


Milí řešitelé,

konečně se vám dostávají do rukou poslední dvě čísla minulého roku. Moc se omlouváme za zpoždění. Spolehlivost záznamových médií je převít, nezálohování výsledků práce nezodpovědnost. Rovněž spolehlivost některých organizátorů značně pokulhává. Doufáme, že vám časový odstup nezkaží potěšení z vašich výsledků či ze čtení zajímavých článků.

Reakce na články tohoto čísla můžete posílat i nyní. Budou zveřejněny na webu  a možná i ve speciálním čísle (jestli jich pošlete dostatečně mnoho).

vaše redakce & Bzučo průserář

Řešení témat

Téma 1 – Mnohostěny

Pozn. red.: Obsah prvních dvou odstavců jsem upravil, neboť se domnívám, že původní autorova formulace byla zavádějící.

Objem vícerozměrného pravidelného mnohostěnu

Mgr. Standa Basovník

Co je čtyřrozměrný prostor?

Jeden způsob, jak popisovat čtvrtý rozměr, je odebrání jednoho rozměru. Můžeme provést řez čtyřrozměrného tělesa (4D tělesa) nadrovinou a dostaneme 3D těleso. Toto těleso pak můžeme zjednodušit dalším řezem na 2D útvary.

Vezměme si například 3D kouli, která má poloměr R . Jejím řezem je kruh, jehož poloměr r závisí na vzdálenosti roviny, ve které leží, od středu koule. Dostali jsme tedy nějaký kruh, ale vzhledem k tomu, že jsme ochuzeni o jeden rozměr, je tento kruh ve skutečnosti řezem 3D koule s poloměrem $\sqrt{r^2 + \alpha^2}$, kde α je vzdálenost řezu od středu tělesa.

Podobně můžeme 3D kouli o poloměru r chápat jako řez 4D koule o poloměru $\sqrt{r^2 + \alpha^2}$, kde α je vzdálenost řezu od středu 4D koule.

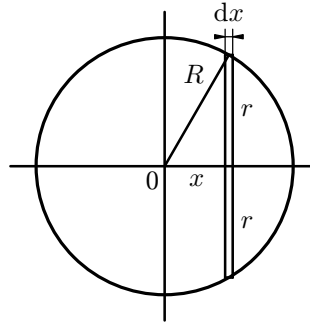
Analytické vyjádření 4D koule je $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2$, kde x , y , z a a jsou souřadnice bodů a R je poloměr koule.

Náš mnohostěn

U popisu 4D mnohostěnu vzniká jeden problém. Když jsem popisoval 4D kouli, věděl jsem, jak vypadá. Pokud bych vycházel z řezu této koule, mohl by tento řez být i řezem 4D elipsoidu nebo 4D válce. U našeho mnohostěnu znám pouze jeho 3D podobu, tedy řez 4D mnohostěnu. Předpokládejme, že vzdálenost „stěny“ od středu tělesa je α . Dále předpokládejme, že mnohostěn je pravidelný i ve čtvrtém rozměru. Pak je vzdálenost od všech stěn α , a protože jsou všechny stěny shodné, existují opsaná a vepsaná 4D koule. Poloměr 4D koule opsané potom je $R = \sqrt{\varrho^2 + \alpha^2}$, kde ϱ je poloměr 3D koule opsané a α je vzdálenost „stěny“ od středu 4D tělesa, a poloměr 4D koule vepsané je $r = \alpha$ (poloměr koule vepsané je přeci vzdálenost „stěny“ od středu tělesa!).

Objem čtyřrozměrné koule

Při odvozování objemu 4D koule vyjdu z odvození objemu 3D koule. Jak víme, objem 3D koule je $V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Kde se však vzal tento vzorec? Já bych k němu nejspíš došel touto cestou: Objem 1D koule $V_1 = 2R$, což je zřejmé. Objem 2D koule (kruhu) – do kruhu mohou vepsat obdélníky o stranách $2r$ a dx , kde dx je velmi malé¹ a r určíme pomocí Pythagorovy věty: $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ (viz obr. 1). Tyto obdélníky vyplní obsah celého kruhu. Pro obsah V_2 platí



Obr. 1

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{V_1}{R} \cdot \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \arcsin \frac{x}{R} \right) \right]_{-R}^{+R} = \\ &= (-R \cdot 0 + R^2 \cdot \arcsin(-1)) - (R \cdot 0 + R^2 \cdot \arcsin 1) = \pi R^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Pro V_3 postupujeme podobně – koule vznikne „vrstvením“ kruhů na sebe

$$V_3 = \frac{V_2}{R^2} \cdot \int_{-R}^{+R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (2)$$

A konečně

$$V_4 = \frac{V_3}{R^3} \cdot \int_{-R}^{+R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^3 dx = \frac{1}{2}\pi^2 R^4. \quad (3)$$

Pozn. red.: Poměr V_{i-1}/R_{i-1} vlastně představuje koeficient ve vzorečku pro objem $(i-1)$ -rozměrné krychle. Výraz $V_{i-1}/R_{i-1} \cdot (\sqrt{R^2 - x^2})^i dx$ je tedy objemem „vrstvičky“. Pro objem V_m čtyřrozměrného mnohostěnu platí

$$V_4(r) < V_m < V_4(R), \quad (4.1)$$

¹ Autor v dalším textu dělá limitní přechod integrální sumy v integrál.

neboli

$$V_4(\alpha) < V_m < V_4\left(\sqrt{\varrho^2 + \alpha^2}\right), \quad (4.2)$$

kde ϱ je poloměr 3D koule opsané „stěně“ a α je vzdálenost „stěny“ od středu 4D tělesa.

Vícerozměrný prostor

Zavádím zde označení souřadnic $a_1 = x, a_2 = y, a_3 = z, a_4, a_5, \dots, a_n$. Polohu středu n -rozměrné (n -D) koule opsané i vepsané zvolme $[0, 0, \dots, 0]$. Poloha středu 3D koule opsané (resp. vepsané) jedné „stěně“ nechť je $[0, 0, 0, a_4, a_5, \dots, a_n]$. Potom dostáváme pro poloměr n -D koule opsané $R = \sqrt{\varrho^2 + a_4^2 + a_5^2 + \dots + a_n^2}$ a pro poloměr n -D koule vepsané $r = \sqrt{a_4^2 + a_5^2 + \dots + a_n^2}$.

Objem

Tady provedu opět aproximaci objemu. K tomu potřebuji vzorec na výpočet n -rozměrné koule. Při odvozování vzorce jsem postupoval rekurzivně. Pro V_n platí

$$V_n = \frac{V_{n-1}}{R^{n-1}} \int_{-R}^{+R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^{n-1} dx. \quad (5.1)$$

Postupným dosazováním dostanu

$$V_n = \prod_{i=0}^{n-1} \left[\frac{1}{R^i} \int_{-R}^{+R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^i dx \right].$$

Pomocí substituce $x := x/R$ dostaneme

$$V_n = R^n \prod_{i=0}^{n-1} \left[\int_{-1}^{+1} \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^i dx \right], \quad (5.2)$$

což lze též přepsat jako

$$V_n = R^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1 + i/2)}{\Gamma((3 + i)/2)}, \quad (5.3)$$

kde funkce Γ je definována jako

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \cdot dt. \quad (5.4)$$

Z tabulek pro funkci $\Gamma(x)$ víme

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad (6.1)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}, \quad (6.2)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \quad (6.3)$$

atd.,

obecně

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + x\right) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{x+1} \frac{2j-1}{2}. \quad (6.4)$$

Dále platí

$$\Gamma(x+1) = x! \quad (7)$$

(funkce Γ rozšiřuje faktoriál na reálná čísla s výjimkou čísel záporných celých).

Pozn. red.: Autorova tvrzení v předchozím odstavci plynou z rovnosti

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x \cdot dt = [-e^{-t} t^x]_0^\infty + \int_0^\infty x \cdot e^{-t} t^{x-1} \cdot dt = \\ &= 0 + x \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot dt = x \cdot \Gamma(x) \end{aligned}$$

(při integraci je užito metody *per partes*).

Vzorce pro objem n -rozměrné koule, které autor odvozuje přes Γ funkci, lze odvodit i přímo z rovnice (5.2) a rekurzivního vzorce pro hodnotu integrálu.

Úpravami rovnice (5.3), které jsou velmi dlouhé, za použití rovnice (6.4) a (7) dostáváme

$$V_n = R^n \cdot \pi^{(n/2)} \cdot \frac{1}{(n/2)!} \quad \text{pro sudá } n, \quad (8.1)$$

$$V_n = R^n \cdot \pi^{((n-1)/2)} \cdot \frac{2^n ((n-1)/2)!}{n!} \quad \text{pro lichá } n. \quad (8.2)$$

Pro objem V_{mn} n -D mnohostěnu platí

$$V_n(r) < V_{mn} < V_n(R),$$

$$V_n\left(\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + \dots + a_n^2}\right) < V_{mn} < V_n\left(\sqrt{r^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2}\right).$$

Na závěr uvedu ještě vzorce pro objem n -D koulí

dimense	1	2	3	4	5	6	7	8
objem	$2r$	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$	$\frac{16}{105}\pi^3 r^7$	$\frac{1}{24}\pi^4 r^8$

Do příště se mi snad podaří vymyslet nějaké 4D mnohostěny a vypočítat jejich přesný objem.

Pozn. red.: Ve skutečnosti existuje šest „platonských“ těles v čtyřrozměrném prostoru:

3D-analogie	počet „stěn“	těleso
čtyřstěn	5	4D-simplex
krychle	8	hyperkrychle
osmistěn	16	16-„stěn“
dvanáctistěn	120	120-„stěn“
dvacetistěn	600	600-„stěn“
— ²	24	24-„stěn“

Další polopravidelné mnohostěny

Dr. Petr Čermák

Pozn. red.: Příspěvek o vytvoření dalších těles ořezáním těles platónských nám zaslali Doc. Vašek Cviček a Dr. Petr Čermák. Protože řešení Dr. Petra Čermáka je komplexnější a řešení Doc. Vaška Cvička v podstatě zahrnuje, otiskujeme řešení Dr. Petra Čermáka.

Vrcholové ořezávání

Navazuji na tvrzení *Dr. Jozefa Tinaje*, že fotbalový míč vznikne ořezáním pravidelného dvacetistěnu. Přivedlo mě to na zajímavou myšlenku. Začneme však od začátku. Vyšel jsem z toho, že kopačák vznikne vrcholovým ořezáním dvacetistěnu. (*Vrcholovým ořezáním* jsem označil ořezání, kde provedeme přesně tolik řezů, jako je vrcholů, a každý řez bude veden kolmo na poloměr koule opsané v daném vrcholu. Jinak řečeno, uřízneme každý vrchol tělesa.³)

Při vrcholovém ořezání se změní následující vlastnosti tělesa:

- Počet jeho stěn S se zvětší o počet jeho vrcholů V .
- Počet jeho vrcholů V se znásobí počtem hran protínajících se v jednom vrcholu X . (Toto nebude platit, když použijeme ořezání maximální – viz dále – pak se bude vše ještě dělit dvěma.)
- Počet jeho hran H se zvětší o počet jeho nových vrcholů V_n .

Vyjádřeno rovnicemi

Počet stěn $S_n = S + V$.

Počet vrcholů $V_n = V \cdot X$ (resp. $V_n = V \cdot X/2$ v případě max. ořezání).

Počet hran $H_n = H + V_n$.

Nyní k maximálnímu a jinému ořezání. Zavedme si pojem velikost ořezání $O = \langle 0; 0,5 \rangle$. Toto číslo udává, jaká část z každé původní hrany⁴ bude zrušena oříznutím jednoho vrcholu. Ořezání je maximální, když platí $O = 0,5$. V tomto případě uříznutím jednoho vrcholu uřízneme i polovinu hrany k němu patřící a druhá polovina hrany se uřízne při řezání druhého vrcholu. Hrana se tedy zcela ztratí a zbude z ní jen jeden vrchol – v její polovině.

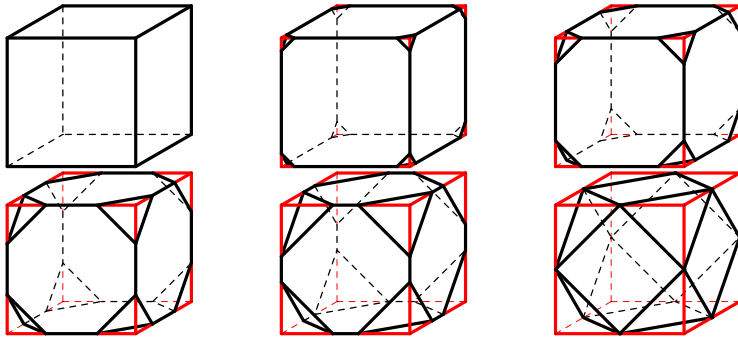
Pro názornost vše předvedu na ořezané krychli s O postupně 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 (obr. 2).

Ze série těchto obrázků si každý vytvoří představu o tom, co je vrcholové ořezání tělesa. Nás však zajímají jen ta ořezání, při kterých vzniknou pravidelné

² Toto těleso nemá rozumnou analogii ani ve 3D, ani ve vyšších dimensích.

³ Pozn. red.: Tato definice je poměrně nepřesná, nezakazuje nám provést u každého vrcholu jinak „hluboký“ řez a dokonce ani nijak neomezuje „hloubku“ řezu shora. Tedy např. těleso „polovina dvacetistěnu“ je dle definice vrcholovým ořezáním dvacetistěnu, což autor zřejmě neměl na mysli.

⁴ Pozn. red.: Přesněji řečeno pouze z její poloviny od vrcholu do středu strany.



Obr. 2

mnohostěny se všemi hranami stejné délky. Mnohostěnu složených z pravidelných mnohoúhelníků existuje nekonečně mnoho.⁵ Vraťme se ale k požadavku, že všechny hrany tělesa musí být stejně dlouhé. Nejprve si označíme pojmy:

- a_0 – délka hrany původního platónského mnohostěnu,
- a_1 – délka hrany oříznutého mnohostěnu vzniklá jako zbytek hrany původního mnohostěnu,
- a_2 – délka hrany oříznutého mnohostěnu vzniklá nově oříznutím.

Aby byly všechny strany nového tělesa stejné, musí platit jedna z následujících rovnic

$$a_1 = 0, \quad a_1 = a_2, \quad a_2 = 0. \quad (9)$$

Poslední podmínka platí, když $O = 0$, to jsme však nic neořízli. Touto možností se již nebudeme zabývat.

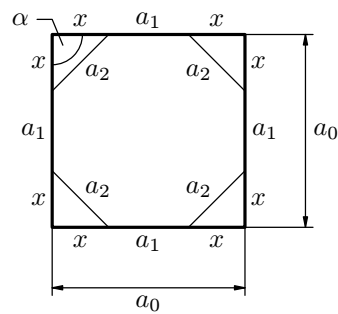
První podmínka platí, když $O = 0,5$. To je maximální oříznutí a to nás zajímá.

Prostřední jmenovaná podmínka je rovněž zajímavá. U různých pravidelných mnohoúhelníků platí pro různá O . Situace je na obr. 3 (používáme obrázek čtyřúhelníku, ale výpočty budou platit pro libovolný pravidelný n -úhelník). Pro O platí

$$O = \frac{x}{a_0}, \quad (10.1)$$

kde $a_0 = x + a_1 + x$, tedy

$$O = \frac{x}{a_1 + 2x}. \quad (10.2)$$



Obr. 3

Pro a_2 platí

$$\frac{a_2}{2} = x \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

⁵ Pozn. red.: Důkaz tohoto tvrzení je triviální, stačí vzít např. všechna výše zmíněná ořezání krychle pro $O = \langle 0; 0,5 \rangle$.

