_{(5)} + 1_{(5)} = 190_{(10)} + 38_{(10)} + 7_{(10)} + 1_{(10)} = 236$ pětek. Ze všech čísel $1_{(5)}$ až $12\,304_{(5)}$ jich $1\,230_{(5)}$ končí pětkou (pardon, v pětkové soustavě nulou), $123_{(5)}$ jich končí 5^2 atd. Dospíváme ke stejnému vzorci jako (1), ale elegantněji:

$$\sum_{i=1}^{N} \left\lfloor \frac{n_{(5)}}{5^i} \right\rfloor_{(5)}\,, \tag{4}$$

kde N je počet cifer našeho čísla v pětkové soustavě.

Číslo $100_{(10)}! = 400_{(5)}!$ obsahuje v prvočíselném rozkladu $40_{(5)} + 4_{(5)} = 20_{(10)} + 4_{(10)} = 24$ pětek. Získali jsme stejný výsledek jako v předchozím postupu.

b. Zadání nebylo bohužel přesně specifikováno. Uvedeme řešení této části příkladu pouze pro dvouciferná čísla, uvedený postup lze však použít na libovolně velká čísla.

Výchozí přirozené číslo si označme x. Když k oběma cifrám jeho čtverce (tj. k číslu x^2) přičteme jedničky (tedy $x^2 + 11$), chceme získat opět čtverec přirozeného čísla (označme ho y). Tuto skutečnost vyjadřuje kvadratická rovnice $x^2 + 11 = y^2$. Řešení pak vypadá následovně: $y^2 - x^2 = 11$, tedy $(y-x)(y+x) = 11$. Protože se jedná o přirozená čísla, pro která navíc platí $x < y$, můžeme předchozí rovnici rozepsat jako hledání řešení soustavy dvou rovnic: $y - x = 1$ a $y + x = 11$. Takové řešení je jediné: $y = 6$ a $x = 5$, tedy číslo 25 je jediné dvouciferné řešení.

c. V tomto případě je úkolem vyřešit rovnici $a^b = b^a$. Rovnice má řešení samozřejmě pro všechna přirozená $a = b$, pro $a \neq b$ získáme řešení logaritmováním rovnice a upravením na tvar $\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a}$. Hledáme proto řešení rovnice $f(a) = f(b)$ pro různá přirozená a, b a pro funkci $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Nejprve nalezneme maximum funkce f pomocí derivace:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}\,.$$

Derivace f' je tedy nulová v bodě $\mathrm{e} = 2{,}718\,28\ldots$ Na intervalu $\langle 1, \mathrm{e})$ je derivace kladná, na intervalu (e, ∞) je záporná (vidno ze vztahu pro f'). V bodě e se proto nachází maximum, na intervalu $\langle 1, e)$ je funkce f rostoucí a na intervalu (e, ∞) je klesající. Abychom našli různá přirozená a a b, pro která platí $f(a) = f(b)$, musíme hledat dvojice $a \in \langle 1, \mathrm{e})$ a $b \in (\mathrm{e}, \infty)$. (Pro pochopení si nakreslete obrázek funkce $\ln x/x$.) Číslo a může nabývat tedy pouze dvou různých hodnot 1 a 2. Pro hodnotu 2 nalezneme odpovídající $b = 4$ (jedná se o příklad ze zadání) a pro hodnotu 1 odpovídající b nenalezneme, protože $f(b) > 0$ pro $b \in (\mathrm{e}, \infty)$.

Jedinými řešeními jsou tedy přirozené hodnoty $a = b$ a dvojice $[2, 4]$.

Poznámka: Existuje i jiný postup řešení bez použití derivací, který je však několikanásobně delší, využívá binomickou větu, dvě indukce a několik odhadů nerovností. Lze jej tedy považovat za příliš složitý. Protože nikdo z řešitelů toto řešení nenašel a ani žádný z postupů k tomuto řešení nevedl, nebudeme tento postup uvádět ani ve vzorovém řešení.

d. Zadání této části lze interpretovat dvěma různými způsoby:

α. První výklad zadání je zjistit, zda platí vztah

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Platnost této rovnosti budeme dokazovat matematickou indukcí. Pro $n = 1, 2$ rovnost platí. Nechť $n > 2$ a platí indukční předpoklad. Potom pravá strana rovnosti lze zapsat jako

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \; + (n+1)\right)^2 =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)(n+1) + (n+1)^2\,.$$

Podle indukčního předpokladu a vztahu pro součet aritmetické řady $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^2(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i^3$$

Jedná se tedy o obecné pravidlo a ne o náhodu.

β. Druhý možný výklad zadání je najít všechna řešení rovnice $a^3 + b^3 = (a+b)^2$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $a \le b$ (obě čísla jsou totiž v rovnici zaměnitelná). Rozebereme 3 možnosti podle velikosti b.

A. $b = 1 \ldots$ potom platí $a = b = 1$, ale rovnice není splněna: $1^3 + 1^3 = 2 \neq 4 = (1+1)^2$. Tato varianta proto nemá řešení.

