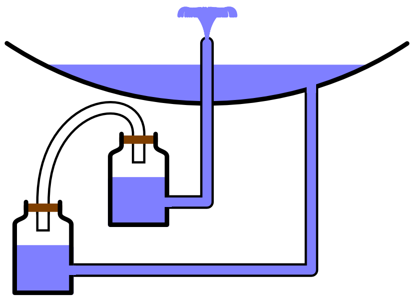
Studentský matematicko-fyzikální časopis

ročník VIII číslo 3

Termín odeslání: **14. 1. 2002**

Zadání témat

Téma 5 – Fontány



Podívejte se na obrázek, na kterém je namalovaná fontána a vysvětlete, jak funguje. Odhadněte, do jaké výšky může při tomto uspořádání dosáhnout proud vody stříkající z fontány. Tento odhad porovnejte s experimentem. (Pozor na vytopení koupelny!) Navrhněte různá vylepšení a speciální efekty.

Lišák Riki tvrdí, že naše fontána je zajisté *perpetuum mobile*. Má pravdu?

Zadání úloh

Úloha 3.1 – Funkce (5b)

V rovině je nakreslený graf funkce $y = x^2$. Někdo však smazal souřadné osy, takže zůstala jenom parabola. Pomocí pravítka a kružítka

(1) tyto osy nakreslete a
(2) vyznačte jednotku délky.

Úloha 3.2 – Tři čísla (5b)

Mějme tři čísla a, b a c ležící na intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$, pro která platí vztahy:

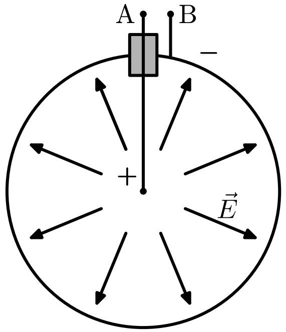
$$\cos(a) = a\,,$$

$$\cos(\sin(b)) = b\,,$$

$$\sin(\cos(c)) = c\,.$$

Seřaďte tato čísla podle velikosti.

Úloha 3.3 – Baterie na β-radioaktivitu (5b)



Uvnitř kovové koule je umístěn kousíček radioaktivního materiálu, který je od koule izolován. Každou sekundu se rozpadne ν atomů. Předpokládejme, že energie elektronů vznikajících při rozpadu je se stejnou pravděpodobností rozložena mezi hodnotami $W_{\min}$ a $W_{\max}$. Určete elektromotorické napětí na svorkách baterie (body A, B). Jaký největší proud může dodávat taková baterie? Do jakého odporu zátěže můžeme ještě baterii považovat za generátor proudu?

Řešení témat

Téma 1 – Pravidelné mnohostěny

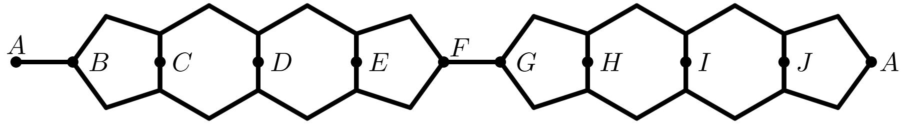
Pozn. red.: K téme futbalovej lopty prišlo viacero veľmi zaujímavých príspevkov. Na prvom mieste tu chcem poďakovať Mgr. Dane Beránkovej, ktorá z papiera poskladala prekrásnu futbalovú loptu.

Z matematického hľadiska došiel k najzaujímavejším výsledkom Doc. Tibor Vansa.

Geometrie mnohostěnů

Doc. Tibor Vansa

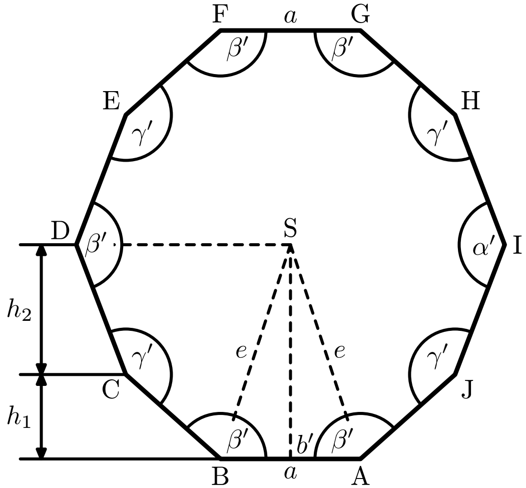
Pozn. red.: Autor sa pokúsil zistiť polomer gule, ktorá je lopte opísaná a gule, ktorá je vpísaná šesťuholníkovým stenám. Spočítal uhly medzi jednotlivými stenami a dospel k záveru, že uhol medzi dvoma susednými 5-uholníkovými a 6-uholníkovými stenami je asi $\gamma' = 142^\circ\,16'$, uhol medzi susednými 6-uholníkovými stenami je $\alpha' = 138^\circ\,11'$ a uhol medzi hranou a susednou 5-uholníkovou stenou je $\beta' = 148^\circ\,16'$.



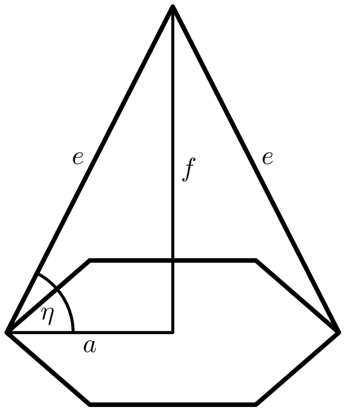
Obr. 1

K týmto približným výsledkom došiel Doc. Tibor Vansa úvahami pomerne komplikovanými a nie úplne prehľadnými. Ak niekto (možno sám Doc. Vansa) pošle podrobnejšie zdokumentované odvodenie, určite ho uverejníme v ďalšom čísle.

Míč se skládá z pásů podobných jako jsou na obrázku 1. Míčem tedy mohu udělat řez, který vidíme na obrázku 2.