Chceme zjistit, pro které O platí $a_1 = a_2$. Proto dosadíme a_2 za a_1 do rovnice (10.2)

$$O = \frac{x}{2x \cdot \sin(a/2) + 2x} = \frac{1}{2(\sin(a/2) + 1)}. \quad (12)$$

Jedná se vždy o pravidelný n -úhelník, a tak platí

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}. \quad (13)$$

To dosadíme za α do rovnice (12)

$$O = \frac{1}{2(\sin(90^\circ - 180^\circ/n) + 1)} = \frac{1}{2(1 + \cos(180^\circ/n))}. \quad (14)$$

Tímto jsme vytvořili univerzální vzorec pro jakýkoliv pravidelný mnohostěn, který chceme ořezávat.

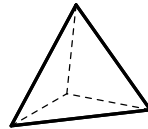
Ukázali jsme, že existují dva řezy platónského tělesa, která mají za výsledek poloprávidelné těleso (takové, že má všechny hrany stejné délky a jeho stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky⁶). Protože je platónských těles pět, celkem by mohlo existovat až 10 dalších poloprávidelných mnohostěnů⁷.

Každý řez si rozebereme zvlášť. Z jednoho platónského tělesa vznikne ořezáním jedno poloprávidelné těleso s $O = 0,5$. To nazveme podtyp A daného platónského tělesa. Podtyp B vznikne ořezáním s O vypočteným podle výše uvedeného vzorce.

Čtyřstěn

Čtyřstěn má následující vlastnosti:

Počet stěn	$S_4 = 4.$
Počet vrcholů	$V_4 = 4.$
Počet hran	$H_4 = 6.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_4 = 3.$



Obr. 4

Ořezaný čtyřstěn podtyp A

Ořezání vytvoříme podle výše zmíněných pravidel:

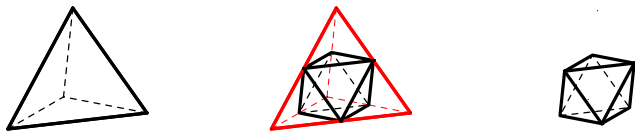
Počet stěn	$S_{4A} = S_4 + V_4 = 4 + 4 = 8.$
Počet vrcholů	$V_{4A} = V_4 \cdot X_4/2 = 4 \cdot 3/2 = 6.$

⁶ Pozn. red.: V minulém čísle jsme si zavedli přesnější definici.

⁷ Pozn. red.: Každé platónské těleso splňuje samozřejmě definici poloprávidelného tělesa.

Počet hran $H_{4A} = H_4 + V_{4A} = 6 + 6 = 12$.
 Počet hran vycházejících z vrcholu $X_{4A} = 4$.⁸

Vznikne tedy osmistěn jehož strany budou rovnostranné trojúhelníky, bude mít 6 vrcholů a 12 hran.



Obr. 5

Ovšem to je pravidelný osmistěn! Maximálním ořezáním čtyřřtenu tedy vznikne pravidelný platónský osmistěn.

Ořezaný čtyřstěn podtyp B

Ořezání musí splňovat $O = 1/3$, aby byly všechny hrany nově vzniklého tělesa stejné. Není to maximální ořezání, a proto přepočítáme nové údaje:

Počet stěn $S_{4B} = S_4 + V_4 = 4 + 4 = 8$.
 Počet vrcholů $V_{4B} = V_4 \cdot X_4 = 4 \cdot 3 = 12$.
 Počet hran $H_{4B} = H_4 + V_{4B} = 6 + 12 = 18$.
 Počet hran vycházejících z vrcholu $X_{4B} = 3$.

Vznikne osmistěn, který bude složen ze čtyř pravidelných šestiúhelníků a čtyř rovnostranných trojúhelníků. Tedy nové těleso!



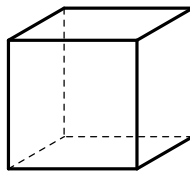
Obr. 6

Zajímavé těleso, ale pro fotbalový míč poněkud nevhodné, protože se nepodobá kouli – skákalo by do stran, jak se mu zlíbí.

Krychle

Krychle má následující vlastnosti:

Počet stěn $S_6 = 6$.
 Počet vrcholů $V_6 = 8$.
 Počet hran $H_6 = 12$.
 Počet hran vycházejících z vrcholu $X_6 = 3$.



Obr. 7

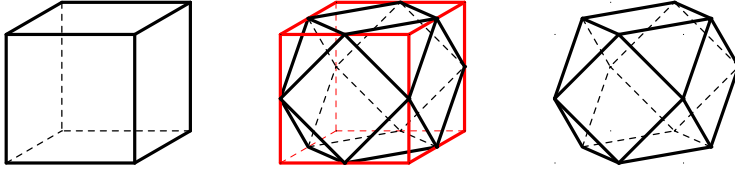
⁸ Pozn. red.: V původní autorově práci je u všech mnohostěnů místo konkrétního počtu uvedena poznámka: „Nelze u ořezaného tělesa jednoznačně obecně určit, a tak ho nebudeme určovat ani konkrétně.“ Uměl by někdo najít obecný vzoreček?

Ořezaná krychle podtyp A


Postupujeme obdobně jako u čtyřstěnu:

$$\begin{aligned} \text{Počet stěn} & S_{6A} = S_6 + V_6 = 6 + 8 = 14. \\ \text{Počet vrcholů} & V_{6A} = V_6 \cdot X_6/2 = 8 \cdot 3/2 = 12. \\ \text{Počet hran} & H_{6A} = H_6 + V_{6A} = 12 + 12 = 24. \\ \text{Počet hran vycházejících z vrcholu} & X_{6A} = 4. \end{aligned}$$

Těleso tedy bude čtrnáctistěn složený ze šesti čtverců a z osmi rovnostranných trojúhelníků.



Obr. 8

Ejhle, to je těleso *Bc. Heleny Kubátové*, zveřejněné v 3. čísle !

Fotbalový míč by z něho ušít šel, ale nebyl by tak kulatý jako kopačák.

Ořezaná krychle podtyp B

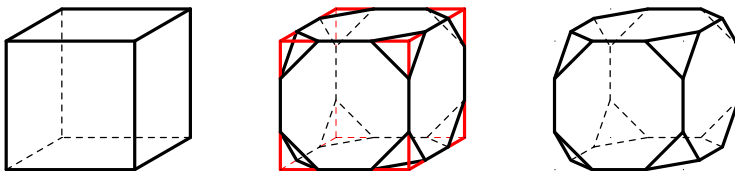
Pro ořezání O musí platit rovnice (14) ze strany 7, v tomto případě je $n = 4$, dostáváme tedy

$$O = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}. \quad (14.1)$$

Pro parametry nového tělesa platí:

$$\begin{aligned} \text{Počet stěn} & S_{6B} = S_6 + V_6 = 6 + 8 = 14. \\ \text{Počet vrcholů} & V_{6B} = V_6 \cdot X_6 = 8 \cdot 3 = 24. \\ \text{Počet hran} & H_{6B} = H_6 + V_{6B} = 12 + 24 = 36. \\ \text{Počet hran vycházejících z vrcholu} & X_{6B} = 3. \end{aligned}$$

Vznikne čtrnáctistěn ze šesti osmiúhelníků a osmi trojúhelníků.

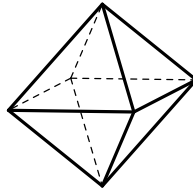


Obr. 9

Opět jsme našli zajímavé těleso, jenže ne zas tak kulaté, jak by bylo pro fotbal potřeba.

Osmistěn

Počet stěn	$S_8 = 8.$
Počet vrcholů	$V_8 = 6.$
Počet hran	$H_8 = 12.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_8 = 4.$



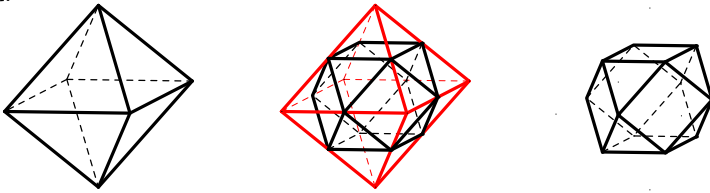
Obr. 10

Ořezaný osmistěn podtyp A

Postupujeme obdobně jako u čtyřstěnu a krychle:

Počet stěn	$S_{8A} = S_8 + V_8 = 8 + 6 = 14.$
Počet vrcholů	$V_{8A} = V_8 \cdot X_8/2 = 6 \cdot 4/2 = 12.$
Počet hran	$H_{8A} = H_8 + V_{8A} = 12 + 12 = 24.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{8A} = 4.$

Těleso tedy bude čtrnáctistěn složený z čtverců a z rovnostranných trojúhelníků.



Obr. 11

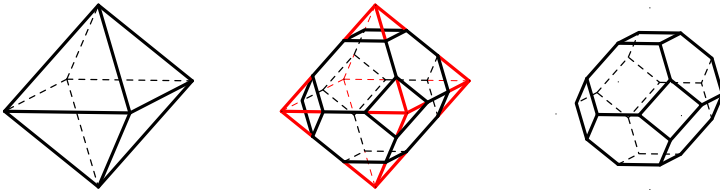
To je ale přeci opět těleso Bc. Heleny Kubátové! Ořezáním krychle i osmistěnu vzniká stejné těleso. Osmistěn navíc může vzniknout ořezáním čtyřstěnu, a tak ze všech těchto tří platónských těles může vzniknout stejné těleso.

Ořezaný osmistěn podtyp B

Ořezání musí být stejné jako u čtyřstěnu – mají stěny oba z pravidelných trojúhelníků: $O = 1/3$.

Počet stěn	$S_{8B} = S_8 + V_8 = 8 + 6 = 14.$
Počet vrcholů	$V_{8B} = V_8 \cdot X_8 = 6 \cdot 4 = 24.$
Počet hran	$H_{8B} = H_8 + V_{8B} = 12 + 24 = 36.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{8B} = 3.$

Vzniklé těleso bude 14-ti stěn složený z osmi šestiúhelníků a ze šesti čtverců.



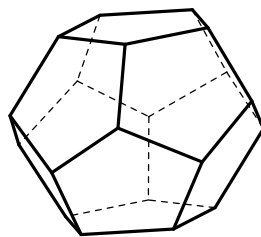
Obr. 12

Na sestavení fotbalového míče je to pořád ještě hranaté, ale zatím nejúspěšnější úlovek. Je to čtvrté těleso, které jsme vytvořili ořezáním – čtvrté poloprávečné těleso.

Dvanáctistěn

Údaje o dvanáctistěnu:

Počet stěn	$S_{12} = 12.$
Počet vrcholů	$V_{12} = 20.$
Počet hran	$H_{12} = 30.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{12} = 3.$



Obr. 13

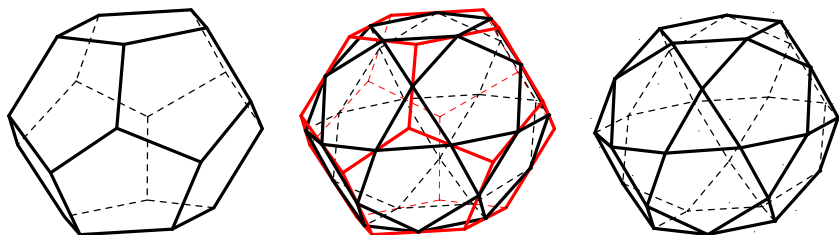
Toto je první těleso složené z pětiúhelníků. Snad se tedy dočkáme něčeho nového.⁹

Ořezaný dvanáctistěn podtyp A

Postupujeme obdobně jako u předchozích těles:

Počet stěn	$S_{12A} = S_{12} + V_{12} = 12 + 20 = 32.$
Počet vrcholů	$V_{12A} = V_{12} \cdot X_{12}/2 = 20 \cdot 3/2 = 30.$
Počet hran	$H_{12A} = H_{12} + V_{12A} = 30 + 30 = 60.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{12A} = 4.$

Tedy dvaatřicetistěn. Tak to by mohlo být zajímavé. Bude složený z dvanácti pravidelných pětiúhelníků a z dvaceti rovnostranných trojúhelníků.



Obr. 14

Zdá se, že se jedná o první těleso, ze kterého by šel vyrobit solidní fotbalový míč. Později porovnáme jeho parametry s parametry kopačáku. Již pátý poloprávečné mnohostěn.

⁹ Pozn. red.: Obrázek dvanáctistěnu a všech těles z něho odvozených je nakreslen v dvoutřetinovém měřítku oproti ostatním tělesům.

Ořezaný dvanáctistěn podtyp B

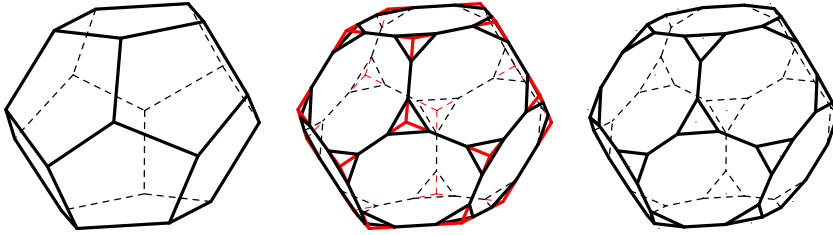
Ořezání musí splňovat rovnici (14) ze strany 7, v tomto případě je $n = 5$, platí tedy

$$O = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}. \quad (14.2)$$

Dostaneme následující těleso:

Počet stěn	$S_{12B} = S_{12} + V_{12} = 12 + 20 = 32.$
Počet vrcholů	$V_{12B} = V_{12} \cdot X_{12} = 20 \cdot 3 = 60.$
Počet hran	$H_{12B} = H_{12} + V_{12B} = 30 + 60 = 90.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{12B} = 3.$

Bude to tedy dvaatřicetistěn složený z dvanácti pravidelných desetiúhelníků a z dvaceti rovnostranných trojúhelníků.



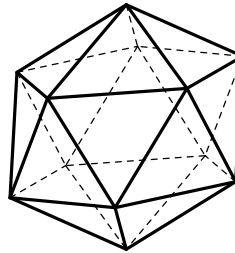
Obr. 15

Pro kopačák zřejmě nepoužitelné, ale zajímavé. Je to již šestý polopravidelný mnohostěn.

Dvacetistěn

Údaje o dvacetistěnu:

Počet stěn	$S_{20} = 20.$
Počet vrcholů	$V_{20} = 12.$
Počet hran	$H_{20} = 30.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{20} = 5.$

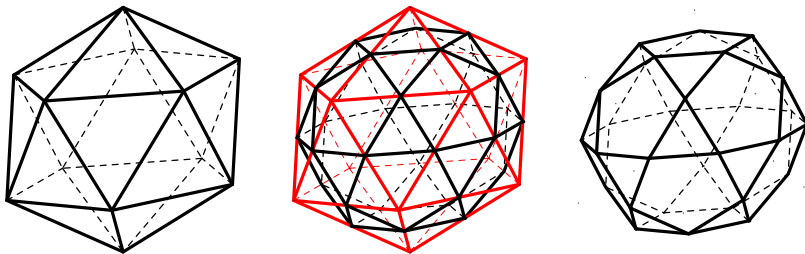


Obr. 16

Ořezaný dvacetistěn podtyp A

Nové těleso:

Počet stěn	$S_{20A} = S_{20} + V_{20} = 20 + 12 = 32.$
Počet vrcholů	$V_{20A} = V_{20} \cdot X_{20}/2 = 15 \cdot 5/2 = 30.$
Počet hran	$H_{20A} = H_{20} + V_{20A} = 30 + 30 = 60.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{20A} = 4.$



Obr. 17

Tento dvaatřicetistěn už jsme tu měli.

