M&M

Studentský matematicko-fyzikální časopis

ročník IX číslo 3

Termín odeslaní 27. 1. 2003

Milí kamarádi,

právě držíte v ruce nejnovější číslo vašeho oblíbeného časopisu. Než se dáte do řešení, opravte si prosím chybu v zadání tématka 5 – Solitéru v druhém čísle. Při hře na čtvercové síti se neskáče diagonálně, jak bylo v zadání, ale pouze nahoru, dolů a do stran. Můžete tedy přeskočit jeden ze čtyř kolíků. Pokud jste ale už toto téma řešili podle původního zadání, můžete nám samozřejmě výsledky poslat.

Přejeme vám hodně štěstí do nového roku

Redakce M&M

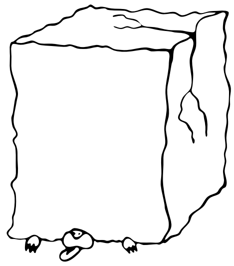
Zadání úloh

Úloha 3.1 – Kouzelné sklíčko (5b)

Máme kouzelné (špinavé?) sklíčko, které třetinu na něj dopadajícího světla propustí dál, třetinu odrazí zpět a třetinu pohltí. Jaká část původní intenzity projde skrz dvě takováto sklíčka postavená rovnoběžně za sebou, když na ně posvítíme kolmým paprskem? Jaká část se odrazí zpět?

Jak bude situace vypadat, když za sebou budou postaveny tři nebo čtyři zrcátka? A co když jich bude obecně n?

Úloha 3.2 – Já, robot (6b)



Možná někteří z vás znají Isaaca Asimova. Byl to jeden ze zakladatelů sci-fi jako takové. V jedné své povídce chtěl najít zlobivého robota, který se mu schoval mezi ostatní. Pokoušel se o to různými způsoby. Například nechal na hlavní hrdinku – doktorku Susan Clainovou – padat veliký kvádr, jenž byl v poslední chvíli odstrčen světelným (gama) paprskem. Mezi roboty a doktorku Clainovou umístil pole, které by roboty zničilo, kdyby do něj vešli. Předpokládal, že hledaný robot se, na rozdíl od ostatních, nepohne doktorku zachránit. O tom, že robot přesvědčil ostatní, aby se také nepohnuli, nebudeme psát. Jak robota nakonec našel, se můžete dočíst ve sbírce povídek *Já, robot.*

Nám jde ale o to, odhadnout parametry takového světelného paprsku – laseru. Pro jednoduchost uvažujme případ, kdy má paprsek takový výkon, aby kompenzoval tíhovou sílu působící na kvádr.

Odhadněte, jaký výkon by to musel být. Co se bude dít s kvádrem, když na něj bude tento paprsek působit?

Jestliže se vám zdá příklad těžký, použijte při odhadu namísto světla proud vody.

Úloha 3.3 – Šachovnice (5b)

Na pole A8 šachovnice položte krychličku, která má stěnu stejně velkou jako jedno pole. Horní stěnu krychličky barevně označte. Vaším úkolem je přetáčet krychličku přes hranu z pole na pole, projít tak celou šachovnici (na každém poli musí být krychlička právě jednou) a skončit na poli H8. Na konci musí mít barevné označení opět nahoře.

Teď položte krychličku na libovolné pole šachovnice, stejným způsobem ji přetáčejte po všech polích (tedy tak, aby na každém byla jen jednou) a skončete na výchozím poli. Přitom krychlička nesmí mít označenou stěnu nahoře na žádném políčku mimo výchozího.

Zkuste určit, jestli v prvním a druhém případě existuje více cest a případně kolik.

Řešení témat

Téma 1 – Mise na Mars

Mission Impossible

Bc.$^{\text{MM}}$ Michal Růžek

Historický úvod

Mars po staletí naháněl strach svou krvavě rudou barvou. Symbolizoval nebeský příbytek krvežíznivého boha války Marse, kterého doprovázejí věrní druhové Strach (Phobos) a Hrůza (Deimos). Je ironií, že právě tato nepřátelsky vyhlížející planeta se dnes jeví jako nejpříhodnější místo ve sluneční soustavě pro lidské osídlení. Je otázkou, proč je nutné letět na Mars. Odpověď je prostá: protože tu je! Všechny nepokořené mety budou navždy vyzývat lidstvo k jejich překonání. V mém článku bych se chtěl zaměřit na možnosti dopravy na Mars z hlediska možností pohonu. Dále bych chtěl uvést nějaké skutečnosti týkající se dopravy vesmírem, stejně jako historické snahy o vypravení lodě s lidskou posádkou k rudé planetě.

Energie potřebná k dosažení trajektorie Marsu ze Země je přímo úměrná hmotnosti tělesa, které toto přemístění podstupuje. V případě sond Pioneer a Voyager, které se dostaly ještě dále, nebylo potřeba brát s sebou palivo na zpáteční cestu, která je stejně energeticky náročná, jako cesta k Marsu ze Země.[1] Proto tento náklad, který se pro cestu k Marsu jeví jako mrtvý, velice zvyšuje technické i finanční nároky. Nicméně i tak byl Mars pro mnohé konstruktéry metou, kterou si dali za předsevzetí zdolat. Mars byl velkým snem slavného německého konstruktéra Wernera von Brauna, schopný sovětský šéfkonstruktér Sergej Koroľov projektoval mnoho konceptů během 60. a 70. let.

S rozvojem raketové techniky se zvyšovaly požadavky na nosiče. V polovině 50. let byl odhad, že s použitím konvenčního chemického pohonu by pro let k Marsu bylo nutné, aby vesmírná loď měla na nízké oběžné dráze kolem Země hmotnost 1630 tun. Tehdejší (a dodnes) nejtěžší nosiče byly americký Saturn V, raketa vynášející kabiny Apollo k Měsíci, a sovětská N1. Saturn V měl maximální nosnost kolem 130 tun na nízkou oběžnou dráhu, N1 by vynesla vynesla na stejnou dráhu téměř 100 tun (raketa byla postavena, ale nebyla nikdy použita). Sovětský svaz získal v 80. letech těžkou raketu Enërgija o nosnosti 120 tun na nízkou oběžnou dráhu. Na sestavení marsovské lodě na oběžné dráze by bylo potřeba téměř 20 startů těchto raket. Projektované byly i mnohem enormnější rakety: sovětský UR 700M a americká Nova, které měly mít nosnost až 750 tun. Kvůli zrušení marsovských programů nebyly tyto rakety nikdy realizovány.

Bylo potřeba hledat jiný druh pohonu o stejném výkonu, ale menší hmotnosti. Objevily se dva. Nukleární elektrický a nukleární tepelný.[2] Oba systémy jsou napájeny energií získanou z jaderného reaktoru. V prvním případě jsou nabité částice urychlovány velice silným elektromagnetickým polem. Ve druhém případě jsou na vysoké teploty zahřívány pohonné látky, a ty opouštějí trysku vysokou rychlostí. Podle předpokladů je nukleární tepelný pohon o 40% a nukleární elektrický o 70% účinnější než klasický pohon chemický. Obě tyto koncepce byly důkladně studovány v Sovětském svazu. V USA se v 50. letech vyskytl neobvyklý projekt Orion pro dopravu velkých nákladů za hranice Jupitera. Loď měla být poháněna cíleným jaderným výbuchem. Technické potíže a podpis smlouvy o zákazu jaderných testů ukončily tento projekt. Ani v současné době není k dostání převratný druh pohonu pro daleké výpravy s lidskou posádkou. V polovině 90. let se odhadoval vývoj a realizace marsovské výpravy na 400 miliard USD. Proto vznikl v USA velice odvážný a enormně riskantní (zato nesrovnatelně levnější) návrh – nevést s sebou palivo na zpáteční cestu. Palivo by měla být posádka schopna syntetizovat z látek na Marsu. Rizika a nevýhody podobné akce jsou zřejmé.

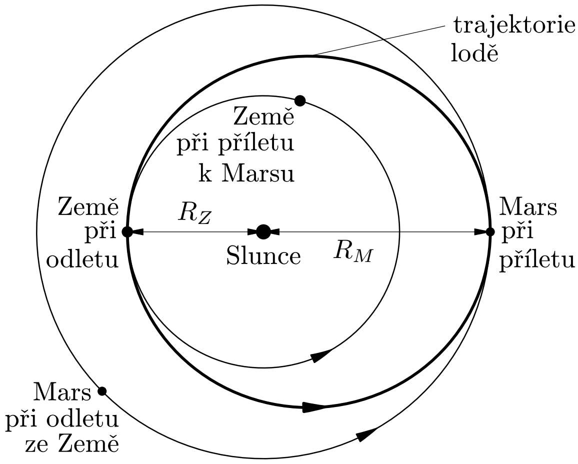
Energeticky nejvýhodnější trajektorie

Pozn. red.: Stejně jako několik dalších, i autor zjistil tvar nejvýhodnější trajektorie. Bohužel nikdo neuvedl, proč je tato trajektorie energeticky nejúspornější. Podaří se to někomu dokázat?

