

Termín odeslání: 23. dubna 2001

Zadání úloh

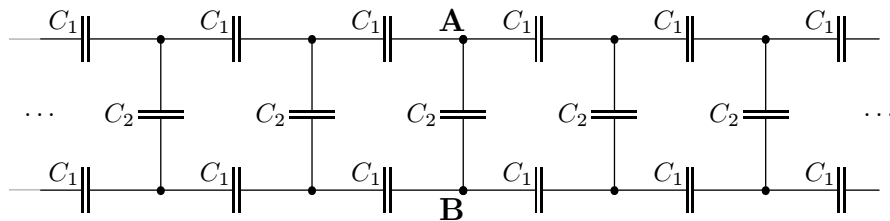
13. Úloha – Lamborghini 4b

Alča (podobnost jména s jistou osobou je čistě náhodná) je blázen do rychlých aut. Jednou viděla Lamborghini Diablo Roadster VT a okamžitě se do něj zamilovala. Zjistila si, že auto dosahuje maximální rychlosti 323 km/h a zrychlí z 0 na 100 km/h za 4,1 s. Za tuto dobu urazí 75 metrů. Alča by si ráda spočítala, kolik koní má její vysněné Lamborghini pod kapotou a s jakým zrychlením bude tlačena do sedadla. Pomůžeš jí s výpočtem?



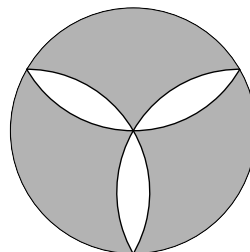
14. Úloha – Kondenzátory 3b

Mějme nekonečnou síť kondenzátorů znázorněnou na obrázku. Spočti výslednou kapacitu mezi body A a B. $C_1 = 4C_2 = 1 \text{ F}$.



15. Úloha – Dělení kruhu 4b

Nejmenovaná sekta matfyzáků přijímá mezi sebe jenom ty, kteří dokážou vyřešit jisté (velice těžké) úkoly. Jedním z nich je i pokus o jednoduchou transformaci magického amuletu. Amulet je zobrazen na obrázku vpravo. Skládá se ze tří stejných šedých dílů tvořících dohromady kruh. Úkolem adepta je rozřezat amulet (tmavé části) na šest ne nutně stejných dílů tak, aby se z nich dal poskládat obdélník. Zvládneš to i ty?



Zadání témat

Téma VI. – Láhev a mince

Prázdnou skleněnou láhev (pochopitelně od minerálky) postav na pevnou vodorovnou podložku a na její hrdlo polož vhodně velkou nasliněnou minci, čímž neprodyšně uzavřeš vzduch v láhvi. Oběma rukama uchop stěny láhve a čekej, po chvíli se začne mince nadzvedávat a dosedat zpátky.

Na základě svého teoretického modelu se pokus spočítat frekvenci, s jakou je mince nadzvedávána, a porovnej ji s experimentální hodnotou. Jak se mění frekvence s časem? Použij různé mince a láhve, přičemž ostatní experimentální podmínky se snaž zachovat stejné. Pošli nám jakýkoliv zajímavý výsledek, experimentální i teoretický.

Téma VII. – Mnohoúhelníky

Za devatero zobrazení žily, byly dva mnohoúhelníky. Jeden se jmenoval n -úhelník a druhý m -úhelník (hádejte proč). Byly dobrými kamarády, a tak jim nevadilo, že se některé jejich strany protínají. A čím víc průsečíků měly, tím víc se měly rádi... a měly se moc rádi až do smrti.

Označme $p(n, m)$ maximální počet průsečíků, které mohou mít n -úhelník a m -úhelník. Uvažujeme pouze nedegenerované případy, tj. případy, ve kterých mají dvě strany vždy nejvýše 1 průsečík. Mnohoúhelníky bereme konvexní i nekonvexní. Např. $p(3, 3) = 6$ – dva trojúhelníky položené přes sebe vytvářející šesticípou hvězdu.

Zkus určit nebo odhadnout $p(n, m)$ v následujících případech:

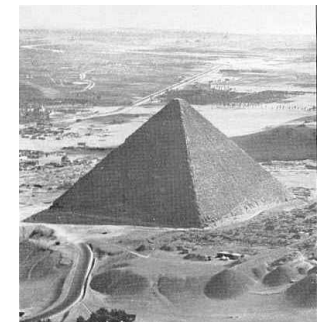
- n nebo m je sudé.
- $m = n = 5$.
- $n = m$, pro libovolné m .
- m a n libovolné.
- cokoliv vás napadne...

Téma VIII – Pyramidy a energie Návrh od Bc. Jany Babovákové

Jednu jsem shlédla zajímavý dokument o pyramidách. Bylo tam mnoho zajímavých věcí, a tak mě napadlo, že bychom společně mohli zapřemýšlet nad jedním tématem o pyramidách.

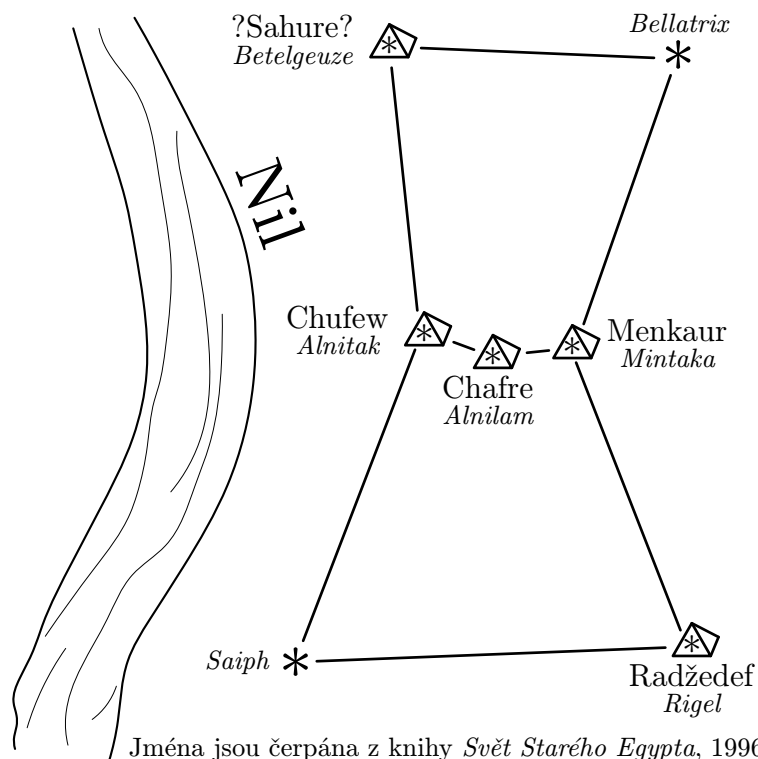
Pyramidy jsou odjakživa velkou záhadou a pořád se objevují nová a nová tajemství, která skrývají.

O pyramidách v Gíze a okolí jsem se dozvěděla nové zajímavé věci: Jistě víte o záhadných hieroglyfech v hlavních síních v pyramidách. Toto písmo se (pokud vím) nepodařilo rozluštit. Mezi



Velká pyramida v Gíze

znaky na stěnách vědci objevili (spíš si toho všimli a zamysleli se nad tím) napsané 3 hvězdy za sebou (***) . Zkoumali také různé šachty v pyramidách a jejich vyústění. Jedna z nich byla velice pozoruhodná. Z jedné chodby bylo touto šachtou krásně vidět na oblohu. Za těch mnoho let, od postavení \triangle až do dneška, však změnila noční obloha trochu více svou polohu. Když si však vědci posunuli oblohu tak, jak vypadala v té době, tak zjistili, že otvor míří přímo na souhvězdí Orion. Pak je již napadlo, co znamenají ty tři hvězdy za sebou. Ano, znamenají tři hvězdy v pásu Orionu. Pak hledali souvislosti mezi pásem Orionu a pyramidami v Gíze (a okolí).



Postupně zjistili tyto shody:

- 3 pyramidy v Gíze v čele s (největší) Cheopsovou¹ mají stejné postavení jako hvězdy v pásu Orionu. Dvě v jedné přímce, a ta třetí je trochu vedle. Dokonce se mi zdá, že ty pyramidy jsou velké podle jasnosti těch hvězd.
- Ještě se prý v egyptských legendách nebo možná v těch písmech v \triangle (už si to přesně nepamatuji) říká, že bohové sídlí v Orionu (nebo jenom v pásu?). A faraóni byli v podstatě též bohy, a tak to mohlo působit jako prostředek (nebo něco podobného) cesty na posmrtný život.

