Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník VII   číslo 7

Termín odeslání: **22. května 2001**

Zadání úloh

Úloha 16 – Červený a černý (4b)

V jámě je jistý počet červených a černých kuliček. K dispozici je dostatečná zásoba černých kuliček. Dokud jsou v jámě alespoň dvě kuličky, opakuj tento postup: Z jámy vytáhni poslepu dvě kuličky. Jsou-li stejné barvy, zahoď je a do jámy vlož černou kuličku ze zásoby. Jsou-li různé barvy, odhoď černou kuličku a červenou vrať do jámy.

Ukaž, že tento postup skončí, a zjisti, jak závisí výsledný stav (tzn. barva poslední kuličky) na počátečních počtech kuliček. Proveď pečlivý důkaz.

Úloha 17 – Bublinka (5b)

Urči, v jaké hloubce pod hladinou je hustota vzduchu v malé bublince o průměru 2 mm rovna 1% hustoty vody. S jakým zrychlením začne bublinka stoupat? Jaké rychlosti nejvýše dosáhne? Proveď podrobný rozbor.

Úloha 18 – Dělení rovným dílem (5b)

Ukaž, že kruh nelze třemi přímkami rozdělit na sedm částí se stejným obsahem.

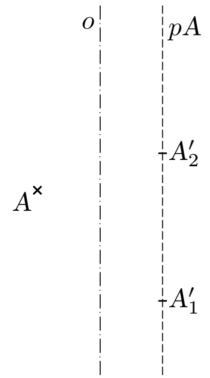
Téma 4 – Lipový list

Podivné zobrazení

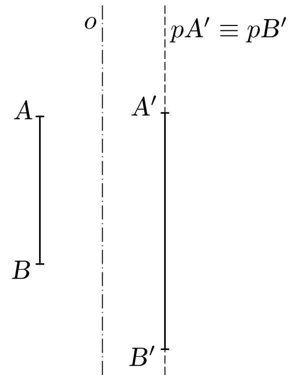
Mgr. Lucie Vasická

Ať jsem se snažila sebevíc, nové zobrazení buď nesplňovalo 2. podmínku, nebo vyšla osová souměrnost. Protože téma je volnější, budu se věnovat zobrazení, které splňuje 1. a 3. podmínku (rovnoběžka s osou má obraz rovnoběžný s osou, střed úsečky spojující bod a jeho obraz leží na ose souměrnosti).

Podívejme se, jak by vypadal v tomto zobrazení bod (resp. kolik by bylo obrazů):



Obr. 1



Obr. 2

1. Podle osové souměrnosti jsme zvyklí, že zobrazíme bod tak, že spustíme na osu souměrnosti kolmici, a ve stejné vzdálenosti za osou (úsečka bodu a obrazu je na osu kolmá) je obraz – tím je 1. podmínka splněna (obr. 1, bod A'_1).
2. Podmínku však nezajímá, zda je mezi bodem a osou při zobrazování pravý úhel, ale zda je střed úsečky bod-obraz na ose. Tedy my si můžeme vzít jakýkoliv bod na ose, který označíme za střed úsečky bod-obraz a pomocí něho najít obraz. Podmínka je splněna (obr. 1, bod A'_2).
3. Z minulého bodu zjistíme, že na ose je nekonečné množství bodů, tedy je nekonečné množství možných obrazů. Tyto obrazy tvoří přímku, která je od osy vzdálená jako libovolný bod a je s osou rovnoběžná (obr. 1, přímka pA').

Jak v tomto zobrazení vypadá úsečka AB rovnoběžná s osou?

Podle stejného postupu zjistíme, že přímky pA' a pB', na kterých mohou ležet body A' a B', jsou shodné.

Z toho plyne, že úsečka AB bude vypadat buď jako bod $A' = B'$, nebo jako různě dlouhá úsečka $A'B'$, která může být i převrácená $(B'A')$[1], viz obr. 2.

Jak vypadá úsečka nerovnoběžná s osou?

Podle stejného postupu zkonstruuji přímky pA' a pB' a obrazem úsečky AB bude buď úsečka spojující jakékoliv dva body (jeden bod leží na pA' a druhý bod na pB'), nebo nějaká křivka[2,3] k (viz obr. 3).

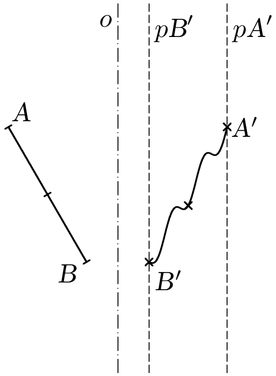
Jak bude vypadat trojúhelník (ze zadání)?

---

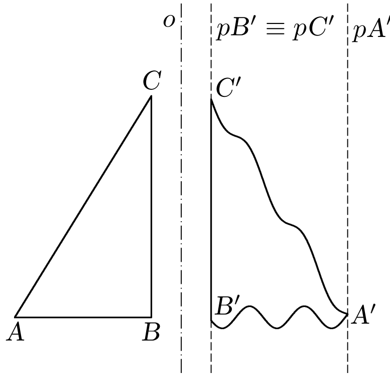
[1] *Pozn. red.: Nevidím dôvod, prečo by obraz úsečky musel vytvoriť úsečku alebo bod, z doterajších úvah to nijako nevyplýva. Prečo by to nemala byť napríklad priamka či dva body?*

[2] *Pozn. red.: To však závisí na tom, ako si definujeme krivku. Intuitívne by sme od krivky očakávali, aby bola súvislá, čo tu nemusí nastať.*

[3] *Pozn. red.: Pri kreslení obrazu úsečky, trojuholníka a lipového listu sme použili tretiu Beránkovu funkciuz minulého čísla:* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x \\ y + k_1 \sin k_2 x \end{pmatrix}$, *kde* k_1, k_2 *sú konštanty.*



Obr. 3

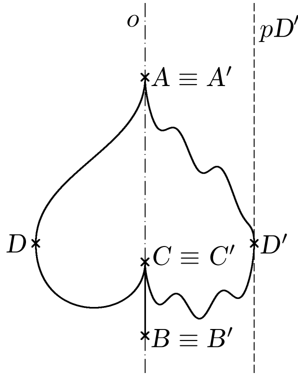


Obr. 4

Obrazem může být jakýkoliv trojúhelník, jehož dva vrcholy B' a C' leží na pB' a jeden vrchol leží na pA'. Strany takového „trojúhelníka“ mohou být rovné, ale i křivé, nemusí se tedy vůbec jednat o trojúhelník[4]. Strana $B'C'$ je rovná a je částí pB' (viz obr. 4).