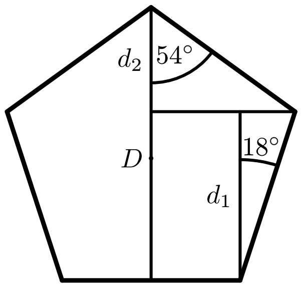


Obr. 2

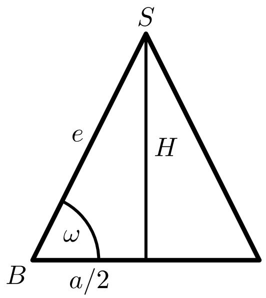


Obr. 7

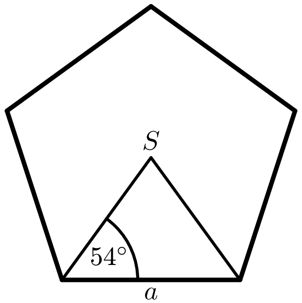
Sečtu-li všechny úhly, vyjde mi přesně 1440°, což odpovídá součtu úhlů mnohoúhelníka $(n-2)\cdot 180°$. Tím jsme dokázali, že míč vůbec existuje.[1] Zde ρ je poloměr kružnice opsané, neboť ta spojuje všechny vrcholy. Vzdálenost $|SD| = |Sb'|$ (obr. 2), neboť jsou spojnicemi středu míče a středu spojnice dvou 6-úhelníků. Tuto vzdálenost spočítáme jako $|Sb'| = h_1 + h_2$ z obrázku. V pravidelném pětiúhelníku (obr. 3) platí: $D = d_1 + d_2$, kde $d_1 = \cos 18°\, a$,



Obr. 3



Obr. 6



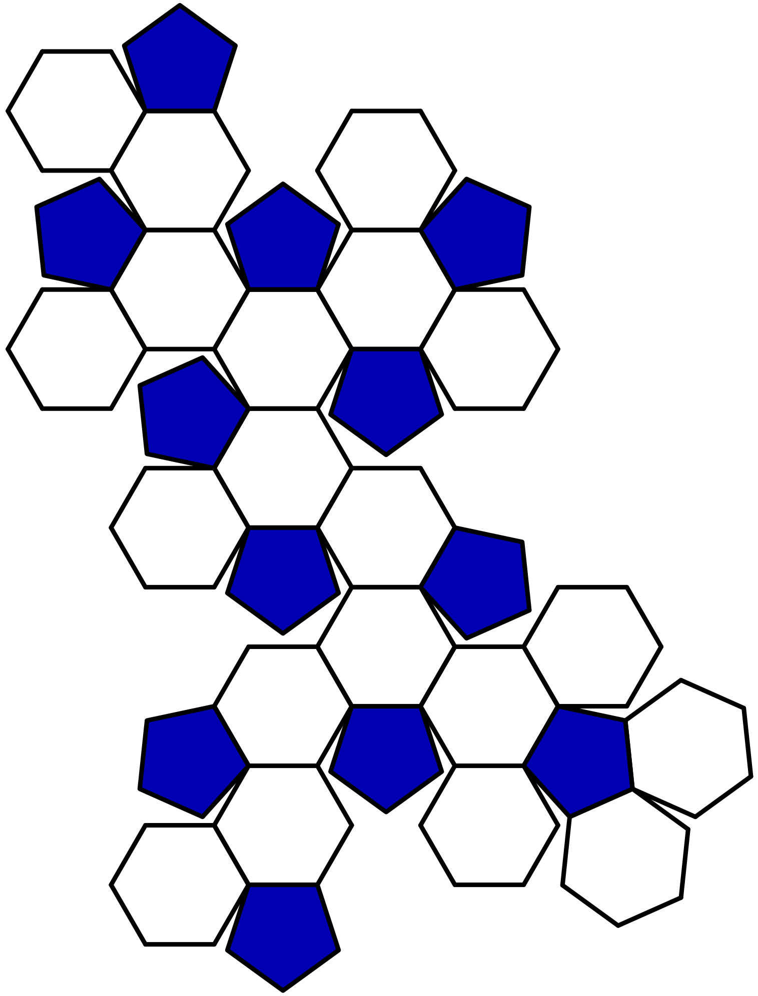
Obr. 8

$d_2 = \cos 54°\, a$, po sečtení $D = 1{,}53\, a$. Potom $h_1 = \sin\beta\, D$, kde $\beta = 180° - \beta'$ (obr. 4). Dále $h_2 = 2x\sin\omega$, $\omega = (180° - \alpha')/2$ (obr. 5). Z obrázku 6 potom $\operatorname{tg}\sigma = H/(a/2)$, z čehož možno spočítat σ a $\rho = a/(2\cos\sigma)$. Vyjde nám přibližně $\rho = 2{,}48\, a$.

Poloměr koule vepsané f je vzdálenost středu k nejbližší stěně. Nejblíže je stěna v místech, kde jsou dva vrcholy od sebe nejvíc vzdáleny. To je mezi dvěma vrcholy 6-úhelníku: $f = \rho\sin\eta$, (obr. 7), $f \approx 2{,}26\, a$.

Povrch koule se vypočte $P = 4\pi r^2$, objem $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Obsah šestiúhelníka

[1] *Pozn. red.: K tomuto má redakcia isté výhrady.*



Obr. 12

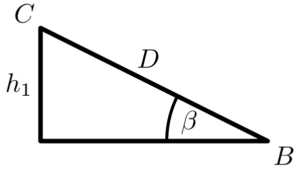
Sieť, podľa ktorej si môžte poskladať futbalovú loptu, nám zaslali *Doc. Tibor Vansa, Mgr. Gabriela Boháčová, Jana Šatopletová, Dr. Honza Klusoň, Dr. Peter Bališ a Bc. Helena Kubátová.*

$S_6 = 3a\sqrt{3}/2$ a je jich 20. Obsah pětiúhelníka $S_5 = a\ \operatorname{tg} 54° \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5$ (obr. 8) – je jich 12. Celková plocha míče je tedy $S = 20\, S_6 + 12\, S_5 \approx 72{,}6\, a^2$. Povrch opsané a vepsané koule je $S_f = 77{,}16\, a^2 \approx 106{,}2\%\, S$ a $S_\rho = 64{,}59\, a^2 = 88{,}96\%\, S$.

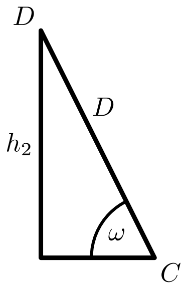
Obarvení:

Že to nejde pro tři barvy, je jasné již z toho, že v síti míče se nachází pětiúhelník (obr. 9, 10).