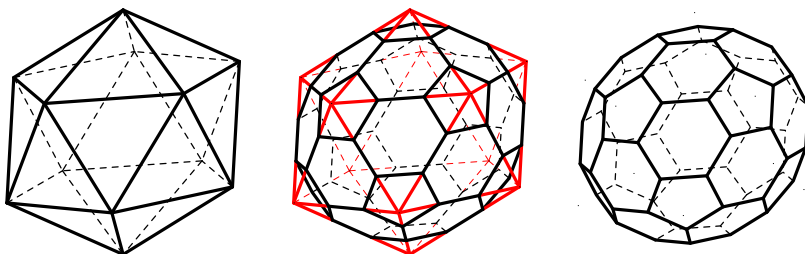
Ořezaný dvacetistěn podtyp B (fotbalový míč)

Ořezání musí být stejné jako u čtyřřstěnu a osmistěnu, protože dvacetistěn má stěny z pravidelných trojúhelníků, tedy $O = 1/3$.

Vznikne těleso následujících vlastností:

Počet stěn	$S_{20B} = S_{20} + V_{20} = 20 + 12 = 32.$
Počet vrcholů	$V_{20B} = V_{20} \cdot X_{20} = 12 \cdot 5 = 60.$
Počet hran	$H_{20B} = H_{20} + V_{20B} = 30 + 60 = 90.$
Počet hran vycházejících z vrcholu	$X_{20B} = 3.$

Toto poslední těleso je tedy kopačák (viz obrázek).

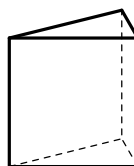


Obr. 18

Závěr

Teď máme všech sedm možných polopravidelných těles. Domnívám se, že žádné další nejsou, nemám proto ale matematické vysvětlení.

Pozn. red.: V tomto bodě autor nemá pravdu. Stačí si vzít např. pravidelný trojboký hranol, jehož stěny tvoří tři čtverce a dva rovnostranné trojúhelníky (viz obr. 19). Toto těleso zajisté splňuje definici polopravidelného tělesa prvního druhu uvedenou v minulém čísle: Každý vrchol je tvořen spojením (ne nutně shodných) pravidelných mnohoúhelníků o stejné délce hrany, všechny jeho vrcholy leží na jedné kulové ploše a každý vrchol je stejného typu (tj. stěny sousedící s jedním vrcholem lze pomocí otočení a posunutí zobrazit na stěny sousedící s jiným vrcholem).



Obr. 19

Na závěr si položíme otázku, proč se šije fotbalový míč z dvacetistěnu podtypu B? Je totiž nejkulatější. I ve srovnání se zajímavým dvacetistěnem podtypu A je kulatější.¹⁰

Literatura:

Manuál k programu Mathematica 4.0. V tomto programu jsem (také) vymodeloval všechny modely zde použité.

Pozn. red.: Když jsme získali tolik nových těles, bylo by zajímavé zabývat se jejich vlastnostmi. Samozřejmě bychom mohli opět počítat úhly mezi stěnami, jsou však zajímavější problémy např. sestrojiti pláště těles nebo problém obarvení. Mimochodem mezi platónskými a Čermákovými-Cvičkovými¹¹ tělesy existují taková, že na jejich obarvení stačí dvě nebo tři barvy, i taková, že k jejich obarvení je třeba čtyř barev. (Ty stačí na libovolné těleso, neboť každé těleso lze „protažením skrz stěnu“ zobrazit na rovinnou mapu a nyní již zbývá použít slavnou větu o tom, že na obarvení libovolné rovinné mapy tak, aby žádné oblasti sousedící hranou neměly stejnou barvu, stačí čtyři barvy¹².)

Ještě jednu poznámku k výsledku pro objem fotbalového míče zveřejněném v minulém čísle: Výsledek

$$\frac{15(3 + \sqrt{5})}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{207 + 91 \cdot \sqrt{5}}$$

lze pomocí úprav

$$\begin{aligned} & \frac{15(3 + \sqrt{5})}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{414 + 2 \cdot 91 \cdot \sqrt{5}} = \\ & = \frac{15(3 + \sqrt{5})}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{245 + 2 \cdot (7 \cdot \sqrt{5})(13) + 169} = \\ & = \frac{15(3 + \sqrt{5})}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{(7 \cdot \sqrt{5})^2 + 2 \cdot (7 \cdot \sqrt{5})(13) + 13^2} = \\ & = \frac{45}{2} + \frac{15}{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot (7\sqrt{5} + 13) = \frac{90}{4} + \frac{30}{4} \cdot \sqrt{5} + \frac{35}{4} + \frac{13}{4} \cdot \sqrt{5} \end{aligned}$$

zjednoduší na tvar

$$\frac{1}{4} (125 + 43 \cdot \sqrt{5}) .$$

¹⁰ Pozn. red.: Autor toto tvrzení nijak nezdůvodnil.

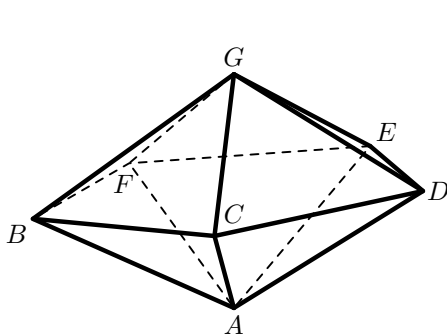
¹¹ Též Archimédovými. :-)

¹² Tato věta byla téměř sto let slavným otevřeným problémem. Dokázali ji až v roce 1976 *Wolfgang Haken* a *Kenneth Appel*. Nejprve určili všechna možná uspořádání, která následně rozebrali na superpočítači na univerzitě v Illinois.

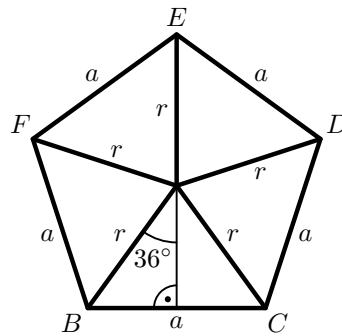
Polopravidelný desetistěn nemá kouli opsanou

Prof. Tibor Vansa

Předpokládejme, že polopravidelný desetistěn druhého druhu z čísla 8.5 má kouli opsanou. Střed koule opsané má stejnou vzdálenost od všech vrcholů. Ze symetrie musí střed koule opsané ležet ve středu pětiúhelníku $BCDEF$ (viz obr. 21).



Obr. 21



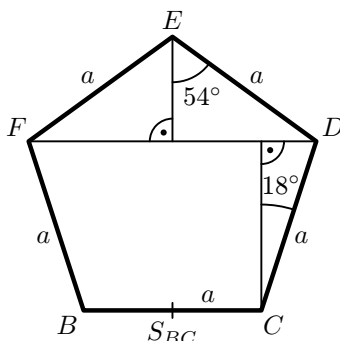
Obr. 22

Označme hranu desetistěnu a . Pro poloměr r kružnice opsané pětiúhelníku platí (viz obr. 22)

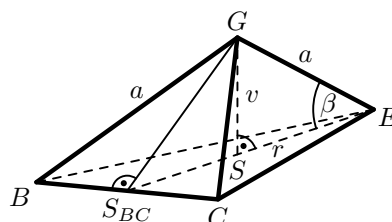
$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 36^\circ} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}} = a \cdot \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{20}} = a \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}. \quad (15)$$

Vzdálenost středu strany BC od vrcholu E je (viz obr. 23)

$$|S_{BC}E| = c_1 + c_2 = (a \cdot \cos 54^\circ) + (a \cdot \cos 18^\circ) = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}}. \quad (16)$$



Obr. 23



Obr. 24

Vzdálenost středu strany BC od vrcholu G je (jedná se o rovnostranný trojúhelník)

$$|S_{BC}G| = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 30^\circ} = a \cdot \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \quad (17.1)$$

Pozn. red.: Vzdálenost $|S_{BC}G|$ lze určit též z Pythagorovy věty

$$|S_{BC}G| = \sqrt{|GB|^2 - |S_{BC}B|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \quad (17.2)$$

Podle kosinové věty platí (viz obr. 4)

$$|S_{BC}G|^2 = |GE|^2 + |S_{BC}E|^2 - 2|GE||S_{BC}E| \cos \beta, \quad (18)$$

odtud

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{a^2 + \frac{a^2}{4} (5 + 2 \cdot \sqrt{5}) - \frac{3}{4} a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}}} = \frac{6 + 2 \cdot \sqrt{5}}{4 (\sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}})} = \\ &= \frac{(6 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}})}{4 (\sqrt{25 - 4 \cdot 5})} = \frac{(6 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}})}{4 (\sqrt{25 - 4 \cdot 5})} = \\ &= \frac{\sqrt{(6 + 2 \cdot \sqrt{5})^2 \cdot (5 - 2 \cdot \sqrt{5})}}{4 (\sqrt{25 - 4 \cdot 5})} = \frac{\sqrt{(36 + 24 \cdot \sqrt{5} + 20) \cdot (5 - 2 \cdot \sqrt{5})}}{4 \cdot \sqrt{5}} = \\ &= \frac{\sqrt{(14 + 6 \cdot \sqrt{5}) \cdot (5 - 2 \cdot \sqrt{5})}}{2 \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{70 + 30 \cdot \sqrt{5} - 28 \cdot \sqrt{5} - 60}}{2 \sqrt{5}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Potom v dostaneme také podle kosinové věty

$$v^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cdot \cos \beta, \quad (20)$$

po dosazení

$$\begin{aligned} v^2 &= a^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{10} + a^2 - 2 \cdot \left(a \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \right) \cdot \left(a \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \right) = \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} + 1 - 2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right] = a^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

tedy

$$v = a \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}. \quad (22)$$

Protože

$$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} = v \neq r = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \quad (23)$$

a tedy vzdálenost vrcholu G od středu je jiná než vzdálenost vrcholů B, C, D, E a F od středu, nemůže mít těleso kouli opsanou.

Pozn. red.: Předvedený výpočet je příliš složitý. Kosinus úhlu β lze spočítat daleko jednodušeji ze vzorce

$$\cos \beta = \frac{r}{a} = \frac{a}{a} \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \quad (24)$$

navíc je vlastně zbytečné tuto hodnotu počítat, protože (vzhledem k tomu, že trojúhelník SGE je pravoúhlý) stačí použít Pythagorovu větu

$$|GS|^2 = |GE|^2 - |GE|^2,$$

neboli

$$v^2 = a^2 - r^2.$$

Martin Krsek

Téma 2 – Čebyševovy polynomy

Další důkazy

Doc. Vašek Cviček

V předchozích příspěvcích jsem dokázal vztah pro n -tý Čebyševův polynom:

$$f_n = 2 \cos \left(n \arccos \left(\frac{x}{2} \right) \right). \quad (1)$$

Chtěl bych nyní dokázat rekurentní vztah $f_{n+2} = x f_{n+1} - f_n$, který plyne z předchozího zápisu. Podle vzorce

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x - y) + \frac{1}{2} \cos(x + y) \quad (2)$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} x \cdot f_{n+1}(x) &= x \cdot 2 \cos \left((n+1) \arccos \frac{x}{2} \right) = \\ &= 4 \cdot \cos \left(\arccos \frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left((n+1) \arccos \frac{x}{2} \right) = \\ &= 2 \cdot \cos \left(-n \cdot \arccos \frac{x}{2} \right) + 2 \cdot \cos \left((n+2) \arccos \frac{x}{2} \right) = \\ &= f_n(x) + f_{n+2}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Po odečtení $f_n(x)$ od pravé strany dostáváme hledanou identitu. Vzhledem k tomu, že $x \in \langle -2; 2 \rangle$, nemáme ani problém s definičním oborem.

Nyní již víme, že daný rekurentní vztah platí. Můžeme jej řešit klasickou metodou pro řešení rekurentních rovnic. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$ jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}. \quad (4)$$

Protože $x \in \langle -2; 2 \rangle$, pišme raději $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{4 - x^2}$.

Pro Čebyševův polynom n -tého stupně bude platit

$$f_n(x) = A \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{4 - x^2} \right)^n + B \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{4 - x^2} \right)^n. \quad (5)$$

Konstanty A, B v předchozí rovnici zjistíme z podmínky pro první Čebyševův polynom $f_1(x) = x$:

$$x = A \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{4 - x^2} \right) + B \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{4 - x^2} \right). \quad (6)$$

Z rovnice je jasné, že $A = B$ (polynomy nemají nereálné koeficienty), pak také $A = B = 1$. Získali jsme implicitní vztah pro Čebyševův polynom n -tého stupně

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{4 - x^2} \right)^n + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{4 - x^2} \right)^n. \quad (7)$$

Odtud by se daly stanovit koeficienty tohoto polynomu zapsaného klasicky. Prostě bychom si mocniny závorek rozepsali pomocí binomické věty. Všechny liché mocniny v závorkách se odečtou (aby tam nezůstaly imaginární i). Pokoušel jsem se výraz upravovat, ale k žádnému pěknému výsledku jsem se nedostal.

Bzučo


Zadání – s křížkem po funuse

Jak jistě víte, došli jsme v minulých číslech v teorii Čebyševových polynomů hodně daleko, ale stále nám zůstalo několik nevyřešených problémů:

- Čebyševovy polynomy lichého stupně jsou liché funkce a polynomy sudého stupně jsou sudé funkce. Proč?
- Jsou Čebyševovy polynomy jednotlivých stupňů určeny jednoznačně?
- Proč platí vztah $f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f_{n-1}(x)$?
- Jak vypadá funkce $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ a existuje vůbec?

- Uměl by někdo dokázat vztah

$$\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot T_i \cdot T_j \, dx = 0, \quad \forall i \neq j?$$

Jestliže se chcete Čebyševovým polynomům dále věnovat, pošlete nám svá řešení i nadále. Budeme se na ně těšit a otiskneme je v příštím ročníku .

Honza „Taťka“ Bítta

Téma 3 – Tepelný stroj

Reakce na otázky položené v čísle 5

Doc. Vašek Cviček

Nebudu si hrát na to, že jsem to vymyslel, ale raději budu citovat z *Elektriny a magnetismu* (V. Petržílka, S. Šafrata, Přírodovědecké nakladatelství Praha, 1953).

V roce 1795 pozoroval *Alessandro Volta*, že při styku dvou různých kovů mezi nimi vzniká rozdíl potenciálů. Velikost tohoto kontaktního potenciálu závisí jen na chemickém složení dotýkajících se kovů a na teplotě místa styku. Dnes víme, že při dotyku libovolných dvou látek dochází k pronikání elektronů touto styčnou plochou. Jsou-li obě látky stejné, prochází v obou směrech styčnou ploškou stejné množství elektronů a soustava zůstává elektricky neutrální. Dotýkají-li se však dvě látky A a B, které se liší svou výstupní prací a prostorovou hustotou elektronového plynu, přechází jedním směrem více elektronů než druhým.

Závislost kontaktního potenciálu na teplotě způsobuje, že v uzavřeném obvodu, složeném ze dvou různých látek A a B, začne protékat proud, jestliže styčné plochy mají různé absolutní teploty T_0 a T_1 . Jestliže např. pro dané látky A a B roste kontaktní potenciál s teplotou a je-li $T_0 \neq T_1$, protéká obvodem proud. Tento jev se jmenuje *Seebeckův jev*.

Je znám též jev obrácený, který objevil v roce 1834 *Peltier*, že totiž při průchodu proudu obvodem se místo styku dvou vodičů ohřívá, nebo ochlazuje. Jouleovo teplo, vzniklé ve vodiči, je úměrné I^2 . Naproti tomu teplo, připisované *Peltierovu jevu*, je úměrné první mocnině, a tedy závisí na směru proudu. Protéká-li proud styčnou plochou stejným směrem, jaký má proud při ohřátí této styčné plochy v *Seebeckově jevu*, styčné místo se ochlazuje. Proud vyvíjí teplo, které působí proti změně vyvolané *Seebeckovým jevem*.

Tyto jevy jsou způsobeny vlastnostmi elektronového plynu ve vodiči a závislosti jeho vlastností na teplotě. Elektrony samy přecházejí do okolního prostředí, čímž se může vytvořit na rozhraní napětí. Pomocí uvedených jevů se v současné době také měří teplota.