Jak vypadá lipový list?

a) Najdu si obrazovou přímku bodu D (nejvzdálenější bod od osy).
b) Najdu si obrazovou přímku nejbližšího bodu k ose – zde je to bod A a úsečka BC, které přímo leží na ose. Předpokládám, že když je bod na ose, že se nemůže zobrazit na kterýkoliv její jiný bod, neboť potom by toto zobrazení bylo naprosto zmatené (přesto, že už takto je)[5]. Tedy $A = A'$ a úsečka $BC = B'C'$.
c) Zbylé body poloviny lipového listu ani nemá cenu hledat, protože je jich jednak nekonečné mnoho, jednak „obrazové přímky“ těchto bodů vyplní místo mezi pD' a (v tomto případě) osou (obr. 5).



Obr. 5

Tedy obrazem může být cokoliv – samozřejmé je, že každá obrazová přímka bude mít v obraze tolik bodů, kolik bodům předmětu odpovídá[6].

[4] *Pozn. red.: Dá sa ukázať, že obraz trojuholníka by mohol byť dokonca neohraničený a totálne nesúvislý, dokonca by to mohla byť ľubovoľná podmnožina oblasti medzi priamkami pA' a pB'.*

[5] *Pozn. red.: Autorka si zrejme neuvedomila, že to, že sa body na ose zobrazia na seba, je práve axióm 2 zo zadania, ktorý v článku neuvažovala.*

[6] *Pozn. red.: T.j. na priamke pD' bude jeden bod, na ose ich bude najviac nekonečne mnoho a na ostatných „obrazových priamkach“ budú najviac dva body.*

Obsah zobrazovaných útvarů může zůstat stejný, nebo se může zmenšit či zvětšit.

Došla jsem k závěru, že toto zobrazení by bylo více než divné, protože obrazem může být naprosto cokoliv, co splňuje, že obraz každého bodu leží vždy na „obrazové přímce“ daného bodu[7].

Poznámky redakcie

Na článku Mgr. Lucie Vasickej oceňujem, že neskĺzla do „intuitívneho“ riešenia problému, ale vychádzala skutočne len z axiómov.

Požiadavka, že sa bod zobrazí na priamku, ktorá je rovnako vzdialená od osi ako bod, ktorý zobrazujeme, nám zaručuje splnenie axiómu 3 zo zadania („stred úsečky bod-obraz je na ose“). Ak prijmeme požiadavku, aby sa body na ose zobrazili sami na seba, zaručíme tým splnenie axiómu 2 („priamka sa pretína zo svojím obrazom na ose“) za predpokladu, že slovu „pretínať sa“ nepripisujeme nijaký hlbší význam. Pozrime sa na axióm 1, ktorý hovorí: rovnobežka s osou má obraz, ktorý je rovnobežný s osou. Ak slovo „rovnobežný“ chápeme tak, že body obrazu možno spojiť priamkou, ktorá je rovnobežná s osou, potom je axióm 1 splnený vždy, keď je splnený axióm 3. V tom prípade by sme teda mali obecné riešenie. Ak však axióm 1 znamená, že obraz úsečky alebo priamky je úsečka alebo priamka (teda súvislá množina), tak musíme pridať na naše zobrazenie ďalšie obmedzujúce podmienky.

Nájdite čo najslabšie doplňujúce predpoklady na naše zobrazenie, aby bolo zaručené, že obraz priamky alebo úsečky rovnobežnej s osou je priamka alebo úsečka rovnobežná s osou!

Peťo

Téma 5 – Mlýnské kolo

Experimenty se spodním náhonem

Doc. Jirka Klimeš

Letošní jarní prázdniny jsem chtěl strávit u prarodičů ve Lhotě, je tam klídek, a co je důležité, i potok. Už pár let mám také dřevěnokovový mlýnek, a tak jsem chtěl provést nějaká měření. Předpovědi počasí slibovaly asi 15 °C, tedy krásnou jarní teplotu, tající sníh, dostatek vody v potoce, navíc skoro celý týden času, dostatek materiálu místního pro uchycení mlýnku, i dovezeného ($V \sim 1/4$ batohu) pro sichr. V mém původním plánu jsem chtěl změřit výkonovou charakteristiku v závislosti na zátěži a ponoru mlýnku, z kelímku

[7] *Pozn. red.: Pri zobrazovaní lipového listu autorka naviac využila, že sa body na osi zobrazia samy na seba.*

od Ramy a jogurtu vyrobit turbínku a porovnat s mlýnkem, změřit výkon místního mlýnku u hranic… Bylo toho docela dost, ale předpokládal jsem, že aspoň větší část stihnu. No, nestihl jsem. Skutečnost byla docela jiná.

Už při příchodu od vlaku jsem se divil (či spíše byl nepříjemně překvapen), kolik sněhu ještě neroztálo (ale co – jiný kraj, jiný mráz – u nás už dávno nebyl). Možná asi víte, jak je to příjemné čvachtat se pár hodin v podhorském potoce (a to i v létě), navíc když kolem leží vrstva sněhu a potok je místy ještě zamrzlý. Cestou jsem se ale nezapomněl dívat po okolí – po vsi jsou alespoň tři mlýny (spíše jejich zbytky). Dolní – dvě kola $r \doteq 2{,}5\,\mathrm{m}$, šíře lopatek $\doteq 0{,}4\,\mathrm{m}$. Prostřední – moc toho nejde zjistit. Horní – zbytky stavby (1 kolo, $Q \sim 10\,\mathrm{l.s^{-1}}$). Asi u všech kolo na horní vodu, u všech náhony zanesené, zasypané. Z toho je patrné, že nefunguje žádný.

Po nálezu vhodného místa a provedení základních měření (Q) jsem zjistil, že mlýnek na daném místě neutáhne ani šutříček, tudíž jsem se přestěhoval jinam. Dále proti proudu vody jsem zakotvil natrvalo, pohrál si s proudem, změřil jeho rychlost a šel jíst (těchto pár řádků mi zabralo dopoledne).