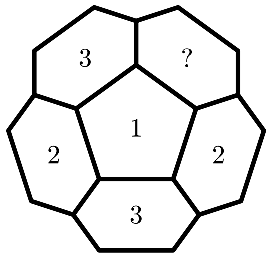
Pozn. red.: Niektorí z vás sa pokúsili zostrojiť podobné polopravidelné telesá, bohužiaľ, nikto v nich nehľadal žiadne matematické zákonitosti a nesnažil



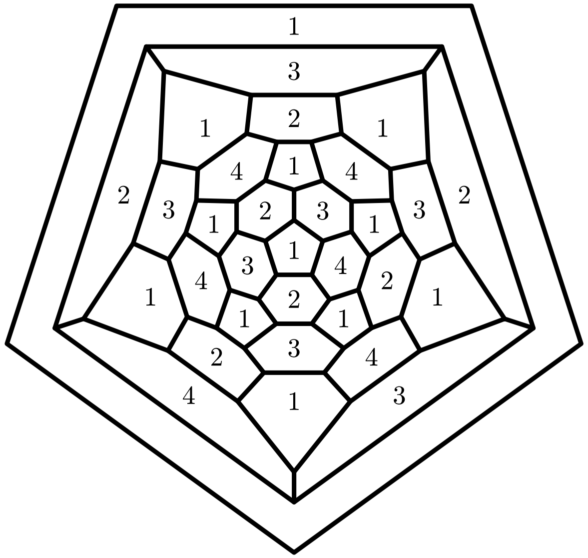
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 10


Obr. 9

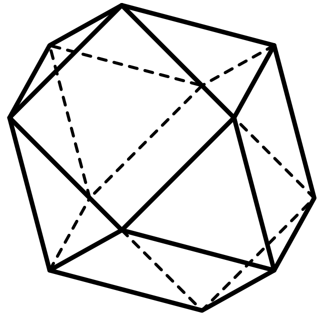
sa ich nájsť a popísať všetky.

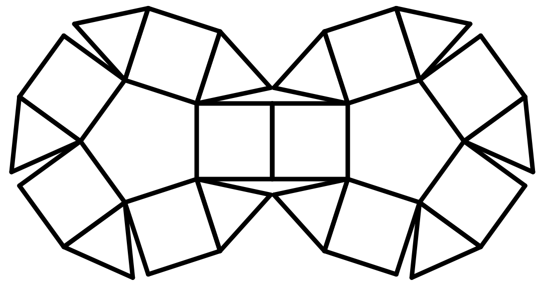
Bc. Helena Kubátová

„Moje vlastní těleso“ (obr. 13) je pravidelný čtrnáctistěn, sestávající ze šesti čtverců a osmi rovnoramenných trojúhelníků. Lze jej odvodit z krychle: spojíme středy hran krychle tak, aby na každé její stěně vznikl čtverec o straně, jejíž délka se rovná jedné polovině délky stěnové úhlopříčky krychle a který je pootočený o 45° vůči stěně krychle. Takto získáme hrany vymezující nové těleso.

Proč se fotbalové míče šijí ve tvaru daného tělesa?

Důvodem mohou být krátké švy (relativně krátké hrany vzhledem k velikosti tělesa) – když se fotbalista při kopu trefí do švu, mohl by se delší šev snáze roztrhnout.


Obr. 13


Obr. 11

Dalším faktrorem mohou být praktické důvody při výrobě – fotbalové míče se zřejmě šijí ze silnější kůže, která by se ve větších kusech těžko ohýbala a přizpůsobovala svým tvarem požadovanému tvaru míče. Jedná se tedy o poměrně malé stěny vzhledem k velikosti tělesa. Provedení míče je také dostatočně kontrastní vůči terénu, což může značně usnadnit jeho hledání především v hustém porostu. Výhodu zajímavého geometrického provedení spatřuji i z pozice hrajícího fotbalisty: při méně akčním zápasu se pro nevytíženého hráče může míč stát námětem k celé řadě stereometrických úvah, z nichž některé jsou předestřeny právě v zadání tohoto tématu.

Pozn. red.: Čo si myslíte o týchto názoroch vy? Premýšľali ste už niekedy o stereometrii pri dobrom futbale? Prečo sa futbal hrá s koženou loptou, keď by stačila obyčajná gumenná? Je naozaj „futbalova lopta“ mnohosten, ktorý má relatívne najkratšie hrany?

A na záver ešte uvádzam sieť telesa, ktorý poslala Bc. Zuzana Rozlívková (obr. 11):

Toto teleso však nemá rovnaké vrcholy, ani mu nemožno opísať guľu, ktorá by sa dotýkala všetkých vrcholov, ani vpísať guľu, ktorá by sa dotýkala všetkých stien.

Skúste sa zamyslieť nad tým, aké iné polopravidelné telesá ešte existujú okrem futbalovej lopty a zrezanej kocky Bc. Heleny Kubátové. U Bc. Kubátové je existencia telesa jasná priamo z jeho konštrukcie. Z čoho však plynie, že existuje futbalová lopta? Že keď budeme k sebe dávať 5-uholníky a 6-uholníky tak, aby sa vždy vo vrchole stretli dva 6-uholníky a jeden 5-uholník, tak „to vyjde“ a teleso sa pekne uzavrie? Skúste prísť na to, či existuje konečne alebo nekonečne mnoho polopravidelných telies s dĺžkou hrany $a = 1$

takých, že všetky vrcholy sú rovnaké. Skúste ich nájsť, popísať ich konštrukciu, ukázať existenciu a dokázať, že neexistujú iné.

U futbalovej lopty ostáva taktiež ako otvorený problém úloha spočítať uhly medzi jednotlivými stenami.

Peťo

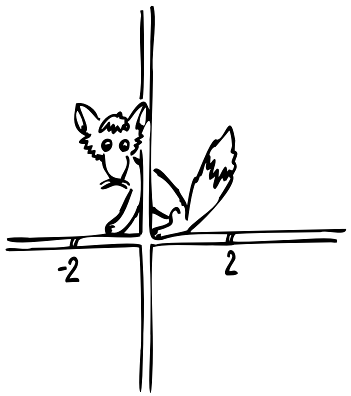
Téma 2 – Čebyševův polynom

Čebyševovy polynomy

Bc. Jan Špiřík

Polynom 1. stupně:

Čebyševův polynom prvního stupně je ve tvaru $f(x) = x + a_0$. Grafem funkce, který polynom popisuje, je přímka, v našem případě úsečka. Maximum a minimum bude mít proto ve svých krajních bodech pro $x = -2$ a $x = 2$. Aby byla vzdálenost polynomu minimální musí být absolutní hodnota z maxima i minima shodná: $|-2 + a_0| = |2 + a_0|$. Protože Čebyševův polynom je normovaný, není možno měnit sklon přímky, a proto pro daný interval bude pro minimální vzdálenost polynomu od nuly úsečka procházet 0 a zároveň bude 0 středem této úsečky. Z toho vyplývá, že člen $a_0 = 0$ a tvar Čebyševova polynomu prvního stupně bude



$$\boxed{f(x) = x} \tag{1}$$

a vzdálenost toho polynomu od 0 bude 2.

