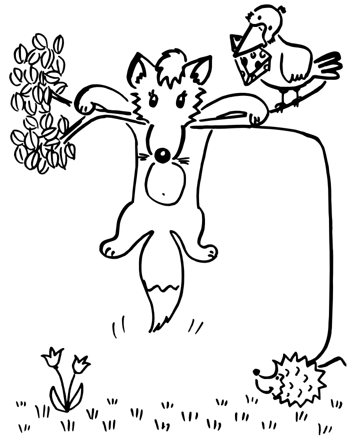
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník 8 číslo 1

Termín odeslání: 15. října 2001

Pokud se chceš zúčastnit úvodního soustředění, pošli nám řešení již do 24. září. Až do řádného termínu 15. října můžeš svá řešení doplňovat a opravovat.



Úvodní soustředění se bude konat od soboty 6. 10. do neděle 14. 10. v Zálesí u Vacova (autobusová zastávka jménem Drážov, Zálesí). Tato obec se nachází na hranicích okresů Strakonice a Prachatice. Na soustředění budeme zřejmě vybírat účastnický poplatek do 250 Kč.

Chceš-li se úvodního soustředění zúčastnit, zašli nám (do 24. září) společně s řešením alespoň jedné úlohy rovněž závaznou přihlášku s kontaktem na tebe (nejlépe telefon nebo email). My ti obratem zašleme omluvenku do školy a podrobnější informace (včetně dopravního spojení). Veškeré informace budou rovněž zveřejněny na naší webové stránce

`http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/`

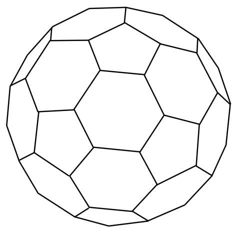
Na této stránce se rovněž můžeš dočíst, jak probíhala soustředění v minulých letech. Veškeré tvé dotazy zodpovíme na

tel.: `0603 91 66 24` (Dáša Eisenmannová),
email: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`

Redakce M&M.

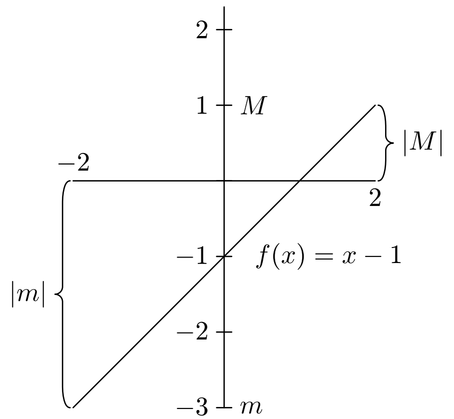
Téma 1 – Pravidelné mnohostěny

Na obrázku je nakreslen „fotbalový míč“.



- Nakresli jeho síť a spočítej jeho objem a povrch. Jak moc se tyto veličiny liší od objemu, resp. povrchu koule vepsané a opsané?
- Zkus obarvit stěny „míče“ co nejmenším počtem barev tak, aby žádné dvě stěny stejné barvy neměly společnou hranu. Kolik barev budeš potřebovat?
- Zkus si vymyslet vlastní „fotbalový míč“ či jiné pravidelné těleso, nakresli jej a prozkoumej jeho vlastnosti. Tělesa by měla mít stěny z pravidelných mnohoúhelníků (rovnostranné trojúhelníky, čtverce, pětiúhelníky atd.). Zajímavé obrázky těles otiskneme!
- Proč se fotbalové míče šijí ve tvaru tělesa, jenž je na předchozí straně?

Téma 2 – Čebyševovy polynomy



Zafixujme si interval číselné osy $\langle -2, 2\rangle$. Nechť

$$f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

je normovaný polynom n-tého stupně (to znamená, že jeho hlavní koeficient, tj. koeficient u nejvyšší mocniny, je 1). Označme obor hodnot tohoto polynomu na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ jako interval $\langle m, M\rangle$, kde m označuje minimum a M označuje maximum polynomu na daném definičním oboru. Nazvěme *vzdáleností polynomu od nuly* větší z čísel $|m|, |M|$. Například pro polynom prvého stupně $f(x) = x - 1$ máme $m = -3$ a $M = 1$, proto vzdálenost tohoto polynomu od nuly je 3.