¹ egyptsky se faraón jmenoval Chufew, řecky Cheops

- Dále zjistili, že postavení pyramid vůči Nilu je stejné jako postavení těch tří hvězd vůči Mléčné dráze (na obloze).
- Pak přemýšleli o těch dalších hvězdách Orionu. Zde též hledali nějakou souvislost. Pak zjistili, že dvě pyramidy, dále od těch tří, odpovídají svým postavením dalším dvěma hvězdám Orionu. A přitom je jejich postavení od sebe vzdáleno nejen několik desítek let, ale někdy i století. Je otázka: jak to, že to takhle postavili?
- Celé to vypadá tak, že kdybychom se podívali na pyramidy v Egyptě z velké výšky (ptačí perspektivy), pak bychom viděli jakoby obraz oblohy. Viděli bychom Orion vedle Mléčné dráhy (s ohledem na změny toku Nilu). Bohužel si přesně nepamatuji jména těch ostatních dvou pyramid, a tak je hádám podle knížky. Myslím, že si to již dokážete představit.

Pořád ale nejsem u toho, co jsem vám chtěla navrhnout. Ale myslím, že i toto by se dalo třeba použít. Napadla mě jedna věc.

Myslím, že víte, co se říká o různých schopnostech pyramid, jakožto o geometrickém tvaru. Pod poklopem tvaru pyramidy se jídlo lépe uchovává. Tvar pyramidy chrání věci proti „zuby času“, třeba šperky proti zčernání a podobné věci.

Bylo tam i o tom, že když si člověk třeba lehne do takové pyramidy (uměle vyrobené, ne z Egypta), pak se cítí více uvolněně a prostě cítí proudění energie.

Prostě umí různé věci. A tak mě napadlo, že bychom se mohli všichni společně, v rámci semináře, zamyslet nad tématem *Pyramidy a energie*. Myslím, že je to zajímavé téma. Sice dosud ani vědci ve světě si to nedokáží pořádně vysvětlit, ale proč bychom to nemohli zkusit i my? Můžeme přijít na spoustu zajímavých věcí. A třeba něco pořádného spolu také vymyslíme. Víc hlav víc ví. A navíc jsme přece přemýšliví lidé, ne? Jsme přece spolutvořitelé \triangle .



Mohli bychom se o pyramidách zamýšlet nad mnoha věcmi. Třeba též nad tvarem pyramid. Nejdříve se přece stavěly stupňovité \triangle , dále lomené \triangle a pak nejvíce známé \triangle . Přitom se do písku nepropadají (další zajímavost). To vše by se dalo zpracovat.

Jinak i jiné zajímavosti: na mumiích se našly zbytky rostlin, z kterých se dnes vyrábějí drogy, a ty jsou přece pouze v Jižní Americe. Jak se tam mohly dostat?

Bc. Jana Babováková

Komentář redakce:

- 1) **Pyramidy a Orion:** Teorie, podle které byly starověké pyramidy stavěny podle určitého řádu, má svoje opodstatnění. Nikdo nebude sta-

vět něco tak kolosálního, jako je pyramida, jen tak pro nic za nic. A není větší hybná síla lidských mas než víra. Můžeš se pokusit najít v literatuře (a kriticky posoudit) argumenty pro a proti tomu, že pyramidy a souhvězdí Orion v kultuře starého Egypta spolu souvisejí. Hlavně prosím nezapomeň uvést literaturu, ze které jsi čerpal!

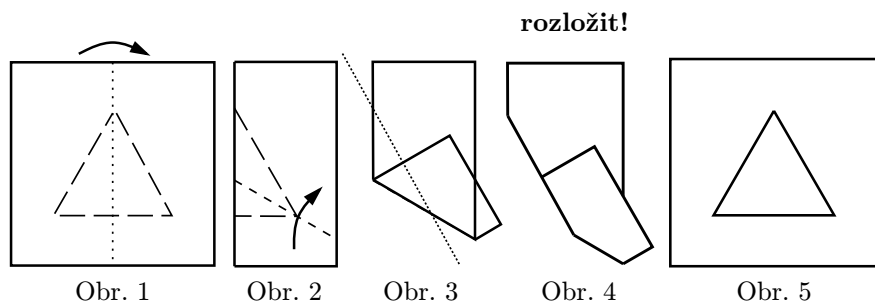
- 2) **Pyramidy a energie:** Otázka je, jestli je v tomto případě vůbec co zkoumat. Redakce zatím energii v pyramidách nepozorovala a je v tomto ohledu skeptická. Různí lidé ale mají na energii skrytou ve tvaru pyramid různé názory. Můžeš nám napsat svůj názor a hlavně popsat vlastní experiment s pyramidami. Necht' je libovolná teorie jakkoliv krásná, když odporuje experimentu, je k ničemu.

Téma 1 – Papírové koberečky

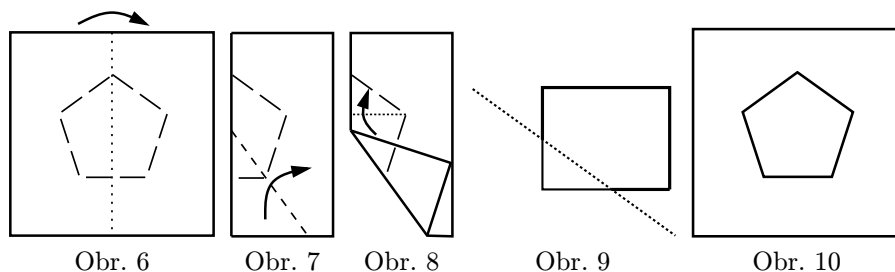
Konvexní a nekonvexní mnohoúhelníky

Dr. Tibor Vansa

Podařilo se mi vystříhnout rovnostranný trojúhelník. Zde si můžete prohlédnout návod, podle kterého jsem postupoval.



Další návod ukazuje, jak vystříhnout pravidelný pětiúhelník:



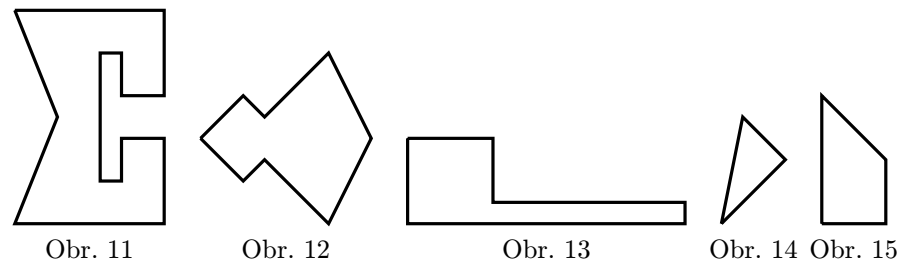
Stejným způsobem jsem postupoval u šestiúhelníku, sedmiúhelníku a osmiúhelníku. Vždy jsem papír přehnul podle některé osy souměrnosti vystřihovacího obrazce, a poté přikládal hrany k sobě, až jsem získal hranu jedinou, a tu

jsem pak vystříhl. Tvrdím, že takovým postupem lze získat libovolný konvexní n -úhelník, který má alespoň jednu osu symetrie.

Co se týče nekonvexních n -úhelníků, podařilo se mi vystříhnout všechny² až na ty, které obsahovaly tvar písmene „C“ apod.

Obr. 11 – Tvar písmene „C“, který jedním stříhem získat nelze.

Obr. 12 – Tento nekonvexní mnohoúhelník jedním stříhem získat lze.



Pozn. red.: Je postup pro pravidelné mnohoúhelníky použitelný i pro mnohoúhelníky nepravidelné? Autorovo tvrzení, že postupem lze získat libovolný konvexní n -úhelník s alespoň jednou osou symetrie, nám nepřípadá z autorova příspěvku zřejmé. Uměli byste toto tvrzení dokázat, nebo alespoň popsat návod, jak se vyrovnat s nepravidelnými konvexními n -úhelníky s jednou osou symetrie? Můžete se také pokusit dokázat (anebo vyvrátit), že konvexní mnohoúhelníky bez osy symetrie vystříhnout nejdou. Zamyslet se můžete nad obrázky 13 až 15.

Obr. 13 – Tvar písmene „L“, jehož ramena mají různou šířku i délku.

Obr. 14 – Trojúhelník, který nemá osu symetrie.

Obr. 15 – Čtyřúhelník, který nemá osu symetrie.

Skládám, skládáš, skládáme

Dr. Tibor Vansa

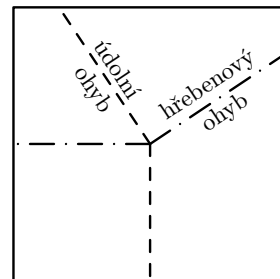
Rád bych zareagoval na Bzučův všetečný dotaz, zda se dá papír přehnout alespoň 12-krát. Velice záleží na rozměrech papíru. Pokud je tloušťka papíru porovnatelná s jeho rozměry, přehýbá se již velmi špatně, neboť jeho délka nestačí na ohyb. Slovem přeložit rozumím ohnout na polovinu, ne skládat harmoniku. Průklepový papír se mi podařilo přeložit maximálně osmkrát. Při dvanácti přehnutích bychom měli $2^{12} = 4096$ vrstev papíru nad sebou. Při tloušťce papíru 0,004 cm by to bylo 16,38 cm. Jak byste chtěli do toho stříhat?