[1] *Pozn. red.: Jsem toho názoru, že je přeci jenom rozdíl, jestli sonda letí od Marsu k Zemi nebo naopak.*

[2] *Pozn. red.: Myslím, že existuji i jiné pohony vhodné na cestu na Mars.*

Pro cestu k Marsu je energeticky nejvýhodnější eliptická trajektorie s perihelem na oběžné dráze Země a afelem na oběžné dráze Marsu (viz obr. 1).



Obr. 1

Dobu celého oběhu po elipse lze určit z Keplerova zákona:

$$T_1^2 = \left(\frac{1}{2}\left(R_\mathrm{Z} + R_\mathrm{M}\right)\right)^3 \frac{T_\mathrm{Z}^2}{R_\mathrm{Z}^3}\,,$$

kde T_Z je oběžná doba Země a R_Z, R_M jsou velké poloosy Země a Marsu. Po dosazení dostáváme $T_1 = 516$ dní, čili cesta k Marsu bude trvat 258 dní. To je doba značně dlouhá, je tedy třeba brát v úvahu její vliv na úspěšnost mise. Rekord v délce pobytu ve vesmíru drží spolehlivě Rusové, jejichž kosmonauté pobývali dlouhé měsíce na vesmírných stanicích Saľjut a Mir. Absolutní rekord je značně delší než daných 258 dní, ale je nutné vzít v úvahu minimálně stejně tak dlouhou zpáteční cestu. Z tohoto důvodu bude nutná minimálně tříčlenná posádka, která bude mít velice dobrou psychickou přípravu (jak známe z knihy *2001 Vesmírná odyssea* od A. C. Clarka) pro překonávání problémů. Bude nutné nahradit alespoň částečně gravitaci, protože na lidský organizmus negativně působí dlouhodobý stav beztíže. Gravitační síla se projevuje tím, že působí na každou částici našeho těla stejným zrychlením (v homogenním gravitačním poli). Její náhražkou může být síla odstředivá vznikající otáčením velkého válce. Kritické zrychlení, které postačuje k dobré funkčnosti organismu po delší dobu je asi 22% našeho tíhového zrychlení.

Otáčející se válec má pro menší poloměry velkou nevýhodu. Síla, která působí na části těla kosmonauta, má různé hodnoty pro různé vzdálenosti od středu otáčení. To znamená, že zatímco nohy jsou těžce tlačeny ke stěně, hlava lehce sedí na krku. Takový spád zrychlení může mít negativní vlivy. Proto se objevují návrhy otáčející se soustavy, která by měla velký poloměr, a tudíž by změna zrychlení podél lidského těla byla zanedbatelná.

Závěr

Na závěr bych chtěl říci několik slov obecně. Cesta k planetě sluneční soustavy s lidskou posádkou již nemá takový význam jako v minulosti. Politický zisk v případě úspěšné mise se nevyrovná finanční ztrátě. To platí tím spíše, že robotické sondy jsou zpravidla větším přínosem pro astrofyziku než méně výkonné lidské výpravy. Na druhou stranu je vyslání lidské posádky k Marsu počinem, který mnoho znamená (minimálně nesmazatelnost v učebnicích historie) z hlediska prestiže. O prestiž se vždy vede tuhý boj, proto budeme v budoucnosti svědky soupeření i ve vyslání lidí k Marsu. Dnes není těžké odhadnout, které dva nejmenované státy budou usilovat o toto prvenství prvotřídní důležitosti.[3] Otázkou, na kterou zatím nikdo nezná odpověď, je, kdy k tomu dojde.

Malý príspevok pre veľký projekt

Doc.^MM^ Martin Demín

Na odštartovanie by bolo možné použiť ISS. Celú loď treba vyniesť na obežnú dráhu a poskladať alebo použiť Discovery, v tom prípade však nie je možné zabezpečiť umelú gravitáciu.

Ako náhradu gravitácie môžeme použiť prstenec, ktorý sa otáča. Na jeho otáčanie treba použiť pohon dýz, pretože elektromotor by podľa zákona akcie a reakcie otáčal celú loď.[4] Raz som počul aj niečo o iónovom pohybe: keď elektróny idú jedným smerom, reakcia pôsobí smerom opačným (ak ma pamäť neklame). Toto by bolo asi jediné riešenie, pretože dýzy potrebujú stlačený plyn alebo spaľovanie. Elektrickú energiu môžeme získavať jedine zo solárnych článkov (Discovery nimi nedisponuje). Myslím si, že gravitácia je potrebná, pretože aj napriek cvičeniam telo začne strácať kalcium a iné dôležité látky.

Pre posádku treba niesť veľa jedla. Ak by jeden človek zjedol každý deň 0,5 kg, potrebovala by posádka asi 500 kg jedla, avšak NASA určite už niečo vymyslela, a bude stačiť 300 kg pre team 5 osôb. Toto jedlo bolo počítané len na cestu tam. Samozrejme treba jedlo aj na pobyt. Vodu by bolo možné destilovať, obohatiť minerálmi a znova piť. Oblečenie, ktoré si zoberú so sebou, bude asi treba prať alebo treba použiť teflónové, ktoré nesaje vodu, a potom ho len vyprášiť raz za čas. Šampón by nebol treba, keby si vyholili hlavy, ale myslím si, že asi tak 5 litrov pre celú posádku postačí. Lyžice by asi bolo najlepšie umývať, pretože inak by museli brať viac ako 1 000 lyžíc. Ďalšia dôležitá látka je kyslík. Ten buď treba dopraviť, alebo použiť určitý spôsob recyklácie (fotosyntéza?). Prípadne by bolo možné pestovať rastliny alebo rozkladať CO_2 elektrolýzou.

---

[3] *Pozn. red.: Podle mě se ale nebude jednat o Spojené státy a Rusko, spíše o Spojené státy a Čínu.*

[4] *Pozn. red.: Je autorova úvaha správná? Další otázka: jak funguje iontový motor?*

GPS nefunguje.[5] Jediná možnosť orientácie je pomocou planét alebo hviezd. Pomocou počítača vieme určiť ich presnú pozíciu a vieme určiť našu pozíciu.

Keďže na Marse je CO_2 (90%) a O_2 (0,15%), mohli by sme pestovať nenáročné rastliny. Ľudia nemôžu na Marse dýchať, pretože tlak je len asi 1% z pozemského tlaku, ale nejakým rastlinám by to možno stačilo.

Na pohyb lode by sa musel použiť terajší pohon so stlačeným kyslíkom a vodíkom, pretože súčastná veda ničím iným nedisponuje.

Mission to Mars

Bc.$^{\text{MM}}$ Jiří Danihelka

Doprava na oběžnou dráhu

Je zřejmé, že naše meziplanetární kosmická loď s lidskou posádkou by nemohla startovat z povrchu Země přímo. Musela by totiž mít protáhlý „raketovitý“ tvar, aby mohla prorazit zemskou atmosféru. Pro pohyb ve vzduchoprázdnu vesmíru je však praktičtější tvar připomínající kouli.

Při startu z oběžné dráhy bych doporučil startovat z některé z vesmírných stanic na oběžné dráze. Pro tento účel by se nejlépe hodila Mezinárodní vesmírná stanice ISS, kde by mohly být již několik měsíců předem shromažďovány zásoby, vybavení a palivo. Průlez do naší lodi by měl být kompatibilní s ISS, aby mohla zakotvit a astronauti měli možnost snadno přenést vše potřebné.

Umělá gravitace

Nejjednodušším způsobem vytvoření umělé gravitace by bylo postavit loď ve tvaru anuloidu. (Elektrotechnici tomuto tvaru říkají toroid a někdy se mu česky říká i prstenec či pneumatika.) Pokud by anuloid rotoval kolem své osy dostatečně velkou rychlostí a pokud by byl dostatečně veliký, uvnitř anuloidu by se vytvořilo pole odstředivého zrychlení, které by mělo zhruba stejné vlastnosti jako gravitační pole. Tím by byl problém umělé gravitace vyřešen. Nevýhodou je ale to, že střed lodě by nemohl být obýván, protože je zde pole odstředivého zrychlení slabší. Pokud by byl tento prostor prázdný, mohlo by to způsobit konstrukčně-technické komplikace. Výhodnější by bylo vyplnit jej elektronikou nebo ještě lépe motory.