Gumový tepelný stroj

Jeho účinnosť nebude asi najväčšia. *Richard P. Feynman* píše u svojho stroja¹³, že výkon zahrievacích lamp 400 W postačí tak na zvednutie mouchy. Má teda dosť malú účinnosť.

Bzučo

Téma 4 – Provázky

Prof. Tibor Vansa sa domnieva, že nejestvuje uzol nekonečného stupňa, t.j. taký, že na jeho rozpletenie by nám nestačilo konečne mnoho krát zmeniť križenie povrázku. Je to pravda? Dokáže niekto matematicky skonštruovať povrázok nekonečného stupňa?

Peťo

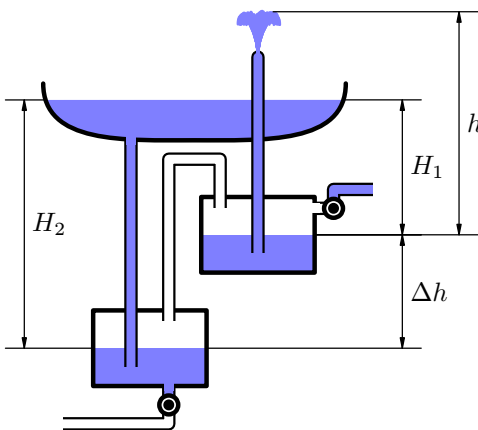
Téma 5 – Rímske fontány

Prakticky zostrojiteľné vodopády

Mgr. Tomáš Štec

Pozn. red.: Autor zaslal svoje výpočty k dvom modelovým vodotryskom. Bohužiaľ dostala sa medzi ne numerická chyba. Túto chybu sme opravili a prinášame vám článok s opravenými hodnotami a miernymi úpravami.

Jednoduchá fontánka



Predstavme si dajakú amforu, z ktorej bude voda vytekať vodorovne. Tu nie je treba veľký rozdiel výšok. Nech je rozdiel výšok hladín v prvej a druhej nádobe $\Delta h = 1,5$ m a hĺbka hladiny hornej nádoby H_1 (pozri obrázok) tiež 1,5 m. Hĺbka hladiny spodnej nádoby je teda $H_2 = 3$ metre. Nech z hornej nádoby trčí nahor trubka vysoká¹⁴ $H_3 = 2,5$ m zahnutá do vodorovnej roviny. Výtoková rýchlosť vody je $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a prietok pri priemere trubky 0,5 cm je $0,2 \text{ m}^3/\text{hod}$. Teraz si predstavme, že fontána bude

¹³ *Pozn. red.: Feynman sa o tomto tepelnom stroji zmiňuje v druhom dieli svojich Prednášok z fyziky (slovenský preklad).*

¹⁴ *Pozn. red.: Merané od hladiny v hornej nádobe.*

pracovať len za denného svetla (pre zjednodušenie 12 hodín). Za tento čas ňou pretečie 2,6 metra kubického vody, čo je zhruba 2600 kg vody. Na to potrebujeme aj patrične veľkú nádobu (zhruba jeden meter vysokú s priemerom dva metre – napríklad). Voda bude striekať do vzdialenosti asi 1,4 m od ústia amfory, ktoré je vo výške 1 m nad hladinou.

Po uplynutí 12 hodín, keď sa bude voda nachádzať v dolnej nádobe, kde je nám na nič, napochodujú aspoň štyria otroci, ktorí budú fungovať ako čerpadlo. Povedzme, že majú vedrá o objeme 10 litrov a majú ich dokopy tri. Jeden otrok naberá vodu zo spodnej nádoby, ďalší podáva vedro hore, ďalší vodu vylieva do hornej nádoby a posledný podáva vedro dole. Keď priemerná cesta vedra bude trvať napríklad 10 sekúnd, tak za minútú prelejú 60 litrov. Preliatie 2,6 metra kubického im bude trvať asi trištvrte hodiny. Podmienkou je, že na nádobách budú ventily (teda aspoň na vstupe do dolnej), inak fontána bude striekať ďalej.

Alebo sa použije zapojenie podľa schémy, kde rúrka, ktorá vedie do spodnej nádoby z rezervoáru, siaha až po hladinu vody vo fontánke. Potom ventil netreba, lebo hladina vody vo fontánke klesne na úroveň ústia rúrky do spodnej nádoby. Žiadna ďalšia voda sa už dolu nedostane. Na opätovné naštartovanie fontány bude treba prilívať vodu do fontány.

Skutočný vodotrysk

Spodná nádoba nech je $H_2 = 5$ metrov pod hladinou a ústie „vodotrysku“ nech je meter nad hladinou. Hladina hornej nádoby H_1 zasa dva metre pod, a teda nám vychádza, že vodotrysk bude striekať do výšky 3 metre nad hladinu. Rýchlosť vody bude 6 metrov za sekundu a prietok pri rúrke s priemerom centimeter bude 1,8 metra kubického za hodinu. Tu by sa už otroci namakali viacej.

Poznámka k prečerpaniu vody

V skutočnosti potrebujeme dostať nádobu, ktorá je o pár ton vody ťažšia, hore a prázdnu nádobu dole. Keby boli ventily na rúrkach a rúry by sa dali odpojiť pri povrchu nádob, na výmenu nádob by sa dal použiť celý kladkostroj. Samozrejme za predpokladu, že by bolo dosť otrokov. Pri priemernej ťažnej sile otroka 50 kg a použití dvojitej kladky (dva kotúče) by nádobu z príkladu s vodotryskom muselo už po jednej hodine prevádzky zdvíhať asi 20 otrokov, a to je dosť veľa. Ďalšia možnosť je, že zo spodnej nádoby by sa voda po ukončení prevádzky už definitívne vypúšťala mimo fontánu a do hornej nádoby dotekala voda napríklad samospádom. Myslím, že toto je celkom prijateľné riešenie (aspoň bola vo fontáne stále čistá voda).

Realita, čiže kúpeľňa

Použil som dva poháre od Nutelly (sklo, uzáver plast) a jeden veľmi podobný pohár, ale celý plastový (ako fontánku). Celé som to pospájal hadičkami (vnútorný priemer 0,5 cm) a izoloval tmelom. Výška H_3 bola pri tejto fontánke 27 cm a $H_3 - H_1$ bolo 10 cm. Teda voda mala striekať do výšky 10 cm nad hladinu.

Prvý pokus bol absolútne neúspešný – voda tiekla do dolnej nádoby, ale nahor sa nedostalo nič. Po vysušení a ďalšom izolovaní (lepiacou páskou) som dosiahol to, že voda z ústia hadičky aspoň začala vytekať. Bol to úspech, že sa vôbec dajaká voda von dostala.

Dôvody sú jasné: Príliš veľký priemer hadičiek – lepšie bolo použiť slamky, lebo pri tomto priemere všetka voda pretečie fontánkou za pár sekúnd. Ale, a to je hlavné, nedostatočné utesnenie aparatury. To sa najlepšie prejavilo, keď som začal aparaturu prefukovať protismerne, aby som dostal vodu zo spodnej nádoby. Mnou vofúknutý vzduch s radosťou unikal cez miesta, kde hadičky prechádzali plastovými viečkami „podzemných“ nádob. Vzhľadom na minimálne množstvo vzduchu v celom systéme bolo jasné, že aj minimálny únik spôsobí nefunkčnosť fontány.

Pozn. red.: Ako to potom Rimania izolovali!? Vedeli by ste povedať?

A zasa ten Feynmann!

Čo sa týka rotujúcej vrchnej časti, tak to je zas inšpirácia konferenciou a konkrétne *The Feynman's inverse sprinkler problem*. Tam je teória rozpracovaná dosť podrobne a ja len dodávam, že pre potreby fontány zahame ešte konce ramien nahor, aby neostriekala ľudí naokolo v okruhu pekných par metrov. Tu by možno Rimania mali problém s výrobou poriadnych ložísk, ale hádam by niečo vymysleli ... nechám to na nich.

Bzučo

Téma 6 – Alibaba a čtyřicet loupežníků

Řešení prvního problému (39 zachráněných ...)

Mgr. Stanislav Basovník

Pokud stojí trpaslíci¹⁵ v řadě za sebou, je potřeba, aby ten poslední v řadě poslal nějakým způsobem informaci co nejvíce ostatním trpaslíkům. On sám má poloviční pravděpodobnost, že uspěje. Nalezl jsem způsob, jak se může každý další trpaslík zachránit. Poslední trpaslík spočítá počet všech bílých čepic, které vidí před sebou. Pokud je tento počet lichý, řekne „bílá“, ale pokud je sudý, řekne „červená“. Tato informace je však úplná jen pro trpaslíka stojícího těsně před ním. Předpokládejme, že každý trpaslík slyší všechno to, co se děje za ním. Každý trpaslík tedy ví, kolik čepic domluvené barvy (v mém případě bílé barvy) je před ním, neboť je vidí, a jakmile na něj dojde řada, tak už ví, i kolik čepic té barvy bylo za ním. Odtud každý zjistí, jestli je ona sudá či lichá čepice domluvené barvy na jeho hlavě nebo ne. Při této strategii se 39 trpaslíků zachrání každopádně a jeden má poloviční pravděpodobnost. V průměru se zachrání 79 z každých 80 trpajzlíků.

¹⁵ *Pozn. red.: Redakcia sa neztotožňuje s premenovaním lúpežníkov na trpaslíkov.*

34 zachránených ...

Lenka Kovalčinová

V prvom prípade by mohli lúpežníci zvoliť stratégiu, aby sa pri čo najmenšom počte náhodne hovorených čiapok dozvedeli, aký je počet bielych a aký je počet červených čiapok. Vtedy by si ten, ktorý háda, už len spočítal počet čiapok červenej a bielej farby, a tým by vedel, akú čiapku má na hlave on.

Číslo 40 sa dá v dvojkovej sústave zapísať šiestimi znakmi (pomocou číslic 0 a 1). Teda ak to, že lúpežník povie „biela čiapka“, bude znamenať nulu a „červená čiapka“ jedničku, môžeme pomocou odpovedí prvých šiestich zistiť, koľko je pred nimi napríklad červených čiapok. Teda prvý, ktorý háda, povie buď „biela“ alebo „červená“, podľa toho, či je v zápise čísla, ktoré udáva počet červených čiapok medzi prvými 34 zbojníkmi, v dvojkovej sústave na prvom mieste 0 alebo 1. (Dohodnú sa, že takto si pomocou šiestich prvých signalizujú, koľko je červených čiapok medzi ostatnými 34 lúpežníkmi.) Druhý, ktorý háda, si taktiež zráta, koľko červených čiapok je medzi zvyšnými 34 lúpežníkmi, a povie druhú cifru tohto čísla ... až napokon siedmy vie, koľko červených čiapok má spolu s ním 33 lúpežníkov, ktorí sú pred ním. A teda už vie zistiť, akú má čiapku, lebo buď je pred ním toľko, koľko signalizovali, alebo o jednu menej, čo znamená, že má on tú červenú. No a ostatní potom zas vedia počet červených už bez toho siedmeho, lebo vedia, že on uhádol ... a tak ďalej.

32 zachránených ...

Dr. Lenka Beranová

Ukážu spôsob, jak zachrániť 4 lúpežníkov z 5, napríklad takto: 40. lúpežník ťekne

biela: pokiaľ ((36. a 37. majú rovnakú farbu) A (38. a 39. taky)) ANEBO
 ((36. a 37. majú rôznu farbu) A (38. a 39. také rôznu))

červená: ve zvyšných prípadoch.

Ukážu to na príkladu: situácie posledných päť lúpežníkov nechť vypadá nasledovne:

36.	37.	38.	39.	40.
č	b	č	č	č

Pak 37. vidí iba 36., 38. vidí 37. a 36. a podobne.

40. l. Ťekne „červená“ podľa výše uvedenej domluvy, náhodou sa zachráni, pretože má rovnakú červenou čepicu.
39. l. Ví z toho, čo ťekl 40. l., a z toho, čo vidí pred sebou, že má rovnakú farbu ako 38., teda červenou, ťekne to a zachráni sa.
38. l. Slyší, že 39. má červenou, ví že má rovnakú, ťekne „červená“ a zachráni sa.

37. l. Z toho, čo řekl 40., a z toho, že slyší, že 38. a 39. mají stejnou barvu, ví, že má jinou barvu než 36. l., a řekne tedy „bílá“ a zachrání se.
36. l. Sice nevidí nic, co by mu pomohlo, ale zato všechno slyšel, takže mu došlo, že má jinou barvu než ten za ním, řekne tedy „červená“ a zachrání se.

Tímto způsobem se může s jistotou zachránit 32 loupežníků.

Pozn. red.: Všetci ostatní ste dokázali zachrániť aspoň 20 lúpežníkov. Niektorí z vás navrhovali rôzne znamenia, aké si lúpežníci môžu dávať: Mgr. Lucka Vasická a Doc. Martin Demín farbu hlasu, Dr. Dana Beránková buchnutie po ramene lúpežníka pred ním.

Pokiaľ ide o druhú časť problému, mnohí z vás navrhli, aby si lúpežníci vybrali jedného spomedzi seba, ktorý si náhodne tipne a ostatní napíšu „neviem.“ To navrhoval Bc. Ľuboš Uličný, Doc. Václav Cviček, Doc. Martin Demín, Dr. Lenka Beranová, Prof. Tibor Vansa, Lenka Kovalčinová. Iní z vás navrhli opäť triky, napríklad že sa ostatní na toho jedného budú alebo nebudú dívať (Mgr. Zuzana Rozlúvková), otáčanie hlavou (Dr. Jozef Tinaj), poškrabanie sa za uchom (Doc. Martin Demín). Veľmi pekný trik poslal Mgr. Tomáš Štec:

Stratégia

Mgr. Tomáš Štec

Hovoriť nemôžu, ale môžu sa hýbať, takže sa postavia vedľa seba dvaja. Ďalší sa pozrie na nich – ak majú rovnakú farbu čapice, postaví sa ľubovoľne bokom od nich, ak majú rôznu farbu čapice, postaví sa medzi nich. Ďalší zbojníci budú prichádzať po jednom a každý sa postaví na rozhranie bielych a červených čiapok.

Takto nám vznikne rad vedľa seba stojacich zbojníkov. Niekde v tomto rade bude predel červených a bielych čiapok a na jednu stranu od tohto predelu budú len červené, na druhú len biele čiapky. Zbojník, ktorý má všade okolo seba rovnakú farbu, môže napísať farbu, ktorá je okolo neho, len dvaja zbojníci na predele, ktorí okolo seba vidia aj biele aj červené čiapky, napíšu „neviem“.

Návrh na premýšľanie

Pokúste sa vymyslieť a poslať nám ďalšie zaujímavé úlohy o lúpežníkoch a stratégiách. Ak budú pekné a netriviálne, určite ich uverejníme.

Peto

Téma 7 – Vylievanie fľaše

Jak nejrychleji vyprázdnit láhev

Mgr. Lukáš Pavlovský

Jak nejrychleji vyprázdnit láhev? Počítejme s 0,7-litrovou láhví o vnitřním průměru hrdla 16 mm. Návrhy na nejrychlejší vyprázdnění jsem rozdělil do dvou základních skupin:

- vyprazdňování bez použití externích nástrojů,
- vyprazdňování s použitím externích nástrojů.