² *Pozn. red.:* Redakci se nechce věřit, že autor vystříhnul, skutečně všechny existující nekonvexní n -úhelníky.

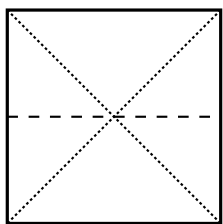
Nový námět k tématu 1:

Vezmi čtverec papíru a přelož jej několika ohyby tak, aby se všechny ohyby dotýkaly v jednom bodě přibližně uprostřed papíru (v žádném jiném bodě se žádné dva ohyby neprotínají), a aby výsledná skládačka byla placatá (placatou skládačku lze zavřít do knihy a nevznikne tím žádný nový ohyb). Na obrázku jsou příklady skládaček, jaké můžeš dostat (papír však můžeš poskládat nekonečně mnoha dalšími způsoby). Na obr. 16 vedou do vrcholu 4 ohyby, na obr. 17 je to 6 ohybů, a na obr. 18 opět 4 ohyby.



Obr. 16

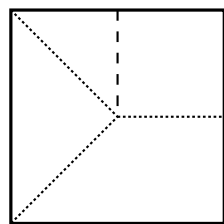
Ohyb je vždy úsečka začínající ve vrcholu uprostřed a končící na kraji papíru. Čerchované jsou označené „hřebenové“ ohyby (ohyb vystupuje směrem k tobě), čárkované jsou „údolní“ ohyby (ohyb se prohýbá směrem od tebe). Musí být počet všech ohybů vždy sudý? Jaký je počet hřebenových ohybů a jaký je počet údolních ohybů? Zkus provést pozorování na více placatých skládačkách s jedním vrcholem a odhadnout (či dokázat), jak by to s počty ohybů mohlo být.



Obr. 17



Obr. 17a



Obr. 18



Obr. 18a

Matouš & Maťa

Téma 2 – Z vodní říše

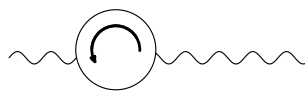
Lodě, lodě, lodě ...

Dr. Tibor Vansa

Pozn. red.: Dr. Tibor Vansa nám poslal své rozdělení lodí podle jejich účelu.

Základní charakteristiky lodě jsou:

výtlač, nosnost, stabilita, manévrovací schopnost, odpor kladený při pohybu dopředu, ponor, výška stěžně, délka, šířka trupu, typ a síla pohonu.



Dále jsem se pokusil rozdělit lodě podle jejich použití:

- 1) plachetnice – byly úzké a dlouhé (a proto rychlé) pokud to byly obchodní a dopravní lodě, nebo široké, pokud šlo o válečné lodě (např.

galeony) nebo malé bárky. Tvar trupu takovýchto lodí nemůže být válec, protože by se protočily,

- 2) kolesové parníky – používané na řekách, měly malý ponor a ploché dno, aby nemohly uváznout na mělčině. Dokázaly se točit na místě, protože se kola točila nezávisle,
- 3) veslice – ve starověku se používaly k přepravě vojsk, byly rychlé s úzkým trupem, protože vojáci s sebou brali jenom nejnnutnější věci,
- 4) pramičky na rybníce – hlavně stabilita, aby se rybář neskácel do vody, když tahá nějakého toho sumce,
- 5) kajak, kánoe – jejich předností je manévrovatelnost a malý ponor,
- 6) motorové parníky a zámořské lodě – co největší objem,
- 7) katamarany – jsou rychlé a stabilní,
- 8) rakety – lodě na křídlech, co největší rychlost,
- 9) Titanik – co nejvíce cestujících :-))),
- 10) kačenka ve vaně – nepotopitelná.

Bzučo

Téma 3 – Kyvadlo

Jediný článek k tématu 3 ohledně kyvadla napsal Dr. Tibor Vansa. Ve svém příspěvku se pokusil popsat pohyb kyvadla v systému pevně spjatém se Zemí. Jelikož se Země otáčí kolem své osy, jedná se o neinerciální systém. Proto v tomto systému, jak autor správně uvedl, musíme psát pohybovou rovnici ve tvaru:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{skut.}} + \vec{F}_{\text{zdánl.}},$$

čili na pravé straně máme jednak skutečné síly a jednak síly zdánlivé. V našem případě máme dvě zdánlivé síly, Coriolisovu sílu

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v},$$

a odstředivou sílu

$$\vec{F}_O = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})].$$

Uvědomit si, co vlastně tyto rovnice říkají, může být značně namáhavé, ale je možnost se tomu vyhnout. Udělejme následující úmluvu, co se týče souřadných systémů. Předpokládejme, že kyvadlo je na severním pólu (zemská osa je rovnoběžná s vektorem gravitačního zrychlení). Nechť je dán inerciální systém a s ním spojená soustava kartézských souřadnic, osa z tohoto systému je totožná s osou rotace Země a kyvadlo je zavěšené v bodě $(0, 0, 0)$. Kladný směr osy z je směrem vzhůru, tudíž když kyvadlo visí, jeho poloha má zápornou z -ovou souřadnici. Dřív než se dostaneme k neinerciálnímu systému, vyzývám řešitele, aby se pokusili namodelovat pohyb kyvadla v inerciálním systému (neuvažujte, že se Země otáčí – žádná Coriolisova nebo odstředivá síla).

- 1) Nakreslete obrázek kyvadla v některé nerovnovázné poloze a popište všechny síly působící na kyvadlo v homogenním gravitačním poli.
- 2) Jelikož síla je vektor, má tři složky. Napište jak vypadají tyto složky, čili jak závisí na poloze kyvadla a na jeho rychlosti.
- 3) Když budete mít takové vyjádření, pak už není problém namodelovat pohyb kyvadla na počítači podobným způsobem, jako jste počítali pohyb dělové koule.

Kdo chce uvažovat i rotaci Země, ať čte dál. Kromě inerciálního systému, nazvěme jej S , máme i neinerciální systém \tilde{S} pevně spjatý se Zemí, a to tak, že v něm počátek souhlasí s počátkem systému inerciálního, ale osy \tilde{x} a \tilde{y} se otáčejí vůči osám x a y úhlovou rychlostí ω . Pokud známe polohu kyvadla v jistém okamžiku v systému S , tj. známe složky jeho polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$, můžeme zjistit složky toho samého vektoru v systému \tilde{S} takto:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Jedná se o maticové násobení, a transformační matice pochopitelně závisí na čase. Zároveň je vidět, že z -ová složka je v obou systémech stejná. Nabízí se nám způsob, jak modelovat pohyb kyvadla, aniž bychom potřebovali počítat Coriolisovu sílu. Namodelujeme pohyb kyvadla v systému S , tím dostaneme pro libovolný čas $t \geq 0$ trojici souřadnic (x, y, z) , a tuto trojici transformujeme pomocí transformační matice na jinou trojici $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, když to uděláme pro každý čas (který nás zajímá), úloha bude hotová. Zkuste tedy výše popsaným způsobem na počítači nakreslit graf – průmět trajektorie pohybu kyvadla do roviny $\tilde{x}\tilde{y}$, tj. obrázek, který by zanechal na Zemi štětec, visící z kyvadla směrem dolů. Uvedte, s jakou délkou kyvadla, gravitačním zrychlením a úhlovou rychlostí jste počítali. Taky se pokuste odvodit tvar uvedené transformační matice.

Martin Mucha, mucha@atrey.karlin.mff.cuni.cz

Téma 4 – Lipový list

Plochojevné zobrazení

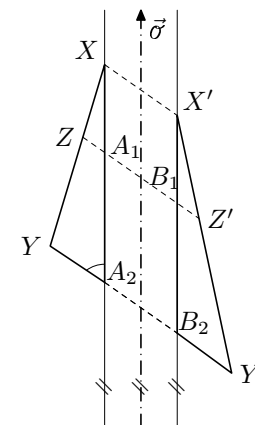
Dr. Jakub Jeřábek

Dané zobrazení už není symetrie. Také není při daných podmínkách jednoznačně určeno. Obraz konstruujeme tak, že si vybereme jeden bod originálu (A), nakreslíme přímku na opačné straně osy (v opačné polorovině než se nachází bod A), která bude rovnoběžná s osou, a její vzdálenost od osy bude rovna vzdálenosti bodu A od osy. Na tuto přímku umístíme libovolně obraz daného bodu A' – tím je zobrazení pevně určeno. Splňuje všechny podmínky – přímky rovnoběžné s osou se promítají rovnoběžně a osa půlí úsečku AA' . Libovolný další bod B zobrazíme tak, že uděláme rovnoběžku BX s přímkou

AA' , a když protne osu v bodě Y , nanese stejnou vzdálenost na druhou stranu od osy, tak aby platilo $BY = B'Y$. Zobrazení je vlastně určeno osou a směrem (nebo osou a úhlem, který s ní svírá směrový vektor zobrazení, nebo osou a samodružnou přímkou nebo ...), je to něco mezi posunutím a osovou souměrností a trochu mi připomíná kruhovou inverzi (zas až tak moc se v geometrii nevyznám). Obsah obrazců zůstává zachován – vzdálenost bodů, které leží rovnoběžně s osou, zůstává zachována a vzdálenost bodů od osy taky. Když budeme zobrazovat třeba trojúhelník ABC , kde AB je rovnoběžné s osou, tak $|AB| = |A'B'|$ a $v(C, AB) = v(C', A'B')$, takže strana a výška zůstanou zachovány, a tím pádem i obsah $S = av/2$. Mění se jedině úhly. Je to jako kdybychom obrázek rozstříhali na hrozně tenké proužky rovnoběžné s osou a ty pak znovu poskládali posunutě. Osová souměrnost je vlastně speciálním případem tohoto zobrazení. Analyticky určené by zobrazení bylo takto: Osa zobrazení je osa y , dále potřebujeme koeficient k , který určuje směr. Pro $k = 0$ je to osová souměrnost. Bod $A[x, y]$ se zobrazí do $A'[-x, y + kx]$. Samodružné přímky (zobrazí se samy na sebe) jsou všechny přímky, které mají směrnici $(-k/2)$.

