Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník VIII číslo 4

Termín odeslání: 9. března 2002

Zadání témat

Téma 6 – Alibaba a čtyřicet loupežníků

Alibaba chytne a postaví před soud čtyřicet loupežníků. Mají poslední šanci, jak se zachránit. Všichni se musí postavit do řady tak, že každý vidí jenom ty, kteří stojí před ním. To znamená, že první v řadě nevidí nikoho a poslední vidí všechny. Pak každému posadí na hlavu červenou nebo bílou čepici. Loupežník, který uhodne barvu své čepice, dostane milost. Každý hádá jenom jednou a může říct jenom „bílá“ nebo „červená“. Začíná poslední, poté hádá ten před ním, a tak dále, až nakonec hádá první v řadě. Jakmile Alibaba sdělí tato pravidla loupežníkům, ale dříve než jsou jim nasazeny čepice, se mohou loupežníci domluvit na strategii. Jejich snahou je, aby jich co nejméně přišlo o život. Poraď jim, jakou strategii mají zvolit.

Co když Alibaba chytil n loupežníků a soudí je podle následujících pravidel: Každý loupežník vidí čepice všech ostatních, kromě té svojí. Na papír, který ostatní nevidí, může napsat „červená“, „bílá“ nebo „nevím“. Když se alespoň jeden splete nebo všichni napíšou „nevím“, všechny popraví. Naopak, všichni se zachrání, když alespoň jeden uhodne barvu své čepice a nikdo se nesplete. Poté, co jsou jim nasazeny čepice, už nesmí promluvit. Jakou strategii mají zvolit teď, aby minimalizovali pravděpodobnost, že zemřou?

Zadání úloh

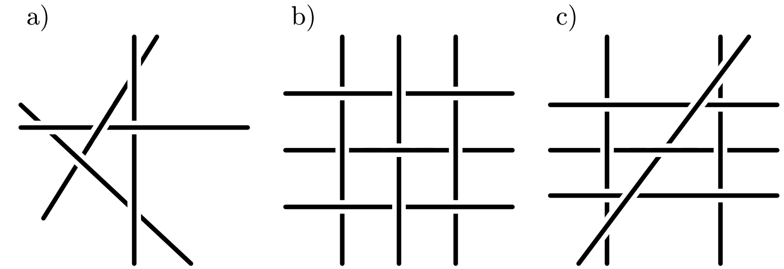
Úloha 4.1 – Na jedné lodi plujem… (5b)

Dva parníky pluly po moři konstantní rychlostí beze změny směru. V 11:55 byly od sebe vzdáleny 5 mil. Ve 13:10 je dělilo $\sqrt{10}$ námořních mil a ve 14:50 byla jejich vzdálenost $3\sqrt{2}$ mil. Na jakou nejkratší vzdálenost se parníky k sobě dostali během plavby?

Úloha 4.2 – Jak to vidí kružnice? (5b)

Jak se v dutém zrcadle zobrazí kružnice se středem v jeho ohnisku? Předpokládejte, že poloměr kružnice je mnohem menší než poloměr křivosti zrcadla.

Úloha 4.3 – Průměty přímek (5b)



Několik mimoběžných přímek v prostoru, které se neprotínají, se zobrazí do horizontální roviny. Tyto projekce jsou nakresleny tak, že na průsečících vidíme, která čára je výš a která níž. Jsou projekce na obrázcích a), b) a c) možné? Lze najít postup, jak zodpovědět danou otázku v obecném případě?

Řešení témat

Téma 1 – Pravidelné mnohostěny

Mgr. Jozef Tinaj nám poslal síť tělesa a spočítal jeho povrch v závislosti na délce hrany. Tyto výpočty byly již (v podání jiných autorů) zveřejněny v předchozím čísle, proto je zde neotiskujeme.

Mgr. Jozef Tinaj ve svém řešení dále zmiňuje, že fotbalový míč vznikne ořezáním dvacetistěnu. Pošle nám někdo návod, jak ořezat dvacetistěn, aby vznikl „kopačák“? Lze podobným způsobem ořezat i ostatní Platónská tělesa (čtyřstěn, krychli, osmistěn a dvanáctistěn)? Pokud ano, jaká tělesa vzniknou takovým ořezáním?

Martin Krsek

Téma 2 – Čebyševovy polynomy

Čebyševovy polynomy, pokračování zadání

Minule jsme zavedli tyto pojmy: Čebyševem n-tého stupně nazýváme takový normovaný polynom $p_n(x)$ n-tého stupně, který má ze všech normovaných polynomů n-tého stupně na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ nejmenší vzdálenost od nuly. (Vzdálenost od nuly je definována jako $\|p_n\| = \max_{x\in\langle -2,2\rangle}\{|p_n(x)|\}$). Kandidátem na Čebyševa n-tého stupně byl nazván každý normovaný polynom, jehož graf se ve čtverci $\langle -2, 2\rangle \times \langle -2, 2\rangle$ dotýká horní a dolní hrany čtverce dohromady v $n + 1$ bodech. Měli jste dokázat, že pokud kandidát existuje, tak už je to Čebyšev, a kandidátů nikdy nemůže být víc než jeden. Teď jde o to, jestli kandidát existuje. Dokažte následující lemma:

Lemma. *Funkce $2\cos(n\alpha)$ se dá vyjádřit jako normovaný polynom n-tého stupně od funkce $2\cos\alpha$.*

$$2\cos(n\alpha) = p_n(2\cos\alpha)$$

Například pro $n = 2$ platí: $2\cos(2\alpha) = (2\cos\alpha)^2 - 2$, v čemž můžete vidět často používaný vzorec $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$. Tedy pro $n = 2$ mnohočlen, zmíněný ve znění lemmata, nabývá tvar $p_n(x) = x^2 - 2$. Když k důkazu použijete indukci, jakoby mimochodem dokážete i rekurentní formuli pro polynomy $p_n(x)$. Teď už můžete, pomocí toho, co jste se dozvěděli při řešení tohoto i minulých zadáni, zformulovat, jak vypadají Čebyševovy polynomy na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ i s důkazem, že jsou jednoznačně určeny. Nalezněte kořeny Čebyševových polynomů. Opět pomůže lemma.