Polynom 2. stupně

Čebyševův polynom druhého stupně má tvar $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$. Grafem funkce, který polynom popisuje je parabola, v našem případě pouze její část. Minimum polynomu bude v místě vrcholu paraboly, maxima budou v místě, kde x bude nabývat hodnoty -2 a 2. Do polynomu dosadíme:

$$f(-2) = 4 - 2a_1 + a_0\,,$$
$$f(2) = 4 + 2a_1 + a_0\,,$$
$$f(0) = 0 + 0 + a_0 = a_0\,.$$

Absolutní hodnoty těchto čísel se musí rovnat.

$$|a_0| = |4 - 2a_1 + a_0|\,,$$
$$|a_0| = |4 + 2a_1 + a_0|\,,$$
$$|4 - 2a_1 + a_0| = |4 + 2a_1 + a_0| \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0\,.$$

Dosadíme:

$$|a_0| = |4 + a_0|\,,$$
$$a_0 = -2\,.$$

Z toho plyne, že Čebyševův polynom druhého stupně má tvar

$$\boxed{f(x) = x^2 - 2}\,. \tag{2}$$

Vzdálenost polynomu od 0 bude 2.

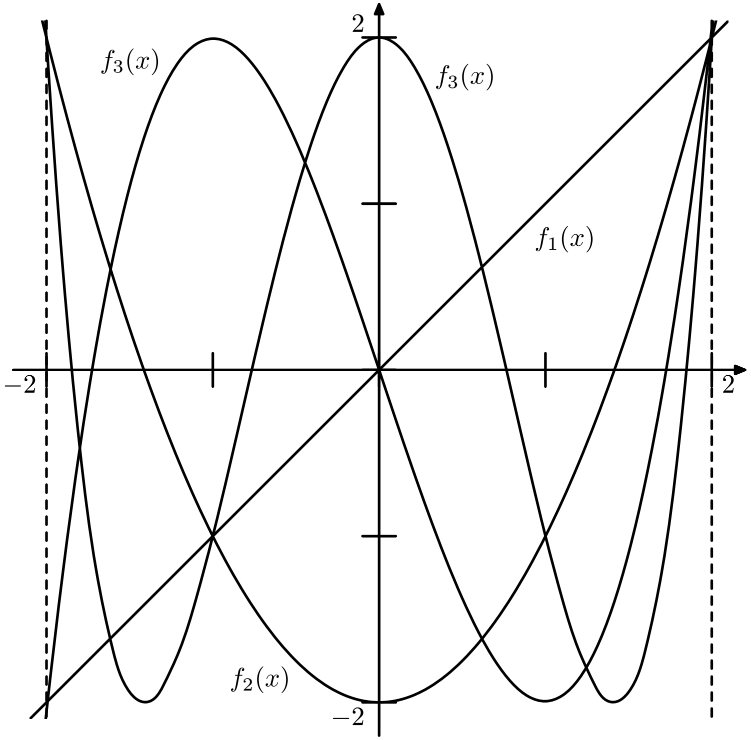
Polynom 3. stupně

Z podobnosti Čebyševova polynomu prvního a druhého stupně odhaduji tvar Čebyševova polynomu třetího stupně na

$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x}\,. \tag{3}$$

Pozn. red.: Správný tvar polynomů vyšších stupňů našli Bc. Zuzana Rozlívková, Doc. Martin Demín, Dr. Honza Klusoň, Doc. Vašek Cviček, Vojtěch Skubanič, Prof. Jiří Klimeš, Bc. Jan Špiřík a Vítězslav Kala. Tady jsou:

$$\begin{aligned}
f_1 &= x\\
f_2 &= x^2 - 2\\
f_3 &= x^3 - 3x\\
f_4 &= x^4 - 4x^2 + 2\\
f_5 &= x^5 - 5x^3 + 5x\\
f_6 &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2\\
f_7 &= x^7 - 7x^5 + 16x^3 - 7x\\
f_8 &= x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2\\
f_9 &= x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x\\
f_{10} &= x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25x^2 - 2\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4}$$



Čebyševovy polynomy $f_1(x)$ **až** $f_4(x)$**.**

Všimněte si, že polynomy se vzájemně protínají nejenom v bodech $(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,2)$, ale i v jiných bodech. Např. na obrázku můžeme vidět, že polynomy $f_1(x), f_2(x)$ a $f_4(x)$ se protínají v bodě $(-1,-1)$. Existuje více takových bodů nebo je to jenom náhoda? Své tvrzení dokažte, popřípadě najděte takové body.

Vzorec pro Čebyševův polynom

Doc. Vašek Cviček

V [1] jsme našel vzorce pro Čebyševovy polynomy. Označení:

$$T_n(x) \text{ – Čebyševovy polynomy pro interval } \langle -1,1\rangle\,,$$

$$f_n(x) \text{ – Čebyševovy polynomy pro interval } \langle -2,2\rangle\,.$$

Zřejmě:

$$f_n(x) = 2^n \cdot T_n(\frac{x}{2})\,.$$

V [1] se taky píše, že lze ukázat

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos\left(n \arccos x\right)\,, \qquad \text{pro } \|x\| \le 1\,.$$

Pak

$$f_n(x) = 2\cos\left(n \cdot \arccos\frac{x}{2}\right)\,, \qquad \text{pro } \|x\| \le 2\,,$$

což by mohl být pěkný výsledek, jen to dokázat.[2]

Vlastnosti Čebyševových polynomů

Pozn. red.: Autoři Doc. Vašek Cviček, Doc. Tibor Vansa, Dr. Honza Klusoň, Vítězslav Kala, Doc. Martin Demín se zamýšleli nad vlastnostmi Čebyševových polynomů a došli k následujícím závěrům:

- *Čebyševovy polynomy sudého stupně jsou sudé funkce a lichého stupně jsou funkce liché.*
- *Všechny kořeny Čebyševových polynomů leží v intervalu $(-2,2)$.*
- *Vzdálenost všech Čebyševových polynomů je 2.*

Pokoušeli se tyto vlastnosti odůvodnit, ale většinou je nedokázali. Zvládne to někdo z vás?