Když to tak shrnu, je to v podstatě něco jako plochojevné zobrazení v at-lase.

Pozn. red.: K podobnému výsledku dospěli viacerí z vás. Doc. Miroslav Frost nazval vyššie popísané zobrazenia **kosá osová souměrnost**, alebo iba „kosost“, precízne ju axiomatically definoval a rozobral niektoré jej vlastnosti v dlhom článku. Dokazoval v ňom aj veci, ktoré sa iným zdajú samozrejme a nezmieňujú sa o nich: napríklad že obraz úsečky XY je úsečka $X'Y'$, kde X' je obraz bodu X a Y' je obraz bodu Y . Doc. Miroslav Frost sa taktiež zamyslel nad tým, prečo sa u základných geometrických útvarov zobrazením „kosou osovou souměrností“ zachováva obsah. Kým Dr. Martin Jeřábek argumentoval nie celkom jasnými „hrozně tenkými proužky“, Doc. Miroslav Frost to dokázal obecně pro mnohoúhelníky. Tu sú niektoré časti článku Doc. Miroslava Frosta.



Obr. 1

Kosá osová souměrnost

Doc. Miroslav Frost

Pozn. red.: Keďže z technických dôvodov nie je možné uviesť celý článok Doc. Miroslava Frosta, uvádzam z neho niektoré časti. Nech preto čitateľa nemýli číslovanie odstavcov a viet.

2.2 Vlastnosti úseček a prímeček

(III) Obrazem úsečky XY je úsečka $X'Y'$.

Důkaz. Mějme úsečku XY a body $X'Y'$ (obrazy bodů XY v kososti s osou σ a úhlem α). Nyní vezměme libovolný bod Z úsečky XY (tak, že platí $Z \neq X$ a $Z \neq Y$) a zobrazme ho v dané kososti (obr. 1). Vedme bližšími z bodů X, Y a X', Y' rovnoběžky s σ .

O tom, že $\triangle XA_1Z$ je podobný $\triangle XA_2Y$, se může každý snadno přesvědčit:

$$\frac{|XA_1|}{|A_1Z|} = \frac{|XA_2|}{|A_2Y|}, \quad (1)$$

kde $|XA_1| = |X'B_1|$, neboť $XX'B_1A_1$ je rovnoběžník, $|XA_2| = |X'B_2|$, neboť $XX'B_2A_2$ je rovnoběžník.

Navíc $|ZA_1| = |Z'B_1|$ a $|YA_2| = |Y'B_2|$ plyne přímo z definice kososti (B_1 je obraz A_1 , B_2 je obraz A_2).

Rovnici (1) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{|X'B_1|}{|Z'B_1|} = \frac{|X'B_2|}{|Y'B_2|},$$

tedy $|\angle Z'X'B_1| = |\angle Y'X'B_2|$, což ale znamená, že Z' leží na $X'Y'$ (protože navíc $|Z, \sigma| = |Z', \sigma|$)³.

(IV) Obrazem přímky procházející body X, Y je přímka procházející body X', Y' .

Důkaz. Pro rovnoběžky s σ to plyne z (II)⁴, pro různoběžky rozdělíme přímku na nekonečný počet úseček. Každá z nich se nám zobrazí dle (III) a každé 2 sousední úsečky budou mít společný bod (plyne z prostoty kososti). Všechny tyto úsečky však budou svírat stejný úhel α s osou σ .

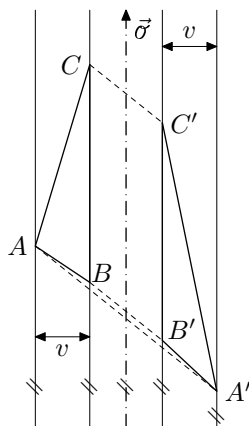
2.3 Vlastnosti některých geometrických útvarů.

Zobrazme si daný trojúhelník ve dvou kosostech s různými α .

Je pěkně vidět, že kosost nemění délky úseček, ležících na rovnoběžkách s osou σ (obr. 2). (Velmi pěkný důkaz pomocí rovnoběžníku $BB'C'C$ ponechám na čtenáři.) A protože i výšky ke straně BC (resp. $B'C'$) jsou u obou trojúhelníků stejné, pak i obsahy $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ jsou stejné. Tento závěr můžeme snadno zobecnit.

Provedeme tedy důkaz, kde využijeme jedné zajímavé vlastnosti lichoběžníků. Zvolme libovolný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD . Označme S_1 střed úsečky AB a S_2 střed úsečky CD (obr. 3). Přímka S_1S_2 dělí lichoběžník na 2 menší lichoběžníky AS_1S_2D a BS_1S_2C . Spočítejme si jejich obsahy:

Pro AS_1S_2D platí:

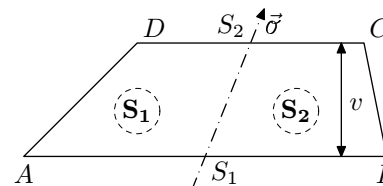


Obr. 2

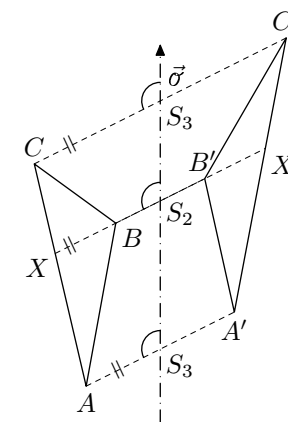
$$S_1 = \frac{(|AS_1| + |S_2D|)v}{2} = \frac{\left(\frac{|AB|}{2} + \frac{|CD|}{2}\right)v}{2} = \frac{(|AB| + |CD|)v}{4}.$$

Pro S_1BCS_2 platí:

$$S_2 = \frac{(|S_1B| + |CS_2|)v}{2} = \frac{\left(\frac{|AB|}{2} + \frac{|CD|}{2}\right)v}{2} = \frac{(|AB| + |CD|)v}{4}.$$



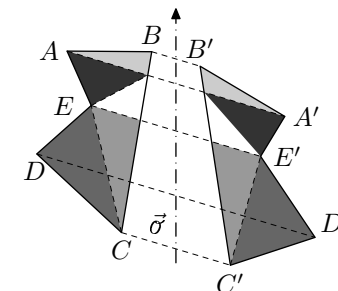
Obr. 3



Obr. 4

Tedy $S_1 = S_2$.

Přímka S_1S_2 rozděljuje lichoběžník na dvě části se stejným obsahem. A teď již k důkazu. Zvolme libovolný $\triangle ABC$ a jeho obraz v kososti (s úhlem kososti α) označme $\triangle A'B'C'$ ⁵ (obr. 4). Přímky AA', BB', CC' tvoří základny dvou lichoběžníků: $AA'X'X$ a $XX'C'C$. Vezměme lichoběžník $AA'X'X$: protože S_2 je střed XX' a BB' a S_3 je střed AA' , můžeme dle výše uvedeného psát, že obsah lichoběžníků AS_3S_2X a $A'S_3S_2X'$ je stejný. Zároveň je však stejný obsah lichoběžníků AS_3S_2B a $A'S_3S_2B'$, z toho vyplývá, že rozdíl obsahů AS_3S_2X a AS_3S_2B je stejný s rozdílem $A'S_3S_2X'$ a $A'S_3S_2B'$. Proto je obsah $\triangle ABX$ shodný s obsahem $\triangle A'B'X'$. Stejnou úvahu provedme pro $\triangle XBC$ a $\triangle X'B'C'$. Dokázali jsme tak, že obsah $\triangle ABC$ je stejný jako $\triangle A'B'C'$. Stejným způsobem



Obr. 5

³ Pozn. red.: Prísne vzaté, tým sme ukázali, že obraz úsečky XY je podmnožina úsečky $X'Y'$, k dokončeniu dôkazu by bolo treba ukázať aj opačnú inklúziu.