Druhý způsob spočívá v umístění protizávaží se stejnou hmotností jako loď na dlouhé lano spojené s lodí. (Možná by se lépe hodila dlouhá tyč.) Oba objekty by kolem sebe rotovaly a opět by vznikla odstředivá síla, která by nahradila sílu gravitační.

Za mimořádně elegantní nápad na vytvoření umělé gravitace považuji, že by loď v první polovině cesty na Mars rovnoměrně přímočaře zrychlovala, v polovině se otočila o 180 stupňů a druhou polovinu cesty rovnoměrně přímočaře

[5] *Pozn. red.: Proč nefunguje?*

brzdila. Na lodi by se tak vytvořila umělá gravitace s gravitačním zrychlením rovným zrychlení lodi. Rovnoměrné zrychlení po tak dlouhou dobu však může zajistit jen magnetický pohon, s jehož použitím lidstvo nemá téměř žádné zkušenosti.[6]

Astronauti také mohou použít systém umělé gravitace, který byl úspěšně ozkoušen na stanici Mir.

Za prvé: Jedna ze stěn se nazve podlahou.

Za druhé: Na podlahu se přilepí koberec.

Sice to není příliš účinné, ale astronauti alespoň poznají, kdy jsou hlavou dolů :-).

Co bude dnes dobrého?

Protože cesta na Mars i zpět by trvala několik měsíců a pobyt na povrchu pravděpodobně také, je poněkud nepraktické tahat s sebou takové množství zásob. Vhodnější by bylo, vzít si s sebou prostředky pro recyklaci vody a potravin. Již v současné době se s úspěchem daří pěstovat rostliny a některé druhy živočichů (převážně hmyz) ve stavu beztíže. Malá zahrádka na palubě lodi by mohla sloužit jako zdroj potravy a zároveň čistit vodu od organických zbytků. Pěstování rostlin se bude nejspíše uskutečňovat jinak, než jsme zvyklí na Zemi. Nebude se využívat půdy, veškeré potřebné látky budou rozpuštěny ve vodě. Kvůli úspoře místa se rostliny budou pěstovat v několika patrech nad sebou. Na každém patře budou umístěny světelné zdroje napájené ze solárních panelů. Světlo je nutné pro průběh fotosyntézy. Odhaduji, že mimo potravin bude každý astronaut potřebovat tak 40 kg jiných věcí.

Kdepak to zapíchneme?

Za jednu z nejdůležitějších věcí považuji sestavení plánu akcí, které astronauti musí na povrchu Marsu vykonat. Rozhodně by se neměli omezovat pouze na zapíchnutí nějaké vlajky. Důležité by bylo posbírat vzorky hornin z několika míst, udělat rozbor atmosféry a pátrat po zmrzlé vodě pod povrchem. Je třeba zjistit, zda je Mars vhodný ke kolonizaci.

Bzučo

Téma 2 – Tetris

Prof.$^{\text{MM}}$ Tibor Vansa nám zaslal tetrisové kostičky pro počet čtverečků $K = 5$. Dr.$^{\text{MM}}$ Dana Beránková nám zaslala kostičky pro $K \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$ (kostičky pro $K = 4$ byly uvedeny v zadání), Dr.$^{\text{MM}}$ Beránková navíc vyřešila problém obarvení, otiskujeme tedy její řešení.

Lukáš Chvátal nám pak zaslal program na generování (a spočtení) kostiček na počítači. Takto určil počty kostiček pro $K \leq 10$.

---

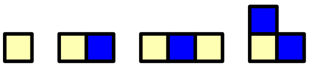
[6] *Pozn. red.: Toto řešení je tak energeticky náročné, že se nevyskytuje v žádné práci, popřípadě se ihned zavrhuje.*

Tetrisové kostičky

Dr.[MM] *Dana Beránková*

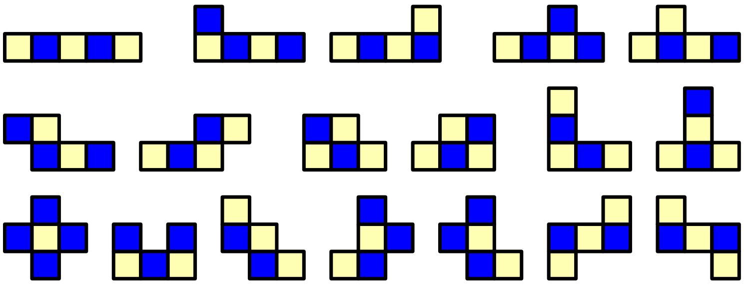
Obarvení tetrisových kostiček lze provést 2 barvami, ve stylu šachovnic (viz obrázky).

Pro jeden čtverec dostanu pouze jednu kostičku, pro dva čtverce také jednu a pro tři čtverce dostanu kostičky dvě (viz obr. 1).



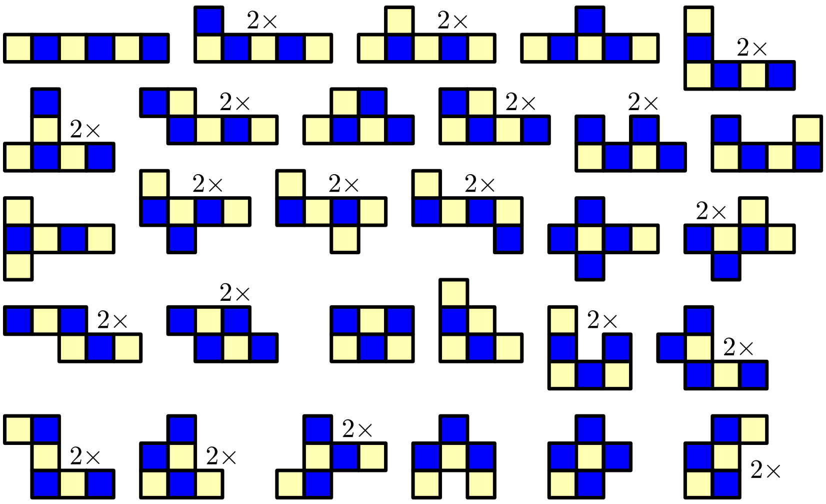
Obr. 1: Kostičky pro $K \in \{1, 2, 3\}$.

Pro pět čtverečků dostanu 18 kostiček (viz obr. 2).



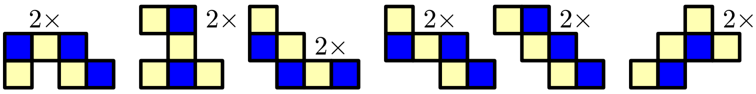
Obr. 2: Kostičky pro $K = 5$.

Pro šest čtverců dostanu 48 kostiček (viz obr. 3). Ke kostičkám, které mají u sebe připsáno „2×“, existuje ještě kostička osově souměrná (již nelze získat otočením původní kostičky).



Obr. 3: Kostičky pro $K = 6$.

Pozn. red.: Autorka zapomněla na 12 kostiček na obr. 4, celkem tedy pro $K = 6$ dostáváme 60 kostiček.



Obr. 4: Chybějící kostičky pro $K = 6$.

Program na tetrisové kostičky

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Lukáš Chvátal

Program ze vstupní množiny všech N kostiček z K čtverečků vytvoří množinu všech M kostiček z $K+1$ čtverečků. Program postupně nalepuje další čtvereček na všechna možná místa vstupních kostiček, při každém vkládání nové kostičky do výsledné množiny se kontroluje, zda v ní už taková kostička není (třeba jen pootočená). Výsledky mám zatím pro $K \in \langle 1, 10 \rangle$, dál už je to časově neúnosné (viz tab. 1).[7]

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1	1	2	7	18	60	196	704	2500	9189

Tab. 1: Počet kostiček N v závislosti na počtu čtverečků K.

Redakční poznámky k Lukášovu programu

Autor používá následující algoritmus:

Kostičky jsou reprezentovány spojovým seznamem souřadnic jednotlivých čtverečků, nicméně některé operace jsou realizovány s využitím reprezentace pomocí matice.

Program načítá postupně ze souboru jednotlivé kostičky složené z K čtverců. Pro každou kostičku provede následující kroky:

(1) Pro všechny čtverečky dané kostičky označí v matici pozice nad, pod, vlevo a vpravo od čtverečku.
(2) Odznačí čtverečky patřící do kostičky.