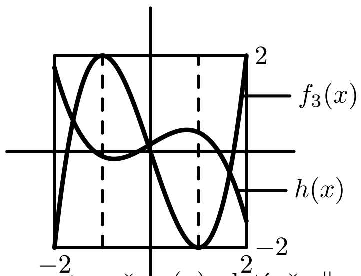
Pokračujte v bádání a zjišťování zajímavých vlastností. . . –:)

Alča

Literatura:

[1] *Rektorys, K. a spolupracovníci*: Přehled užité matematiky

Čebyševovy polynomy, pokračování zadání



Připomeňme si definici Čebyševových polynomů na intervalu $\langle -2,2\rangle$. Pro $p_n(x)$ jsme si zavedli jeho vzdálenost od nuly vztahem $\|p_n\| = \max|p_n(x)|;\ x \in \langle -2,2\rangle$. Čebyševovým polynomem n-tého stupně nazveme takový normovaný polynom, který je ve tvaru $f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, který má nejmenší vzdálenost od nuly, čili pro libovolný normovaný polynom n-tého stupně $g_n(x)$ platí, že $\|g_n(x)\| \ge \|f_n(x)\|$. Minule jste se měli přesvědčit, že polynomy x a x^2-2 jsou Čebyševovy, a že Čebyševovy polynomy vyšších stupňů se dostanou pomocí rekurentní formule

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f_{n-1}(x)$$

Je tomu skutečně tak? Podívejte se na jejich grafy, které jste si již jistě nakreslili. Jsou celé obsaženy ve čtverci $x \in \langle -2,2\rangle$ $y \in \langle -2,2\rangle$. Navíc se dotýkají jeho

[2] *Pozn. red.: Podaří se to někomu z Vás?*

hranice v $n+1$ bodech (n je stupeň polynomu), a to na střídačku, jednou nahoře a pak dole. Nazvěme normované polynomy s takovouhle vlastností kandidáty (na Čebyševa, pochopitelně). Pro každého kandidáta $g(x)$ platí $\|g\| = 2$. Je možné najít takový normovaný polynom, že jeho vzdálenost od nuly je menší než 2? Kolik různých kandidátu existuje?

Následující postup nechť je vám inspirací: nakreslete si graf nějakého kandidáta $g_n(x)$ do čtverce $\langle -2,2\rangle \times \langle -2,2\rangle$. Rozdělte tento čtverec svislými čarami na n obdélníků tak, aby kandidát spojoval v každém obdélníku jeho horní a spodní hranu (viz obrázek). Teď do grafu přikreslete jinou funkci $h(x)$ (o které si můžete myslet, že je to normovaný polynom n-tého stupně), která ale bude mít menší vzdálenost od nuly než 2. Pak zkoumejte rozdíl $g_n(x) - h(x)$. Kolik má kořenů? Polynom jakého stupně to je? Co z toho plyne? Pro příště si necháme důkaz toho, že rekurentní formule skutečně generuje kandidáty, ale můžete to zkusit už teď.

zadával *Martin Mucha*

Téma 3 – Tepelný stroj

Chladíme, chladíme…

Doc. Martin Demín

Ve velké míře se využívají 3 druhy tepelných strojů:

1. chladící zařízení s kompresorem,
2. absorbční chladící zařízení,
3. chladící zařízení využívající Peltierův jev.

Dále se budu zaobírat zařízeními 2 a 3.

2. Absorbční chladící zařízení

Princip spočívá v tom, že voda velmi dobře pohlcuje amoniak. Nejdříve máme směs vody a amoniaku, kterou zahříváme a necháme odpařit, poté se oddělí amoniak, který odtéká do výparníku, voda se vrací zpět. Tím je všechno připraveno k chlazení. Zkondenzovaná voda se snaží absorbovat amoniak, což vyvolá jeho jeho větší odpařování z výparníku, který se tím ochlazuje. Takové zařízení se využívá hlavně ve velkých komplexech, kde by byl kompresor neúnosně velký např. na zimních stadiónech.

Spotřeba energie (při zahřívání vody)	$S = 3\text{–}6\,\mathrm{kWh}$
Přenesená energie	$Q = 4{,}2\text{–}8{,}4\,\mathrm{MJ}$
Účinnost	$\eta = \dfrac{Q}{S} = 0{,}38$

Tab. 1

3. Chladící zařízení využívající Peltierův jev

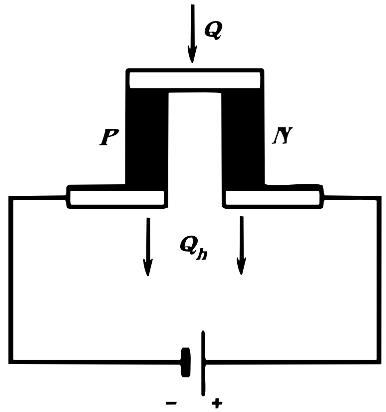
Když spojíme 2 vodiče z různých kovů zapojené do elektrického obvodu a místa, kde se tyto vodiče dotýkají, mají různou teplotu, pak naměříme, že

vodičem protéká proud. Tento jev se nazývá Seebeckův. Existuje k němu i jev opačný, tzv. Peltierův jev. Ten spočívá v tom, že když do stejného obvodu (spoje dvou drátů z dvou různých kovů) zapojíme vnější zdroj stejnosměrného el. proudu, pak se bude jeden spoj více ohřívat a druhý bude naopak chladnější než by měl být.

V praxi se kvůli lepším vlastnostem používají spíše polovodiče, dva druhy kovů se nahrazují polovodičem typu N a polovodičem typu P. Obvod chladícího zařízení[3] (resp. termočlánku) pak vypadá jako na obrázku vedle tabulky 2.