Vyprazdňování bez použití externích nástrojů

Nejjednodušší způsob je využití vlastní setrvačnosti vody v láhvi. Láhvi můžeme udělit zrychlení např. prudkým přímočarým pohybem ve směru vertikální osy (čili zespodu nahoru), přičemž na láhev a vodu působí opačná setrvačná síla. Hodnoty zrychlení nemohou narůstat donekonečna, protože by k tomu bylo zapotřebí nekonečně velké síly, která by láhev rozdrtila. Zrychlení je tedy omezeno mechanickou pevností láhve. Zjistit, jak velkou maximální sílu vydrží, by pro mne bylo velice obtížné, a tak jsem daný údaj odhadl. I když se toto číslo může podstatně lišit od skutečnosti, počítejme s tím, že naše láhev vydrží tlakovou sílu 2 000 N, což odpovídá dvěma metrickým centům.¹⁶

Pokusně jsem zjistil průměrný čas, za který se plná láhev umístěná svisle úplně vyprázdní bez setrvačné síly, jen díky síle gravitační:

$$t \approx 12 \text{ s.}$$

Na vodu působí tíhové zrychlení 10 m/s^2 . Při umělém zrychlení ve vodorovném směru působí na láhev s vodou síla limitně se blížící maximální síle 2 000 N (pro jednoduchost výpočtu použijme $F = 2\,000 \text{ N}$). Objem vody je 0,7 l, její hmotnost je tedy 700 g. Hmotnost láhve je asi 100 g, čili celková hmotnost je 800 g. Maximální zrychlení celkové soustavy pak je

$$a = \frac{F}{m} = 2\,500 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 250g, \quad (1)$$

kde g je normální tíhové zrychlení. Ze vztahu pro rychlost rovnoměrného pohybu vyplývá, že voda při zrychlení $250g$ vyteče 250-krát rychleji, než při vytékání způsobeném gravitací. Voda tedy vyteče za $12/250 \text{ s} = 0,05 \text{ s}$. Podobného zrychlení bychom mohli dosáhnout při křivočarém pohybu na centrifuze.

¹⁶ Pozn. red.: Je ale treba rozlišovať, či sila pôsobí staticky alebo dynamicky. Fľaša udrží 200 kg v pokoji, ale nie, ak na ňu pustíme oveľa menšie závažie z maličkovej výšky – hovoríme o krehkom materiále. V oboch prípadoch pôsobí rovnaká sila, ale impulz sily je rôzny.

Pozn. red.: Spôsob vytekania vody cez hrdlo fľaše si zasluhuje hlbšiu analýzu. Pri malom zrýchlení je prúdenie hrdlom menej turbulentné, čiže rýchlejšie. Čím ďalej je prúdenie turbulentnejšie a voda sa pomalšie vylieva z fľaše.

Ako nápad na experimentálne overenie navrhujem merať čas, za ktorý vytečie voda z fľaše, ktorá je cez kladku spojená s ťažkým kameňom (napr. na kladkostroji na stavbe). V tomto prípade na vodu pôsobí zrýchlenie takmer 2g, preto by mal čas byť polovičný. Urobte experiment a porovnajte výsledok s teóriou.

Vyprázdňovanie s použitím externých nástrojů

Jak jsem dříve zmínil, další způsob, jak vyprázdnit láhev, je použít některé externí nástroje. Úplně nejjednodušším nástrojem je brčko nebo hadička.

Brčko můžeme připojit k čerpadlu. Musí se však uvažovat menší průměr brčka (6 mm) než láhve (16 mm), aby okolo brčka směrem do láhve mohl proudit vzduch při vyčerpávání vody. Kdybychom použili hadičku, která by byla na druhém konci připojena k nějakému velmi výkonnému čerpadlu, voda by se z láhve teoreticky dostala velice rychle. Brčko by se dalo také využít jako „rychlý doplňovač vzduchu“ při vytékání vody způsobené gravitací ve svislém směru (láhev prostě otočíme vzhůru nohama).

Kdyby zde brčko nebylo, voda by musela vzduch nasávat skrz její vlastní proud, a to by brzdilo její vytékání. Pokusně jsem zjistil čas vytékání s brčkem. Tento čas t je podstatně kratší než bez brčka,

$$t \approx 4,4 \text{ s.}$$

Tento mechanismus by byl jistě účinnější, kdyby brčko vzduch nenasávalo, ale kdyby byl vzduch do něj vháněn pod určitým tlakem. Brčko (hadičku) bychom připojili k výkonnému kompresoru. Vzduch by se začal hromadit mezi dnem láhve a vodou (láhev je otočena vzhůru nohama) a jeho tlakem by se voda vytlačovala ven. Tlak je pochopitelně opět omezen pevností láhve, a proto je rychlost vytékání také omezena jako u ostatních uspořádání.

Snad nejdokonalejší způsob vyprázdnění vody z láhve, mimo její rozbití kladivem, je kombinace některých předchozích variant. Můžeme dát dohromady např. odstředivou sílu, čerpadlo a kompresor.

Je však důležité mít vhodný průměr hadiček. Jestliže je malý průřez hadice kompresoru, vhání se sice méně vzduchu do láhve – malý tlak – ale voda je stlačována větší silou, neboť je velký poměr mezi plochou průřezu hadice a plochou stlačované vody. Je tedy důležité stanovit vhodné velikosti hadiček vzhledem k průřezu hrdla.

Pozn. red.: Domnievam sa, že výkon kompresora je konštantný, teda ak zúžime hadičku z kompresora, úmerne sa zväčší aj tlak vyvíjaný kompresorom. To potom znamená, že prietok nezávisí na priereze hadičky. Situácia je ale príliš zjednodušená, pretože každé čerpadlo (kompresor) má istý maximálny objemový prietok. Pri vysokej rýchlosti vytekanej vody, tiež treba rátať s tým, že časť tlakovej energie čerpadla sa stratí v turbulentniach.

Experiment

Prof. Tibor Vansa

Autor vylieval sklenenú, pollitrovú fľašu od piva pri rôznych sklonoch fľaše. Zistil, že voda sa najrýchlejšie vylieva pri sklone približne 60° , trvalo jej to niečo viac ako šesť sekúnd. Graf závislosti sklonu fľaše na vyliatí pripomína podľa autora parabolu.

Autor sa rovnako pokúšal teoreticky odvodiť čas, za ktorý voda vytečie z fľaše. Zistil, že všetky modely predpovedajú kratší čas vyliatia fľaše, ako tomu v skutočnosti je. Na základe experimentov tvrdí, že veľkú úlohu pri vytekaní vody hrajú bublinky vnikajúce do fľaše počas vytekania.

Ďalšie experimenty

Doc. Martin Demín

Pri experimentoch som použil obyčajnú fľašu o objeme 0,7 litra.

Najväčší problém je dostať vodu von z fľaše a nahradiť ju vzduchom, ktorý sa musí (nanešťastie) dostať do fľaše tým istým otvorom ako voda von. Vtedy nastáva v prvom a druhom prípade nežiadúce „bublinkovanie“. V treťom prípade bublinkovanie takmer nenastáva, pretože voda je tlačaná veľkou silou von.

1. Fľašu naplníme a jednoducho otočíme dole hrdlom. Vyliatie trvá niečo cez 12 sekúnd.
2. Ďalší spôsob je otočenie fľaše dole hrdlom a jej následné vytriasanie. Toto trvá okolo 7 sekúnd.
3. Ešte rýchlejší spôsob odporúčam skúšať iba vonku. Fľašu chytím do ruky a budem točiť vo vertikálnej rovine okolo ramena. Odstredivá sila pôsobí v smere hrdla von z fľaše a voda sa tak rýchlejšie dostane von. Čas okolo 4 sekúnd.
4. Tento spôsob je najrýchlejší, ale neodporúčam ho robiť so sklennou fľašou, pretože by mohla pri vysokom tlaku prasknúť. Podstata je v tom, že do fľaše strčím cez hrdlo hadičku, cez ktorú budem pod tlakom privádzať vzduch, ktorý vytlačí vodu. Ja som použil akváriovú hadičku. Fľašu otočím a do hadičky pustím tlak. Pri použití dvojlitrovej plastovej fľaše a tlaku okolo 1,5 atmosféry sa fľaša vyprázdnila približne za 1,5 sekundy. To znamená, že obyčajná 7 dl fľaša by sa vyprázdnila asi za 0,5 sekundy.

Pozn. red.: To však predpokladá rovnaký priemer hrdla. Svoju úlohu zohráva aj tvar fľaše apod.

Ešte dajake experimenty

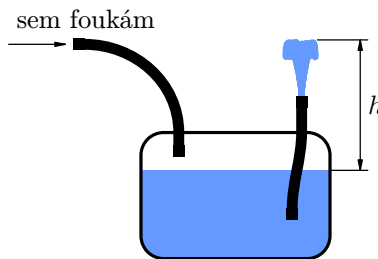
Mgr. Tomáš Štec

Fľaša, ktorú som na pokusy použil, nebola podľa zadania, keďže išlo o sklenenú fľašu od sirupu s celkovým objemom 0,36 litra. Vo výsledkoch neuvádzam objemový prietok hrdlom, ale rýchlosť výtoku vody z fľaše. Rýchlosť som použil naschvál – rýchlosti vytekania vody pri jednotlivých spôsoboch môžeme priamo porovnať, ale pri použití prietoku by sme museli zohľadniť napríklad prítomnosť hadičky v hrdle. Keďže hadička nemá zanedbateľný priemer, vplývala by značnou mierou aj na hodnotu prietoku.

Pozn. red.: Ak nám (podľa zadania) ide iba o čas výtoku, dôležitý je objemový prietok, nie rýchlosť. Nasleduje zoznam a popis metód použitých pri vyprázdňovaní fľaše, zoradený od najrýchlejšej po najpomalšiu.

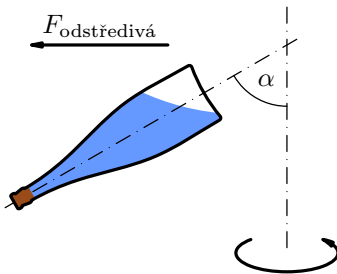
N ^o metóda	čas výtoku	rýchlosť výtoku
1. Tlak	$0,84 \pm 0,05$ s	$1,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Rovnaký ako spôsob číslo 4, použitá hadička však nemala voľný koniec so štandardným tlakom, ale moje ústa. Meraním na pseudofontánkovej aparátúre (obr. 1) som odhadol, že dokážem fúkať tlakom až 3 kPa. Teda týmto bol vyriešený problém, ako dostať vzduch do fľaše. Zároveň tento dodatočný tlak zvýšil rýchlosť vody. Pri tejto metóde voda z fľaše „vystrelila“ za menej ako sekundu, čas výtoku sa meral dosť zle. Metóda spoľahlivo obsadila prvé miesto.



Obr. 1

N ^o metóda	čas výtoku	rýchlosť výtoku
2. Krúženie	$1,6 \pm 0,2$ s	$0,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$



Obr. 2

Podľa obr. 2 som fľašu chytil za dno a krúživým pohybom zápästia som z nej vodu dostal celkom rýchlo. Metóda skončila na druhom mieste a na prvom bez použitia pomôcok. Prečo bola rýchlejšia ako iné metódy? Krúžením na vodu pôsobila navyše odstredivá sila. Počas pokusov vzduch „bublal“, vyrovnával tlak dnu a mimo fľaše. Je výhodné, keď os otáčania neprechádza žiadnym bodom fľaše, a teda odstredivá sila pôsobí na všetku vodu vo fľaši. Ďalej je výhodné aj to, ak fľaša

nie je v horizontálnej rovine, pretože by sme prišli o príspevok tiažovej sily a na vodu by pôsobila iba sila odstredivá. Najvýhodnejšie teda vychádza uhol odklonu od osi taký, aby výslednica síl ležala na osi fľaše.

N ^o metóda	čas výtoku	rýchlosť výtoku
3. Vylievanie	$3,6 \pm 0,1$ s	$0,36 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Proste som obrátil fľašu hore dnom. Voda vyteká „kvantovo“ – vždy vytečie nejaký objem vody, cez hrdlo prejde vzduchová bublina, zasa vytečie nejaké množstvo vody atď.

N ^o metóda	čas výtoku	rýchlosť výtoku
4. Hadička	$4,5 \pm 0,4$ s	$0,34 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Vylievanie obohatené o hadičku, ktorá by mala dostávať vzduch do fľaše a zabrániť tak prebublávaniu vzduchu cez hrdlo. Mal som nasledujúce problémy. Hadičku sa mi nikdy nepodarilo vložiť do fľaše tak, aby v nej nebola voda a neblokovala vzduch a zároveň sa vložением hadičky zmenšil prierez, kadiaľ vytekala voda.

Pozn. red.: Všimnite si, že rýchlosť vytekania v treťom a v štvrtom prípade sú takmer rovnaké. Naznačujte to, že hadičkou neprúdil do fľaše žiaden vzduch. Je to možno preto, lebo otvor hadičky bol príliš malý a povrchové napätie zabránilo vode z nej vytiecť.

N ^o metóda	čas výtoku	rýchlosť výtoku
5. Nakláňanie	$7,0 \pm 0,7$ s	$0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Spôsob, ktorý bol použitý skôr kôli srande a ako dôkaz toho, že je výhodnejšie fľašu obrátiť hore dnom ako postupne nakláňať.¹⁷ O čo išlo? Jednoducho som fľašu postupne skláňal vždy tak, aby v ústi zostalo miesto, kadiaľ mohol prúdiť dnu vzduch. Zabránilo sa tým vytváraniu bubliniek, ale rýchlosť výtoku výrazne poklesla.

Záverečné poznámky redakcie

Na výtokovú rýchlosť vody z ústia fľaše majú najväčší vplyv turbulencie, vznikajúce miešaním vody a pohybujúce sa oproti prúdiacemu vzduchu. Veľká časť energie sa stráca práve v nich. Bolo by zaujímavé sledovať, ako sa mení doba výtoku v závislosti na teplote vytekajúcej vody. Čím väčšia viskozita vody, tým menej je voda poddajná a vylieva sa pomalšie. Viskozita klesá takmer exponenciálne s teplotou. Znamená to, že vracia voda sa z fľaše vyleje takmer okamžite? Pokúsi sa dakto z vás zmerať závislosť času výtoku na teplote vody a napíše správu do budúceho ročníka?

Bzučo

¹⁷ Pozn. red.: Porovnaj so zistením Prof. Tibora Vansu.

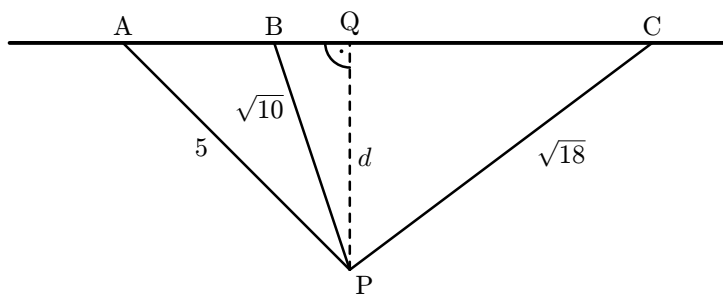
Řešení úloh

Úloha 4.1 – Na jedné lodi plujem ... (5b)

Zadání: Dva parníky pluly po moři konstantní rychlostí beze změny směru. V 11.55 byly od sebe vzdáleny 5 mil. Ve 13.10 je dělilo $\sqrt{10}$ námořních mil a ve 14.50 byla jejich vzdálenost $3\sqrt{2}$ mil. Na jakou nejkratší vzdálenost se parníky k sobě dostali během plavby?

Řešení:

Tato úloha šla vyřešit mnoha způsoby. Všechny ale měly něco společného – vhodnou volbu souřadné soustavy, ze které celou situaci posuzujeme. Všechna správná řešení po několika procedurách dospěla ke stejné volbě. První parník byl určen jako počátek souřadné soustavy (jako by celou situaci popisoval pasažér tohoto parníku). Druhý parník se vůči prvnímu pohyboval nějakým nám neznámým směrem a rychlostí. I s tím se dá leccos udělat. Když si celou situaci pootočíme, stejně jako je zobrazená na obrázku 1, vzdálenosti ani rychlosti se nezmění a nám to pomůže k jednoduššímu řešení.



Obr. 1

Nechť se Origo¹⁸ celou dobu vyskytuje v počátku P, zatímco Infinitus pluje po přímce z bodu A do bodu C. V bodě A se nachází v čase 0. V bodě B v čase 75 min, v bodě C v čase 175 min.

Dále už používám jen matematický zápis rovnic bez fyzikálních jednotek.