---

[7] *Pozn. red.: My jsme trošku „potrápili“ jeden z fakultních strojů (AMD Athlon 1600+) a dostali jsme počet $N = 33\,896$ pro $K = 11$, těsně před uzávěrkou čísla pak ještě $N = 126\,759$ pro $K = 12$. Zatímco pro $K \leq 6$ byla doba výpočtu v podstatě neměřitelná, pro $K = 7$ pouhých $0{,}2\,\mathrm{s}$ a pro $K = 8$ necelé $3\,\mathrm{s}$, pro $K = 9$ dosáhla již $40\,\mathrm{s}$, pro $K = 10$ téměř $11\,\mathrm{min}$, pro $K = 11$ skoro $3\,\mathrm{h}$ a pro $K = 12$ již pro netrpělivé povahy nepoužitelných téměř $42\,\mathrm{h}$.*

(3) Na každou označenou pozici v matici se pokusí přidat čtvereček. Takto vzniklou kostičku porovná se seznamem již vytvořených kostiček složených z $K + 1$ čtverečků a v případě, že se v tomto seznamu ještě nenachází, přidá ji.

Porovnávání, zda je kostička v seznamu, probíhá tak, že kostička a kostičky z ní vytvořené rotací o 90°, 180° a 270° jsou porovnávány se všemi kostičkami v seznamu.

Počet kostiček roste zhruba exponenciálně v závislosti na počtu čtverečků K (je dokonce dokázán odhad $3{,}72^K < P(K) < 4{,}65^K$, kde $P(K)$ je počet kostiček, přičemž se kostičky zrcadlově souměrné berou za totožné). Proto i nejlepší algoritmus, který bude generovat tetrisové kostičky, bude muset udělat počet kroků úměrný zhruba 4^K (ostatně počty kostiček jsou známy jen pro $K \leq 24$).

Pokusme se odhadnout, jak je na tom Lukášův algoritmus. Počet kostiček z K čtverečků je zhruba 4^K. Pro každou kostičku se pak provádějí kroky podle bodů (1), (2) a (3). V bodě (1) se provede počet kroků zhruba úměrný K^2, v bodě (2) se provede počet kroků zhruba úměrný K. Body (1) a (2) jsou ale zanedbatelné proti bodu (3). V bodě (3) se pro každou označenou pozici, kterých je úměrně K, provede přidání čtverečku, a daná kostička je pak porovnávána se všemi kostičkami již vytvořenými, těch je úměrně 4^K (zanedbáváme, že je třeba porovnat každý čtvereček dané kostičky s každým čtverečkem kostiček již vytvořených, tj. na každé porovnání připadá úměrně K operací, že provádíme každé porovnání čtyřikrát atd.).

Celkově má tedy generování kostiček složených z $K + 1$ čtverečků *s využitím již vygenerovaných* kostiček složených z K čtverečků složitost úměrnou $4^K \times 4^K = 16^K$ (faktor $K\times$ zanedbáváme, protože hraje pro větší K minimální roli), tedy máme sice opět exponenciální složitost v závislosti na K, ale „podstatně horší" než pro „ideální" algoritmus.

Je tedy na místě zamyslet se, zda by se to nedalo nějak vylepšit. Body (1) a (2) jsou z tohoto hlediska nezajímavé. Program tráví většinu času prováděním bodu (3), z toho pak nejvíce prohledáváním.

To by šlo urychlit dvěma způsoby:

(1) Zavedením nějaké „standardní" polohy kostičky. (Nebylo by pak potřeba provádět čtyři porovnání pro každou kostičku.)
(2) Roztříděním kostiček do kategorií podle nějakého vhodného kritéria. (Pak by nebylo nutné prohledávat celý seznam, ale stačilo by prohledat příslušnou kategorii.[8])

Samozřejmě, že oba body budou mít nějakou vlastní režii, ale pokud ušetříme více, než investujeme, je vše v pořádku.

[8] Ideální by bylo, navrhnout takové ohodnocení, které by bylo pro každou kostičku jednoznačné, abychom podle něj mohli kostičky setřídit. Pak by bylo možné najít určitou kostičku počtem porovnání úměrným $\log(N)$, kde $N = 4^K$ je počet kostiček.

Vhodnou metodou pro obě zlepšení by mohlo být například využít polohu těžiště kostičky (aritmetický průměr poloh čtverečků tvořících kostičku).

(1) Zadefinujme jako základní polohu kostičky takovou polohu, při které je těžiště kostičky co nejníže, v případě, že jsou dvě takové polohy, volíme tu, při které je těžiště více vlevo. Takto je základní poloha definována ve většině případů jednoznačně, avšak za určitých speciálních okolností tento postup selže. (Dovedete zjistit za jakých? Pro které z kostiček otištěných v tomto čísle se tak stane?) Tyto případy je třeba buď ošetřit zvlášť, nebo nadefinovat nějaké další kritérium, jak určit základní polohu v těchto případech. (Vymyslí někdo takové kritérium nebo, ještě lépe, navrhne někdo kritérium bez takovýchto „patologických“ případů?)

(2) Roztřídíme kostičky podle poloh těžiště v základní poloze (např. nejprve podle x-ové polohy a takto roztříděné kategorie dále roztřídíme podle y-ové polohy). Zkuste najít další vhodná kritéria (roztřídění podle více kritérií bude vhodné pro větší počty kostiček).

Nakonec bychom rádi připojili několik nápadů k zamyšlení.

(1) Je možné ze *všech* kostiček složených z K čtverečků složit čtverec, obdélník, případně každou z kostiček „ve větším vydání“? (Zkuste to ověřit pro monomino ($K = 1$), domino ($K = 2$), tromino ($K = 3$), tetromino ($K = 4$), případně pro pentomino ($K = 5$), pro větší K je již počet kostiček příliš velký.[9])

(2) Když jsme hledali, kolik je potřeba barev na obarvení kostiček, aby sousední čtverečky měly různou barvu, definovali jsme, že čtverečky sousedí, mají-li společnou hranu. Kolik by bylo potřeba barev, pokud bychom definovali, že čtverečky sousedí, mají-li společný vrchol?

(3) Zatím jsme vytvářeli kostičky pouze ze čtverečků, kolik bude kostiček, bude-li základním dílkem rovnostranný trojúhelník, pravidelný šestiúhelník nebo obecně pravidelný n-úhelník? Jak to bude s obarvením v tomto případě?

(4) Cokoli dalšího, co vás k tomuto napadne…

Martin Krsek & Hanss

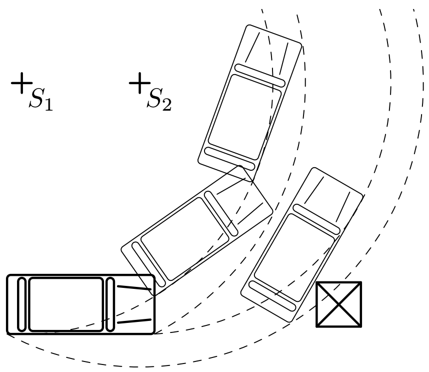
Téma 3 – Fyzika a doprava

Následující tři články jsou inspirovány příspěvky autorů Doc.$^{\text{MM}}$ Matina Demína, Mgr.$^{\text{MM}}$ Lukáše Pavlovského a Mgr.$^{\text{MM}}$ Lenky Studničné.

Řízení vozidel a přívěsů

Nad problémem manipulačních vozíků ve skladech se zamýšlel Doc.$^{\text{MM}}$ Martin Demín. „*… Z hľadiska konštrukčie nie je možné umiestiť otáčejúcé kolesá dopredu. Taktiež vzadu sa používa iba jedno koleso, avšak vpredu sú niekdy aj*

[9] Komu by se chtělo dělat něco podobného se všemi 1 309 998 125 640 kostičkami pro $K = 24$? :-)

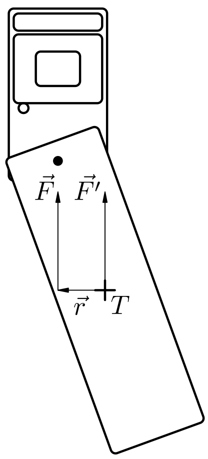


Obr. 1

dva páry kolies, ktoré by bolo problematické otáčať…" Dále zmínil i jeden čistě fyzikální důvod. „*… Pri zatáčení s prednými kolesami by náklad dostal viac kinetickej energie, pretože os otáčenia je zadné koleso, ak však zatáčame so zadným kolesom, os otočenia je na predných kolesách…*" Toto ovšem platí pouze v případě otočení kol o 90°. Pokud je natočíme méně, bude se vozík otáčet kolem bodu, ležícího obecně mimo vozík v průsečíku os všech kol.[10] Tvrzení Martina Demína o kinetické energii ale bude platit i v tomto případě. Dokážete spočítat, jak závisí moment setrvačnosti zatáčejícího vozíku na poloze těžiště a kol?