Q	– absorbované teplo
Q_h	– vydané teplo
P	– polovodič typu P
N	– polovodič typu N

Tab. 2



Sériově vyráběné termobaterie mají zhruba tyto vlastnosti:

$I_{\max}$	3,3 A
$\mathrm{d}T_{\max}$ (max. rozdíl teplot)	60 °C
U	1,9 V
$P_{\max}$	3,9 W
počet dvojic spojů	17

Tab. 3

Ledničku chceme ochladit z $20\,°C$ na $0\,°C$. Lednička má objem $V = 200\,\mathrm{l} = 0{,}2\,\mathrm{m}^3$. Předpokládejme, že ½ objemu je voda a zbytek je vzduch. Potom potřebujeme na ochlazení energii:

$\rho_{\mathrm{vz}} = 1{,}27\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$c_{\mathrm{vz}} = 0{,}28\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$
$\rho_{\mathrm{v}} = 1\,000\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$c_{\mathrm{v}} = 4\,180\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$

Tab. 4

[3] *Pozn. red.: Proč se jeden ze spojů ohřívá méně, když jím prochází stejný proud jako tím druhým? Podle čeho vlastně poznáme (předem) který spoj bude chladit a který oteplovat?*

$$Q = m \cdot c \cdot \mathrm{d}T\,; \qquad m = \frac{\rho V}{2}$$

$$Q = \mathrm{d}T \frac{V}{2} \left(c_{\mathrm{vz}} \cdot \rho_{\mathrm{vz}} + c_{\mathrm{v}} \cdot \rho_{\mathrm{v}}\right) = 8\,360\,\mathrm{kJ}$$

$$T = \frac{Q}{P_{\max}} = \text{cca 24 dní.}$$

Což znamená v podstatě nikdy, protože chlazený prostor není dokonale oddělený od okolního světa. (Ale taková lednička už byla skutečně vyrobena…)

Při porovnávání s ostatními způsoby chlazení je ale důležitá účinnost.

$$\eta = \frac{P_{\max}}{U \cdot I_{\max}} = \frac{3{,}9\,\mathrm{W}}{3{,}3\,\mathrm{A} \cdot 1{,}9\,\mathrm{V}} = 0{,}622\,.$$

Q ale závisí na $\mathrm{d}T$. Čím je $\mathrm{d}T$ větší, tím je Q menší a při $\mathrm{d}T_{\max}$ je $Q = 0$.

Nejvýhodnější je tedy zařízení s kompresorem, potom absorbční chladící zařízení (k zahřívání nemusí být použita el. spirála, ale i plynový hořák) a nakonec chlazení Peltierovým článkem, který dnes používají poč. procesory a přenosné auto-chladničky.

Tepelný stroj může fungovat i na principu rozpouštění některých chem. látek ve vodě. Např. při rozpouštění síranu sodného se roztok ochlazuje a tím ochlazuje i okolní přístroj. Poté je možné vodu odpařit a opět použít.

Gumičku s teplotně závislou tuhostí není možné přeměnit v tepelný stroj, protože při jejím roztahování a stahování je uvolňováno teplo, které vzniká při deformaci. Čím bude teplejší, tím bude uvolňované teplo menší. Gumička však nikdy nebude teplo přijímat.

Pozn. red.: Tady taky nemohu souhlasit. Jde to, i když je to jen teorie bez většího praktického využití. Malá nápověda: guma má tu zajímavou vlastnost, že se s rostoucí teplotou smršťuje.

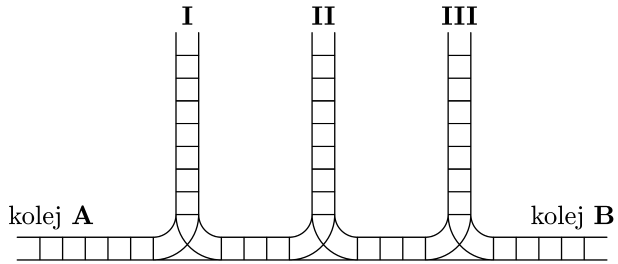
Khayiš

Řešení úloh

Úloha 1.1 – Na koleji… (5b)

Omlouváme se řešitelům, kteří neviděli na obrázku s kolejemi písmena A a B. (Těch kteří je viděli, je zanedbatelně mnoho vůči ostatním.) Příště si na tiskařské šotky dáme větší pozor. Správny obrázek rovněž zobrazujeme:

Zadání: *Na koleji A na obrázku nahoře stojí n vagónů, které jsou srovnány v jistém pořadí. Vagóny se postupně přesunují na kolej B, přičemž vagón může zajet na některou ze tří postranních kolejí, nesmí se však vracet (postupovat může jenom směrem ke koleji B). Předpokládáme, že na každou postranní kolej se v případě potřeby vejdou všechny vagóny najednou.*



Dokaž, že pro dost velké n existuje pořadí vagónů, které nelze výše uvedeným způsobem docílit. Pro jaké n to ještě jde?

Řešení:

Začněme nejprve s jednodušším případem, kdy máme k dispozici pouze jednu vedlejší kolej. Počet pořadí, které můžeme vytvořit na koleji **B**, je omezen shora počtem všech možných posunovacích postupů. Pokusme se určit počet všech korektních posunovacích postupů v závislosti na počtu vagónů n.

Zakódujme si tedy každý takový postup posloupností odpovídající provedeným tahům, tj. každému tahu odpovídá písmeno a písmena jsou za sebe řazena podle toho, jak byly prováděny odpovídající tahy – písmeno A odpovídá tahu z koleje **A** na odstavnou kolej 1 a písmeno B odpovídá tahu z odstavné koleje 1 na kolej **B**, přesunutí z koleje **A** na kolej **B** odpovídá dvěma tahům popsaných AB.

Je zřejmé, že:

1) Každý korektní posunovací postup má právě jeden zápis.
2) Každý zápis korektního posunovacího postupu obsahuje právě n písmen A a n písmen B (máme n vagónů a každý vagón je právě jednou posunut na odstavnou kolej a právě jednou na kolej **B**).
3) Každý zápis korektního posunovacího postupu splňuje podmínku, že každé jeho písmeno B předchází více písmen A než B (abychom mohli přesouvat z odstavné koleje potřebujeme tam mít vagón).

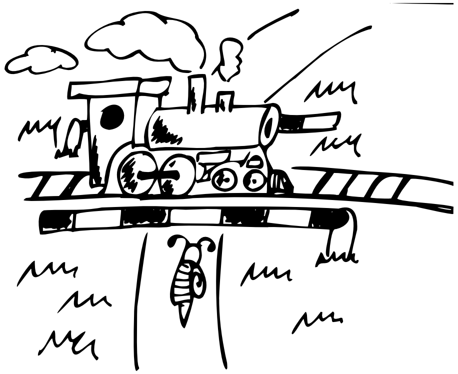
Počet posloupností, které splňují podmínky 2 a 3 nám dává následující lemma:

Lemma. *Počet posloupností, které obsahují n písmen* A *a n písmen* B *(podmínka 2) takových, že každé písmeno* B *předchází více písmen* A *než* B *(podmínka 3), je* $\dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n-1}$.