Pokud si označíme v rychlost, kterou se pohybuje Infinitus po přímce vůči Origovi, pak můžeme prohlásit, že $|AB| = 75v$. Velikost úsečky $|AB|$ si můžeme vyjádřit pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníků APQ a BPQ

$$|AB| = 75v = \sqrt{5^2 - d^2} - \sqrt{10 - d^2}. \quad (1)$$

Stejně tak

$$|BC| = 100v = \sqrt{10 - d^2} + \sqrt{18 - d^2}. \quad (2)$$

¹⁸ Origo znamená latinsky počátek a Infinitus nekonečno.

Vydělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{25-d^2} - \sqrt{10-d^2}}{\sqrt{10-d^2} + \sqrt{18-d^2}}, \quad (3)$$

$$4 \cdot (\sqrt{25-d^2} - \sqrt{10-d^2}) = 3 \cdot (\sqrt{10-d^2} + \sqrt{18-d^2}).$$

Rovnici umocníme

$$16 \cdot (25 - d^2) - 24 \cdot \sqrt{(25 - d^2)(18 - d^2)} + 9(18 - d^2) = 490 - 49d^2. \quad (4)$$

Provedeme substituci $d^2 = x$

$$562 - 25x - 490 + 49x = 24 \cdot \sqrt{(25 - x)(18 - x)}, \quad (5)$$

$$72 + 24x = 24 \cdot \sqrt{450 - 43x + x^2}.$$

Po vydělení 24 a umocnění vyjde

$$9 + 6x + x^2 = 450 - 43x + x^2, \quad (6)$$

$$x = 9,$$

tj. minimální vzdálenost obou parníků je $d = \sqrt{x} = 3$ míle.

Toť vše.

Khayis

Úloha 4.2 – Jak to vidí kružnice? (5b)

Zadání: *Jak se v dutém zrcadle zobrazí kružnice se středem v jeho ohnisku? Předpokládejte, že poloměr kružnice je mnohem menší než poloměr křivosti zrcadla.*

Řešení:

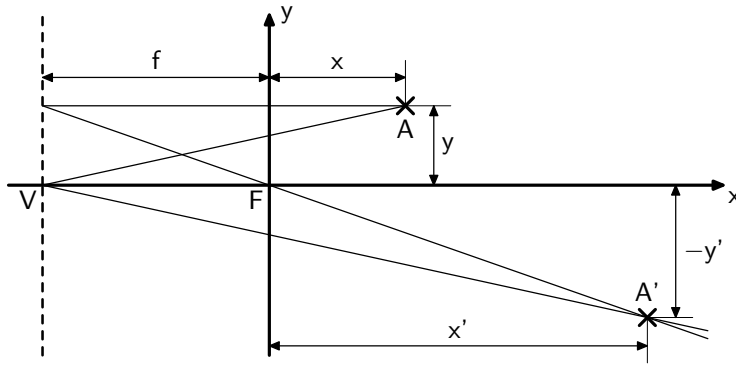
Zavedu si souřadnou soustavu s počátkem v ohnisku tak, že osa x míří od vrcholu zrcadla (tedy splývá s optickou osou) a ostatní osy jsou na ni kolmé.

Protože je kružnice mnohem menší než poloměr křivosti zrcadla, mohu zanedbat zakřivení zrcadla kolem jeho vrcholu a předpokládat, že paprsky jdoucí rovnoběžně s optickou osou se odrazí od roviny, která prochází vrcholem a je kolmá na osu x (na obr. 1 je vyznačena čárkovaně). Dále paprsek, mířící do vrcholu se musí odrazit symetricky vzhledem k optické ose. Tím mám dané dva paprsky, mohu zjistit jejich průsečík a pak napsat zobrazovací rovnici.

Na obrázku 1 je znázorněno, jak se zobrazí bod A o souřadnicích $[x, y]$. Z podobných trojúhelníků je vidět, že platí

$$\frac{f+x}{y} = -\frac{f+x'}{y'} \quad \text{a} \quad \frac{f}{y} = -\frac{x'}{y'}. \quad (1)$$

Pro bod v rovině xz platí díky symetrii stejný vztah jako pro bod v rovině xy . A protože jde o lineární zobrazení, transformují se stejně i souřadnice libovolného bodu v prostoru před zrcadlem. (Jakýkoliv bod lze totiž získat jako



Obr. 1

lineární kombinací souřadnic bodů ležících v těchto dvou rovinách.) Dostáváme tedy tři rovnice

$$x' = \frac{f^2}{x}; \quad y' = -\frac{fy}{x} \quad \text{a} \quad z' = -\frac{fz}{x}. \quad (2)$$

Pro bod A ležící mezi ohniskem a vrcholem zrcadla platí stejné vztahy. (Ten, kdo tomu nevěří si to může vyzkoušet sám. :-)

Chci zjistit, jak se zobrazí kružnice se středem v ohnisku – to znamená kružnice s obecným poloměrem otočená libovolným způsobem. Jakékoliv otočení této kružnice se dá složit z rotace kolem osy x a rotace kolem osy z . Celá soustava je ale symetrická vůči optické ose (ose x), takže stačí zkoumat kružnici otočenou o úhel φ kolem osy z . Parametrická rovnice kružnice v rovině yz o poloměru r je

$$x_0 = 0; \quad y_0 = r \cos t; \quad z_0 = r \sin t. \quad (3)$$

Otočením se nijak nezmění z -ová souřadnice a jako nové x (resp. y) se použije původní y_0 vynásobené sinem (resp. kosinem) úhlu φ ,

$$x = r \cos t \cdot \sin \varphi; \quad y = r \cos t \cdot \cos \varphi; \quad z = r \sin t. \quad (4)$$

Po zobrazení v zrcadle podle vztahu (2) vyjde následující křivka

$$\begin{aligned} x' &= \frac{f^2}{r \cos t \cdot \sin \varphi}; \\ y' &= -r \cos t \cdot \cos \varphi \cdot \frac{f}{r \cos t \cdot \sin \varphi} = -f \cotg \varphi; \\ z' &= -r \sin t \cdot \frac{f}{r \cos t \cdot \sin \varphi} = -\frac{f}{\sin \varphi} \cdot \operatorname{tg} t. \end{aligned} \quad (5)$$

Souřadnice y' nezávisí na t , obraz kružnice bude celý ležet v rovině rovnoběžné s rovinou xz posunutě o y' . Pohledem do chytré knížky zjistím, že zbývající vztahy pro x' a z' jsou parametrickou rovnicí hyperboly se středem v počátku (v tomto případě v ohnisku), a po vyloučení t získám

$$\frac{x'^2 r^2 \sin^2 \varphi}{f^4} - \frac{z'^2 \sin^2 \varphi}{f^2} = 1. \quad (6)$$

Reálná osa je tedy ve směru optické osy a délky poloos jsou

$$a = \frac{f^2}{r \sin \varphi} \quad \text{a} \quad b = \frac{f}{\sin \varphi}.$$

Nejmenší obraz vznikne v případě, že kružnice leží v rovině xz ($\sin \varphi = 1$). Když ji budu otáčet, rozměry hyperboly porostou a bude se celá stále více posouvat „nahoru“ nebo „dolů“ (závisí na směru, kterým kružnici otáčím). Přitom větev hyperboly před zrcadlem odpovídá půlkružnici, která je před ohniskem, a druhá větev, která se zobrazí za zrcadlo, a je tedy jen zdánlivým obrazem, odpovídá půlkružnici ležící mezi vrcholem zrcadla a ohniskem. Dva body kružnice, které jsou přesně na ohniskové rovině mohou zanedbat, protože z nich vychází limitně nulové množství světla.

Když budu kružnici natáčet do roviny yz , bude se z pohledu pozorovatele, který se dívá podél osy x , jedna větev hyperboly přibližovat a zároveň také posouvat do strany (rostoucí y' a a), naopak druhá větev se bude vzdalovat do nekonečna a zároveň se bude vrchol hyperboly přibližovat k vrcholu zrcadla (protože x klesá rychleji, než roste ypsilonová vzdálenost od osy).

Při natáčení na druhou stranu se situace opakuje s jediným rozdílem, že obraz je teď na druhé straně od optické osy. Ve chvíli, kdy se kružnice dostane až do roviny yz ($\sin \varphi = 0$), splynou „vzdálenější“ ramena obou hyperbol a pozorovatel uvidí opět kružnici v nekonečné vzdálenosti.

Její úhlová velikost závisí na vzdálenosti d oka od ohniska zrcadla a vychází přibližně (d/f) -krát větší než velikost předmětu (za předpokladu, že $\tan x \approx x$, který je, vzhledem k malým rozměrům kružnice a tudíž i malým úhlovým velikostem, oprávněný).

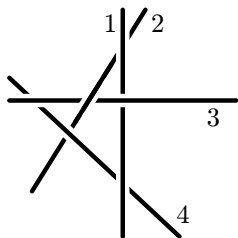
Mgr. Tomáš Štec nám napsal, že prakticky provedl pokus s kružnicí umístěnou kolmo na optickou osu, a ta se skutečně zobrazila opět jako kružnice.

Marble

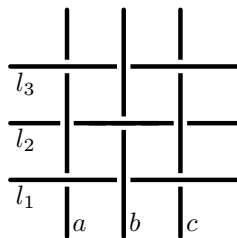
Úloha 4.3 – Priemety priamok (5b)

Zadání:

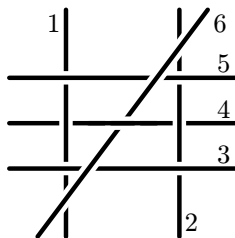
Několik mimoběžných přímek v prostoru, které se neprotínají, se zobrazí do horizontální roviny. Tyto projekce jsou nakresleny tak, že na průsečících vidíme, která čára je výš a která níž. Jsou projekce na obrázcích 1a, 1b a 1c možné? Lze najít postup, jak zodpovědět danou otázku v obecném případě?



Obr. 1a



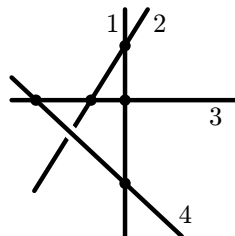
Obr. 1b



Obr. 1c

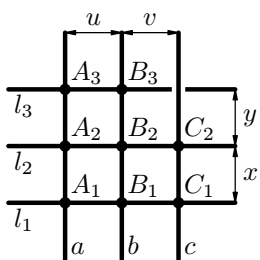
Řešení:

Usporiadanie podľa obrázku 1a nie je možné. To sa dokáže sporom. Predpokladajme, že máme 4 priamky ako na obrázku 1, pričom priamky označíme číslami 1 až 4. Je zrejme, že priamku 1, ktorá prechádza „pod“ priamkou 3, môžeme „spustiť nižšie“, aby sa pretínala s priamkami 2 a 4. Potom podobne sklopíme priamku 3 tak, aby prešla priamky 1 a 4. Napokon priamku 2 otočíme okolo bodu, v ktorom pretína priamku 1 tak, aby sa pretínala s priamkou 3 (a naďalej prechádza „pod“ priamkou 4). To je určite možné. Teda ak je možné pôvodné usporiadanie priamok, tak je možné aj usporiadanie priamok na obrázku 2. Priesečníky priamok 1–2, 1–3 a 2–3 nám definujú istú rovinu. V tejto rovine určite ležia priamky 1, 2, 3 a zrejme aj priamka 4, lebo sa pretína s priamkou 1 a s priamkou 3 (má teda dva body, ktoré ležia v tejto rovine, a preto tam leží celá). Z toho plynie, že priamky 2 a 4 ležia v jednej rovine a musia sa pretínať (keby boli rovnobežné, boli by rovnobežné aj na obrázku 1 a 2, ako aj na každej projekcii). Preto obrázok 2 nie je možný, a teda nie je možné ani usporiadanie priamok na obrázku 1.



Obr. 2

Podobne ukážeme, že ani usporiadanie podľa obrázku 1b zo zadania nie je možné. Označme si priamky a, b, c a l_1, l_2, l_3 ako na obrázku 1b. Priamku l_1 opäť „spustím“ tak, aby pretínala priamky a a c . Priamku l_2 zas „naddvihnem“, takže bude taktiež pretínať a a c . Potom s priamkou b urobím toto: tam, kde prechádza „nad“ l_1 , ju „spustím“, takže bude pretínať l_1 a tam, kde prechádza „pod“ l_2 , ju „naddvihnem“, takže bude pretínať i l_2 . Všimnime si, že fakt, že b prechádza „nad“ l_3 , sa tým nezmení. No a napokon urobím podobnú vec s priamkou l_3 , takže bude pretínať a a b a bude prechádzať „ponad“ c . (Jednotlivé kroky si kreslite.) Dostaneme teda konfiguráciu z obrázku 3. Priesečníky priamok si označíme A_1, A_2 tak, ako na obrázku. Chceme ukázať, že to nie je možné. Priamky l_1 a a nám definujú rovinu, ktorú pracovne označíme *horizontálna rovina*. Vzdialenosť nejakého bodu od tejto roviny nazvime *výška* bodu. Je teda zrejme, že body A_1, A_2, A_3, B_1 a C_1 majú



Obr. 3

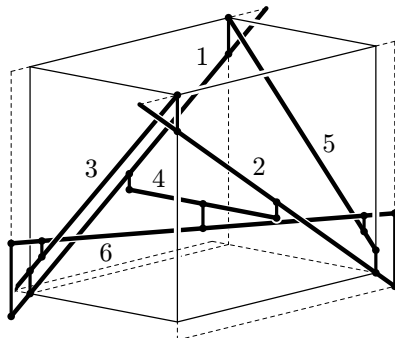
nulovú výšku. Označme x , resp. y , vzdialenosť priemetov priamok l_1 a l_2 , resp. l_2 a l_3 , do horizontálnej roviny. Podobne u , resp. v , bude značiť vzdialenosť priemetov priamok a a b , resp. b a c (obr. 3). Bod, ktorý leží na priamke l_3 „nad“ priamkou c , označme \widetilde{C}_3 a bod na priamke c „pod“ ním označme \widehat{C}_3 . Ak výšku nejakého bodu X označíme $v(X)$, tak zrejme $v(\widetilde{C}_3) > v(\widehat{C}_3)$. Je jasné, že ak $v(B_2) = \varepsilon x$, tak (keďže b je priamka) $v(B_3) = \varepsilon(x + y)$. Potom ale výška bodu C_2 je $v(B_2) \frac{u+v}{u} = \varepsilon x \frac{u+v}{u}$. Teda

$$\begin{aligned} v(\widehat{C}_3) &= v(C_2) \frac{x+y}{x} = \varepsilon x \frac{u+v}{u} \frac{x+y}{x} = \varepsilon(x+y) \frac{u+v}{u}, \\ v(\widetilde{C}_3) &= v(B_3) \frac{u+v}{u} = \varepsilon(x+y) \frac{u+v}{u}. \end{aligned} \quad (1)$$

Vidíme, že $v(\widetilde{C}_3) = v(\widehat{C}_3)$, čo je spor s $v(\widetilde{C}_3) > v(\widehat{C}_3)$. Priamky l_1 a c sa teda taktiež pretínajú.

Poznamenanajme, že existuje aj iný postup riešenia bez použitia rovníc. Úloha je totiž veľmi stará, pochádza pôvodne od gréckeho matematika *Euklida*. Jeho riešenie je taktiež veľmi pekné a nájdete ho v knihe *Zobrané spisy gréckych matematikov*, zv. 3, str. 296 (Albatros).

Napokon ukážem, že usporadnie priamok na obrázku 1c je možné. Projekcia priamok z obrázku 4 na podstavu kocky nám dá práve obrázok 1c (premyslite si!). Zvislé hrubé čiary sa premietnu do bodu, ktorý je v projekcii „priesečníkom“ príslušných priamok.