Mlýnek vypadal asi takto: kolo se otáčelo a navíjelo provázek přehozený přes větev, na provázku byl úchyt se šutrem jako závažím. Po ruce byla mlýnková brzda (klacek) držící mlýnek mezi měřeními. Mlýnek byl přichycen na dvou kolících s dráty, občas spadla osa z kolíku. Provázek se namotával na špalíček a často z něho sjel na osu kola. Provázek přecházel přes větev a často se zarazil v rozsoše (místo kde se setkávají dvě větve). Korigovat všechny tyto překážky byl docela problém. Málem bych zapomněl, že občas kámen vypadl do vody, kde jsem ho už třeba nenašel (2×).

Vzhledem k tomu, že kolíky byly docela krátké, byl mlýnek ponořen asi tak 2× hlouběji než by měl být. Uvnitř dole mezi lopatkami se voda „vařila“ – a pak to má k něčemu vypadat.

Vzhledem k průchodu provázku přes větev jsem toto spojení ocenil třecí silou s koeficientem 0,35 [8] (tak vysoký i jako satisfakce pro ostatní záporné jevy).

šíře lopatek – celková	11 cm	účinná plocha	31,5 cm
– účinná	3,5 cm	rychlost proudu	$1\,\mathrm{m.s^{-1}}$
poloměr kola	7,5 cm	E_k vody procházející	
hloubka ponoru	3,5 cm	pod mlýnkem	$1{,}58\,\mathrm{J.s^{-1}}$
počet lopatek	12	hmotnost provázku	3,5 g
poloměr navijáku	1,4 cm	délka provázku (svislá)	0,75 m

Tab. 1. Popis mlýnku

[8] *Pozn. red.: Nie je nám jasné, aký vzorec autor použil pre výpočet trecej sily, ani aký význam má v jeho výpočtoch uvedený koeficient.*

$m\,[\mathrm{g}]$	$t\,[\mathrm{s}]$	$v_\uparrow\,\left[\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\right]$	$v_\mathrm{obv}\,\left[\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\right]$	$v_\mathrm{sti}\,\left[\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\right]$	$F_m \cdot v$	F_t	$F_{m+t} \cdot v$	η
3,5	5,30	14,1	75,5	58,0	$0{,}5 \cdot 10^{-2}$	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$0{,}9 \cdot 10^{-2}$	0,6%
21,5	5,27	14,2	76,1	58,3	$3{,}1 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-2}$	$5{,}2 \cdot 10^{-2}$	3,3%
58,5	7,14	10,5	56,3	43,1	$6{,}1 \cdot 10^{-2}$	$41 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$	6,3%
102	9,5	7,9	42,3	32,4	$8{,}0 \cdot 10^{-2}$	$71 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-2}$	8,9%
120	14,0	5,4	29,0	22,2	$6{,}5 \cdot 10^{-2}$	$84 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-2}$	7,0%
270	hodně moc	hodně málo						

Tab. 2. Měření

Obří šutr vážící asi 270 g mlýnek vytáhl, ale silně cukal (tedy táhne, stojí, táhne, stojí, …)

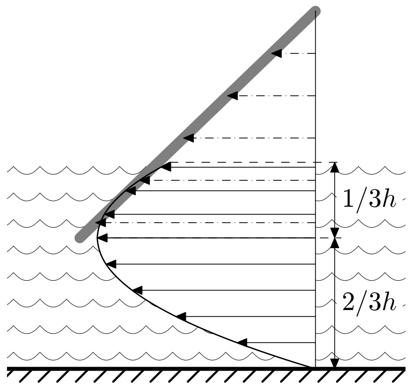
Více měření jsem neprovedl, protože bych asi umrzl (i nohy schované ve dvojnásobném objetí ponožek a teplých gumovek dostaly odstín fialové).

Výsledná chyba může činit asi 30% (možná i více), protože při tomto měření by se dala točit i groteska (kvůli nadávkám nejlépe němá) lépe než provádělo přesné měření (povedl se mi změřit každý 3–5 pokus). Věřil bych ale hodnotě účinnosti – do desíti procent (přibližně ± chyba).

K teorii spodního náhonu

Je možné, že kolo na spodní vodu se bude točit přibližně stejnou rychlostí jako má proud. Když se kolo brzdí (působí na něj tlaková síla proudu), tlačí ho proud dopředu a předává mu část své kinetické energie.

V učebnici matematiky píšou o rychlosti proudu v – je největší v $1/3$ výšky vody, jejíž rychlostní profil má tvar paraboly (viz obr. 1). Kdybychom chtěli postavit kolo na spodní vodu, mohli bychom postupovat takto: zjistíme v_max z rychlosti v vody na hladině. Kolo bude ponořeno maximálně do $1/3$ hloubky – dále klesá rychlost a lopatka by se dole brzdila. Zjistíme parabolu rychlosti proudu a k ní korelujeme přímku, kde přímka protne přímku nulové rychlosti (viz obr. 1), tam bude osa kola. Chápu toho, kdo to nechápe[9]. Ale hlavní myšlenka je, aby lopatka měla co nejmenší odchylky od rychlosti proudu, a aby při odebírání energie působila voda všude přibližně stejně (stejná námaha kola, tedy stejná námaha lopatky).



Obr. 1

[9] *Pozn. red.: Tož vskutku obdivuhodná věta. Chápeme autorovo pochopení pro naši nechápavost.*

Korelací provedeme parabolické rozložení rychlosti proudu na přímkové rozdělení rychlosti lopatky ($v = \omega r$). Kdyby byla osa více vzdálená nahoru, a zatímco by byla lopatka dole brána vodou, nahoře by se lopatka o vodu brzdila. Kdyby byla osa více u hladiny, brzdila by lopatka ponořená hlouběji.

Potom jsem ještě našel, že takový normální mlecí kámen ($r \approx 35\,\mathrm{cm}$, $v_0 = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) potřebuje asi $1\,\mathrm{kW}$ výkonu kola. Našel jsem nejen to, ale teď to opět nemohu najít.

Pozn. red.: Redakcia vysoko oceňuje (aj bodovo) článok Doc. Jirku Klimeša, najmä experimentálnu časť. Zároveň chce ale upozorniť na isté nedostatky v jeho článku. Asi najzávažnejší je ten, že autor nepopísal používané značenie. Taktiež by bolo vhodné spomenúť, akým spôsobom bola počítaná účinnosť. Prosíme preto autora, aby doplnil svoje riešenie a zaslal nám ho tak, aby v ďalšom čísle mohol byť publikovaný dodatok k jeho článku.