Při jízdě autem po silnici je nejdůležitější bezpečné ovládání vozidla. Často se potřebujeme rychle vyhnout překážce před námi. Kdyby se při zatáčení pohybovala zadní kola, zareaguje auto „pomaleji", než při pohybu předních kol. Nejlépe je to vidět na obrázku 1. Dráha vlevo se středem otáčení S_1 odpovídá zatočeným předním kolům a dráha vpravo (se středem otáčení S_2) zadním.

Aby se tedy řidič vyhnul překážce při zatáčení zadními koly, musel by ji zaregistrovat mnohem dříve. Při rychlém zatočení zadních kol navíc ještě vybočí „zadek" auta na opačnou stranu, a můžeme tak do něčeho narazit.



Obr. 2

U kamionu je vhodné, aby celá soustava tahače s návěsem byla během jízdy ve stabilně rovnovážné poloze (to znamená, že po malém vychýlení se návěs snaží vrátit do původní polohy). Při jízdě působí tahač na návěs v místě spojení nějakou silou $\boldsymbol{F}$. Ta se dá rozložit na sílu $\boldsymbol{F}'$, která působí v těžišti (tj. má pouze posuvný účinek), a její moment $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, který otáčí návěs kolem těžiště (viz obr. 2). Právě tento moment zajišťuje stabilitu přívěsu. Při brzdění je situace opačná, a pokud by brzdil jen tahač, bude na návěs působit silou $-\boldsymbol{F}$ a vzniklý moment se naopak snaží kaž-

[10] Co by se stalo, kdyby se osy kol neprotínaly v jednom bodě?

dou malou výchylku návěsu dále zvětšit. Proto je důležité, aby brzdila hlavně kola návěsu, a tahač pak bude ve stabilní poloze.

Pokud by byl návěs připojen před tahač, bude v labilně rovnovážné poloze. Rameno $\boldsymbol{r}$ je nulové, pokud je souprava přesně rovně. Pak bude nulový i moment síly a návěs se pohybuje tak, jak má. Avšak i při malé výchylce vznikne nenulový moment, který v tomto případě návěs nevrací zpět, ale naopak jej přetáčí dál. Řidič tedy musí situaci stále srovnávat opačným natočením tahače, což by bylo při jízdě velmi nevhodné. Obdobně se chová běžný kamion při couvání.

Problém remorkéru zatím nebyl úplně vyřešen. Většina z vás napsala, že umístění nákladu za remorkérem je nevhodné, protože proud vody z lodního šroubu naráží do lodě s nákladem, a snižuje tím účinnost motoru. Na druhou stranu je to jediné možné řešení, pokud chceme odtáhnout více nákladních lodí, takže se konstruují i tažné remorkéry. Lukáš Pavlovský napsal, že soustava remorkéru a nákladní lodě připojené před ním může být stabilní v případě pevného spojení. To je pravda, ale existují i typy s kloubovým připojením nákladu, které by podle výše uvedených úvah týkajících se kamionu měly být nestabilní. Jaké jsou důvody pro stavbu remorkérů tohoto typu a jak je to s jejich stabilitou?

Elektrické a spalovací motory

Elektromotor tramvaje dokáže, na rozdíl od spalovacího motoru, působit dostatečným momentem síly ve velkém rozsahu otáček včetně nulových, takže tramvaj nepotřebuje udržovat otáčky motoru v optimálních mezích (což dělá převodovka u auta) a nepotřebuje oproti spalovacímu motoru ani spojku pro rozjezd. Zajímavý nápad k tomuto tématu poslala Mgr.^M^ Lenka Studničná. Uvažovala nad možností použití generátoru a elektromotoru v automobilech. *„Naftový (benzínový) motor má účinnost přibližně 40% (30%). Na převodovce se ‚ztrácí' pouze 3%, takže použití generátoru (ten má účinnost asi 70%) by bylo velmi nevýhodné. Navíc generátor není malé zařízení, takže by se v autě zmenšil využitelný prostor a bylo by také těžší.*[11]*"*

Naopak u dieselových lokomotiv se tato konstrukce skutečně používá, jak zmínil Doc.^M^ Martin Demín. *„U vlakov s naftovým motorom nie je z konštrukčného hľadiska možné použiť prevodovku,*[12] *preto sa požívajú 2 spôsoby*

1) Keďže výkon motora je dostatočný, je použitá hydrospojka na rozbeh a potom sa motor pripojí na priamo. Pravdepodobne len osobné vlaky, kde nie je potrebná veľká sila.

2) Diesel-elektrický motor. Naftový motor generuje elektrický prúd, ktorý je možné regulovať a ktorý je použitý na rozbeh vlaku. Nákladné vlaky."

---

[11] *Pozn. red.: Zkuste tento nápad rozvést v souvislosti s indukčními brzdami (viz redakční náměty na konci tohoto tématu).*

[12] *Pozn. red.: U lehkých motorových vlaků se převodovka běžně používá.*

Lokomotivy

Na důvodu vysoké hmotnosti lokomotiv se všichni shodli. Protože kola vagonů nejsou poháněna, je potřeba, aby smykové tření kol lokomotivy bylo co největší (jinak by lokomotiva nebyla schopna rozhýbat vlak). Toho se dosáhne právě velkou hmotností.

Vliv poháněné nápravy a umístění motoru na jízdní vlastnosti osobních aut

Mgr.ᴹᴹ Lenka Studničná

U automobilů se používala nebo používají následující řešení:

(1) Motor vzadu, pohon vzadu (např. staré Škodovky[13]). Velkým kladem tohoto uspořádání je, že váha motoru leží na poháněných kolech, která se pak v extrémních podmínkách (např. náledí, bláto) neprotáčejí – říkáme, že je dobrá trakce[14]. Zadní část vozidla je těžší, což způsobuje, že je vozidlo při zatáčení přetáčivé. Nastávají také problémy s chlazením – pomocí náporového chladiče ochlazuje vzduch kapalinu vpředu, ta musí být vedena dozadu k motoru, a potrubí pak zabírá místo.[15] Chlazení by mohlo probíhat ventilátorem, ale ten zbytečně snižuje výkon vozidla. Nevýhodou také je, že motor zabírá prostor vzadu, a nemůže tak být použita karoserie typu combi.

(2) Motor vepředu, pohon vzadu (např. BMW). Největší nevýhodou jsou málo zatížená poháněná kola (špatná trakce), takže toto uspořádání není vhodné do extrémních podmínek, kde by docházelo k protáčení kol. Tato nevýhoda je řešena např. u Tatry 57 nebo některých Alfa Romeo tím, že je použito tzv. uspořádání transaxle – motor je vepředu, ale převodovka je umístěna vzadu, takže je zadní část vozidla těžší. Pohon zadních kol je konstrukčně jednodušší tím, že při pohonu kol, kterými zatáčíme (tedy předních) se musí používat složité kosmokinetické klouby. Naopak nevýhodou je nutnost hřídele pro přenos pohybu zepředu dozadu.

(3) Motor vepředu, pohon vepředu (dnes u většiny aut). Přední kola jsou v tomto případě vhodně zatížena,[16] zadní náprava je jednoduchá a

[13] *Pozn. red.: Dále také supersporty jako Lamborgini Diablo SV nebo Ferrari Testarossa ;-), i když tam je motor posunut více dopředu.*

[14] *Pozn. red.: Tj. přenos tažné síly mezi kolem a vozovkou.*

[15] *Pozn. red.: Potrubí pod vozem není nijak velký problém. Je celkem úzké. Naopak při umístění motoru vpředu a nádrže pod zadními sedadly (což je dost běžné), je nutné vést stejným způsobem pohonné hmoty.*

[16] *Pozn. red.: Z hlediska trakce při akceleraci vozidla je ale ještě výhodnější první uspořádání (motor vzadu a pohon na zadní kola), protože zadní kola jsou zatížena více.*

není potřeba hřídel, takže zbývá více prostoru pro cestující. Umístění motoru vpředu se na první pohled zdá nebezpečné pro cestující při čelním nárazu. Tak tomu také bylo např u „žigulíka“, ale v dnešní době je rám motoru konstruován tak, že se při nárazu utrhne a bezpečně sjede pod auto.