Obr. 4

Pozn. red.: Na tomto mieste by som rada pochválila Mgr. Jozefa Straského, ktorý jediný našiel riešenie.

kolektív Ľ Jarka

Úloha 5.1 – Padajúci bublinky (7b)

Zadání: Určité jste už někdy viděli mýdlovou bublinku, jak se pomalu snáší k zemi. Zkuste se teď na takovou bublinku podívat trochu více fyzikálně. Dokážete určit, jakou rychlostí bude klesat a na jakých vlastnostech tato rychlost závisí? Zkuste potřebné údaje změřit nebo kvalifikovaně odhadnout a porovnejte váš model s výsledkem experimentu.

Nebo můžete postupovat naopak. Změřte rychlost padání u co nejvíce různých bublinek za různých podmínek a ze zjištěných údajů odvoďte nějaký obecný vztah – na čem a jak ta rychlost závisí.

Řešení:

Teória pádu bublinky

Pozrime sa na to, aké sily budú pôsobiť na padajúcu bublinku. Predpokladajme, že táto bublinka má tvar gule a všade rovnakú hrúbku. Pôsobia na ňu tiažová

sila a odporová sila vzduchu, teda platí

$$F_g + (F_{gv} - F_{vz}) - F_o = ma, \quad (1)$$

kde F_g je tiažová sila pôsobiaca na bublinku bez vzduchu vo vnútri, F_{gv} je tiaž vzduchu vo vnútri, F_{vz} je vztlaková sila pôsobiaca na bublinku (pre jednoduchosť počítajme iba so silou pôsobiacou na vzduch vo vnútri bublinky) a F_o je odporová sila. Ak si spočítame *Reynoldsovo číslo*¹⁹, zistíme, že prúdenie okolo bublinky je laminárne, a preto použijeme Stokesov vzorec

$$F_v = 6\pi\eta Rv,$$

kde F_v je laminárna odporová sila, η dynamická viskozita a R polomer bublinky.

Objem bublinky spočítajme približne ako jej povrch krát hrúbka h . Rozdiel tiažovej a vztlakovej sily pôsobiaci na vzduch vo vnútri bublinky sa spočíta z nárastu tlaku vo vnútri bublinky vďaka povrchovému napätiu mydlového roztoku

$$F_{gv} - F_{vz} = V(\rho_{vz_{in}} - \rho_{vz_{out}}) \cdot g = \Delta\rho_{vz} Vg, \quad (2)$$

kde $\rho_{vz_{in}}$ je hustota vzduchu vo vnútri bublinky a $\rho_{vz_{out}}$ je hustota vzduchu mimo nej. Zo stavovej rovnice ideálneho plynu dostaneme

$$pV = \frac{M}{M_m} R_m T; \quad p = \frac{M}{V} \frac{R_m T}{M_m}; \quad \Delta p = \frac{\Delta M}{V} \frac{R_m T}{M_m} = \Delta\rho_{vz} \frac{R_m T}{M_m}. \quad (3)$$

V predchádzajúcej rovnici sme označili M hmotnosť vzduchu vo vnútri bublinky a $M_m = 0,029 \text{ kg/mol}$ molárnu hmotnosť vzduchu.

Po dosadení výsledkov rovníc (3) a (2) do (1) dostaneme

$$4\pi r^2 h \rho_{voda} g + \frac{\Delta p \cdot M_m}{R_m T} Vg - 6\pi\eta r v = ma. \quad (4)$$

Ak chceme nájsť iba rovnovážnu rýchlosť, stačí, keď na pravej strane v rovnici (4) položíme $a = 0$. Konštanta $\sigma \approx 40 \text{ mN/m}$ značí povrchové napätie mydlového roztoku. Vo vzorci je použité 4σ , pretože bublinka má dva povrchy, vonkajší a vnútorný, a každý z nich prispieva k zvýšeniu tlaku vo vnútri bublinky $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$. Teda

$$v_\infty = \frac{2rg}{3\eta} \left(h\rho_{voda} + \frac{4\sigma M_m}{3R_m T} \right). \quad (5)$$

Pri porovnaní prvého a druhého člena zátvorky v rovnici (5) zistíme, že ich pomer je zhruba $10^9 h$. Člen obsahujúci $h\rho_{voda}$ je asi o tri rády väčší ako $4\sigma M_m/(3R_m T)$, preto druhý člen zanedbáme. Hrúbka bublinky bola braná

¹⁹ Reynoldsovo číslo udáva, či je prúdenie turbulентné alebo laminárne.

$h = 1 \mu\text{m}$. Táto hodnota sa opiera o pozorovanú skutočnosť, že pri vyfukovaní bublinky je možno pozorovať jej dúhové zafarbenie, spôsobené interferenciou svetla na tenkej vrstve. Keďže viditeľné svetlo má vlnovú dĺžku niekoľko sto nanometrov, hrúbka bublinky bude s touto vlnovou dĺžkou porovnateľná až väčšia. Teda

$$v_{\infty} = \frac{2gh\rho_{\text{voda}}}{3\eta} r \approx 300 [1/\text{s}] \cdot r. \quad (6)$$

Vidíme, že s veľkosťou bublinky nám rýchlosť pádu rastie priamo úmerne. Samozrejme, platí to iba dotedy, dokiaľ je priemer bublinky oveľa väčší ako jeho hrúbka. Z rovnice (6) to nie je vidno. Súvisí to so zanedbaním v rovnici (2), kde sme predpokladali, že vztlaková sila pôsobí iba na vzduch vo vnútri bublinky, a nie na samotný mydlový roztok tvoriaci blanu. Rozmyslite si problém podrobne.

Zložitejšia teória

Následujúce pasáže vyžadujú elementárne znalosti zakrútených hadov.²⁰ V prípade, že túto teóriu neovládáte, je vhodné si ju naštudovať.

Zaoberajme sa teraz pohybom bublinky analyticky. Rovnicu (4) upravíme na tvar

$$\frac{1}{m} \left((4\pi h \rho_{\text{voda}} g) r^2 + \frac{4\sigma}{r} \frac{M_m}{R_m T} \frac{4}{3} \pi r^3 g \right) - \frac{6\pi\eta r}{mv} = \underbrace{\frac{(4\pi h \rho_{\text{voda}} g) r^2}{m}}_A - \underbrace{\frac{6\pi\eta r}{m}}_B v = a = \frac{dv}{dt}. \quad (7)$$

Opäť sme zanedbali v zátvorke druhý člen. Rovnica (7) je jednoduchá diferenciálna rovnica. Jej riešením dostaneme:

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{B} \int_0^{v(t)} \frac{dv}{v - \frac{A}{B}} = -\frac{1}{B} \left[\ln \left(v - \frac{A}{B} \right) \right]_0^{v(t)} = -\frac{1}{B} \ln \left(1 - \frac{B}{A} v(t) \right),$$

$$v(t) = \frac{A}{B} \left(1 - e^{-Bt} \right). \quad (8)$$

Dopočítame zrýchlenie a dráhu bublinky v závislosti na čase

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = Ae^{-Bt}, \quad (9.1)$$

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{A}{B} \left(t - \frac{1 - e^{-Bt}}{B} \right). \quad (9.2)$$

²⁰ Pre sucharov: následujúce pasáže vyžadujú znalosti integrálneho počtu.

Podľa (9.1) v konečnom čase zrýchlenie nikdy neklesne na nulu. Bežne sa za čas, za ktorý sa systém dostane do ustáleného stavu, berie hodnota poklesu pôvodnej hodnoty na $1/e$. Tomuto času sa hovorí *relaxačný čas*.

$$a(t_{\text{relax}}) = e^{-1}a(0) = A \cdot e^{-1}, \quad \text{teda} \quad t_{\text{relax}} = \frac{1}{B}. \quad (10.1)$$

Za ten čas prejde bublinka dráhu

$$s(t_{\text{relax}}) = \frac{A}{B^2} \cdot e^{-1} = \frac{h\rho_{\text{voda}}gm}{9\pi\eta^2} \cdot \frac{1}{e}, \quad (10.2)$$

kde m je hmotnosť celej bublinky.

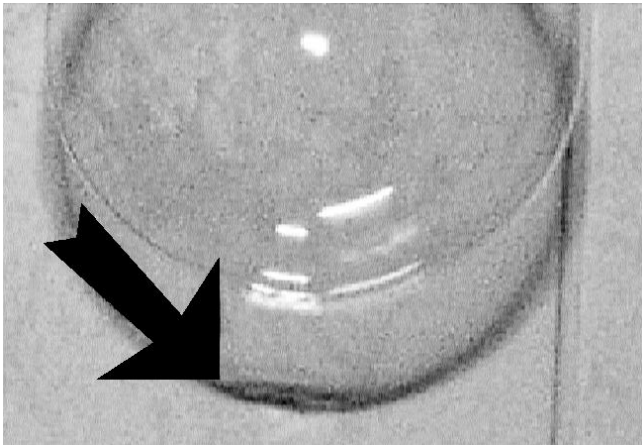
$$m = m_1 + m_2 = 4\pi r^2 \rho_{\text{voda}} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{vz}} = 4\pi r^2 \left(\rho_{\text{voda}}h + \frac{r}{3} \rho_{\text{vz}} \right),$$

kde m_1 je hmotnosť mydlovej blany a m_2 je hmotnosť vzduchu vo vnútri bublinky.

Bublinka o priemere 4 cm dosiahne rýchlosť zhruba 0,6 m/s na dráhe niekoľko desiatok centimetrov.

Diskusia

Na skutočnú rýchlosť bublinky bude mať vplyv mnoho ďalších faktorov. Vymenujme ich postupne. Tento zoznam určite nie je kompletný, spomenieme iba tie, ktoré majú najväčší vplyv a ktoré nás napadli.



Obr. 1 Obrázok ukazuje zlievanie sa vody v bublinke. Šipkou je naznačená voda v dolnej časti bublinky, ktorá sa tam zliala z vrchnej časti.

- *Teplota vzduchu:* Keďže do bublifuku fúkame ústami, vzduch vo vnútri bublinky je teplejší ako okolitý vzduch. Preto sa nám pri experimente môže občas stať, že bublinka namiesto toho, aby padala, bude stúpať smerom nahor. Skúste si fúkať bublinky v zime, možno uvidíte zaujímavé veci.
- *Zlievanie vody smerom dole:* Na bublinku pri jej páde pôsobí tiažová sila. Táto sila spôsobuje, že voda tvoriaca bublinku klesá. Zhromažďuje sa v dolnej časti, ako vidíte na obrázku, ktorý nám zaslal *Dr. Petr Čermák*. Dôsledok je zmena hrúbky stien a najmä tvaru bublinky. Rovnako bublinka rýchlejšie praskne, čo môže sťažovať merania.
- *Tvar bublinky:* Bublinka má istý polomer. Vďaka tomu sa vzduch okolo stredu bublinky (vzduch niekde medzi spodnou a vrchnou časťou bublinky z vonkajšej strany) pohybuje rýchlejšie ako vo veľkej vzdialenosti. Toto vytvára dodatočný dynamický tlak, ktorý sa snaží bublinku rozťahovať do podoby tenkého disku. Proti tejto sile pôsobí sila povrchového napätia, ktorá sa ju snaží vrátiť do tvaru gule. Vďaka turbulenciam nedosiahneme stabilný tvar bublinky. Bublinka pri páde smerom dole „plachtí“, mení tvar a nepadá po priamke smerom k zemi. Koeficient 6π v Stokesovom vzorci sa zmení. O koľko a či sa zväčší alebo zmenší, je treba zmerať, teória zmeny tohto koeficientu je skoro určite veľmi zložitá, ostatne ako väčšina teórií týkajúcich sa prúdenia tekutín.
- *Veľké bublinky:* Čím väčšia bublinka, tým väčšie turbulencie sa objavujú pri jej páde. Toto má za následok zmenu rýchlosti pádu, vzorec (6) prestáva platiť. Prechod medzi laminárnym a turbulentným prúdením apriori nie je okamžitý, ale postupný. Nemôžeme si predstaviť, že v jednom okamihu platí Stokesov vzorec pre laminárne prúdenie, a ihneď potom Newtonov vzorec pre turbulentné prúdenie $F_o = 1/2C_k S \rho v^2$. Navyiac čím väčšia bublinka, tým menšia je sila povrchového napätia a vďaka tomu sa tvar bublinky menej podobá na guľu.
- *Odparovanie vody:* Voda na povrchu sa prirodzene odparuje smerom von aj dovnútra. Hrúbka bublinky je veľmi malá, a preto vyparenie trvá veľmi krátko. Teda, prebieha takou istou rýchlosťou ako napríklad na otvorenej vodnej hladine (ak zanedbáme zmenu tlaku nasýtených pár spôsobenú zakriveným povrchom), ale na malej hrúbke blany. Toto, spolu s tečením vody smerom dole, spôsobuje jej krátku životnosť. Čím je suchší vzduch, tým rýchlejšie sa voda odparuje. Ak by sme chceli robiť čo najprecíznejšie experimenty, mali by experimentovať v kúpeľni, predtým použitej ako sauna. Trvanie bublinky závisí na čase ako

$$t(\varphi) = t_0 \frac{1 - \varphi_0}{1 - \varphi},$$

kde φ je vlhkosť vzduchu a φ_0 je vlhkosť vzduchu pri nám známom čase trvania bublinky. Tento vzorec sa dá jednoducho odvodiť z toho,

že z povrchu bublinky nám von vystupuje 100 % častíc a do bublinky vstupuje φ % častíc. Určiť konštantu $t_0(1 - \varphi_0)$ si vyžaduje zložitý prístup, kde sa počíta energetická bilancia celého systému.

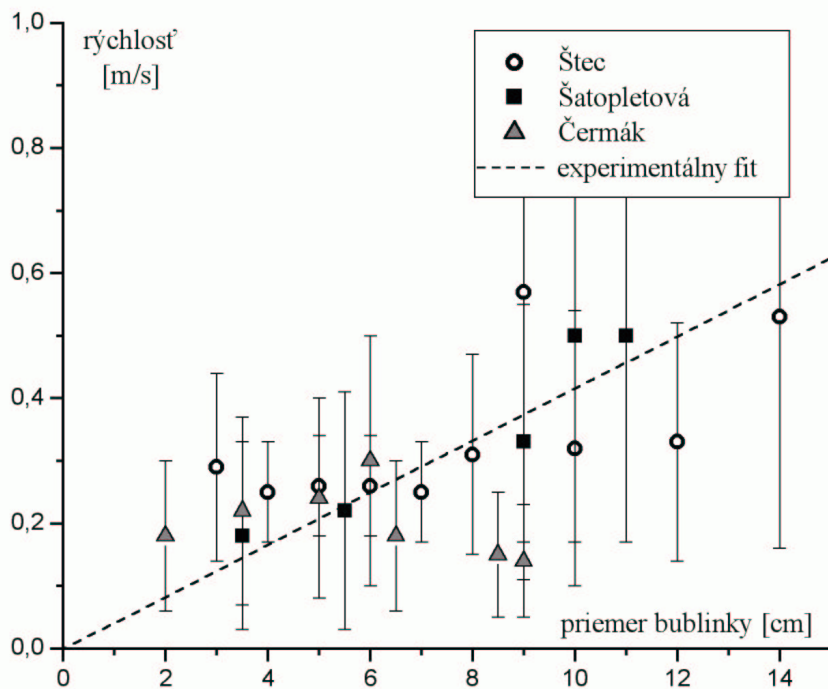
- *Koncentrácia roztoku:* Čím je roztok, z ktorého vyfukujeme bublinky, koncentrovanejší, tým pomalšie sa odparuje voda z jeho povrchu. Molekuly saponátu sa nastavajú vhodne k povrchu, aby zaberali čo najmenší povrch, a je preto ťažké dodať im dostatok energie, aby opustili povrch. Naviac sú v porovnaní s molekulami vody väčšie, treba im dodať viacej energie, aby sa vymanili zo silového pôsobenia ostatných molekúl. Čas trvania bublinky zrejme exponenciálne závisí na koncentrácii roztoku. Bola pozorovaná bublinka, ktorá v uzavretej nádobe existovala viacej ako 10 hodín.
- *Pri nafukovaní sa mení hrúbka bublinky:* Experimentálne odpozorované. Podľa spôsobu, akým fúkneme do bublinky, sa mení hrúbka bublinky. Treba si uvedomiť, že sila pôsobiaca na bublinku je úmerná hrúbke bublinky. To má potom za následok, že dvakrát hrubšia bublinka padá dvakrát rýchlejšie, pozri rovnicu (6)! Závislosť hrúbky bublinky na jej polomere je nám neznáma, ale určite závisí na spôsobe vyfukovania bubliniek. Čím rýchlejšie vyfúkneme bublinku, tým bude je hrúbka väčšia. Čím viacej jari pridáme do roztoku, tým väčšie bublinky sa dajú robiť. Ak nezoberieme bublifuk pevný, ale povraz upevnený na tyčiach, môžeme vytvoriť bublinky s priemerom viacej ako jeden meter – vyskúšajte si to. Proste povraz ponoríte do jari a následne „máchnete“ tyčami (do prázdna, nie na mladšieho brata).
- *Difúzia vzduchu von z bublinky:* Vďaka tomu, že vo vnútri je väčší tlak ako vonku, je snaha molekúl vzduchu dostať sa von z bublinky. Mydlová bublina pôsobí ako priepustná membrána. Nakoľko tento efekt rozrušuje silové pôsobenie molekúl saponátu navzájom, sa nám nepodarilo zistiť.