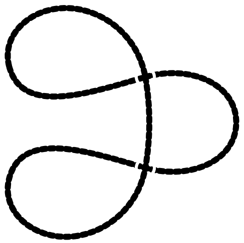
Martin Mucha

Téma 4 – Provázky

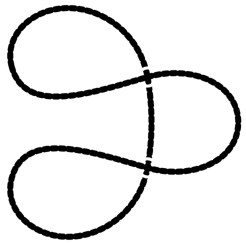
Provázky

Doc. Tibor Vansa

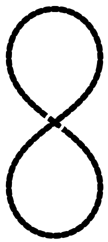
Je-li provázek rozmotatelný do kruhu, nemohu s ním dělat nic jiného, než nějakou jeho část podsunout (obr. 1), nadsunout (obr. 2) nebo zkřížit (obr. 3).



Obr. 1

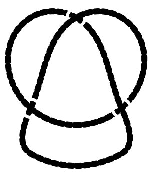


Obr. 2

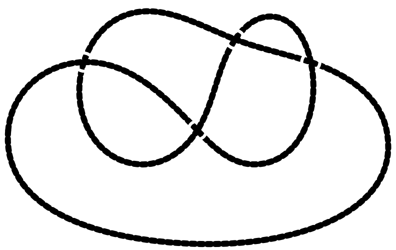


Obr. 3

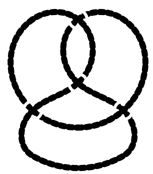
Základními typy nerozpletitelných jsou uzly „očko“ (obr. 4), „osmička“ (obr. 5), „něco“ (obr. 6). Ostatní jsou jejich kombinací.



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Pozn. red.: Bohužiaľ, k téme neprišlo veľa riešení.

Návrhy na premýšľanie:

Definujme si niektoré pojmy:

Pod slovom *uzol* budeme rozumieť uzavretý povrázok s konečnou dĺžkou.

Stupeň uzlu nech je najmenšie nezáporné celé číslo n (pokiaľ existuje) také, že na rozmotanie uzlu je treba aspoň n krát prestrihnúť špagát a zviazať ho tak, že to, čo bolo predtým „nad“, bude „pod“. V prípade, že také n neexistuje, definujeme stupeň uzla nekonečno. Špeciálne, jednoduchý povrázok je uzlom stupňa nula.

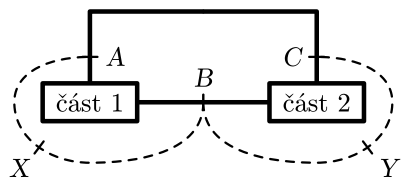
Dva uzly nazveme *izomorfné*, ak môžme jeden previesť na druhý postupným rozplietaním a zaplietaním (bez strihania apod.).

Uzol nazveme *separovateľný*, ak ho môžeme previesť do tvaru ako na obrázku 7, kde uzol A–X–B–časť 1 a uzol B–Y–C–časť 2 nie sú jednoduché povrázky a oba majú stupeň menší, než je stupeň pôvodného povrázku (t.j. uzol

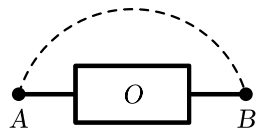
je separovateľný, ak ho môžeme rozmotať na viac „menších uzlíkov“).

Uzol nazveme *neseparovateľný*, ak nie je separovateľný. Napríklad jednoduchý povrázok je neseparovateľný.

Komponenta uzla je taká časť uzlu O, že uzol, ktorý vznikne spojením bodov A a B z obrázku 8, nie je separovateľný, ani sa nedá rozpliesť.



Obr. 7



Obr. 8

(a) Ukážte, že existuje povrázok, ktorý nie je jednoduchý.
(b) Ukážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje uzol stupňa n.
(c) Nájdite dva neizomorfné uzly rovnakého stupňa.
(d) Rozhodnite, či existuje povrázok nekonečného stupňa.
(e) Rozhodnite, či existuje uzol s dvomi komponentami, ktorý sa dá rozpliesť.
(f) Rozhodnite, či existuje konečne mnoho navzájom neizomorfných neseparovateľných uzlov.
(g) Rozhodnite, či pre dané $n \in \mathbb{N}$ existuje konečne mnoho neizomorfných uzlov stupňa n. Ak áno, pokúste sa (aspoň pre nejaké malé n) odhadnúť, koľko takých uzlov existuje.
(h) Majme obrázok, na ktorom je nejaká komponenta uzlu (obr. 8). Rozhodnite, či je možné spojiť body A a B tak, aby sa zvyšná časť povrázku nedotýkala oblasti O, a povrázok bol jednoduchý.
(i) Predpokladajme, že uzol sa iba konečne mnoho krát *kríži* sám zo sebou. Zvoľme si pevný bod X na povrázku a pevný „smer“, v ktorom sa od bodu X budeme pohybovať. Reprezentujme si uzol konečnou postupnosťou núl a jedničiek, pričom nula na i-tom mieste znamená, že sme prešli *popod* inú časť povrázku a jednička na i-tom mieste znamená, že sme prešli *ponad* povrázok – pohybujeme sa pritom od bodu X v danom smere, až kým sa nevrátime do X. (Písmeno $i = 1, 2, \ldots$ reprezentuje i-te kríženie, na ktoré narazíme.) Rozhodnite, či existujú dva neizomorfné uzly, ktorým zodpovedá rovnaká postupnosť.
(j) Existuje pre každú konečnú postupnosť núl a jedničiek, v ktorej je rovnako veľa jedničiek ako núl, aspoň jeden príslušný uzol (viď predchádzajúci bod)? Existuje pre každú takú postupnosť dokonca príslušný *jednoduchý* uzol?
(k) Nájdite okrem stupňa uzla ešte iné charakteristiky uzlov, ktoré sú pri izomorfných uzloch rovnaké.
(l) Anička bola v obchode a kúpila 10 metrov špagátu, 3 pomaranče a 6 banánov. Koľko má doma jabĺk?