(4) Pohon na všechna 4 kola. Díky rovnoměrnému rozložení váhy[17] má vůz dobrou trakci. Moment se však musí přenášet do všech kol, a to vede ke snížené účinnosti. To je v některých automobilech (např. Octavia 4x4) řešeno tím, že v běžném provozu je pohon pouze na přední kola a teprve při trakčních problémech (to signalizují elektronická čidla) se připojí i zadní kola.

Automobilové brzdy

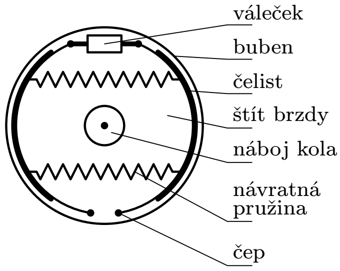
Mgr.^MM Lukáš Pavlovský

V současné době se používají brzdy přímočinné, polostrojní a strojní. Přímočinné mohou být mechanicky či hydraulicky ovládané bez posilovače brzdné síly. Polostrojní jsou hydraulické s posilovačem a strojní jsou pneumatické brzdy ovládané stlačeným vzduchem z kompresoru motoru. Všechny tyto tři druhy brzd se rozdělují na kotoučové a bubnové.

Bubnové brzdy

Tyto brzdy jsou konstruovány u všech typů vozidel převážně na zadní nápravě.[18]

Princip brzdění



Obr. 3

Brzdový buben je pevně spojen s kolem a je naražen na poloose. Čelisti jsou umístěny uvnitř dutiny bubnu a jsou kloubově uchyceny na štítu brzdy, který je uchycen na závěsu kola a neotáčí se spolu s bubnem. Čelisti je možno brzdovým mechanismem rozepínat. Sešlápne-li řidič brzdový pedál, tlak se přenese přes brzdovou kapalinu do brzdového válečku (u přímočinných brzd) a píst brzdového válečku oddálí čelisti od sebe. Tím se začnou třít o vnitřní stěnu bubnu, a začnou ho tak brzdit spolu s kolem.

Bubnové brzdy mají následující vlastnosti

[17] *Pozn. red.: V tomto případě je podstatnější to, že nám stačí pouze zhruba poloviční tření oproti autu s pohonem dvou kol.*

[18] *Pozn. red.: U starších automobilů byly bubnové brzdy používány na všech kolech a teprve časem je postupně nahrazovaly kotoučové.*

- Efekt samozesílení – tření vytváří točivý moment, který náběžnou čelist vtahuje do bubnu a zesiluje brzdný účinek. Přítlak úběžné čelisti se sníží.
- Konstrukce uvnitř prohlubně kola je chráněna před nečistotami.
- Lze snadněji realizovat ruční brzdu.
- Dlouhá životnost brzdového obložení.
- Omezení konstrukční velikosti, protože ta je závislá na velikosti kola.
- Nákladná výměna a údržba obložení.
- Špatné odvádění tepla, což může vést k selhání brzd (tzv. fading) – součinitel smykového tření klesá s rostoucí teplotou a rychlostí. Při přehřátí se brzdy stávají prakticky nefunkční. Selhání brzd může být způsobeno také deformací brzdového bubnu způsobenou nerovnoměrným ochlazováním.[19]

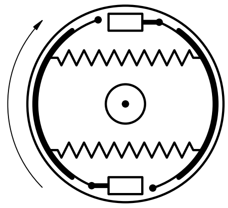
Existuje pět druhů bubnových brzd podle druhu ovládání a uložení čelistí.

- brzdy simplex
- brzdy duplex
- brzdy duo-duplex
- brzdy servo
- brzdy duo-servo

Zaměřím se na první tři.

Simplexní brzdy mají jeden dvojčinný hydraulický váleček (se dvěma písty). Jedna čelist je zde tzv. náběžná a druhá úběžná.

Duplexní brzdy mají dva jednočinné válečky (s jedním pístem). V jednom směru pohybu bubnu mají dvě náběžné čelisti (viz obr. 4), a tedy vysoký brzdný výkon. Při opačném směru pohybu bubnu se z náběžných čelistí stanou úběžné a brzdný výkon klesne.



Obr. 4

Duo-duplexní brzdy mají dva dvojčinné válečky. V obou směrech pohybu bubnu jsou obě čelisti náběžné a brzdná síla je velká a stejná při jízdě vpřed i vzad.

Kotoučové brzdy

Tyto brzdy jsou u všech typů vozidel převážně na přední nápravě.[20]

Princip brzdění

Kotouč je pevně spojen s kolem a je stejně jako buben naražen na poloose. Kotouč je obepínán brzdovým třmenem, ve kterém jsou uloženy brzdové válečky s písty. Třmen je uchycen na závěsu kola a neotáčí se. Na pístech jsou

[19] *Pozn. red.: Negativní následky na funkčnost těchto brzd má také voda, která se někdy (například při průjezdu hlubokou louží) může dostat do brzdového bubnu.*

[20] *Pozn. red.: U výkonnějších automobilů se montují i na zadní nápravy.*

připevněny brzdové destičky (třecí segmenty). Při sešlápnutí pedálu brzdy se písty prostřednictvím hydraulického zařízení k sobě přiblíží, a přitlačí tím tak brzdové destičky na kotouč, čímž ho začnou brzdit.

Kotoučové brzdy mají následující vlastnosti

- Kvůli rovným plochám nedochází k samozesílení. Vyžadují proto výkonnější hydraulický (příp. pneumatický) systém.
- Malé snižování součinitele tření – nedochází ke kolísání brzdné síly, a tu pak lze dobře regulovat.
- Dobré chlazení, malý sklon k fadingu.
- Větší opotřebení obložení v důsledku vysokých tlaků.
- Automatické seřizování vůle.
- Brzdný účinek nezávisí na směru jízdy.
- Dobré samočištění způsobené odstředivými silami.
- Sklon k tvoření bublinek páry v brzdové kapalině, protože je zde přímý kontakt kapaliny a pístu spojeného s třecím segmentem.
- Realizace parkovací brzdy je poměrně náročná.

Existují různé druhy kotoučových brzd. Např. čtyřpístové brzdy, brzdy s vnějším nebo vnitřním chlazením kotouče, s plovoucím nebo pevným třmenem apod. Jsou dokonalejší než brzdy bubnové, a proto je v dnešní době často nahrazují.

Další redakční náměty k tomuto tématu

Výše popsané (a dnes běžně používané) brzdové systémy automobilů mají jednu velkou nevýhodu. Při brzdění je veškerá kinetická energie neužitečně přeměněna na teplo. Obzvlášť v městském provozu, kde se často brzdí a zrychluje, je to dost neefektivní. Alternativou jsou automobily s elektrickým pohonem, které mohou používat indukční brzdy.

Tyto brzdy jsou (jak název napovídá) založeny na principu elektromagnetické indukce. Pokud v magnetickém poli otáčíme vodivý závit, indukuje se na jeho koncích napětí. Pokud tyto konce spojíme, začne procházet proud. To to je princip funkce dynama, ale nás v tuto chvíli zajímá další efekt. Lenzovo pravidlo říká, že indukovaný proud působí proti změně, která jej vyvolala. Změnou je v tomto případě otáčení závitu, a indukovaný proud tedy toto otáčení brzdí. Teď by mělo stačit připevnit takový uzavřený závit ke kolům a nechat jej otáčet v magnetickém poli. Získáme tím brzdný efekt a navíc můžeme vzniklý proud využít k dobíjení akumulátorů. Tolik teorie. Zamyslete se nad tím, jak by vypadala realizace tohoto systému v praxi. Dá se takto automobil vůbec bezpečně zabrzdit? Jakou část kinetické energie auta je možné takto získat zpět? Napište nám případně i o dalších věcech týkajících se konstrukce automobilů na elektrický pohon.

Dále pro vás máme ještě jeden námět k přemýšlení. Při běžné jízdě autem platí, že odporové síly jsou přibližně úměrné druhé mocnině rychlosti v auta podle Newtonova vztahu pro odpor prostředí

$$F = \frac{1}{2}\,C\rho S v^2\,,$$

kde ρ je hustota vzduchu, C konstanta charakterizující tvar auta a S jeho průřez kolmý na směr pohybu.

Jak budou vypadat odporové síly a jaká bude jejich závislost na rychlosti při jízdě v hustém dešti?