Redakcia rovnako vyjadruje pochybnosti, či rýchlostný profil vody je skutočne parabola a či maximum rýchlosti je v 2/3 výšky vody. Ste schopní potvrdiť, resp. vyvrátiť tento názor?

Taktiež veríme, že sa dakomu podarí zmerať výkonovú charakteristiku kolesa (závislosť účinnosti na záťaži) a výsledok graficky spracovať.

Bzučo

Úloha 10 – Polymorf (5b)

Zadání: *Najdi těleso, jehož průměty do tří navzájem kolmých rovin jsou po řadě: čtverec, rovnostranný trojúhelník a kruh. Kolik takových různých těles existuje?*

Řešení:

Nejdřív si ujasníme slovo průmět. Kdybychom slovo průmět do roviny chápali tak, že se do něj zobrazí i všechny hrany, nejen obrysy, neměla by úloha řešení. Takže pod pojmem průmět chápeme zobrazení obrysu předmětu kolmo na plochu. Je potřeba poznamenat, že když nějaké těleso splňující podmínky zadání najdeme, můžeme jich už vyrobit nekonečně mnoho tím, že vnitřek některé stěny „vydlabeme lžičkou“. Poslední poznámka se týká obrázku ze zadání úlohy. Ten totiž mate. Za prvé je tam rovnoramenný trojúhelník a za druhé ukazuje takové natočení vůči osám, že k němu řešení neexistuje.

BÚNO (bez újmy na obecnosti) si položíme souřadnou soustavu tak, že osa x půjde doprava, osa y před nás a osa z nahoru. Nechť kružnice je průmětem hledaného tělesa třeba do roviny určené osami z a y. Celé těleso tedy musí ležet ve válci kolmém na rovinu zy a navíc se tohoto válce musí na mnoha místech dotýkat (tak, aby místa dotyku po promítnutí na rovinu zy vytvořila celou

kružnici)[10]. Válec má mnoho symetrií, tedy nechť BÚNO je čtverec průmětem našeho tělesa do roviny xy a trojúhelník potom bude průmětem do xz. Poloměr kružnice (průmětu do zy) si označíme r. Když si tento průmět promítnu znova, tentokrát na osu y a z (teď už to bude průmět 2-dimenzionálního objektu do 1-rozměrného prostoru), dostanu úsečky délky $2r$. To znamená že y-ové i z-ové souřadnice bodů našeho tělesa zaplňují tyto úseky. Tedy i čtverec má průmět do osy y délky $2r$. Ať už je natočený libovolně jeho průmět do osy x bude ten samý, tedy $2r$. Z toho vyplývá, že průmět trojúhelníku do osy x i do osy z bude $2r$. Teď už jsme možnosti pro trojúhelník docela omezili, víme totiž, že musí být vepsaný do čtverce o délce strany $2r$ (pozn.: jedná se o jiný čtverec, než je průmět našeho tělesa do roviny xy). Tento trojúhelník se musí dotýkat všech čtyř stran čtverce (aby měl správně oba průměty). Má pouze 3 vrcholy, tedy jeden z nich musí ležet na dvou stranách čtverce. Obě strany vycházející z tohoto rohu musí být stejně dlouhé, tedy symetrické kolem úhlopříčky. Teď už jednoduše zjistíme, kde se nacházejí další dva vrcholy našeho trojúhelníka – bude zvednutý o 15° oproti straně čtverce, do kterého je vepsaný. To, do kterého rohu čtverce dáme jeho vrchol, nehraje díky symetrii válce roli. Teď už můžeme odvodit další vlastnost, a to natočení čtverce (průmětu do roviny xy). Vezmeme si ten vrchol trojúhelníku, který leží ve vrcholu čtverce[11]. Nechť je pro názornost např. vlevo dole (ostatní případy dostaneme jednoduše ze symetrie). Tento bod musí mít alespoň jeden vzor v našem tělese (musí tam existovat bod, který se promítne do tohoto vrcholu trojúhelníku). Protože tento bod je bodem s nejmenšími souřadnicemi z i x, bude jeho průmět do roviny zy také na spodním okraji kruhu, tedy jeho y-ová souřadnice leží přesně uprostřed průmětu na y-ovou osu. To je možné pouze pokud má čtverec v rovině xy strany rovnoběžné s osami x a y nebo pokud má úhlopříčky rovnoběžné s osami x a y. Tyto dva případy teď rozebereme:

a) **Čtverec má strany rovnoběžné s osami x a y.** Aby se neporušil průmět tělesa do roviny zy (kruh), musí být z pohledu z roviny xz z každé souřadnice z zachován alespoň 1 bod i po oříznutí trojbokým hranolem vycházejícím z roviny xz. To splněno je. Ale kvůli tomu, aby se neporušil průmět do roviny xy, musí se zachovat body s minimální a maximální y-ovou souřadnici (které se zobrazují na „přední“ a „zadní“ stranu čtverce). Ale náš trojúhelník bude vždy natočen tak, že některé tyto body „odkrojí“, takže by se porušil průmět do roviny xy (už by to nebyl čtverec). Tento případ nám tedy řešení neposkytne.

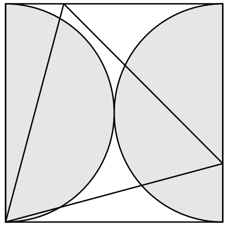
b) **Čtverec má úhlopříčky rovnoběžné s osami x a y.** Nakreslíme si průnik válce vycházejícího z kruhu v rovině zy a čtyřbokého hranolu vycházejícího z čtverce v rovině xy. Naše hledané těleso musí být podmnožinou tohoto útvaru (navíc ještě oříznutého trojbokým hranolem vy-

[10] Podobně musí celé těleso ležet v čtyřbokém hranolu vycházejícím ze čtverce v rovině xy a v trojbokém hranolu vycházejícím z trojúhelníku v rovině xz.

[11] Čtverce, ve kterém musí ležet průmět do roviny xz.

cházejícím z roviny xz).