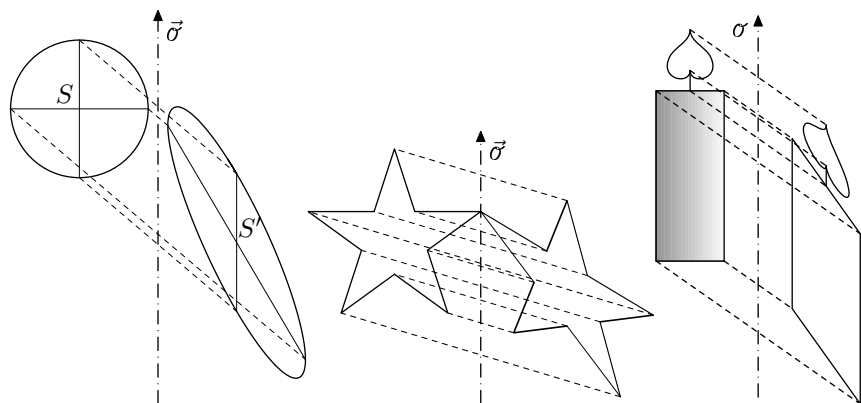
⁴ Bod a jeho obraz majú stejnou vzdálenost od osy σ

⁵ Pozn. red.: Skúste si premyslieť, prečo je obraz trojuholníka trojuholník.

však můžeme pracovat i s libovolnými konvexními mnohoúhelníky, pro složitější nekonvexní útvary provedeme pro snazší důkaz rozložení do několika trojúhelníků, pro které provedeme důkazy zvlášť, nakonec obsahy trojúhelníků resp. jejich obrazů sečteme (laskavý čtenář jistě takový důkaz zvládne sám, vodítkem nechť mu je obr. 5).

VI Obsah libovolného n -úhelníku a jeho obrazu jsou si v kososti rovny.

Což bylo v předchozím odstavci dokázáno.



Obr. 6

Obr. 7

Obr. 8

Pozn. red.: Doc. Miroslav Frost nám poslal aj niekoľko zaujímavých obrázkov, z ktorých sme vybrali kruh a päťcípú hviezdu.

Obr. 6 – Obrazem kružnice je v kosom zobrazení elipsa. Alespoň se tak domnívá Doc. Miroslav Frost.

Obr. 7 – Pětícípá hvězda se samozřejmě dá zobrazit také. V tomto případě je $g(x) = 0.6x$ (viz níže).

Obr. 8 – Svíčka od Mgr. Gabriely Boháčové. Jak se vám líbí?

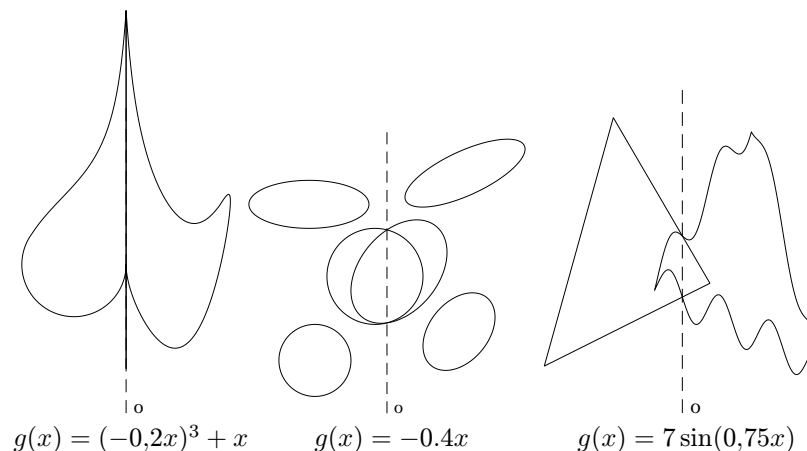
Pozn. red.: Otázka, prečo by sa mal zachovávať obsah kruhu, elipsy a iných geometrických útvarov, ostáva naďalej otvorená, pretože ju nikto jasne nezodpovedal.

To bola „kosá osová súmernosť“. Väčšina z vás sa domnievala, že sú to jediné zobrazenia, ktoré splňujú axiomy 1) 2) a 3') zo zadania, napriek tomu sa to nikto nepokúsil dokázať. Preto je možno prekvapujúce riešenie Dr. Martina Beránka, ktorý k problému pristúpil obecnšie. Z axiémov 1) 2) a 3') totiž vôbec neplynie, že obraz priamky je priamka!

Dr. Martin Beránek vo svojom článku po istých úvahách dospel k tomu, že ak je os σ práve os y v bežnom značení (čo môžeme bez ujmy na obecnosti predpokladať), tak každé zobrazenie splňujúce axiomy v zadaní možno zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y + g(x) \end{pmatrix},$$

kde $g(x)$ je nejaká nepárna funkcia taká, že $g(0) = 0$. Inými slovami, že každé také zobrazenie zobrazí bod $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ do bodu $\begin{pmatrix} -x \\ y + g(x) \end{pmatrix}$, kde g je funkcia premennej x , ktorá nezávisí na y .



$$g(x) = (-0,2x)^3 + x$$

$$g(x) = -0.4x$$

$$g(x) = 7 \sin(0,75x)$$

Ak je to pravda, tak „kosá osová súmernosť“ je špeciálnym prípadom vzorca Dr. Martina Beránka pre $g(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Dr. Martin Beránek napísal aj niekoľko netriviálnych pozorovaní o tom, za akých predpokladov a ako sa pri „kosej osovej súmernosti“ zmení dĺžka úsečky.

Mám rád zobrazení

Dr. Martin Beránek

Mějme zobrazení $g(x) = kx$ a libovolnou úsečku. Tuto úsečku vyjádřím jako $y = ax + b$ ⁶. Rovnice jejího obrazu pak bude $y = -ax + b - kx = -(a + k)x + b$ ⁷.

Délku úsečky vyjádřím jako $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Pro vzor platí $\Delta y = a \Delta x$ a pro obraz $\Delta y = -(a + k)\Delta x$ ⁸. Z toho tedy poměr délek⁹:

⁶ Pozn. red.: Autor chce zrejme povedať, že úsečka je grafom takejto funkcie pre všetky x z nejakého konečného uzavretého intervalu.

⁷ Pozn. red.: To plyne z vyššie spomenutého vzorca $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y + g(x) \end{pmatrix}$ dosadením $g(x) = kx$.

⁸ Pozn. red.: Ide o rozdiel x -ových resp. y -ových súradníc vzoru a obrazu úsečky.

⁹ Pozn. red.: V nasledujúcich rovniciach je l dĺžka úsečky a l' dĺžka jej obrazu.

$$l' = \sqrt{(\Delta x)^2 + ((a+k)\Delta x)^2} = \Delta x \sqrt{1 + (a+k)^2}; \quad \Delta x = \frac{l}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$l' = l \cdot \sqrt{\frac{1+(a+k)^2}{1+a^2}}.$$

Z toho se dá vyčíst, že délka vzoru a obrazu se k sobě blíží, když se k blíží k nule, nebo když se zvyšuje $|a|$. Stejně délky jsou buďto když je $k = 0$ (tedy osová súmernosť), alebo když $a \rightarrow \infty$ (tedy úsečka rovnoběžná s osou).

Pro dané k platí následující. Pokud je $k > 0$, tak pro hodnoty a menší než $-k/2$ bude délka obrazu menší a pro $a > -k/2$ naopak větší (pro $a = -k/2$ bude vzor i obraz stejně dlouhý). Pokud je $k < 0$, tak hranice bude opět $-k/2$, ale ke zkrácení dojde tehdy, když je a větší a naopak. Pokud ten vztah zderivuji¹⁰, tak zjistím, že maximum prodloužení nebo zkrácení nastane tehdy, když

$$a = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}.$$

Návrhy na premýšľanie:

- 1) Rozhodnite, či kosé osové súmernosti sú jediné zobrazenia, ktoré splňujú axiomy zadania a okrem nich ešte aj podmienku, že obraz ľubovoľnej priamky je priamka.
- 2) Rozhodnite, či je správny vzťah Dr. Beránka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y + g(x) \end{pmatrix}$, g nepárna, $g(0) = 0$, t.j. či neexistuje aj iné zobrazenie, ktoré sa nedá vyjadriť takýmto vzorcom a preda splňa axiomy v zadání. Porozmýšľajte tiež, nakoľko obecná môže byť Beránkova funkcia g (musí byť napríklad spojitá?).
- 3) Musí kosá osová súmernosť zachovávať obsah vždy? Premyslite si nasledujúci argument: „pekné“ geometrické útvary možno „skoro celé“ pokryť konečne veľa trojuholníkmi, ktorých obsah sa zobrazením nezmení. Za akých predpokladov si môžeme byť istí, že „zvyšok“, t.j. to, čo sme nepokryli, sa zobrazí na niečo dostatočne malé, aby sme to v limite mohli zanedbať?
- 4) Čo to je vôbec „obsah“ a „pretínať sa“?