Marble & Mirek

Řešení úloh

Úloha 1.1 – Padající planetky (4b)

Zadání: *V prázdném prostoru jsou pouze dvě planetky zanedbatelných rozměrů o hmotnostech m a M, přičemž platí $m \ll M$. Na počátku jsou vůči sobě v klidu a je mezi nimi vzdálenost d. Vaším úkolem je zjistit, za jak dlouho od tohoto okamžiku se srazí.*

Řešení:
Planetky ve vzdálenosti d na sebe působí gravitačními silami stejné velikosti a opačného směru. Síly směřují proti sobě a mají velikost

$$F = \frac{\kappa m M}{d^2}\,. \tag{1}$$

Vliv menší planetky na velkou je vzhledem k poměru jejich hmotností tak malý, že jej můžeme zanedbat. Rozměry planetek můžeme zanedbat, protože předpokládáme, že jsou mnohem menší, než jejich vzdálenost. Je zřejmé, že síla závisí na vzdálenosti planetek, a tak nebude po dobu pohybu konstantní. Pohyb tedy nebude rovnoměrně zrychlený. Výsledek můžeme zjistit použitím Keplerových zákonů. Nejprve spočítáme, za jak dlouho by obletěla menší planetka větší, kdyby se pohybovala po kruhové dráze s poloměrem d. Využijeme přitom vzorce pro dostředivé zrychlení a vzorce pro dráhu.

Dostředivé zrychlení je rovno gravitačnímu

$$\frac{v^2}{d} = a_{\mathrm{g}}\,,$$

dosadíme za gravitační zrychlení ze vztahu (1) s využitím $F = m a_{\mathrm{g}}$

$$v^2 = \frac{\kappa M}{d}\,. \tag{2}$$

Rychlost pohybu po kruhové dráze bude
$$v = \frac{2\pi d}{T_\mathrm{k}} .$$
Po dosazení do rovnice (2)
$$\kappa \frac{M}{d} = \frac{4\pi^2 d^2}{T_\mathrm{k}^2} ,$$
po úpravě
$$\frac{T_\mathrm{k}^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M} . \tag{3}$$

Podle prvního Keplerova zákona se tělesa v radiálním poli pohybují po eliptických drahách. (Kružnice je elipsa, jejíž ohniska splývají v jediném bodě.) Jak závisí tvar dráhy na počáteční rychlosti malé planetky? Pro jednoduchost uvažujme, že malá planetka má na počátku rychlost kolmou na spojnici obou planetek. Planetce udělíme takovou rychlost, aby se pohybovala právě po kruhové dráze. Když budeme počáteční rychlost planetky snižovat, bude se planetka pohybovat po elipse, v jejímž jednom ohnisku (na počátku vzdálenějším od menší) bude větší planetka. Jestliže budeme tuto rychlost snižovat až k nule, bude se elipsa zplošťovat, až se z ní při nulové rychlosti stane úsečka. V jednom koncovém bodě bude větší planetka a v druhém menší planetka, koncové body úsečky budou „ohniska zploštělé elipsy“. V případě, že by se planetky nesrazily, bude se menší planetka periodicky pohybovat právě po této úsečce.

Podle třetího Keplerova zákona je výraz T^2/a^3, kde a je hlavní poloosa, konstantní pro každou elipsu i pro „zploštělou“. Velikost hlavní poloosy je v případě kruhové dráhy rovna d a v případě „zploštělé elipsy“ $d/2$.

Platí tedy
$$\frac{T_\mathrm{k}^2}{d^3} = \frac{T^2}{(d/2)^3} = 8\,\frac{T^2}{d^3} .$$
Dosadíme za T_k^2/d^3 z (3)
$$4\,\frac{\pi^2}{\kappa M} = 8\,\frac{T^2}{d^3} .$$
Upravíme a vyjádříme čas
$$T = \pi \sqrt{\frac{d^3}{2\kappa M}} .$$

Jelikož ale planetka dopadne, nebude mít možnost proletět celou dráhu a vrátit se na původní místo. Ke srážce dojde v polovině oběhu, takže výsledný čas bude poloviční
$$t = \pi \sqrt{\frac{d^3}{8\kappa M}} .$$

Nakonec ještě pár poznámek. Mnozí řešitelé si neuvědomili, že se síla v průběhu pohybu mění. Není tu tedy možné použít vzorec pro rovnoměrně zrychlený pohyb a očekávat správný výsledek. Dále je možné se pokusit vyřešit problém pomocí pohybové rovnice. Protože umíme určit sílu působící na planetku, můžeme napsat její pohybovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa \frac{M}{r^2} \, .$$

Najít obecné řešení této rovnice není zrovna jednoduché, ale jde to.

Jirka a kol.

Úloha 3.2 – Kartičky (3b)

Zadání: *Učitel dá dvěma žákům kartičky s číslem od jedné do devíti (každému jednu). Navíc jim řekne, že čísla na kartičkách jsou po sobě jdoucí. Jejich úkolem je uhodnout, jaké číslo má ten druhý. Učitel se zeptá prvního, jestli to ví. „Nevím." Pak se zeptá druhého. „Nevím." Na to první vykřikne: „Já vím!" Jaká čísla mohli mít na kartičkách?*

Řešení:

Žáci dostanou od učitele kartičky s po sobě jdoucími čísly 1 až 9. Situaci, kdy první žák dostane kartičku s číslem a a druhý s číslem b, budeme značit uspořádanou dvojicí $[a, b]$. Např. dvojice $[1, 2]$ značí, že první žák dostal kartičku s číslem 1 a druhý žák s číslem 2. Rozeberme všechny možnosti, jak mohly být kartičky rozdány. Jsou to tyto: $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 5]$, $[5, 6]$, $[6, 7]$, $[7, 8]$, $[8, 9]$, $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[4, 3]$, $[5, 4]$, $[6, 5]$, $[7, 6]$, $[8, 7]$ a $[9, 8]$.

Ihned je zřejmé, že možnosti $[1, 2]$, $[2, 1]$, $[8, 9]$ a $[9, 8]$ nevyhovují zadání, protože žák, který má jedničku (resp. devítku) by ihned odpověděl „Vím."

Pokud první žák dostane kartičku s číslem 2, ví, že v úvahu připadají možnosti $[2, 3]$ a $[2, 1]$. Druhý žák odpoví „Nevím," z toho je prvnímu jasné, že druhý žák má trojku. Situace $[2, 3]$ tedy odpovídá zadání, stejně jako k ní symetrická $[8, 7]$.

Další možnost $[3, 2]$ probíhá takto: Žák s číslem 3 neví. Jeho spolužák si domyslí, že první žák nemá jedničku, a říká „Vím." Případ $[7, 8]$ vypadá podobně, ani jeden není správným řešením.

V případě $[3, 4]$ napoprvé neví ani jeden z žáků, jaké číslo má ten druhý. Díky tomu první žák vyloučí výše zmíněnou možnost $[3, 2]$ a s jistotou vykřikne „Já vím!" Situace $[7, 6]$ je obdobná a obě jsou možným řešením.

Možnosti $[4, 3]$, $[4, 5]$, $[5, 4]$, $[5, 6]$, $[6, 5]$ a $[6, 7]$ by odhalili až po více odpovědích.

Situaci popsanou v zadání tedy splňují pouze dvojice $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[7, 6]$ a $[8, 7]$.

B.B.

Úloha 1.3 – Čtyři závaží (5b)

Zadání: *Mějme dvouramenné váhy a čtyři závaží. Navrhněte hmotnosti závaží, aby s jejich pomocí bylo možné na vahách navážit 1, 2, 3, …, n kilogramů tak, že n bude co největší (tedy chceme mít možnost určovat všechny celočíselné hmotnosti od 1 do n kilogramů).*
Zkuste dokázat, že žádnou jinou sadou čtyř závaží už nelze získat větší n.

Řešení:
Nejprve budeme závažíčka pokládat pouze na jednu misku vah, na druhé misce bude předmět, který chceme zvážit. Pro navážení hmotnosti 1 kg potřebujeme jednokilogramové závaží. Další závaží budeme volit vždy co největší, abychom mohli vážit co nejtěžší předměty. Druhé závaží musí mít hmotnost 2 kg, abychom mohli odměřit hodnotu 2 kg. Hodnotu 3 kg získáme použitím obou závažíček. Abychom mohli zvážit 4 kg, potřebujeme už čtyřkilové závaží – to bude v pořadí třetí. Hodnoty 5, 6 a 7 kg získáme kombinací těchto tří závaží. Jak už jistě tušíte, čtvrté závaží bude mít hmotnost 8 kg. S touto sadou můžeme odvážit hmotnosti od 1 do 15 kg.