Peťo

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Motorka (5b)

Zadání: *Jaký výkon musí mít motorka, abychom ji dokázali „postavit“ na zadní kolo? Potřebné parametry si najděte nebo je odhadněte.*

Řešení:

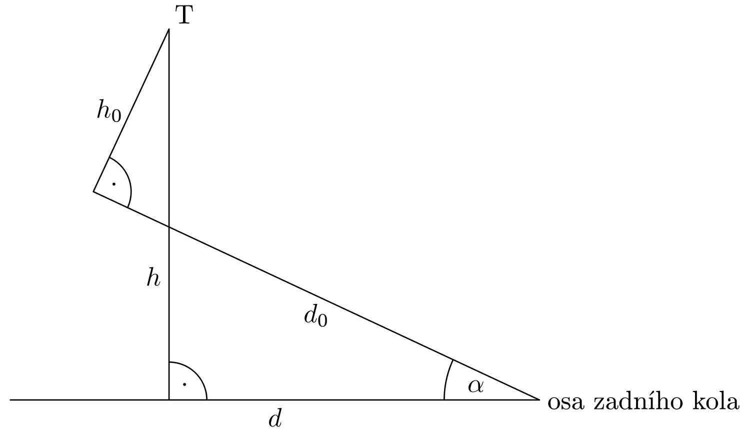
Jak vidíte, tak se nám drsný motorkářský svět prodral i do M&M. Tato úloha byla velmi těžká na odhad toho, co kde vlastně působí a jaký to má na motorku konečný efekt. Ve fyzice sice platí, že experiment má pokaždé pravdu,

leč já jsem se kvůli svým chabým motorkářským schopnostem rozhodl jít na celou věc čistě teoreticky.

Nejdříve si musíme položit otázku, jak je možné, že se motorka na zadním kole vlastně udrží. Podle jednoduché poučky, že těleso zůstane stabilní, když má své těžiště kolmo nad místem, kde se dotýká podložky, si uvědomme, že bude nutné motorku zvednout poměrně hodně. Celá váha motorky se tím přesune na zadní kolo, jehož plocha se o poznání zvětší, takže podmínky pro správné naklonění nebudou tak přísné, a celá pozice je (když se to umí) docela stabilní. Celou záležitost si nejdříve zjednodušme. Z počátku působí jak na přední, tak na zadní kolo tíha. Velikost tíhy působící na zadní kolo je

$$G = Mg\,\frac{l-d}{l}\,, \tag{1}$$

kde M – je celková hmotnost motorky,
l – vzdálenost přední a zadní osy motorky a
d – horizontální vzdálenost těžiště od osy zadního kola.



Obr. 1

Maximální síla, s jakou zadní kolo motorky zabere, je rovna velikosti třecí síly:

$$F_{\mathrm{t}} = \mu G\,, \tag{2}$$

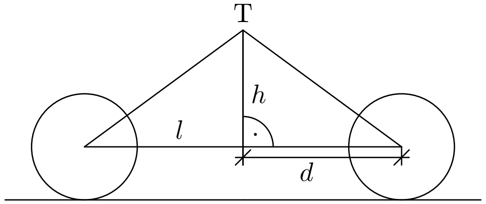
kde μ je koeficient tření mezi pneumatikou a silnicí.

Dá se předpokládat, že motorka dokáže vyvinout i větší moment síly (resp. sílu na obvodu kola), ale při větší působící síle dojde k prokluzu a motorka využije jen sílu F_{t}. Díky ní se začne roztáčet zadní kolo. Stejnou rychlost jako bod na obvodu kola bude mít i jeho osa, tj. bude na ni evidentně působit i stejné zrychlení jako na obvod kola. Toto zrychlení si označíme a a budeme předpokládat, že vzniká působením síly $F = P/v$ o velikosti maximálně F_{t}.

Přeneseme se teď do soustavy spojené s osou zadního kola motorky. Ta bude neinerciální, a proto zde bude působit zdánlivá setrvačná síla proti směru pohybu. Nesmíme zapomenout na tíhovou sílu. Ostatní vlivy pro jednoduchost vyloučíme. Působiště těchto sil přenesme do těžiště motorky a určeme celkový moment síly vůči zadní ose kola, kolem které se bude motorka v této soustavě otáčet

$$D = \frac{P}{v} \cdot h - Mgd\,. \tag{3}$$

To ovšem platí jen pro počátek pohybu, kdy budou obě kola na silnici. Později se jak h, tak d budou při změně naklonění motorky měnit. Označme si proto tyto údaje pro horizontální polohu (obě osy ve stejné výšce) d_0 a h_0. Při zvednutí motorky o úhel α se jejich hodnota změní na



h je výška těžiště nad osou zadního kola.

Obr. 2

$$\begin{aligned} d &= d_0 .\cos\alpha\,, \\ h &= h_0 .\cos\alpha + d_0 .\sin\alpha\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Nyní už můžeme dosazovat všechno do rovnice momentu sil

$$D = \frac{P}{v} \cdot (h_0 \cos\alpha + d_0 \sin\alpha) - Mgd_0 \cos\alpha\,.$$

Abychom mohli motorku zvednout, musí být D v mezním případě rovno 0, tedy

$$\begin{aligned} \frac{P}{v} \cdot (h_0 \cos\alpha + d_0 \sin\alpha) &= Mgd_0 \cos\alpha \\ P &= Mgv\,\frac{d_0 \cos\alpha}{h_0 \cos\alpha + d_0 \sin\alpha} \end{aligned} \tag{5}$$

Až sem jste skoro všichni postupovali stejně (resp. někteří jste ještě započítávali i jiné síly).

Zcela logicky platí, že největší moment tíhové síly působí v prvním okamžiku, kdy je jeho rameno síly d největší. Musíme ale zároveň zvážit, že později sice bude potřeba menší setrvačná síla, na druhou stranu ale bude mít motorka už nějakou rychlost, a to se projeví na podmínce $P = F \cdot v$. Tohle už si většina z vás neuvědomila. Někteří jste to zkusili opravit přes nějakou stálou nenulovou počáteční rychlost (*Doc. Tibor Vansa*, *Mgr. Jozef Tinaj*. *Bc. Josef Stráský*, nezbývá je než pochválit za to, že do svého řešení započítali i tohle.