Peto

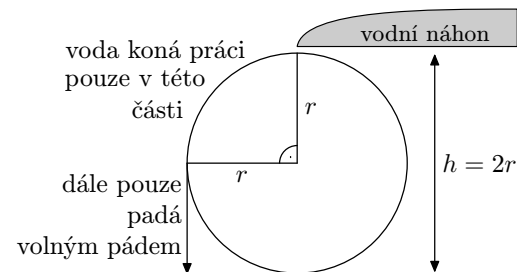
¹⁰ Pozn. red.: Autor zrejme derivoval podľa a pri pevnom k .

Téma 5 – Kolo kolo mlýnský

Teorie kola s horním náhonem

Mgr. Gabriela Boháčová

Vodní kola byla prvními a nejjednoduššími vodními motory. Můžeme rozlišit kolo na vodní dopad (je neúčinnější – dále je vysvětlení), kde spád vody h je větší než průměr kola, dále kolo na střední a spodní dopad. Někdy se můžeme setkat s označením kolo na vrchní, střední a spodní vodu. V podstatě byla vodní kola nevykonná vzhledem k velkým rozměrům, malému počtu otáček a malé účinnosti (kolem 50%). Nyní se využívá především turbín, které mají účinnost až 95%¹¹.



Obr. 1

Kolo na horní vodu

Výhodnější je vrchní náhon, protože celková energie má složku kinetickou i potenciální¹². Jestliže uvažujeme lopatky kolmo upevněné ke kolu, pak voda (při horním náhonu) koná práci pouze v horní čtvrtině (viz obr. 1). V celé soustavě platí zákon zachování energie (ZZE):

$$\frac{1}{2} \bar{m} v_1^2 + 2r \bar{m} g = \frac{1}{2} \bar{m} v_2^2 + W,$$

kde

- \bar{m} – průměrná hmotnost vody za jednotku času,
- W – práce kterou vykoná kolo,
- v_1 – rychlost vody dopadající na kolo,
- v_2 – obvodová rychlost kola.

Pokud chceme vypočítat práci W , kterou vykoná kolo, použijeme následující vzorec (voda koná práci pouze v $\frac{1}{4}$ otáčky, nemění svou výšku o $2r$, ale jenom o r , (obr. 1)):

$$W = \frac{1}{2} \bar{m} v^2 - \frac{1}{2} \bar{m} (\omega r)^2 + 2r \bar{m} g - \bar{m} r g,$$

$$W = \frac{1}{2} \bar{m} (v^2 - (\omega r)^2) + \bar{m} r g.$$

¹¹ Pozn. red.: Toto je maximální teoretická účinnost, v praxi je problém dosáhnout účinnost více než 90%.

¹² Pozn. red.: Tento argument je diskutabilní. Kolo se spodním náhonem má kinetickou i potenciální složku také, viz článek Dr. Tibora Vansy.

Dále lze spočítat účinnost (η) kola:

$$\eta = \frac{W}{E} = \frac{W}{\frac{1}{2}mv^2 + 2r\bar{m}g} = \frac{\frac{1}{2}\bar{m}(v^2 - \omega^2r^2) + \bar{m}rg}{\frac{1}{2}mv^2 + 2r\bar{m}g} = \frac{\frac{v^2 - \omega^2r^2}{2} + rg}{\frac{v^2}{2} + 2rg} =$$

$$= \frac{\frac{v^2}{2} + 2rg}{\frac{v^2}{2} + 2rg} + \frac{-\frac{\omega^2r^2}{2} - rg}{\frac{v^2}{2} + 2rg} = 1 - \frac{\omega^2r^2 + 2rg}{v^2 + 4rg}.$$

Teorie horního a spodního náhonu

Dr. Tibor Vansa

Pozn. red.: Autor počítal účinnost kola s horním náhonem, kde došel ke stejným závěrům jako Mgr. Gabriela Boháčová. Pro mírně odlišný postup řešení uvádíme oba články.

Kolo s horním náhonem

Jeho účinnost je:

$$\eta = 1 - \frac{E_z}{E_p},$$

kde E_p je energie vody na začátku a E_z energie vody na konci.

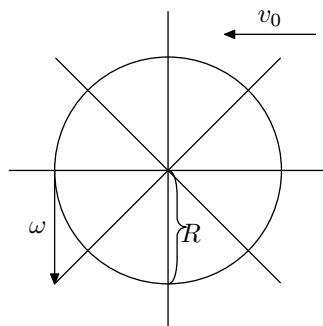
Voda působí jenom do poloviny výšky kola¹³, poté volně vytéká s rychlostí $v = \omega r$.

Ze ZZE:

$$E_p = E_k + E_{p0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 2Rmg,$$

$$E_z = mgR + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgR + \frac{1}{2}mR^2\omega^2,$$

$$\eta = 1 - \frac{\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + mgR}{\frac{1}{2}mv_0^2 + 2Rmg} = 1 - \frac{R^2\omega^2 + 2Rg}{v_0^2 + 4Rg}.$$

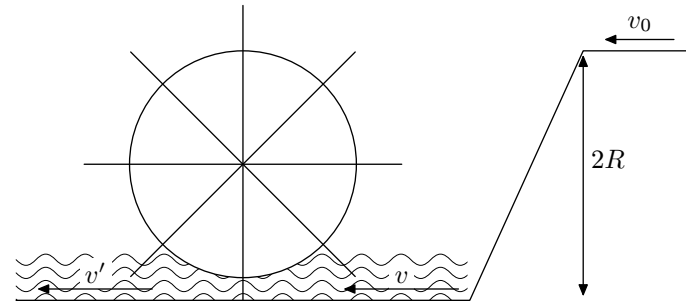


Obr. 2

- ze vzorce vyplývá, že účinnost je maximální, je-li $\omega \rightarrow 0$ a $v_0 \rightarrow \infty$, pak $\eta \rightarrow 1$,
- je-li $v_0 = 0$ a $\omega \rightarrow 0$, pak $\eta = 1 - \frac{2Rg}{4Rg} = 1/2$,
- je-li $v_0 = 0$, pak pro maximální úhlovou rychlost mlýnského kola dostáváme:

$$mgR = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 \implies \omega_{max} = \sqrt{\frac{2g}{R}} \implies \eta = 1 - \frac{R^2\frac{2g}{R} + 2gR}{4gR} = 1 - 1 = 0.$$

Kolo s dolním náhonem:



Obr. 3

Ze zákona zachování energie plyne:

$$2Rmg + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$v = \sqrt{4Rg + v_0^2}.$$

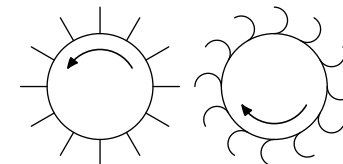
$$\eta = 1 - \frac{\frac{1}{2}mv'^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 1 - \frac{v'^2}{4Rg + v_0^2} = 1 - \frac{\omega^2R^2}{4Rg + v_0^2},$$

kde v' je rychlost vody za kolem (viz obr. 3).

- opět η je maximální, jestliže $\omega \rightarrow 0$ a $v_0 \rightarrow \infty$
- $\omega_{max} = \frac{\sqrt{4Rg + v_0^2}}{R}$ a pak $\eta = 0$

Které kolo je účinnější? Při $v_0 = 0$ má horní náhon maximální účinnost $\frac{1}{2}$, kdežto dolní 1. Je zde ale otázka, jaký je poměr účinnosti lopatek, stříkám-li na ně vodu rychlostí v anebo roztáčím-li je vlastní tíhou vody. To lze zjistit experimentálně.

Pozn. red.: Pokusí se někdo experimentálně zjistit, které kolo má vyšší účinnost?



Obr. 4

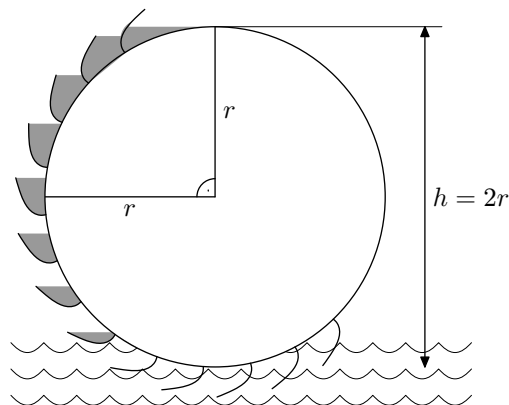
Obr. 5

Úvahy o tvaru kola

Lopatek je lépe mít více, protože v nich zůstává více vody při otáčení. Tím se zlepšuje účinnost. Jak lze ještě zlepšit účinnost?