Důkaz: Počet všech posloupností splňující pouze podmínku 2 je $\dbinom{2n}{n}$. Určeme počet „špatných“ posloupností, tj. posloupností splňujících podmínku 2 a nesplňujících podmínku 3, z čehož už snadno určíme počet „dobrých“ posloupností, tj. posloupností splňujících zároveň podmínky 2 a 3. Je-li posloupnost „špatná“ (tedy porušuje podmínku 3), musí mít písmeno B, před kterým není víc písmen A než B. Vezměme si první výskyt takového B a vytvořme „pomocnou“ posloupnost tak, že změníme všechna A na B a B na A od začátku posloupnosti až po toto B. „Pomocná“ posloupnost vždy obsahuje $n+1$ písmen A a $n-1$ písmen B. Navíc žádné dvě „špatné“ posloupnosti nemají stejné odpovídající „pomocné“ posloupnosti a každá posloupnosti složené z $n+1$ písmen A a $n-1$ písmen B je „pomocnou“ posloupností k nějaké „špatné“ posloupnosti. Tedy „pomocných“ posloupností je stejný počet jako „špatných“. Pomocných posloupností je $\binom{2n}{n-1}$ a tedy „dobrých“ posloupností je

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n-1} .$$

□



Podle lemmatu vidíme, že počet pořadí pro n vagónů s jednou pomocnou kolejí můžeme docílit maximálně $\frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n-1}$ – dokonce můžeme docílit přesně všech $\frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n-1}$ pořadí, protože každý z postupů vytvoří jiné pořadí. Již pro $n = 3$, vidíme, že docílíme maximálně 5 pořadí, přestože počet všech možných je 6.

Máme-li k dispozici tři pomocné koleje, existuje nejvýše $\left(\frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n-1}\right)^3$ postupů, jak přesunout n vagónů z koleje **A** na **B**. Zde už nedosáhneme všech $\left(\frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n-1}\right)^3$ pořadí, protože některé postupy dávají stejné výsledky. Pomocí dvou jednoduchých lemmat si ukažme, že platí $\left(\frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n-1}\right)^3 \leq 64^n$.

Lemma. $\binom{n}{i} \leq 2^n$ *, pro* $i = 0, 1, \ldots n$.

Důkaz: Použitím binomické věty a vynecháním všech členů sumy až na jeden máme

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \geq \binom{n}{i} .$$

□

Lemma. *Platí:*[4]

$$n! \geq \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n .$$

Důkaz: Úpravami dostáváme

$$\ln n! = \sum_{i=1}^{n} \ln i \geq \int_1^n \ln i \,\mathrm{d}i = n \ln n - n + 1 \geq n \ln n - n$$

a tedy

$$n! \geq \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n .$$

□

S použitím těchto dvou lemmat dostáváme

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \binom{2n}{n-1}\right)^3 \leq \left(\frac{1}{n} \cdot 2^{2n}\right)^3 \leq \left(2^{2n}\right)^3 = 64^n .$$

Zajímá nás nyní, pro které n už nemůžeme s třemi pomocnými kolejemi docílit všech možných pořadí. Chceme-li, aby maximální počet postupů byl menší než počet všech možných pořadí dostáváme podmínku na n:

$$n! \geq (n/\mathrm{e})^n \geq 64^n ,$$

tedy $\frac{n}{\mathrm{e}} \geq 64$, a proto pro $n \geq 64\,\mathrm{e}$ nemůžeme se třemi pomocnými kolejemi dosáhnout všech pořadí.

Aleš

Úloha 1.2 – Záměny čísel (4b)

Zadání: *Je dáno několik nenulových čísel (alespoň dvě). Umaž dvě libovolná čísla a a b a místo nich napiš čísla* $a + \frac{b}{2}$ *a* $b - \frac{a}{2}$. *Dokaž, že jakmile jednou začneš, už nikdy nedostaneš původní soubor čísel.*

Řešení:

Mějme posloupnost $A = x_1, \ldots, x_n$, kde $n \geq 2$. BÚNO[5]: čísla, která budeme nahrazovat jsou x_1 a x_2.

$$\begin{aligned} x_1 &\to x_1 + \frac{x_2}{2} , \\ x_2 &\to x_2 - \frac{x_1}{2} . \end{aligned} \tag{1}$$

[4] e je Eulerovo číslo, e = 2,71828...

[5] Bez Újmy Na Obecnosti

Tedy posloupnost nově vzniklá je

$$B = x_1 + \frac{x_2}{2},\ x_2 - \frac{x_1}{2},\ x_3, \ldots, x_n\,. \tag{2}$$

Na posloupnostech A a B zadefinujeme normu:

$$\big\|(x_1 \cdots x_n)\big\| = \sum_{i=1}^{z} x_i^2 \tag{3}$$

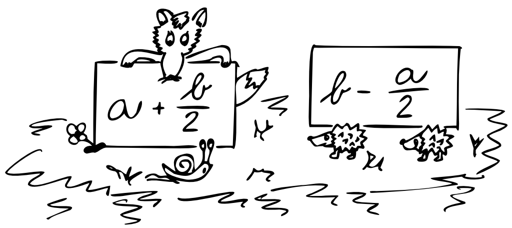
a ukážeme, že norma původní posloupnosti A je vždy menší než norma nově vytvořené. Tedy ukážeme, že platí nerovnost:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + (x_2 - \frac{x_1}{2})^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2\,. \tag{4}$$

Po upravení pravé strany dostáváme:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 < \frac{5}{4}x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2\,. \tag{5}$$

Tato nerovnost platí.



Z toho plyne, že se nám nemůže stát, abychom dostali v některém kroku posloupnost B takovou, že $B = A$. Muselo by totiž platit $\|A\| = \|B\|$, ale podle výše dokázaného je pro všechny posloupnosti B získané z posloupnosti A v k-tem kroku ($k \geq 1$) $\|A\| < \|B\|$.