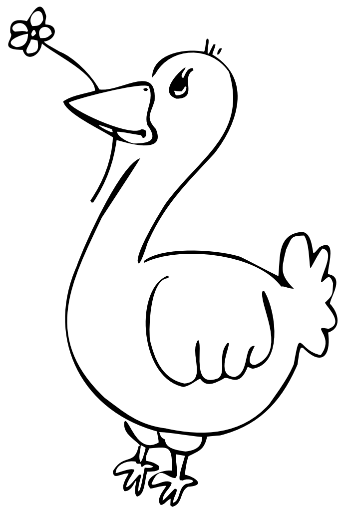
Nestačí říct, že je potřeba splnit podmínku pro počátek zvedání. Mimochodem, potom bychom mohli motorku zvedat z nulové počáteční rychlosti a stačil by nám jakýkoli výkon motoru (jak si správně všiml *Prof. Jiří Klimeš*).

Pokud budeme chtít určit, jak bude průběh zvedání vypadat, dostaneme velmi složité soustavy rovnic, proto je docela účelné zkusit si celý děj namodelovat. Nejjednodušší způsob je postupovat s výpočtem po malých časových

intervalech Δt a pro každý okamžik vypočítat potřebné údaje. Jakmile klesne ϵ pod 0, neboli motorka začne klesat zpět, je potřeba zvýšit výkon a výpočet se provede znova od začátku.

Označme ϵ – úhlové zrychlení rotace,
ω – úhlová rychlost rotace kolem zadní osy a
J – moment setrvačnosti motorky vůči ose zadního kola.

$$\begin{aligned} x &= h\,, \\ h &= h_0 .\cos\alpha + d_0 .\sin\alpha\,, \\ d &= d_0 .\cos\alpha\,, \\ D &= \frac{P}{v}.h - M.g.d\,, \\ \epsilon &= \frac{D}{J}\,, \\ \alpha &= \alpha + \omega.\Delta t + \frac{1}{2}\epsilon.\Delta t^2\,, \\ \omega &= \omega + \epsilon.\Delta t\,, \\ v &= v\ + \sqrt{\frac{2}{M}}.\sqrt{P.\Delta t - g.(h-x)}\,. \end{aligned}$$

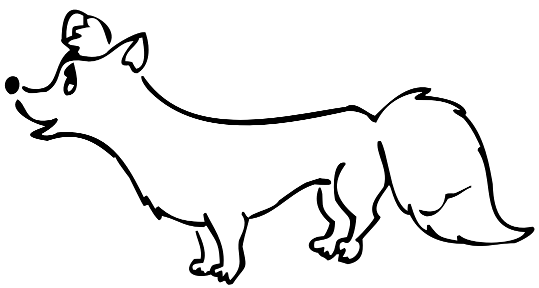


Tím se nám ale objevila nová charakteristika motorky – moment setrvačnosti. Výrobce ji neudává, takže nezbývá, než ji odhadnout. Vzhledem k tomu, že jsme si už předtím zjednodušili motorku na 2 kola a těžiště, asi vás tolik nepřekvapí, když si teď motorku představíme jako desku o rozměrech l a $2h_0$ s hmotností M s osou kolmou na svou plochu umístěnou do rohu desky.

Po dosazení údajů týkajících se běžné motorky (tj. hmotnost okolo 250 kg včetně jezdce, délka okolo 1,8 m, výška těžiště nad osou kola okolo 50 cm) mi vyšel výsledek 1–3 kW. Skutečný výsledek bude asi o poznání větší (odhadem okolo deseti kW), protože do výpočtu jsem nezahrnul takové věci jako je odpor vzduchu, změna těžiště během jízdy, atd. Nic přesnějšího tady asi nezískáme. Jednotlivé parametry se liší od motorky k motorce. Např. jeden zcela konkrétní výpočet pro *Jawa 353*, jejíž přesné údaje nám poslal vážený kolega *Mgr. Jozef Tinaj*, vyšel výkon 0,9 kW. Použitý program v Pascalu následuje, nebo si ho také můžete stáhnout na `http://khayis.webpark.cz/motorka.pas` .

```
program Motorka;

const M =270;
      g =10;
      l =2.065;
      d0 =1.3;
      h0 =0.3;

      dT =0.1;

var P,J,x,h,d,Omg,Eps,DD,alfa,v:real;

begin
     J:=M*2*l*h0/3 + M*(Sqr(l/2)+Sqr(h0));
     P:=1;
     repeat
           P:=P+1;
           alfa:=0 ;
           h:=h0;
           d:=d0;
           Omg:=0;
           v:=0.01;
           repeat
                 x:=h;
                 h:=h0*cos(alfa) + d0*sin(alfa);
                 d:=d0*cos(alfa);
                 D:=P/v*h-M*g*d;
                 Eps:=D/J;
                 alfa:=alfa+Omg*dT + 1/2*Eps*Sqr(dT);
                 Omg:=Omg+Eps*dT;
                 v:= v + Sqrt(2/M)*Sqrt(P*dT - g*(h-x));
           until (alfa>=Pi/2) or (Eps<0);
     until (alfa>=Pi/2);
     Write(P);
     ReadLn;
end.
```

Vypočtený výkon nepatří mezi největších, takže z malé rychlosti můžeme postavit na zadní téměř cokoli. Potvrzením nám bylo i řešení *Bc. Lukáše Chvátala*: „*Se zadáním úlohy jsem obtěžoval několik kamarádů – motocyklistů – a*



ti mě ubezpečili, že: **»Dobrej motorkář postaví na zadní i předpotopní vehikl.«**“

Na závěr takové malé shrnutí. Postavit motorku na zadní kolo je nejjednodušší při malých rychlostech. Snadnost závisí především na hmotnosti a na rozměrech motorky (zkuste postavit na zadní takového choppera). A hlavně! Pokud to pořádně neumíte, nezkoušejte to, protože bychom rádi měli co nejvíce řešitelů.

Zpráva 1: Bzučo říkal, že jde otestovat, jestli postaví na zadní autobus.

Zpráva 2: Z fakultní nemocnice Bulovka z oddělení zlomenin vás zdraví (dělám si srandu).