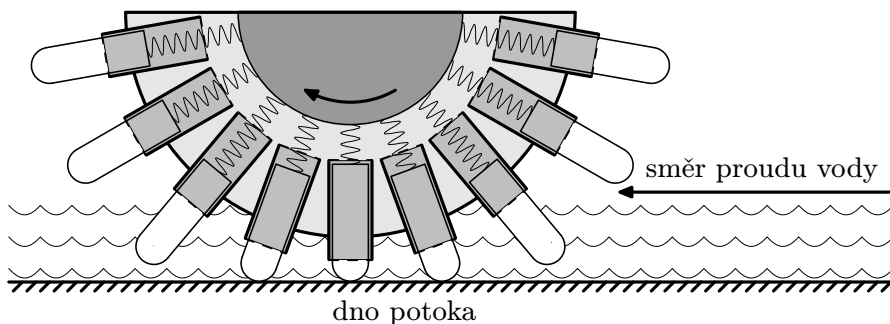
¹³ Pozn. red.: srovnej s přístupem Mgr. Gabriely Boháčové.

- 1) Na kolo přidělat z boku 2 kruhové desky, aby voda nevytékala bokem kola. Srovnej obrázky 2,3 a 4,5.
- 2) Desky dát až na jakési koleso, které vyplňuje vnitřek vodního kola. Čím je voda dál od středu, tím větším momentem sil působí na vodní kolo.
- 3) Desky by mohly být vypuklé, měly by mít takový tvar, aby kladly vodě větší odpor (viz obr. 5 a obr. 6). Voda pak kolo roztáčí i tam, kde by se u rovných desek vylila. Je ale možné, že by se zase nevyužívala přítoková rychlost vody. *Pozn. red.: Jaký tvar musí mít desky, aby využívaly i přítokovou rychlost vody, i její vlastní tíhu (u horního náhonu)?*



Obr. 6 Kolo na horní náhon se zakřivenými lopatkami

- 4) Můžeme uvažovat o kole podobném tomu na obr. 7. Kolo dokonale kopíruje dno na větší dráze, energie se odebírá úplně z každé kapičky.



Obr. 7 Mlýnské kolo s lopatkami s proměnlivou délkou.

- 5) Použit turbínu – ta bude nejlepší, proto ji mají v elektrárnách místo série mlýnských kol. Její účinnost je okolo 95%, protože energie se skoro nikde neztrácí. Vymyšlet ideální tvar šroubu v ní je ale pro mě příliš netriviální úkol.

Pozn. red.: Většina z vás při řešení čerpala zejména z literatury. Připomeňme pěkně zpracované řešení Dr. Martina Demína.

Aké kolesá vlastně poznáme?

Dr. Martin Demín

Ludia už od pradávna využívali vodní energii. Boli tri typy vodních kolies s horným, stredným a dolným náhonom. S horným náhonom sa používali pre väčšie spády $H = 3$ až 12 m, so stredným $H = 0,7$ až 2,5 m a s dolným $H = 0,5$ až 1,7 m.

- **horný náhon** – Toto koleso využíva najmä potenciálnu, ale trochu aj kinetickú energiu. Jeho účinnosť je v ideálnom prevedení 70%, ale v praxi je to iba 45–50%. Funguje tak, že sa korčeky naplňujú vodou, jedna strana je ťažšia ako druhá, koleso sa preváža a začne sa otáčať. Kinetická energia pohybuje koleso pri vtekaní vody do korčiekov.
- **stredný náhon** – koleso premieňa kinetickú a čiastočne aj potenciálnu energiu. Je uložené v úzkom kanáli tak, že je iba niekoľko centimetrov široké. Jeho lopatky sú rovinné a postavené mierne šikmo proti prúdu vody. Hlavným predstaviteľom je *Sagebienoovo vodné koleso*.
- **dolný náhon** – Koleso premieňa iba kinetickú energiu a účinnosť u *Panceletovho kolesa* je 60–70%.

Účinnosť je najviac ovplyvnená prietokom, šírkou kolesa, spádom, mechanickými stratami v ložiskách, predčasným výtokom vody z vaničiek a stratami pri prevode. Prevod je potrebný, pretože koleso o veľkých rozmeroch môže mať maximálne 10 otáčok za minútu, čo je priamo nevyužiteľné.

Vodné kolesá sú dobré najmä v znečistenej vode a pre nízke spády, kde majú väčšiu účinnosť ako turbíny.

Úvahy o účinnosti

Doc. Jirka Klímeš

Zatímco účinnost turbín se pohybuje až kolem 90%, účinnost vodních kol na vrchní vodu je podle [1] 60–70%, podle [2] 30%, účinnost kol na spodní vodu je v obou případech poloviční.

Vhodnost kola vzhledem k podmínkám:

spád	Q	náhon
do 1,5 m	0,6–4 m ³	spodní voda
0,5–3,5 m	0,5–2,5 m ³	střední – s přepadem
1,5–5 m	0,4–1,5 m ³	střední – kulisový vtok
od 4 m	do 1 m ³	vrchní voda

Volba kola a jeho typu závisela také na místních podmínkách (srážky, povodně, nutný výkon, nutné otáčky, rychlost proudu).

- Ideální je dvojnásobná rychlost proudu proti kolu – při nárazu předá voda svou hybnost a zastaví se (působí svojí hybností při otáčení kola

na vrchní vodu). Toto platí pro vrchní a střední vodu, pro spodní vodu by se měly rovnat¹⁴.

- Při kole na vrchní vodu (při rychlém proudu) je lopatka skoro kolmá k obvodu kola, není nutný velký prostor pro vodu. Při pomalejším proudu je sklon větší, aby se voda nevyllila moc brzy z lopatek a neztratila tak část své energie.
- Jestliže je potřeba vyšších otáček, tak se udělá kolo menší, žlab se zešíkmi, tedy bude více působit $E_{\text{kinetická}}$ vody.
- Účinnost a výkon kola na spodní vodu závisí mj. na tom, jak hluboko je ponořeno. Je-li kolo málo ponořeno, není schopno překonat odpor soukolí a neotáčí se. Jestliže je ponořujeme hloub, odporová síla vody na lopatky roste. Až síla překoná odpor soukolí, kolo se začne otáčet. Při vysokém ponoření se kolo brzdí o vodu, když ji tlačí dolů při vstupu a nahoru při výstupu z vody. Ideální rychlost kola se pokusím zjistit z měření.

Literatura:

- [1] *Luděk Štěpán, Magda Křivanová: Dílo a život mlynářů a sekerníků v Čechách*, nakl. Argo
- [2] *Dr. František Hanzák: Na počátku bylo kolo*, vydala KYKO-MEDIA Praha, spol s.r.o.

Bc. Zuzana Svobodová

Ak by som mala postaviť mlyn, tak osobne postavím asi mlyn s podbehom, pretože ľahšie by som asi vykopala šikmú plochu nadol a ňou pustila vodu ku kolesu, ako vybudovať celý systém, kadiaľ by voda tiekla k hornému náhonu, pričom by som potrebovala veľa dreva – musia byť okolo lesy na vybudovanie tohoto prívodu.

Ďalšie námety na bádanie môžu byť napr:

- *Pokúste sa určiť účinnosť reálneho mlynskeho kolesa, aplikujúc rovnice, ku ktorým dospeli Mgr. Gabriela Boháčová a Dr. Tibor Vansa. Vedeli by ste taktiež teoreticky odvodiť účinnosť kolesa na strednú vodu?*
- *Skúste zostrojiť vlastný model kolesa (pochvala patrí tým, ktorí už tak urobili) a experimentálne odmerajte jeho účinnosť.*
- *Aký je optimálny počet dosiek v kolesách pri hornom a spodnom náhone? Kolko vody sa teoreticky zmestí do kolesa s horným náhonom? Kolko musí mať lopatiek, aby v ňom bolo maximálne množstvo vody? Predpokladajte, že dosky sú uložené v kolese tak, že vždy smerujú do stredu (viz napr. obr. 2).*

¹⁴ Pozn. red.: Proč by se měly rovnat? Umí to někdo z vás vysvětlit?

- *Doc. Jirka Klimeš ukázal, že aj literatúra sa rozchádza v názore, aká je účinnosť vodných kolies (porovnaj napr. s článkom Dr. Martina Demína). Pokús sa objasniť, prečo rôzne literatúry uvádzajú rôzne účinnosti pre tie isté typy mlynských kolies.*

Bzučo

Úloha 7 – Lomená čára (4b)

Zadání: Z vrcholu A do vrcholu B pravouhlého trojúhelníku vede lomená čára, jejíž úseky jsou kolmé střídavě k odvěsně BC a k přeponě AB. Celková délka lomené čáry je 260 dílků.

Z vrcholu B do vrcholu A téhož trojúhelníku vede lomená čára, jejíž úseky jsou kolmé střídavě k odvěsně AC a k přeponě AB. Celková délka této lomené čáry je 78 dílků.

Jaké jsou délky stran trojúhelníka ABC?