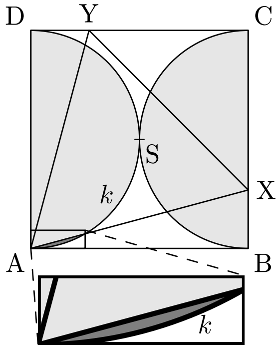
Když se na tento útvar podíváme z roviny xz, uvidíme útvar jako na obr. 1. Budeme teď bádat převážně už v jedné rovině (v průmětu do xz). Směr nahoru budeme chápat jako směr vzrůstající z-ové souřadnice, podobně doprava je směr rostoucí x-ové souřadnice. Budeme studovat pouze přední části útvaru, zadní bude ze symetrie stejná.



Obr. 1

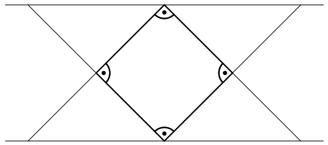
Teď zkusíme zjistit, zda se po oříznutí trojbokým hranolem, vycházejícím z roviny xz, neporuší průměty do rovin yz (kružnice) a xy (čtverec).

To, že se průmět do xy neporuší, je vidět hned. Stačí, aby se ze šrafované oblasti z každé vertikální souřadnice zachoval alespoň 1 bod (je vidět, že trojúhelník obsahuje v každém vertikálním úseku kousek šrafované oblasti). Aby se neporušil průmět našeho tělesa do roviny yz, musí v každém horizontálním úseku zůstat alespoň 1 bod v nešrafované oblasti (v té „kulaté, zaoblené oblasti“, která zůstala z plochy válce). To už je složitější problém, a tak se na něj podíváme podrobněji. Když se na průnik válce se čtyřbokým hranolem podíváme seshora, vidíme, že řez válce stranou čtyřbokého hranolu (obr. 2) je ve skutečném tělese elipsa o jedné poloose r a druhé $r\sqrt{2}$, která je oproti rovině xz otočená o 45°. Tedy po promítnutí do osy xz to bude kružnice.



Obr. 2

Tedy (ze symetrie): šrafované oblasti DSA a BSC jsou polokruhy. Teď už ale lze dokázat, že dané těleso neexistuje. Náš trojúhelník AXY totiž nebude obsahovat žádné nešrafované body. Z dolní části polokruhu DSA je v bodě A totiž horizontální a AX je vůči ní o 15° pootočena. Tedy část kružnice k bude ležet pod úsečkou AX a žádné nešrafované body pod průnikem k a AX nebudou obsaženy v trojúhelníku AXY, tedy budou uřezány. Tím se poruší průmět obrazce do roviny yz.

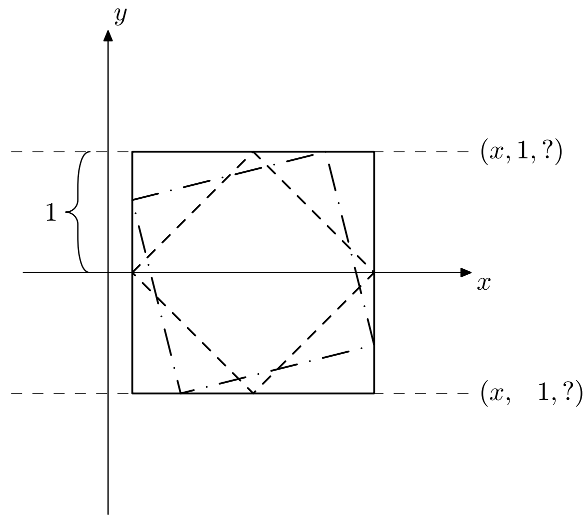


Obr. 3

V praxi bude odříznutá část tak malá, že by to možná na první pohled nebylo vidět a těleso, které by vypadalo „skoro“ tak jak hledané těleso sestrojit lze.

Pro ty z vás, kteří věří spíš řeči rovnic, než vlastní představivosti, je určen následující ekvivalentní důkaz (který je z velké části inspirován předchozím):

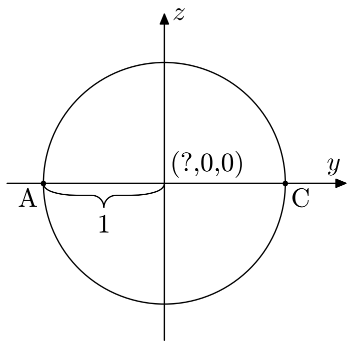
Zavedeme si souřadnou soustavu: BÚNO zvolme, že průmět tělesa do rovin xy, yz a xz bude po řadě čtverec, kruh a rovnostranný trojúhelník. BÚNO umístíme střed kruhu do bodu $z = 0$, $y = 0$. Takový bod označme $(?, 0, 0)$.



Obr. 4

Otazník vyjadřuje, že x-ová souřadnice nás nezajímá, jelikož se jedná o bod průmětu do roviny, která je na osu x kolmá. Uvědomme si, že všechny body tělesa tvaru $(x, 0, 0)$, $x \in R$ se promítnou na střed kruhu. Dále zvolme jednotku délky tak, aby poloměr kruhu byl 1. Teď můžeme zformulovat podmínku, kterou musí splňovat všechny body tělesa:

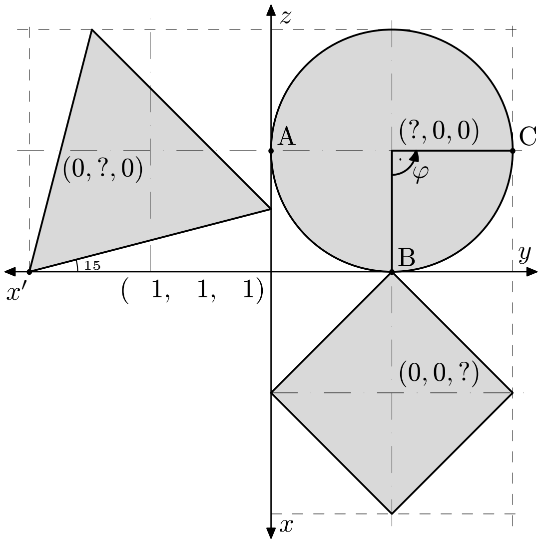
$$y^2 + z^2 \leq 1\,. \tag{1}$$



Obr. 5

Kdyby pro nějaký bod (x, y, z) neplatila, tento bod by se promítl mimo kruh, a to nepřipouštíme. Zároveň musí platit, že pro každý bod průmětu (např. kruh) musí existovat vzor, tj. bod, který se na něj promítne. Tak například body $A = (?, -1, 0)$ $C = (?, 1, 0)$ leží na kruhu a tudíž musí existovat příslušné body tělesa: $(x_1, -1, 0)$ a $(x_2, 1, 0)$, kde x_1, x_2 mohou být různé. Tyto body promítněme do roviny xy (čili do roviny kde má být průmětem čtverec) a dostaneme body $(x_1, -1, ?)$ a $(x_2, 1, ?)$, a protože x_1, x_2 jsou libovolné, jedná se vlastně o dvě přímky. Tyto přímky určují pás, ve kterém musí ležet náš čtverec, a musí mít s každou přímkou společný alespoň jeden bod. Různé situace, které mohou nastat jsou na obr. 4:

- α – úhlopříčky jsou rovnoběžné s osami
- β – strany jsou rovnoběžné s osami
- γ – obecně natočený čtverec



Obr. 6

Ať je čtverec natočený jakkoliv, jeho šířka v x-ovém směru je stejná jako v y-ovém. BÚNO posuňme x-ovou osu tak, aby pro možné x-ové souřadnice platilo:

$$-1 \leq x \leq 1\,. \tag{2}$$

Teď zkoumejme trojúhelník. Z rovnice (1) plyne $-1 \leq z \leq 1$ a to spolu se vztahem (2) určuje, že trojúhelník musí být vepsaný do čtverce s délkou strany 2, který má střed v počátku. Navíc se trojúhelník musí dotýkat každé stěny, a jelikož má jenom tři vrcholy, jeden musí ležet v rohu čtverce. Nechť je to bod $(1, ?, -1)$. Potom ale čtverec musí být otočený pod úhlem α a naše situace vypadá jako na obr. 6. (Pozor: osy se neprotínají v počátku ale v bodě $(-1, -1, -1)$ a osy x a x' to je tatáž osa, prostorový obrázek vznikne jejich slepením.) Proč nemůže být úhel natočení třeba β? Pokud ano, pak musí existovat bod, který se zobrazí na $(-1, -1, ?)$, takový bod ovšem musí mít z-ovou souřadnici 0, aby byla splněna nerovnost (1). Jedná se tedy o bod $(-1, -1, 0)$. Avšak obraz tohoto bodu v rovině xz neleží v trojúhelníku, což je spor. Případ, proč nepřichází v úvahu natočení γ ponecháváme laskavému čtenáři jako domácí cvičení.

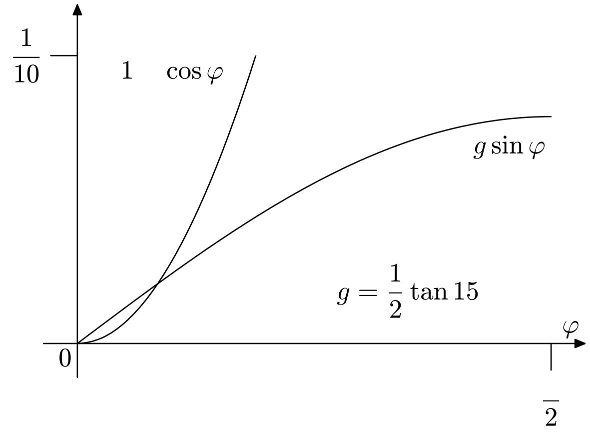
Čtvrtkružnici od B do C (obr. 6) parametrizujme pomocí úhlu φ takto:

$$y = \sin\varphi\,, \tag{3.1}$$

$$z = -\cos\varphi\,. \tag{3.2}$$

Tím máme na mysli, že když úhel φ probíhá od 0 do $\pi/2$ bod $(?, y, z)$ probíhá po obvodu kruhu od B do C. Přípustné body se musí promítnout do čtverce, tudíž určitě musí platit (kromě jiného):

$$y \leq 1 - x \tag{4}$$



Obr. 7

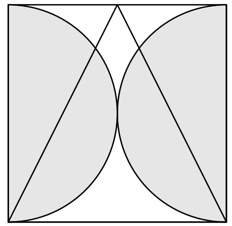
a musí také ležet v trojúhelníku, čili (kromě jiného):

$$z \geq -1 + g - gx\,, \tag{5}$$

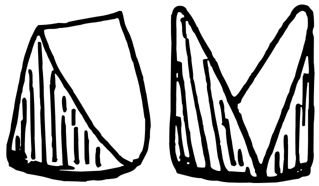
kde $g = \frac{1}{2}\tan 15°$. (Trojúhelník svírá s osou x úhel velikosti 15°.) Dosazením rovnic (3.1) a (3.2) do vztahů (4) a (5) porovnáním a úpravou dostaneme nerovnici:

$$1 - \cos\varphi \geq g\sin\varphi\,. \tag{6}$$

Z grafu (obr. 7) je vidět, že lze najít takové $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, že nerovnice (6) není splněna. Tedy lze najít takové $(?, y, z)$ dané zobrazením (3), že libovolný bod (x, y, z), který by se zobrazil na čtverec, by se nezobrazil na trojúhelník.



Obr. 8



Závěr: neexistuje těleso jenž by mělo za své tři kolmé průměty kruh, čtverec a rovnostranný trojúhelník. Pokud bychom z podmínek slevili a stačil by nám rovnoramenný trojúhelník, těleso bude existovat – bude vypadat jako tuba od zubní pasty (ale trochu kratší). Náčrt jeho řezu nám zaslala *Mgr. Dana Beránková*. Jeho průmět do roviny xz je na obr. 8.

Drak, Maťa & Martin M.

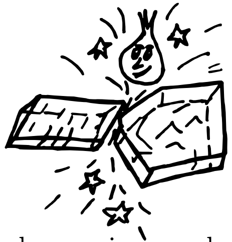
Úloha 11 – Světlonoš (4b)

Zadání: *Možná jsi slyšel o tom, že když někdo drtí cukr, vidí při tom podivné světélkování – tzv. triboluminiscenci. Světélkování je poměrně slabé, proto je třeba tento jev pozorovat v temné místnosti.*

Proveď experiment (tj. vezmi cukr, zavři se do temné místnosti a drť jej co nejmasivnějším předmětem, např. paličkou na maso).