Čebyševova úloha, které se budeme v tomto tématu věnovat, spočívá v nalezení takového normovaného polynomu daného stupně, aby měl co nejmenší vzdálenost od nuly (takový polynom budeme nazývat Čebyševův polynom n-tého stupně). Najdi Čebyševův polynom 1. a 2. stupně a svoje tvrzení dolož. Jaká je jejich vzdálenost od nuly? S velkou dávkou intuice zkus uhádnout Čebyševův polynom 3. stupně. Je známo, že pro Čebyševovy polynomy platí rekurentní vzorec:

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f_{n-1}(x)$$

S jeho pomocí najdi Čebyševovy polynomy vyšších stupňů, nakresli je do jednoho grafu a všimni si, jaké jsou jejich vzdálenosti od nuly. Podaří se ti najít nějaké jejich zajímavé vlastnosti?

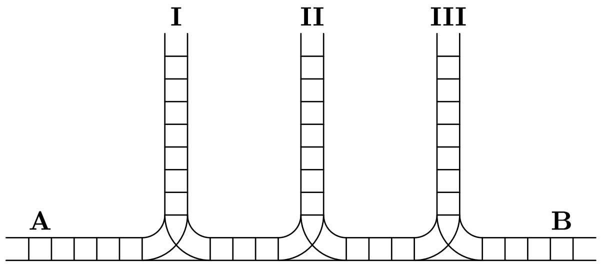
Téma 3 – Tepelný stroj

Z hodin fyziky jistě znáš tepelný stroj, jehož pracovní látka je ideální plyn a ve kterém probíhá kruhový děj – Carnotův cyklus.

Takový pracovní stroj pracuje mezi dvěma tepelnými lázněmi s teplotami T_1, T_2, kde $T_1 < T_2$. Odebírá jisté teplo z ohřívače (o teplotě T_2) a menší teplo předává chladiči (o teplotě T_1), rozdíl tepel odpovídá užitečné práci, kterou z tepelného stroje můžeme získat. Když obrátíme znaménko u práce a změníme směr toku tepla, dostaneme chladicí zařízení. Zajímat nás budou lednice, které mají pracovní látku jinou než plyn.

- V jedné úloze letošního Turnaje mladých fyziků bylo třeba sestrojit tepelný stroj, kterého pracovním prvkem byla gumička s teplotně závislou tuhostí. Lze takový stroj proměnit v chladicí zařízení? Zkoumej proměny energie v procesu deformace gumičky. Jak účinné bude chlazení pomocí gumičky?
- Dalším možným tepelným strojem, který lze využít jako chladič, je tzv. Peltierův článek. Používá se k ochlazování procesorů v počítačích. Jak dlouho bude trvat, než Peltierův článek sníží teplotu v běžné lednici na 0 °C? O kolik by bylo takové chlazení dražší, nebo levnější než chlazení v běžné lednici? (Informace o Peltierově článku lze najít v knihovně i na internetu.)
- Zkus vymyslet ještě další tepelný stroj a popiš, jak jej lze proměnit v lednici.

Úloha 1.1 – Na koleji… (5b)



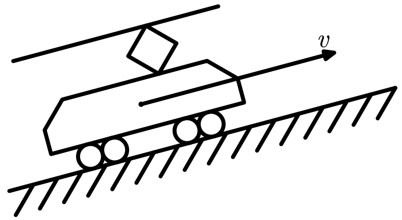
Na koleji A na obrázku nahoře stojí n vagónů, které jsou srovnány v jistém pořadí. Vagóny se postupně přesunují na kolej B, přičemž vagón může zajet na některou ze tří postranních kolejí, nesmí se však vracet (postupovat může jenom směrem ke koleji B). Předpokládáme, že na každou postranní kolej se v případě potřeby vejdou všechny vagóny najednou.

Dokaž, že pro dost velké n existuje pořadí vagónů, které nelze výše uvedeným způsobem docílit. Pro jaké n to ještě jde?

Úloha 1.2 – Záměny čísel (4b)

Je dáno několik nenulových čísel (alespoň dvě). Umaž dvě libovolná čísla a a b a místo nich napiš čísla $a + \frac{b}{2}$ a $b - \frac{a}{2}$. Dokaž, že jakmile jednou začneš, už nikdy nedostaneš původní soubor čísel.

Úloha 1.3 – Tramvaj (5b)



Když se tramvaj pohybuje po horizontální dráze jistou rychlostí, prochází jejím motorem proud $I_0 = 100\,\mathrm{A}$. Účinnost motoru je $\eta = 0,9$. Když řidič tramvaje při jízdě z kopce vypne motor, pohybuje se tramvaj tou samou rychlostí. Jaký proud bude protékat motorem, když se tramvaj bude pohybovat stejně rychle po stejné dráze směrem nahoru?

Adresa redakce:

M&M, OVVP UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: 02/21 91 12 35
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/`

Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.