Komentáre k riešeniam

Na obrázku vidíte vaše namerané hodnoty rýchlosti pádu bubliniek v závislosti na ich priemere. Pri bližšom pohľade si môžete všimnúť, že namerané údaje najlepšie sedia *Jane Šatopletovej*, naopak *Dr. Petr Čermák* mal pri experimentoch najmenšie šťastie. Podľa týchto meraní vychádza priemerná hrúbka bublinky $0,18 \pm 0,02 \mu\text{m}$.

Sklon znázornenej priamky je úmerný hrúbke bublinky. Vidíme teda, že menšie bublinky *Jany Šatopletovej* a *Mgr. Tomáša Šteca* majú štatisticky väčšiu hrúbku ako väčšie, v zhode s predpoveďou. *Dr. Petr Čermák* zrejme vytváral bublinky iným spôsobom.

Treba ešte upozorniť na to, že nameraná rýchlosť je menšia ako skutočná. Dôvodom je, že experimentátori merali rýchlosť bubliniek aj v čase, keď sa rýchlosť pádu ešte neustálila. Nakoľko tento efekt vstupuje do chýb merania, sa z nameraných hodnôt nedá určiť. Nikto tiež nespomenul, akú chybu má meranie priemeru bublinky. Táto chyba je určite poriadne veľká.



Obr. 2 Namerané hodnoty fitované lineárnou regresiou. Čím väčšia chyba určenia rýchlosti bublinky, tým menší dôraz sa kladie na samotnú hodnotu.

Vybrané časti riešení

Mgr. Tomáš Štec: Bublinka sa na začiatku nafukovania dúhovo zafarbila, potom však pri priemere asi tak jednej ppl (pingpongovej loptičky) farbu stratila a zmenila sa na číru. No napokon po presiahnutí priemeru asi troch ppl zase získala dúhové zafarbenie.

Z tohoto je zrejmé, že bublinky majú hrúbku porovnateľnú s vlnovou dĺžkou viditeľného svetla, čo je 400–700 nm. Ak má svetlo (farbu ktorého vidíme) interferujúce na mydlovej bubline vlnovú dĺžku λ , potom hrúbka bublinky je

$$h = \frac{2k+1}{4} \lambda; \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mgr. Tomáš Štec: Istým dôkazom zvýšeného tlaku v bublinke je jednoduchá vec: Pri nafukovaní cez očko bublifuku som pri použití druhého roztoku vytváral väčšie bublinky, ktoré sa ale ťažšie oddeľovali. Niekedy ostali uchytené na „fukare“ a cez otvor očka celkom výrazne unikal vzduch. T.j. vo vnútri bol väčší tlak.

Dr. Petr Čermák: Z pokusu jsem vypočetl, že z bublinky při pádu stéká po její stěně saponát, a hromadí se v kapce na spodku bublinky (viď obr. 1). Je to vidět na stínu bubliny na obrázku. Každá bublina je tedy jinak těžká. Závisejí na způsobu foukání, na tom, kolik saponátu bylo nabráno atd.

Dr. Petr Čermák: Větší bubliny při pádu mění svůj tvar. Jak padají, zplošťují se, a spodní část bubliny má tendenci se zakulatit dovnitř do tvaru padáku. K takovému tvaru však nikdy nedojde, protože se po velice malé době bublina „překulí“. Získá tím rotaci a její koeficient odporu se zcela jistě změní. Proto doba pádu závisí i na velikosti bubliny, nejsem sto však odhadnout jak.

Jana Šatopletová: Pokusem bylo zjištěno, že bublinky, které jsou z roz-toku obsahujícího méně jaru, padají rychleji. Není to však způsobeno tím, že $\rho_{\text{jar}} < \rho_{\text{voda}}$. Z toho plyne, že hmotnost bublinky s menším množstvím jaru je větší.

Může to být způsobené tiež tím, že bublinka s jarom drží lepšie svoj tvar.

Bzučo

Úloha 5.2 – Čísla ze čtyř číslic (5b)

Zadání: Úlohy ve stylu „Napište číslo 6 pouze pomocí čtyř čtyřek“ a podobné asi znáte. My ale nechceme podceňovat vaše schopnosti, takže vám tu předkládáme zajímavější problém. Vymyslete, jak vypadají výrazy, obsahující právě čtyři písmena n a jinak libovolné množství jiných znaků kromě čísel a písmen, takové, že pokud na místo n napíšeme libovolnou číslici od jedné do devíti, bude mít výraz pokaždé stejnou hodnotu. Např. jedničku můžeme vyjádřit takto:

$$1 = \frac{n+n}{n+n}.$$

Dokážete tímto způsobem napsat všechna přirozená čísla od jedné do 21? A jde to vůbec?

Pozn.: V této úloze je dovoleno psát desetinná čísla bez počáteční nuly. Tedy výraz $,n$ bude mít, pokud za n dosadíme dvojku, hodnotu 0,2.

Řešení:

Jak mnozí z vás poznamenali, nebyla tato úloha zadaná příliš exaktně, takže se objevily různé názory na to, které operace lze použít, případně si někteří vymysleli vlastní operace i s vlastními symboly. Na druhou stranu jdou všechna čísla do 21 vyjádřit jen pomocí zcela standardních symbolů.

Pomocí základních operací (+, −, ×, /) a s možností výše uvedeného zápisu desetinného čísla jste všichni vymysleli alespoň některé z výrazů s hodnotou 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 20 nebo 21. Ve všech jde jen o vhodnou kombinaci operací, takže je zde nebudu rozepisovat. Některým z vás přebývalo čtvrté n , které už nebylo kam napsat. Pokud to není možné vyřešit rozdělením zlomku na dva, stačí využít například toho, že $n = \sqrt{n \cdot n}$.

Další běžně používaná operace je faktoriál. Ten nám pomůže k číslu 6, protože $3! = 6$.

Všechna další čísla do 21 mimo čtrnáctky lze vytvořit celkem jednoduše, pokud známe zápis devítky pomocí dvou n . Návodem k němu je hodnota podílu $\frac{n}{9} = 0, n \dots$ (tedy číslo s nekonečným desetinným rozvojem). Jiné často používané označení je $0,\overline{n}$. S využitím poznámky v zadání můžeme zapsat devítku

pomocí dvou n jako

$$9 = \frac{n}{,n}.$$

Pokud se někomu nelíbí symbol proužku pro nekonečný desetinný rozvoj, tak si místo něj může dosadit trojtečku, která má význam opakování až do nekonečna a je definována i v ČSN.

Odmocněním získáme trojku, připsáním faktoriálu šestku. To vše pomocí dvou n , takže už máme dostatečný základ pro napsání dalších čísel.

Pravděpodobně bude stále zbývat číslo 14. To se dá zapsat s využitím symbolu pro celou část – například jako $\lfloor 10 \cdot \sqrt{2} \rfloor$, tedy pomocí n

$$14 = \left\lfloor \frac{\sqrt{(n+n) \cdot n}}{,n} \right\rfloor.$$

Dr. Dana Beránková vymyslela originální způsob jak zapsat libovolné číslo. Např.

$$14 = \overline{\dots} + n - n + n - n.$$

Pozn.: Jestli nevíte, co to znamená, podívejte se na zápis z konference na soustředění ve Skřipině, kapitola Mayský svět času a čísel. ;-)

Pokud budeme chápat n jako proměnnou a celý výraz jako funkci, která musí mít pro celá n od jedné do devíti stejnou hodnotu, je možné použít i derivaci. Tak se dá vyjádřit třeba čtyřka nebo, jak napsal Vojta Kubáň, sedmička

$$7 = (((n \cdot n \cdot n)')')' + n'.$$

Marble

Úloha 5.3 – Superkomprimace (5b)

Zadání: Firma ZeoSync™ ohlásila sedmého ledna, že právě ona hodlá položit nový milník oboru komprese dat, a to vynalezením perfektního komprimačního algoritmu. Tento algoritmus má umožnit bezztrátově komprimovat libovolný (obsahující i úplně náhodné data) soubor přibližně stokrát.

Na tiskové konferenci na dotaz novináře: „Jak vnímáte známou poučku²¹, tvrdící, že něco takového prostě není možné?“ odpověděl mluvčí firmy následovně:

„Tenhle důvod jsme slyšeli už mnohokrát, že to nemůže fungovat.“

Lidé často prohlašují, že právě tohle je důvod, proč naše technologie nemůže fungovat. Hodláme tento mýtus zbořit. Dokážeme to, co před námi nikdo nedokázal. Dovedeme zkomprimovat libovolnou (every single) permutaci n -prvkové množiny. Detaily budou uveřejněny během několika dní.“

Dovedete dokázat výše uvedenou poučku? Co si myslíte o lidech, kteří pracují pro firmu ZeoSync™?

²¹ Tato poučka – věta – mluví o tom, že není možné najít algoritmus, který by dovedl každý soubor bez výjimky zmenšit alespoň o jeden znak. Myslí se tím samozřejmě bezztrátová komprese, algoritmus musí být schopen zkomprimovaný soubor rozbalit zpět na původní beze změny.

Řešení:

Na úvod. Bezstratovou komprimáciou rozumieme takú komprimáciu, ktorá dokáže skomprimovaný súbor rozbalíť na pôvodný bez zmeny jeho obsahu.

Dôkaz sporom

Tvrdenie. *Neexistuje algoritmus, ktorý by bezstratovo dokázal skomprimovať každý súbor dĺžky n bitov aspoň o jeden bit.*

Dôkaz sporom: Predpokladajme, že vyššie uvedené tvrdenie neplatí. Súbor má dĺžku n bitov, bit môže nadobúdať hodnotu 0 alebo 1, takže rozličných súborov dĺžky n je 2^n .

Tento súbor máme skomprimovať na súbor kratší. Spočítajme si, koľko existuje možných súborov kratších ako n . Ich počet označme N . Existuje 2^{n-1} , súborov dĺžky $n - 1$ bitov, 2^{n-2} dĺžky $n - 2$ bitov atď.

$$\begin{aligned} N &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^{n-n} = \frac{2^n}{2} + \frac{2^n}{2^2} + \dots + \frac{2^n}{2^n} = \\ &= 2^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 2^n(1 - 2^{-n}) = 2^n - 1, \end{aligned}$$

kde v dolnom riadku sme sčítali geometrický rad.

Súborov dĺžky najviac $n - 1$ je $2^n - 1$, čo je o jeden menej ako súborov dĺžky n . To potom podľa Dirichletovho princípu znamená, že aspoň dva súbory dĺžky n sa musia zobraziť na ten istý (kratší) súbor. Tento kratší súbor nie je komprimačný algoritmus schopný dekódovať na pôvodný, jednoducho preto, lebo pôvodné súbory sú dva. Musí si jeden z nich vybrať, čo je v spore s tým, že komprimácia je bezstratová.

„Dôkaz“ zdravým sedliackym rozumom

Predstavme si, že dokážeme (bezstratovo) skomprimovať súbor dĺžky n bitov. Skomprimovaný súbor má dĺžku maximálne $n - 1$ bitov. Avšak aj tento súbor môžeme bezstratovo skomprimovať. Matematickou indukciou dôjdeme k záveru, že súbor dĺžky n môžeme skomprimovať na súbor dĺžky 1. To by znamenalo, že každý súbor je možno skomprimovať na jednu jednotku alebo nulu. Dokonca sme tento súbor schopní skomprimovať na súbor nulovej dĺžky.

A firma ZeoSyncTM?

Ak môže mať súbor dĺžku nula, tak ho samozrejme môžeme skomprimovať na dĺžku -1 :-)). A tak ďalej. Nepotrebujeme žiadne disky, stačí nám jediný bit pamäti (a ako ste videli, ani to nie), aby sme sa postarali o všetky vaše dáta.

*Psssst . . . , nikomu to neříkejte, ale ve skutečnosti je to pravda. Fakt. Ne-
nechte se zmást a I N V E S T U J T E, bude to jízda století!!!²²*

Bzučo

²² Citát, rovnako ako aj zadanie tohto príkladu, bol prevzatý z WWW stránky <http://www.root.cz/clanek.phtml?id=1010>

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely .

Ve výsledkových listinách sloupeček \sum_{-1} představuje součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235

E-mail: MaM@mam.mff.cuni.cz

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>

Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a střeďočekské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina – VIII. ročník

Pořadí	Jméno	Série					Celkem
		1	2	3	4	5	
1.	Prof. Tibor Vansa	23	14	40	18	28	123
2.	Doc. Vašek Cviček	12		37	25	15	89
3.-4.	Dr. Petr Čermák	2	8	20	33	12	75
	Doc. Martin Demín	25	10	12	11	17	75
5.	Prof. Jirka Klimeš	9	10	24	9	3	55
6.	Dr. Andrej Pidík	14	9	8	5	14	50
7.	Mgr. Tomáš Štec			3	16	26	45
8.	Mgr. Stanislav Basovník			17	13		30
9.	Mgr. Josef Stráský	9	10	0	9		28
10.	Mgr. Jan Špiřík	11	4	8		4	27
11.-12.	Mgr. Lukáš Pavlovský	2		8	3	12	25
	Mgr. Lukáš Chvátal	2	9	4	10		25
13.	Mgr. Zuzana Rozlívková	11	4		5	3	23
14.-15.	Doc. Honza Klusoň	5		2	14		21
	Dr. Dana Beránková	8	0	1	4	8	21
16.	Dr. Peter Bališ	7	3	4	5		19
17.-18.	Dr. Jozef Tinaj		9		8		17
	Bc. Helena Kubátová	11		5	1		17
19.	Doc. Miroslav Frost	3	3	10			16
20.	Bc. Jan Verfl			14			14
21.	Bc. Luboš Uličný				4	9	13
22.-23.	Vojtěch Skubanič	9					9
	Jana Šatopletová	2				7	9
24.	Dr. Lenka Beranová	3			5		8
25.	Vítězslav Kala	7					7
26.	Lenka Kovalčinová				6		6
27.-29.	Mgr. Jana Babovácová			5			5
	Vojta Kubáň					5	5
	Jiřina Pešová	5					5
30.-32.	Michal Rychnovský	4					4
	Mgr. Lucie Vasická	4					4
	Mgr. Zuzana Svobodová	2	1	1			4
33.	Mgr. Iva Kouřilová	3					3
34.-37.	Mgr. Martin Včelák	2					2
	Mgr. Zdeněk Nováček	2					2
	Alena Drábková	2					2
	Bc. Honza Chmelař	2					2
38.-39.	Richard Bobek					1	1
	Mgr. Gabriela Boháčová	1					1