V případě, že jsi viděl podivná světélka, jakou měla barvu? Jakým způsobem jsi tuto barvu zjistil? Který druh cukru je pro pokus nejvhodnější (jev je nejlépe pozorovatelný)? Podrobně popiš celý experiment. Rovněž se zamysli nad tím, jak by taková triboluminiscence mohla vznikat.

Řešení:
Otázka, prečo cukor svetielkuje, fascinovala aj takého veľkého fyzika ako *Richard P. Feynmann*[12]. Sám ale priznal, že svetielkovanie nevie spoľahlivo vysvetliť. Týmto dôvodom sme boli vedení, keď sme vymýšľali túto úlohu. Chceli sme vás nechať oddýchnuť si od počítania a ukázať, že fyzika sa dá robiť aj inak ako s papierom a kalkulačkou. Presvedčiť vás, že to nie sú iba vzorčeky, ale aj pokusy a experimenty.



Väčšina z vás zistila, že cukor naozaj svetielkuje. Je ale treba istý čas zostať v úplnej tme, kým si oči dostatočne privyknú na tmu. Keď vyjdete zo svetla v noci von, tiež neuvidíte ihneď všetky hviezdy. Musíte chvíľu počkať aby si vaše oči zvykli na tmu, aby dostatočne zcitliveli. Ďalším predpokladom úspechu je vidieť miesto, kde cukor svetielkuje. Darmo budete veľkým kladivom búchať po cukre. On bude síce svetielkovať, ale cez železo akosi svetlo neprejde. Je vhodné použiť okuliare (kvôli tomu, že cukor sa vie rozprsknúť) a pozerať sa na miesto úderu zboku. Lepší nápad je drtiť kockový cukor v kliešťoch. Ak máte cukor kryštálový, dá sa drtiť pravítkom alebo skleneným pohárom. Je vhodný akýkoľvek priehľadný predmet. Obrázok v tomto odstavci nám zaslala *Mgr. Dana Beránková*.

Popis úspešného experimentu môže vyzerať napr. takto:
(Pre tých, ktorým sa experiment nepodaril)

Zavrime sa na niekoľko minút do tmavej miestnosti (žeby špajza?). Na tácku si rozsypme kryštálový cukor. Je dobré svietiť si pri experimente červenou LED diódou. (Oko obsahuje dva rôzne receptory svetla: tyčinky a čapíky. Cez deň normálne vidíme čapíkmi, ktoré rozoznávajú farbu, v noci tyčinkami, ktoré síce farbu nerozoznávajú, ale sú oveľa citlivejšie. Tyčinky nie sú citlivé na červené svetlo, čapíky ano. Takže keď použijeme LED diódu, nestratíme adaptáciu na tmu a predsa dačo uvidíme.) Zoberme do rúk celuloidové pravítko a jednou hranou ho položme na tácku. Malo by s ňou zvierať pomerne ostrý uhol (cca. 10°–20°). Potom začneme tlačiť pravítko o tácku a akoby sa snažíme cukor „rozotrieť“ na tácke. U kryštálového cukru je iskrenie modrej farby vidieť lepšie ako u práškového cukru (Niektorí z vás tvrdili, že videli svetielkovať aj práškový cukor, nám sa to nepodarilo.).

Iný spôsob je zohnať si kockový cukor a búchať po ňom nejakým skleneným predmetom (napr. pohár od zaváraniny). V tomto prípade treba dávať pozor, aby sme to s búchaním neprehnali a pohár nerozbili.

[12] V r. 1965 dostal Nobelovu cenu za fyziku za kvantovú chromodynamiku.

Niekoľko poznámok k experimentom:

1) Určiť presne farbu svetielkovania je ťažké, pretože intenzita svetla dopadajúceho na sietnicu je malá. Niektorým z vás sa farba zdala skôr žltozelenou ako bledomodrou. Je to zrejme spôsobené rôznou citlivosťou očných čapíkov na rôzne farby u rôznych ľudí.
2) Je dobré použiť čo najväčšie kúsky cukru. Ideálny je cukor kryštál, nevhodný je práškový múčka. Ak drtíme cukor kliešťami, je vhodné drtiť kockový cukor.
3) Zistiť farbu (či skôr spektrum) môžme pomocou spektrometra, alebo jednoduchšie odhadnúť pomocou rôznofarebných pravítok. Celuloidové pravítka nepohlcujú veľa svetla, stačí teda drtiť cukor pod zeleným, žltým, červeným a bielym pravítkom a približne zistíme farbu svetielkovania. Biele pravítko slúži ako slabý pokus o kalibráciu. Nemáme zaručené, že pravítka prepúšťajú svetlo rôznej vlnovej dĺžky v rovnakej miere. Napr. *Bc. Milan Ružička* pri pokuse použil okuliare rôznych farieb.
4) Urobili sme pokus s kuchynskou soľou a pozorovali sme taktiež svetielka, avšak oveľa slabšie ako u cukru.

Teória

Luminiscencia je všeobecne svetielkovanie látok, ktoré nie je vyvolané vysokou teplotou. Napr. svätojánske mušky svietia taktiež vďaka (chemo-)luminiscencii. Nedrtia ale v zadočku cukor ani nič podobné, svetlo vzniká chemickou reakciou.

Triboluminiscencia je svetielkovanie látok vyvolané mechanickými silami. V našom prípade vzniká pri uvoľňovaní energie ukrytej v kryštalickej mriežke cukru. Molekuly cukru sú v kryštalickej mriežke deformované. Po zlomení kryštálu cukru sa mriežka poruší a kryštálom začnú blúdiť „zvukové“ vlny, ktoré vzniknú čiastočne pri „narovnávaní“ molekúl a čiastočne pri lámaní mriežky (pred zlomením kryštálu na viacero častí sme ho tlakom zdeformovali). Akonáhle takáto vlna narazí na rozhranie, napr. na okraj kryštálu, môže sa stať, že svoju energiu vyžiari (odborne sa tomu hovorí rozptyl fonónov na mriežke).

Doc. Jirka Klimeš správne poznamenal, že triboluminiscencia vzniká napr. aj pri odlepovaní izolepy. Veríte tomu? Skúste si to.