B. $b = 2 \ldots$ potom platí $a^3 + 2^3 = (a+2)^2$, tedy $a^3 + 8 = a^2 + 4a + 4$, odtud $a^3 - a^2 - 4a + 4 = 0$, tedy $(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a+2) = 0$. Dostáváme dvě možná řešení: $a = 1, b = 2$ a $a = b = 2$.

C. $b \ge 3 \ldots$ tento případ ještě rozdělíme na dvě varianty:

C1. $a = 1 \ldots$ potom platí $1^3 + b^3 = (1+b)^2$, tedy $b^3 - b^2 - 2b = 0$, tedy $b.(b+1).(b-2) = 0$, a protože platí $b \ge 3$, nemá tato rovnice řešení.

C2. $a > 1 \ldots$ potom platí $a^3 > a^2$ a $b^3 \ge 3b^2$ (protože $b \ge 3$). Sečtením obou nerovnic dostaneme $a^3 + b^3 > a^2 + 3b^2$. Dále víme, že $ab \le b^2$ (protože $a \le b$) a tedy platí i

$$a^3 + b^3 > a^2 + 3b^2 = a^2 + b^2 + 2b^2 \ge a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \,.$$

Rovnost, která byla požadována zadáním, v tomto případě nikdy nemůže nastat.

Celkově jsme tedy získali dvě řešení: $1^3 + 2^3 = (1+2)^2$ a $2^3 + 2^3 = (2+2)^2$.

Ziki & Bzučo

Výsledková listina

			Úlohy								
Pořadí	**Jméno**	$\sum_{-1}$	**t1**	**t2**	**t4**	**t6**	**r1**	**r2**	**r3**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\text{MM}}$ Tomáš Štec	154	10		4	10	4	5	0	33	109
2.	Dr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Rozlívková	83				8	1	4	1	14	60
3.	Prof.$^{\text{MM}}$ Martin Demín	224				3	1	1	3	8	58
4.	Dr.$^{\text{MM}}$ Lenka Studničná	56				7	1		4	12	56
5.–6.	Dr.$^{\text{MM}}$ Lukáš Chvátal	70				7	2	2	3	14	45
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Olšina	45						2	7	9	45
7.	Prof.$^{\text{MM}}$ Tibor Vansa	307					3	4	0	7	44
8.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Růžek	43	6				3			9	43
9.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jiří Danihelka	40					2	2	1	5	40
10.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Demín	39				3	2	2	1	8	39
11.	Dr.$^{\text{MM}}$ Stanislav Basovník	64				10	3		5	18	34
12.–13.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Tereza Klimošová	33					3	5	3	11	33
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Lukáš Vozdecký	33					1	1	2	4	33
14.–15.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Helena Kubátová	43					4			4	26
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Karla Procházková	26	10				4	2	0	16	26
16.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jozef Cmar	21		8						8	21
17.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Vojta Kubáň	25					3		5	8	20
18.	Dr.$^{\text{MM}}$ Peter Bališ	81					1			1	19
19.	Dr.$^{\text{MM}}$ Dana Beránková	77					2			2	18
20.–21.	Bc.$^{\text{MM}}$ Ján Gulaš	15					2	0		2	15
	Bc.$^{\text{MM}}$ Petra Malá	15					2			2	15
22.–23.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michaela Šikulová	30					3	5		8	14
	Bc.$^{\text{MM}}$ Vladimír Vinařský	14								0	14
24.–25.	Prof.$^{\text{MM}}$ Vašek Cviček	208								0	13
	Bc.$^{\text{MM}}$ Radim Kusák	13					3	5	1	9	13
26.–28.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Lukáš Pavlovský	37								0	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Jan Rieger	12				3	2	2		7	12
	Bc.$^{\text{MM}}$ Martin Dungl	12					2	2	3	7	12
29.–30.	Bc.$^{\text{MM}}$ Darina Šuglová	11				6	3	2	0	11	11
	Bc.$^{\text{MM}}$ Ondřej Honzl	11								0	11
31.–33.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jana Babováková	34	4				2		1	7	8
	Jindra Soukup	8								0	8
	Marián Galovič	8								0	8
34.–35.	Monika Babjarová	7								0	7
	Tomáš Gavenčiak	7								0	7
36.–39.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jan Špiřík	33								0	6
	Jan Vrba	6					2	3	0	5	6
	Lucie Phamová	6								0	6
	Zuzana Králová	6								0	6

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy							$\sum_0$	$\sum_1$
			t1	t2	t4	t6	r1	r2	r3		
40.–42.	Monika Martinisková	5					2		0	2	5
	Pavla Grubhofferová	5					2			2	5
	Marek Ovčáček	5								0	5
43.–46.	Bc.^{MM} Luboš Uličný	17					4			4	4
	Jan Bulánek	4								0	4
	Vojtěch Krejčiřík	4								0	4
	Štěpánka Mohylová	4								0	4
47.	Jan Kaštil	3								0	3
48.–50.	Richard Bobek	3								0	2
	Petra Guhlová	2								0	2
	Vendula Dvořáková	2								0	2
51.–55.	Mgr.^{MM} Zuzana Svobodová	29								0	1
	Michal Rychnovský	5								0	1
	Michal Kočař	1								0	1
	Michal Matějů	1								0	1
	Zuzana Míčová	1								0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.