Al-ča

Úloha 1.3 – Tramvaj (5b)

Zadání: *Když se tramvaj pohybuje po horizontální dráze jistou rychlostí, prochází jejím motorem proud $I_0 = 100\,\mathrm{A}$. Účinnost motoru je $\eta = 0,9$. Když řidič tramvaje při jízdě z kopce vypne motor, pohybuje se tramvaj tou samou rychlostí. Jaký proud bude protékat motorem, když se tramvaj bude pohybovat stejně rychle po stejné dráze směrem nahoru?*

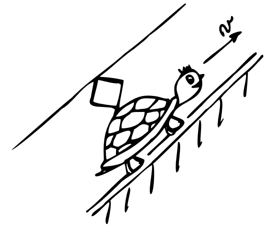
Řešení:

Nechť U_0 je napětí v síti. Když se tramvaj pohybuje po horizontální dráze, motor přijímá příkon $N = U_0 I_0$. Část příkonu se ztrácí v podobě Jouleova tepla

$I_0^2 R$, kde R je odpor obvodu (viz poznámka níže). Využitelný výkon je tedy jenom

$$N' = U_0 I_0 - I_0^2 R = \eta U_0 I_0\,, \tag{1}$$

kde η je účinnost. Protože se tramvaj pohybuje s nulový zrychlením, tento výkon se rovná výkonu odporových sil, jako třeba tření v ložiskách, nebo odpor vzduchu (valivé tření koleje–kola zanedbejme).



Při pohybu z kopce , koná podle zadání, práci tíhová síla. Projekce na směr pohybu je $mg\sin\alpha$, kde α je úhel jenž svírá dráha s horizontální rovinou. Jelikož se tramvaj pohybuje rychlostí v, je výkon této síly $v\,mg\sin\alpha$. Protože se tramvaj pohybuje rovnoměrně, výkon této síly se musí rovnat výkonu odporových sil, čili $v\,mg\sin\alpha = N'$.

Nechť I_1 je proud procházející motorem při jízdě do kopce. Příkon $N_1 = U_0 I_1$ se jednak ztrácí jako Jouleovo teplo $I_1^2 R$, další část N' se využije na překonání odporových sil, a část $v\,mg\sin\alpha$ se spotřebuje na konání práce proti tíhové síle (tramvaj stoupá). To znamená

$$U_0 I_1 = I_1^2 R + v\,mg\sin\alpha + N' = I_1^2 + 2\eta U_0 I_0\,. \tag{2}$$

To je kvadratická rovnice pro I_1, jejím řešením dostaneme

$$I_1 = \frac{U_0 \pm \sqrt{U_0^2 - 8R\eta U_0 I_0}}{2R}\,. \tag{3.1}$$

Pomocí vztahu (1) dosadíme za R, takže

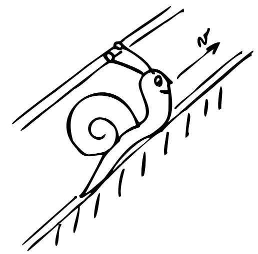
$$I_1 = I_0 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\eta(1-\eta)}}{2(1-\eta)}\,. \tag{3.2}$$

Dosazením zadaných hodnot $I_0 = 100\,\mathrm{A}$ a $\eta = 0,9$ dostaneme dvě fyzikálně přípustná řešení:

$$I_1 \approx 240\,\mathrm{A} \qquad I_1 \approx 770\,\mathrm{A}$$

Která hodnota se realizuje závisí od konstrukce motoru.

Poznámka ke vztahu (1):



Oprávněně můžete namítat, že při výpočtu účinnosti motoru nestačí uvažovat jenom Jouleovo teplo, ale taky teplo které vzniká v důsledku vířivých proudů v jádru elektromotoru (ostatní ztráty snad můžeme zanedbat). Tyto proudy jsou důsledkem zákona elektromagnetické indukce a indukují se ve vodivém materiálu vždy, když v něm dochází k časovým změnám magnetického pole (jako třeba v motoru nebo transformátoru). Elektricky vodivé jádro elektromotoru totiž představuje vodivou smyčku induktivně vázanou s cívkou elektromotoru a v důsledku indukovaných proudů tam vzniká další Jouleovo teplo. O tuto energii se tedy musí snížit energie dodávaná do elektromotoru. Tento jev se dá popsat, jako kdyby měl elektromotor efektivní odpor $R_{\mathrm{ef.}}$, kter7 je větší než jenom odpor cívky a přívodních vodičů. Pokud se motor otáčí pořád stejně rychle, tato hodnota se nemění. To znamená, že můžeme použít výše uvedený postup, kde nás konkrétní hodnota odporu nezajímá, avšak předpokládáme, že je konstantní. Potom i řešení vyjde stejně.

Martin Mucha

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/`

Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina

				Úlohy			Témata				
Pořadí	**Jméno**	**Škola**	$\sum_{-1}$	**t1**	**t2**	**t3**	**r1**	**r2**	**r3**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc. Martin Demín	2. roč.	116	5	5	5	4	4	2	25	25
2.	Doc. Tibor Vansa		163	16	5				2	23	23
3.	Bc. Andrej Pidík		14	5			3	4	2	14	14
4.	Doc. Vašek Cviček	4. A	118		6			4	2	12	12
5.–7.	Bc. Helena Kubátová		11	8					3	11	11
	Bc. Jan Špiřík		11		5			4	2	11	11
	Bc. Zuzana Rozlívková		11	4	4				3	11	11
8.–10.	Vojtěch Skubanič		9		4		5			9	9
	Prof. Jirka Klimeš	4. B	258		6				3	9	9
	Josef Stráský		9				3	4	2	9	9
11.	Mgr. Dana Beránková	2. roč.	46	8						8	8
12.–13.	Dr. Peter Bališ	2. A	50	1			1	4	1	7	7
	Vítězslav Kala		7		4			3		7	7
14.–15.	Jiřina Pešová		5					4	1	5	5
	Dr. Honza Klusoň	septima	90		5					5	5
16.–17.	Michal Rychnovský		4					4		4	4
	Mgr. Lucie Vasická	1. roč.	42	4						4	4
18.–20.	Mgr. Lenka Beranová	oktava C	49						3	3	3
	Mgr. Iva Kouřilová	4. B	28	3						3	3
	Doc. Miroslav Frost	oktava A	137						3	3	3
21.–29.	Mgr. Zdeněk Nováček		33						2	2	2
	Mgr. Zuzana Svobodová	4. roč.	26					2		2	2
	Mgr. Martin Včelák		29						2	2	2
	Lukáš Chvátal		2						2	2	2
	Alena Drábková		2						2	2	2
	Petr Čermák		2						2	2	2
	Jana Šatopletová		2	2						2	2
	Bc. Honza Chmelař	4. roč.	13						2	2	2
	Lukáš Pavlovský		2						2	2	2
30.	Mgr. Gabriela Boháčová	2. roč.	39	1						1	1

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).