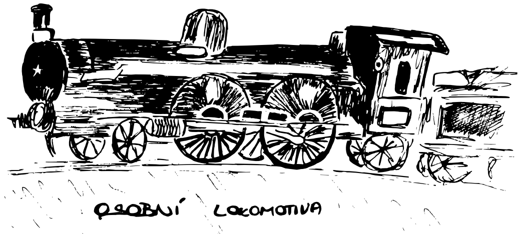
Bzučo

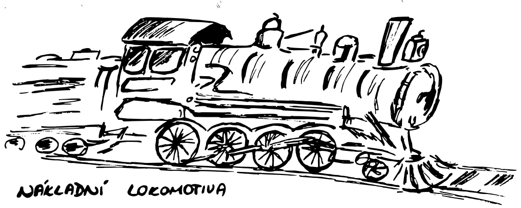
Úloha 12 – Mašinky (3b)

Zadání: *Parní lokomotivy určené pro nákladní vlaky byly jiné než ty, které tahaly vlaky s cestujícími. Nákladní lokomotivy byly přizpůsobeny pro pomalejší jízdu a větší náklady, u osobních lokomotiv tomu bylo naopak.*

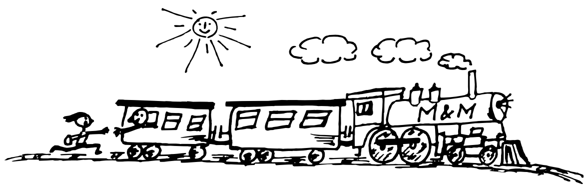
Řešení:

Z obrázku je patrné, že obě lokomotivy se liší velikostí a počtem kol a délkou lokomotivy (a tudíž vahou).





Předpokládejme, že v obou případech mají lokomotivy stejný parní stroj se stejným pístem a stejným výkonem. Že rychlost a tažná síla jsou pak v nepřímé úměře, je vidět ze vztahu pro výkon $P = F \cdot v$. Tažná síla má opačnou orientaci, ale je stejně veliká jako třecí síly. Ty je třeba překonat, aby výslednice sil byla nulová, a tedy aby se vlak pohyboval rovnoměrně s rychlostí v. Třecí síly rostou s hmotností vlaku, proto pro těžší nákladní vlak bude dosažená rychlost menší, než pro osobní vlaku(Rychlost nákladních bývá navíc omezována, aby se tolik neopotřebovával železniční svršek – opotřebení závisí na rychlosti, rozmyslete si proč.) . Různou rychlost docílíme různě velkými koly, pro větší kolo totiž jeden pohyb pístu odpovídá větší ujeté vzdálenosti. Lokomotivy nahoře nám zaslala *Mgr. Iva Kouřilová.*



Další rozdíl se uplatní při rozjezdu, kde je třeba překonat statické tření, které rovněž závisí na celkové hmotnosti vlaku. Nákladní lokomotiva musí mít dostatečnou adhezní hmotnost (to je ta, která tlačí na hnací kola), aby neprosmykovala kola (je to ta s malými koly).

Martin Mucha

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/`

Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina

				Témata		Úlohy				
Pořadí	Jméno	Škola	$\sum_{-1}$	4	5	10	11	12	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr. Martin Demín	1.	79			3	3	3	9	79
2.	Doc. Jirka Klimeš	3.B	176		15	3	3	3	24	77
3.	Dr. Tibor Vansa	2.	75			2	4	3	9	75
4.	Dr. Jakub Jeřábek	septima	67			2	4	3	9	67
5.	Doc. Vašek Cviček	4.A	106						0	52
6.	Dr. Martin Beránek	septima	57					3	3	46
7.	Doc. Miroslav Frost	septima A	119				1	3	4	42
8.	Mgr. Karel Žídek	4.E	41						0	41
9.–10.	Mgr. Peter Bališ	I.A	36			1	4	0	5	36
	Dr. Honza Klusoň	sexta	79				2	2	4	36
11.	Mgr. Gabriela Boháčová	1.	35			2	4	1	7	35
12.	Mgr. Lucie Vasická	9. ZŠ	30	10	1		2	0	13	30
13.–15.	Mgr. Dana Beránková	1.	28			2	2	3	7	28
	Doc. Jura Tománek	4.	106						0	28
	Doc. Michal Tarana	4.B	158						0	28
16.	Mgr. Zdeněk Nováček		27	4		3	1	2	10	27
17.	Mgr. Tomáš Kovaľ	3B	26			2	4	3	9	26
18.	Mgr. Blanka Balážová	septima	25			4	5	2	11	25
19.	Mgr. Jozef Tinaj	3.D	24			2	0	4	6	24
20.	Mgr. Peter Murárik	3.	44	5					5	23
21.	Mgr. Iva Kouřilová	3.B	22			3	4	3	10	22
22.–23.	Doc. Ondřej Plašil	oktáva B	101			4	3	2	9	21
	Dr. Dáša Eisenmannová	4.A	62						0	21
24.	Mgr. Martin Včelák		20				2	2	4	20
25.–27.	Bc. Jana Babováková	9.ZŠ	17						0	17
	Mgr. Lenka Beranová	septima C	28						0	17
	Bc. Pavla Reiffersová	4.	17						0	17
28.	Bc. Zuzana Svobodová	3.	16					1	1	16
29.–30.	Bc. Milan Ružička	3.B	15			4	4	2	10	15
	Bc. Anna Zoulová	3.	15						0	15
31.–33.	Bc. Michaela Šikulová		13						0	13
	Bc. Miroslav Hejna	2.	13						0	13
	Dr. Tomáš Svatoň	4.A	52					3	3	13
34.–35.	Bc. Eva Macúšová	4B	11			2	3	1	6	11
	Bc. Tomáš Škereň	3.B	11						0	11
36.–37.	Dr. Karel Martišek	sexta A	96						0	10
	Bc. Tomáš Rieb		10						0	10
38.–40.	Vladimír Randa		7			2	3	2	7	7
	Peter Petrovský	3.B	7						0	7
	Juraj Konečný		7						0	7
41.–43.	Vlasta Poliačková	1.B	5		5				5	5
	Ivan Banas	4.G	5						0	5
	Aleš Hanák	2.A	5						0	5
44.–46.	Jiří Hampl	2.	3			2		0	2	3
	Radka Picková	2.	3						0	3
	Peter Martinisko	4.	3				3	0	3	3
47.	Jiří Vlach	sexta	4			1			1	2