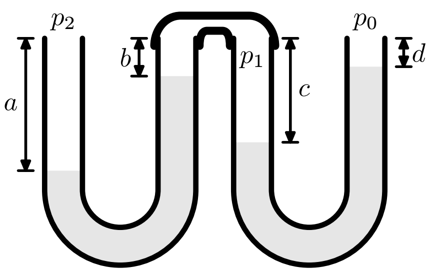
Khayis

Úloha 2.2 – Barometr (5b)

Zadání: *Jednoduchý barometer je tvorený trubicou v tvare písmena U, v ktorej je voda siahajúca v oboch ramenách do výšky L pod okrajom. Na jednom konci trubice zvýšime tlak, následkom čoho voda v druhom ramene vystúpi. Maximálny tlak, aký môžeme takýmto barometrom merať je daný tým, aby voda z druhého ramena nevytiekla.*
Ak máme dva takéto barometre, môžeme ich zapojiť za sebou tak, ako je to nakreslené na obrázku, čím vznikne jeden väčší barometer. Koľkokrát sa zvýši maximálny možný tlak, ktorý môžeme zmerať týmto prístrojom?

Řešení:

Při měření tímto barometrem bude nad jedním otevřeným ramenem tlak p_0 (okolní tlak) a nad druhým měřený tlak p_2. Rozdíl je kompenzován hydrostatickým tlakem sloupců vody. Vzduch uprostřed pouze přenáší tlak z jedné trubice do druhé – jeho tíhu mohu v klidu zanedbat. Z obrázku vpravo je vidět, že v ustáleném stavu platí



$$p_2 = p_0 + (a - b + c - d)\rho g. \tag{1}$$

Vím, že na začátku bylo $a = b = c = d = L$. Protože se během měření žádná voda neztratila ani nepřibyla (a její stlačitelnost neuvažuji), musí stále platit $a + b + c + d = 4L$. Všechny tyto vzdálenosti jsou nezáporné, takže z (1) plyne, že nejvyšší změřitelný rozdíl tlaků nemůže být v žádném případě větší než $4L\rho g$. (Této maximální hodnoty docílíme tehdy, když $b = d = 0$, a tedy $a + c = 4L$.)

Teď potřebuji zjistit, jestli barometr může být ve výše uvedeném stavu. Mezi trubicemi je vzduch, který budu nadále považovat za ideální plyn a budu zanedbávat objem hadičky spojující obě trubice. Při měření vždy počkám, až se celá soustava ustálí, takže stlačování mohu považovat za izotermické. Platí tedy

$$2Lp_0 = (b + c)p_1 = (b + c)(p_0 + (c - d)\rho g). \tag{2}$$

Průřez obou trubic je stále stejný, takže stačí uvažovat délku vzduchového sloupce. Mě zajímá stav, kdy $b = d = 0$, a rovnice (2) tedy přejde na

$$
\begin{aligned}
2Lp_0 &= cp_0 + c^2\rho g \\
0 &= c^2 + \frac{p_0}{\rho g}c - \frac{2Lp_0}{\rho g} \\
c &= -\frac{p_0}{2\rho g} + \sqrt{\frac{p_0^2}{4\rho^2 g^2} + \frac{2Lp_0}{\rho g}}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Druhé (záporné) řešení nemá fyzikální význam. V barometru sice nemusí obecně platit $a + b = 2L$ a $c + d = 2L$, protože nic nebrání tomu, aby se část vody mezi trubicemi přelila, ale může se přelévat jen z levé do pravé (protože c bude vždy větší než nula), takže pro vztah (3) musí také platit $c \le 2L$.

$$
\begin{aligned}
2L &\ge -\frac{p_0}{2\rho g} + \sqrt{\frac{p_0^2}{4\rho^2 g^2} + \frac{2Lp_0}{\rho g}} \\
2L + \frac{p_0}{2\rho g} &\ge \sqrt{\frac{p_0^2}{4\rho^2 g^2} + \frac{2Lp_0}{\rho g}} \\
4L^2 + \frac{2Lp_0}{\rho g} + \frac{p_0^2}{4\rho^2 g^2} &\ge \frac{p_0^2}{4\rho^2 g^2} + \frac{2Lp_0}{\rho g} \\
4L^2 &\ge 0,
\end{aligned}
$$

což je pravda.

Ještě zbývá ukázat, že se barometr do tohoto stavu může dostat. K tomu stačí, aby platilo, že čím vyšší je tlak p_2, tím menší je vzdálenost d. Dokud bude $b > 0$, tak je to zjevné. Pokud tlak stoupne dále o Δp, tak se přelije sloupec vody o délce x a hladiny ve třetí resp. čtvrté trubici stoupnou o y resp. z. Určitě musí platit $a + c - d < (a + x) + (c - y) - (d - z)$ (protože $\Delta p > 0$ a tedy hydrostatický tlak v barometru musel stoupnout). Tedy $0 < x - y + z$. Teď chci dokázat, že $z > 0$ (tj. že hladina v poslední trubici stoupne). Dosadím podle $x = y + z$ a už přímo získám požadovanou nerovnost.

Dále je tu ještě jedna podmínka. Barometr byl určitě konstruován tak, aby délka trubic byla větší než $2L$ (a tedy aby se dal bez problémů používat v podobě jedné trubice). Ale v našem případě může být $a > 2L$, takže je ještě potřeba, aby délka trubice byla větší než $4L - c$, kde c je hodnota spočítaná z rovnice (3).

Pokud platí i tato podmínka, tak barometr vyrobený ze dvou spojených trubic může měřit dvojnásobný rozdíl tlaků oproti barometru z jedné trubice.

Pozn. red.: Pokud přemýšlíte, jak by se s takovým barometrem dal skutečně měřit tlak, tak není nic jednoduššího, než mít na všech čtyřech ramenech stupnice, z nich odečíst a, b, c a d a tlak spočítat podle rovnice (1).