Můžeme ale použít i lepší postup tak, že budeme závaží klást na obě misky vah. Jejich hmotnosti se pak mohou od sebe odečítat.

Nejmenšímu závaží dáme opět hmotnost 1 kg. Tak už můžeme zvážit jeden kilogram. Další hodnota, kterou potřebujeme, je 2 kg. Lepší možností než vyhradit tuto hmotnost pro druhé závaží, je přiřadit druhému závaží hmotnost 3 kg. Opět se totiž snažíme, aby jednotlivá závaží byla co nejtěžší, a tím jsme mohli vážit co největší hmotnosti. Hodnoty 2 kg pak dosáhneme tak, že dáme jednokilogramové závaží na misku s věcí, kterou chceme zvážit a tříkilogramové na vedlejší misku. Hodnotu 2 kg jsme tak získali rozdílem $3-1$. Hodnotu 4 kg získáme tak, že závaží 1 kg a 3 kg položíme obě na stejnou misku, což můžeme zapsat jako součet $3+1$. Další hodnota, kterou potřebujeme, je 5 kg. Hmotnost třetího závaží zvolíme 9 kg, abychom hodnotu 5 kg mohli získat jako rozdíl $9-3-1$. (Závaží 3 kg a 1 kg položíme na misku s předmětem, který chceme vážit, závaží 9 kg na druhou misku.) Hodnoty 6 až 13 kilogramů získáme kombinacemi těchto tří závaží. Nejvýhodnější způsob, jak získat hodnotu 14 kilogramů, je rozšířit sadu závaží o sedmadvacetikilové závaží. Můžete si zkusit, že kombinacemi závaží o hmotnostech 1, 3, 9 a 27 kg lze pak zvážit všechny celočíselné hodnoty od 1 do 40.

Abychom dokázali, že neexistuje žádná čtveřice závaží, pomocí které bychom mohli zvážit všechny celočíselné hmotnosti od 1 do n kg, kde n je větší než 40, vytvoříme následující označení. Každému závaží přiřadíme vždy právě jeden ze znaků $+, -, 0$ podle toho, kam ho umístíme. Je-li závažíčko na misce s předmětem, který vážíme, přiřadíme mu $-$, je-li na druhé misce, přiřadíme $+$, a není-li použito, přiřadíme mu 0. Každé uspořádání závažíček tedy lze jednoznačně zapsat jako uspořádanou čtveřici znamének $+, -, 0$ tak, že na prvním místě čtveřice bude stát znaménko prvního závaží, na druhém místě znaménko druhého závaží atd. Například uspořádaná čtveřice $[+, -, +, 0]$ značí, že první a třetí závaží jsou na misce, kde není předmět, který vážíme, druhé závaží je na misce s předmětem a čtvrté závaží nebylo použito. Hmotnost předmětu, který vážíme, pak z uspořádané čtveřice zjistíme tak, že součet hmotností závaží se znaménkem + zmenšíme o hmotnost závaží se znaménkem −. Pro výše uvedený příklad je hmotnost předmětu rovna součtu hmotností prvního a třetího závaží mínus hmotnost druhého závaží. Je-li výsledek záporný, nenastane na vahách rovnováha, předmět, který vážíme, by pak musel mít jakoby „zápornou“ hmotnost. Na každém místě uspořádané čtveřice mohou být tři různá znaménka, takže počet všech navzájem různých uspořádaných čtveřic získáme jako součin $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ (jedná se o počet čtyřčlenných variací s opakováním ze tří prvků). Teoreticky tak získáme 81 různých celočíselných hmotností, ale některé z nich vyloučíme.

(1) Uspořádaná čtveřice $[0, 0, 0, 0]$ nepředstavuje kladnou hodnotu. Ani jedno závaží nebylo použito.
(2) Ze zbylých 80 čtveřic můžeme vytvořit páry tak, že k libovolné čtveřici přiřadíme čtveřici opačnou. Na místě, kde je v původní čtveřici nula, je v opačné čtveřici také nula, kde je v původní +, je v opačné −, a naopak. V praxi to znamená, že pro opačnou čtveřici použijeme stejné kombinace závažíček, ale každé závažíčko umístíme na opačnou misku vah než původně. Tento postup můžeme také vyjádřit tak, že prvky v původní čtveřici násobíme -1. Byla-li u původní čtveřice hodnota hmotnosti kladná, bude mít opačná čtveřice hodnotu zápornou a naopak. Z 80 čtveřic vytvoříme 40 párů, v kterých má právě jedna čtveřice hodnotu kladnou a právě jedna zápornou. Proto můžeme vyloučit 40 dvojic se zápornou hodnotou, pro které má předmět jakoby „zápornou“ hmotnost.

Zůstalo nám tedy čtyřicet kombinací závažíček, kterými získáme nejvýše čtyřicet různých celočíselných kladných hmotností. Naše sada závaží 1, 3, 9, 27 umožňuje zvážit právě těchto čtyřicet hmotností.

Pokud jste se důkazem prokousali až sem, můžete si sami zkusit dokázat, že pokud klademe závažíčka pouze na jednu misku vah (viz první část řešení), pak je sada 1, 2, 4, 8 kg nejlepší. (Důkaz se redukuje o bod 2, jinak postupujeme obdobně.)

Lenka & Mirek

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	t1	t2	t3	r1	r2	r3	+	$\sum_0$	$\sum_1$
			Úlohy								
1.	Mgr.^{MM} Lenka Studničná	24	5		12		3	4		24	24
2.	Prof.^{MM} Tibor Vansa	286	11	4		4	1	3		23	23
3.	Mgr.^{MM} Zuzana Rozlívková	43	15				2	3		20	20
4.	Doc.^{MM} Martin Demín	185	7		7	1	1	3		19	19
5.	Mgr.^{MM} Lukáš Chvátal	43		12		5	1			18	18
6.–7.	Bc.^{MM} Jiří Danihelka	17	9				3	5		17	17
	Bc.^{MM} Michal Růžek	17	12			4	1			17	17
8.–11.	Prof.^{MM} Vašek Cviček	208				5	3	5		13	13
	Dr.^{MM} Tomáš Štec	58				4	3	6		13	13
	Bc.^{MM} Jan Olšina	13				5	3	5		13	13
	Bc.^{MM} Lukáš Vozdecký	13				5	3	5		13	13
12.–13.	Dr.^{MM} Peter Bališ	74	3		5	1	1	2		12	12
	Mgr.^{MM} Lukáš Pavlovský	37			12					12	12
14.	Bc.^{MM} Ondřej Honzl	11				4	2	5		11	11
15.	Dr.^{MM} Dana Beránková	69		8	2					10	10
16.	Mgr.^{MM} Helena Kubátová	26					3	3	3	9	9
17.–19.	Mgr.^{MM} Stanislav Basovník	38				5	3			8	8
	Bc.^{MM} Vojta Kubáň	13					3	5		8	8
	Marián Galovič	8					3	5		8	8
20.–22.	Michal Demín	7				1	3	3		7	7
	Petra Malá	7			3	0	1	3		7	7
	Tomáš Gavenčiak	7					2	5		7	7
23.–26.	Mgr.^{MM} Jan Špiřík	33				1	1	4		6	6
	Mgr.^{MM} Michaela Šikulová	22					3	3		6	6
	Ján Gulaš	6				1	3	2		6	6
	Zuzana Králová	6					1	5		6	6
27.–30.	Marek Ovčáček	5				0	3	2		5	5
	Martin Dungl	5						5		5	5
	Tereza Klimošová	5					1	4		5	5
	Vladimír Vinařský	5						5		5	5
31.–35.	Jan Bulánek	4					2	2		4	4
	Lucie Phamová	4				1		3		4	4
	Radim Kusák	4					1	3		4	4
	Vojtěch Krejčiřík	4					2	2		4	4
	Štěpánka Mohylová	4					1	3		4	4
36.–37.	Monika Babjarová	3					1	2		3	3
	Pavla Grubhofferová	3					3			3	3

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy t1	t2	t3	r1	r2	r3	+	$\sum_0$	$\sum_1$
38.–40.	Monika Martinisková	2				0	0	2		2	2
	Petra Guhlová	2					2			2	2
	Vendula Dvořáková	2				1		1		2	2
41.–47.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Zuzana Svobodová	29					1			1	1
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Jana Babováková	27				0	1			1	1
	Michal Rychnovský	5					1			1	1
	Jan Kaštil	1						1		1	1
	Jan Vrba	1					1			1	1
	Michal Kočař	1				0	1			1	1
	Zuzana Míčová	1					1			1	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$). Sloupeček + značí mimořádné body.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.