Tímto způsobem (úspěšně) řešil úlohu *Bc. Lukáš Chvátal*. Trochu jiný přístup zvolil *Prof. Jirka Klimeš* – uvažoval pouze „vratný“ stav barometru, tedy jen pokud se nepřelije žádná voda ani mezi trubicemi. Dospěl ke správnému výsledku, že poměr maximálního změřitelného přetlaku v případě dvou trubic a jedné trubice je

$$
n = \frac{1}{2} - \frac{p_0}{4L\rho g} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3p_0}{4L\rho g} + \frac{p_0^2}{16L^2\rho^2 g^2}}\,.
$$

Pro L neomezeně se blížící k nule vyjde $n = 2$ a pro rostoucí L se n asymptoticky blíží k jedné.

Marble

Úloha 2.3 – Nerovnost (5)

Zadání: *Dokažte, že z libovolných 4 různých čísel můžeme vždy vybrat dvě čísla x a y, pro která platí:*

$$0 \le \frac{x - y}{1 + xy} \le 1.$$

Řešení:

Spousta z vás dospěla ke správnému řešení, nejčastější řešení byla grafická, analýzou nerovnosti nebo kombinací obou dvou. Pěkná řešení měli např. *Bc. Petr Čermák*, *Mgr. Andrej Pidík*, *Doc. Tibor Vansa*, nebo *Doc. Martin Demín*.

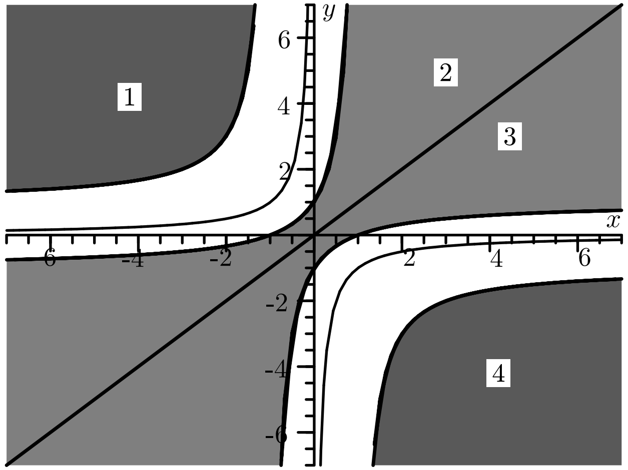
Řešení podle *Doc. Martina Demína*:
Vyjdeme z nerovnosti

$$0 \le \frac{x - y}{1 + xy} \le 1\,.$$

Řešení si rozdělíme na 2 části:

- $1 + xy > 0 \implies y = \frac{-1}{x}$ – nakreslil jsem si graf $y = \frac{-1}{x}$.
  $0 \le x - y \le 1 + xy \implies y \le x$ – nakreslil jsem si graf $y \le x$.
  Úpravou nerovnosti dostaneme $x - 1 \le y(1 + x)$.
  Řešení se opět dělí na 2 části:
  a. Pro $x \le -1$ dostaneme $y \le \frac{x-1}{x+1}$, nakreslil jsem si graf $y = \frac{x-1}{x+1}$ a zabarvil jsem si $y \le \frac{x-1}{x+1}$ pro $y \le x$.
  b. Pro $x \ge -1$ dostaneme $y \ge \frac{x-1}{x+1}$, zabarvil jsem si $y \ge \frac{x-1}{x+1}$ funkce pro $y \ge x$.
- $1 + xy < 0 \implies y \ge x$. Na grafu jsem zabarvil $y \ge x$.
  Úpravou nerovnosti dostaneme $x - 1 \ge y(1 + x)$

1. $y \geq \dfrac{x-1}{x+1} \quad x \leq -1$
2. $y \leq \dfrac{x+1}{1-x} \quad y \geq x$
3. $y \geq \dfrac{x-1}{x+1} \quad y \leq x$
4. $y \leq \dfrac{x+1}{1-x} \quad x \geq 1$



Řešení se opět dělí na 2 části:

a. Pro $x \geq -1$ dostaneme $y \leq \dfrac{x-1}{x+1}$, nakreslil jsem si graf $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ a zabarvil jsem si $y \leq \dfrac{x-1}{x+1}$ pro $y \geq x$.

b. Pro $x \leq -1$ dostaneme $y \geq \dfrac{x-1}{x+1}$. Na grafu jsem zabarvil $y \leq \dfrac{x-1}{x+1}$ pro $y \geq x$.

Ke všem nakresleným grafům jsem vytvořil inverzní, protože lze zaměnit souřadnice x a y.

Když si zvolíme bod v 1. kvadrantu, jeho souřadnice budou mít stejné znaménko, to samé platí o bodech ve 3. kvadrantu. Body budeme ze 4 různých čísel tvořit tak, že si vytvoříme všechny dvojice x a y. Čím budou body blíže ke grafu $x = y$, tím méně budou od sebe všechny vytvořené body vzdálené. Aby však nerovnost neplatila, musím zvolit body z nezabarvené oblasti, která leží v 1. a 3. kvadrantu, protože jejich x-ová resp. y-ová souřadnice je záporná. Proto není možné vytvořit takovou čtveřici, jejíž všechny body by byly v nezabarvené oblasti. A nerovnost platí. □

Kromě této cesty, nebo nějaké její varianty, má úloha i daleko kratší a elegantnější řešení, na které bohužel nikdo z vás nepřišel.

Označme si tato reálná čísla podle velikosti x_0, x_1, x_2, x_3 a substitucí $x_i = \operatorname{tg} \phi_i$ si je převedeme do intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Nechť nejmenší vzdálenost ze všech $\phi_{i-1} - \phi_i$ (a také $\phi_0 - \phi_3 - \pi$, neboť funkce tg je π periodická) je ψ, pak $4\psi \geq \pi$, tedy $\psi \geq \frac{\pi}{4}$.

Podle známého vztahu pro rozdíl funkce tangens

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

nerovnost přejde na tvar

$$0 \leq \operatorname{tg}(\phi_i - \phi_j) \leq 1\,,$$

tedy

$$0 \leq \phi_i - \phi_j \leq \frac{\phi}{4}\,,$$

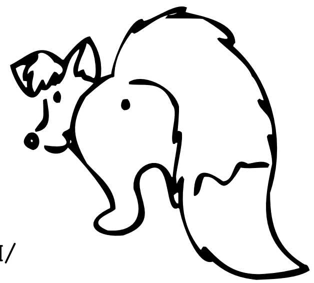
což jsme dokázali výše.

Al-ča

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/`



Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	Škola	$\sum_{-1}$	Úlohy t1	Úlohy t3	Úlohy t4	Témata r1	Témata r2	Témata r3	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc. Tibor Vansa		177		2	3	4	0	5	14	37
2.	Doc. Martin Demín	2.	126				3	2	5	10	35
3.	Mgr. Andrej Pidík		23				3	1	5	9	23
4.–5.	Prof. Jirka Klimeš	4. B	268				4	5	1	10	19
	Bc. Josef Stráský		19				5	1	4	10	19
6.–7.	Bc. Zuzana Rozlívková		15			2	2	0		4	15
	Bc. Jan Špiřík		15				1	1	2	4	15
8.	Doc. Vašek Cviček	4. A	118							0	12
9.–10.	Bc. Helena Kubátová		11							0	11
	Bc. Lukáš Chvátal		11				4	5		9	11
11.–12.	Dr. Peter Bališ	2. A	53					0	3	3	10
	Bc. Petr Čermák		10				3		5	8	10
13.–14.	Mgr. Jozef Tinaj	4. D	48	4			3	2		9	9
	Vojtěch Skubanič		9							0	9
15.	Mgr. Dana Beránková	2.	46					0		0	8
16.	Vítězslav Kala		7							0	7
17.	Doc. Miroslav Frost	oktava A	140				2	1		3	6
18.–19.	Dr. Honza Klusoň	septima	90							0	5
	Jiřina Pešová		5							0	5
20.–21.	Michal Rychnovský		4							0	4
	Mgr. Lucie Vasická	1.	42							0	4
22.–24.	Mgr. Zuzana Svobodová	4.	27						1	1	3
	Mgr. Iva Kouřilová	4. B	28							0	3
	Mgr. Lenka Beranová	oktava C	49							0	3
25.–30.	Alena Drábková		2							0	2
	Bc. Honza Chmelař	4. roč.	13							0	2
	Mgr. Martin Včelák		29							0	2
	Mgr. Zdeněk Nováček		33							0	2
	Lukáš Pavlovský		2							0	2
	Jana Šatopletová		2							0	2
31.	Mgr. Gabriela Boháčová	2.	39							0	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Vyčíslitelnost; Algoritm. vyčís. fce, ekviv. jejich různých matem. definic; TS(A[Abeceda], Q[Stavy], σ[Stavy], ˉq[poč. stav], F[konc. stavy]); σ: (Q-F) × (A∪{Λ}) → Q × {L, N, R} × (A∪{Λ}); D: Sezn. instrukcí (σ) je *úplný*, když q∈Q-F, pro ∀s∈A∪{Λ} ∃ instr. σ(q, s); D: *Univers. TS*: U(kod(T[TS], S[vstup])) ≅ T(S); V: Abec. {Λ, |}, máme třídu TS, kde ∀ TS má !konc. stav ⇒ ∃ univ. TS pro tuto třídu. V: Neex. TS, který řekne, jestli se daný TS nad S zastaví – *halting problem*; D: Fce f je *turingovsky vyčísl.*, if ∃ TS, který ji vyčísl; *PRF, ČRF*; *Zákl. fce* (jsou totální – všude def., ∃ TM, který je reprez.): o(x) ≅ 0 - nulová fce, s(x) ≅ x+1 - sucessor, I_n^i(x1..xn) ≅ x_i (1≤i≤n) – i-tá projekce; Operátory: *Subst.* S_n^m(f [m-prom.], g1..gm[n-prom.]) = h, h(x1..xn) ≅ f(g1(x1..xn)..gm(x1..xn)); f, g = tot. ⇒ h je tot., f, g = efekt. vyčísl. ⇒ h je efekt. vyčísl.; Př: Máme f(x,y) = x+y, pak x+y+z = f(f(I_3^1(x,y,z), ...), ...); *Primit. rekurze* Rn(f[n-1 prom.], g[n+1 prom.]) = h; for cykl.; h(0, x2..xn) ≅ f(x2..xn); pro n = 1 h(0) = const.; h(y+1, x2..xn) ≅ g(y, h(y, x2..xn), x2..xn); pro h(y+1) ≅ g(y, h(y)); Rn tot. ⇒ tot.; Př: Násob. - h(y,x) = o(x), h(y,x) = x + h(y-1, x); *Minimalizace*; while cykl.; Mn(f[n+1 param.]) = h; h(x1..xn) ≅ y ⇔ f(x1..xn, y) ≅ 0 & ∀j(j < y) → f(x1..xn, j)↓ & ≠ 0; j zvětš., dokud f(x1..xn, j) != 0; D: Fce f je *primit. rekurz. (PRF)*, když ji lze získat ze zákl. fcí pomocí koneč. mnoha operát. S a R (zastaví se) - ∀ aritm. fce; D: Fce φ je *část. rek. (ČRF)*, když ji lze získat ze zákl. fcí pomocí koneč. mnoha operát. S, R, M; D: Fce f je *obecně rekurz. (ORF)*, když je ČRF a současně je tot.; V: ∀ČRF je efekt. vyčísl.; V: ∀PRF je tot.; V: PRF⊂[ackerm. fce(x+y, x.y, x^y - iterace předch.)]ORF⊂[nekon. smyčka]ČRF; V:∃ univ. fce pro PRF, ale ∉ PRF; D: *Predik. P je prim. rekur.*, když c_P (charakt. fce) je PRF; D: -″- je obecně rek., když c_P je ORF (∨ ČRF, neboť c_P je všude def.); D: Predik. P je rekurs. spoč., když P je def. oborem ČRF; D: Množ. M je rekurs., když c_M je ORF (∃ alg., který vždy ↓ a vrátí 0,1); D: Množ. M je rekurs. spoč., když M je def. oborem ČRF (∃ alg. A, že x∈M ⇔ A(x)↓); Rek ⊂ Rek. spoč.; Churchova teze - pojem algoritmu ≡ ČRF, TS, ...; Obec. rek. predik ≅ rek. množ., rek. spoč. před. ≅ rek. spoč. množ.; V: ČRF je ekviv. TS; V: 1) jestliže Q(x_1..x_{k-1}, y) je rekurs. spočet. predikát, pak také (∀y)y≤t Q(…) je rekurs. spoč., 2) Q je r.s, pak také ∃y Q(…) je r.s.; ČRF ≡ TS; Rekursivní a rekursivně spočetné množ. a jejich vlastn.; D: w_x = x-tá r.s. množina = dom($φ_x$[x-tá ČRF]); D: *Universální predikát* T_k(i, x1..xk, y), i – index (Godelovo číslo), y je dvojice výsledek a # kroků, který k tomu potřebuje, (i-tý tur. str. k-proměnných se vstupy x_1..x_k se zastaví); D: množina (halting problem) K = {x:$φ_x$(x)↓} = {x:x∈w_x} = {x:$Ψ_1$[částečně rek. fce ČRF](x,x)↓}; V: 1) K je r.s., není rekursivní, 2) $\overline{K}$ není r.s.; Porovn. množin - 1,m - převnost; D: A je jednodušší než B, A$≤_m$B ⇔ ∃ ORF f (pro $≤_1$ prostá), že x∈A ⇔ f(x)∈B; D: B je *1-úplná* ⇔ B je r.s. a lib. A r.s. $≤_1$ B - B je nejtěžší r.s.; Vlastnosti rek. spoč. množ: jejich ∩, ∪, negace – zachovávají rekursivitu; ale negace nezachov. r.s. na rozdíl od ∩, ∪ [př. K]; V: ∃ PRF α,β, že $w_{α(x,y)}$ = w_x∩w_y, β pro ∪, důsl. je, že ∪ a ∩ r.s. množ je r.s.; V(Postova): množ. M je rekurzivní ⇔ M a $\overline{M}$ jsou r.s., P je ORP ⇔ P a ¬P jsou r.s. predikáty; Důk: ← nechám paral. běžet prgmy pro M a $\overline{M}$, 1 se určitě zastaví.; V: R.s. množiny jsou právě obory hodnot ČRF; Lemma: Nechť α je ČRF. Pak ∃ ČRF β, že dom(β) = range(α); β(y)↓ ⇒ y = α(β(y)) [obr.]; D: F je úseková, když její def. obor je počát. úsekem N[přiroz. čísla] (bez mezer); D: Množ. M je generována fcí φ, když M = range(φ); φ generuje M.; V: 1) R.s. mny jsou právě mny generované prostými úsekovými ČRF. 2) Rek. mny jsou právě ty, které lze generovat rostoucími úsekovými ČRF; Věta: ∀ nekon. r.s mna obsahuje nekonečnou rekurs. podmnožinu; Uvést Kleeneho větu; Věty o rekursi; V1: Máme fci f (ČRF), pak ∃ číslo a, že ∀x($φ_a$(x)≈$φ_{f(a)}$(x)); φ je třída ČRF fcí, ∀ je tam nekon. mnohokrát; věta říká, že pro ∀ x najdu takové a, že fce f ukazuje na shodnou fci $φ_y$; V2(s parametry): Jestliže h je ČRF m+1 prom. → ∃ PRF g m prom., že $φ_{h(g(y1..ym),\ y1..ym)}$(x) ≈ $φ_{g(y1..ym)}$(x), kde g(y1..ym) je pevný bod; V(*o pevném bodě*): spoj. f - ∃x, že x = f(x); obě VoR jsou důsl. s-m-n věty; V(Kleeneho věta o normální formě): ∃ PRF U; ∃ PRP T_k (k+2 prom.); ∃ ČRF $Ψ_k$ (k+1 prom.); ∃ PRF S_k (k+1 prom.); 1) $Ψ_k$ je univ. fcí pro třídu všech ČRF k prom.; 2) Ψk(i, X_1..X_k) ≈ U($μ_y$ [minimalizace - ∀ prg může mít 1 cykl.] T_k(i, x_1..x_k, y)[konfigurace během výpočtu]); 3) S_k je prostá a roste ve všech proměnných; 4) (s-m-n věta) $Ψ_{m+n}$(i, y_1..y_m, x_1..x_n) ≈ $Ψ_n$(S_m(i, y_1..y_m), x_1..x_n) – redukce # param., param. se nahradí konst. se všemi možn. hodnotami a program odskakuje na tu kterou část…; Důsl. VoR je *Riceova věta*: V: Když F je třída ČRF (1 prom), A = {x: $φ_x$∈F} – indexová množ., když F ≠ ∅ a F ≠ vš. ČRF (tzv. F netriviální) (⇔ A≠0,N), pak A není rekurzivní; (Důkaz: Mna je rekurzivní, když ∃ algor., který pro daný prvek zjistí, jestli tam patří nebo ne); ⇒ neexist. algor., který pro 2 ČRF zjistí, jestli jsou ekviv.; Relativní vyčíslitelnost; *tt-převod.* - předstupeň relat. vyč.; motivace - K$≤_m$$\overline{K}$ - nesrovtelné; D: Mna A je tt-převná na B ⇔ ∃ ORF f, ∀x, f(x) je tt-podm. <α[n-ární bool fce],<y1..yn>[n-tice bodů]> & c_A(x) = α(c_B(y1)..c_B(yn)); # n-árních bool fcí je 2^2^n; K$≤_{tt}$$\overline{K}$ - x→<negace,<x>>; V: B rek. a A$≤_{tt}$B ⇒ A rek.; D: A $≤_T$ B (A je *T-převoditelná* na B, A je vyčísl. relat. k B, A je B-rek. (redukce ve slož.)), když A=$Φ_e$(B) pro nějaké e; tzn. ∀x c_A(x) = A(x) = $Φ_e$(B)(x); B je tzv. orákul, B „pokryje“ A; $≤_T$ je refl., tranz.; D: A je B-r.s., když A = dom($Φ_e$(B)) pro něj. e; D: Množ. je T-úplná, pokud je r.s. a v rel. $≤_T$ je nejslož.; V: A$≤_T$B, B je rek. ⇒ A je rek.; D: *T-stupně* - třídy ekviv. podle $≡_T$; D: Zobecněný

Předchozí obrázek ukazuje abstraktní uměni určené některým diplomantům UK MFF.