Řešení:

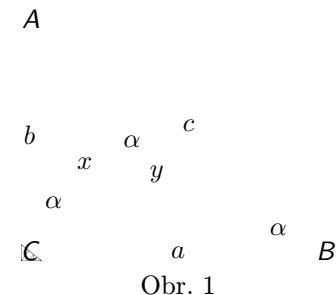
Nejprve je nutno vyjádřit délku lomené čáry v závislosti na délkách stran trojúhelníka. Načrtneme si obrázek několika prvních úseků.

Vidíme, že úhel α u vrcholu B se vyskytuje ještě alespoň u dalších 2 vrcholů. Napišme si pro délky stran x, y rovnice z toho vyplývající:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{b} = \frac{a}{c},$$

$$x = \left(\frac{a}{c}\right) \cdot b,$$

$$y = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cdot b.$$



Z podobnosti dalších trojúhelníků plyne, že každá následující příčka je (a/c) -krát kratší než předchozí. Nyní vidíme, že celkovou délku lomené čáry můžeme vypočítat jako součet nekonečné geometrické řady:

$$l_1 = b \cdot \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^3 + \dots\right) = \frac{b}{1 - \frac{a}{c}}.$$

Podobnou rovnici můžeme napsat i pro druhou lomenou čáru a dostaneme analogický vztah:

$$l_2 = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}.$$

Hledaný trojúhelník je pravouhlý, takže musí platit ještě třetí rovnice $a^2 + b^2 = c^2$. Soustava rovnic vypadá takto:

$$260 = \frac{b}{1 - \frac{a}{c}}, \quad (1)$$

$$78 = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}, \quad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Tuto soustavu je možné zjednodušit využitím faktu, že pokud zvětším nějakým faktorem trojúhelník, tak se stejným způsobem zvětší i délky lomených čar – závislost je lineární. Nemusíme se tedy zajímat hned od začátku o měřítko, ale můžeme si některou stranu zvolit. Po vypočtení poměrů mezi délkami jednotlivých stran pak vypočtené délky jenom vynásobíme vhodným koeficientem. Soustavu je nutné v tomto smyslu upravit – zbavit se konkrétního měřítka. Zvolme tedy $c = 1$ a podělme rovnice (1) a (2):

$$10/3 = \frac{b}{a} \cdot \frac{1-b}{1-a}, \quad (3)$$

$$1 = a^2 + b^2. \quad (4)$$

Převědme jmenovatele v rovnici (3) na druhou stranu a dostaneme

$$10a - 10a^2 = 3b - 3b^2.$$

Uvážíme-li, že podle rovnice (4) platí $b^2 = 1 - a^2$, dostaneme

$$-13a^2 + 10a + 3 = 3b.$$

Umocníme tuto rovnici na druhou a opět aplikujeme rovnici (4). Takto se zbavíme všech ostatních neznámých a vznikne pouze jedna rovnice vyššího stupně pro neznámou a .

$$13^2 a^4 - 2 \cdot 10 \cdot 13 a^3 + (100 - 2 \cdot 3 \cdot 13) a^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 a + 3^2 = 3^2 (1 - a^2),$$

$$(169a^4 - 260a^3 + 22a^2 + 60a + 9) + (9a^2 - 9) = 0,$$

$$a \cdot (169a^3 - 260a^2 + 31a + 60) = 0.$$

Tuto rovnici bychom mohli vyřešit podle *Newton-Cardanových* vzorců nebo numericky. Zkusme se však poohlédnout po nějakém racionálním řešení. Má-li polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen $x = p/q$, kde p, q jsou nesoudělná celá čísla, pak musí platit $p|a_0$ a $q|a_n$. (Dokažte jednodušší verzi lemmatu pro celočíselný kořen, tzn. pro případ $q = 1$. Už jste o něm určitě slyšeli, důkaz je velice jednoduchý.)

Hledejme kořeny tvaru p/q , kde $p|2^2 \cdot 3 \cdot 5$ a $q|13^2$. Celočíselný kořen ne-najdeme, zato rychle zjistíme, že $a = 12/13$ je opravdu kořen naší rovnice. Uvažovaný polynom musí být tedy dělitelný polynomem $13a - 12$. Vypočítáme dělením polynomů koeficienty polynomu druhého stupně a rovnice se nám zredukovala na tvar:

$$a \cdot (13a - 12) \cdot (13a^2 + 8a + 5) = 0.$$

Kvadratická část této rovnice má záporný diskriminant, a tedy nemá žádný reálný kořen. Kořen 0 původní rovnice nás také nezajímá, protože vznikl nekvalitní úpravou rovnice (dělení nulou). Jediné řešení je tedy $a = 12/13$. Po dopočtení z rovnice (4) dále vidíme, že $b = 5/13$.

Na závěr dopočteme měřítko trojúhelníka. Vynásobili jsme všechny délky měřítkem u , tedy platí $260u = b/(1 - a)$. Dosadíme vypočtené hodnoty a dostaneme $260u = 5/(13 - 12) = 5$. Tedy $u = 1/52$. Všechny strany tedy musíme vynásobit 52 a hledaný trojúhelník má strany $a = 48, b = 20, c = 52$.

Robert

Úloha 8 – Slyšíte to? (5b)

Zadání: *Matouš zavěsil kovovou destičku ze stavebnice Merkur na nit a rozezněl ji úderem druhé destičky. Destička nějakou dobu vydávala tón stejné výšky, postupně slábnoucí. Potom napustil umývadlo plné vody, destičku znovu úderem rozezněl a pomalu ji ponořoval. Jak a proč se měnila výška tónu s měněním se hloubkou ponoru?*

Řešení: Pokusme se rozebrat některá známá fakta. Jestliže do destičky udeříme, začne vydávat určitý tón, nebo spíše více tónů najednou. Aproximujme si destičku harmonickým oscilátorem (když něco kmitá, tak se téměř vždycky řekne, že je to harmonický oscilátor, a kupodivu to funguje).

Jestliže si představíme takový oscilátor, pak pro úhlovou rychlost jeho netlumených kmitů zavedeme označení ω_0 . Takovouto úhlovou rychlostí by kmital, kdyby nebyl brzděn žádnou třecí silou, kdyby nedocházelo ke ztrátě energie destičky. Obecně ale, kdyby se energie oscilátoru zachovávala, pak oscilátor nemůže vydávat žádný zvuk. I zvukové vlny si totiž odnášejí s sebou jisté množství energie. Je proto přirozenější situaci zesložitit na model tlumeného harmonického oscilátoru. Pro jeho pohyb platí rovnice:

$$ma - kv + m\omega^2 x = 0, \quad (1)$$

kde k je koeficient útlumu odporové síly a x výchylka oscilátoru. Použití tohoto vzorce předpokládá, že síla zodpovědná za tlumení je přímo úměrná rychlosti¹⁵. Tato síla pak způsobuje, že se energie oscilátoru vyzáří do okolí v podobě zvukových vln. Řešením rovnice (1) zjistíme, že úhlová rychlost tlumeného harmonického oscilátoru je v porovnání s netlumeným oscilátorem nižší:

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2m}}. \quad (2)$$

Dá se ukázat, že v prvním přiblížení je výkon zvukových vln přímo úměrný hustotě prostředí, kterým se zvuk šíří. Jestliže destička kmitá ve vzduchu, který má relativně nízkou hustotu, bude její tlumení malé. Ponořme ale destičku do prostředí, které je 1000-krát hustší. Vyzařovaný výkon stoupne řádově 1000-krát. (To by ve vodě hrály 200 W reproduktory! To by byly diskotéky!) Energie destičky se rychle promění ve zvuk, proto se destička ve vodě mnohem rychleji utlumí. Čím více ponořujeme do vody destičku, tím větší bude odporová síla (energie zvukových vln destičky se bude předávat vodě na větší ploše). To ale znamená, že se musí zvětšit koeficient k v rovnici (1). Pak podle vztahu (2) se zmenší frekvence, kterou budeme slyšet.

Udělalí jsme také experiment. Nechali jsme znít destičku na vzduchu a částečně ponořenou do vody. Skutečně, zvuk se ve vodě mnohem rychleji utlumil. Bylo zřetelně slyšet, že čím více jsme ponořili destičku, tím hlubší zvuk vydávala. Pak jsme ještě ponořovali destičku do studené a vroucí vody. V studené vodě zněla destička o něco málo (ale opravdu jenom málo) výš. Studená voda má totiž vyšší hustotu.

Hanss & Bzučo

¹⁵ Dá se ukázat, že tomu tak přibližně je.

Úloha 9 – Poker (5b)

Zadání: Aleš a Bzučo spolu hrají sérii partií pokru. Oba jsou stejně mazaní, mají tedy oba v každé hře stejnou šanci vyhrát (k remízám, jak známo, v pokru nedochází). Předpokládáme, že hry jsou nezávislé, t.j. výsledky jednotlivých her nijak neovplyvňují pravděpodobnost výhry jednoho nebo druhého v partiích následujících. Hraje se o 50 velikých chutných tvarohových palačinek se šlehačkou, které dostane ten, kdo první vyhraje šest her. Najednou Bzučovi přišel mail a hra musela být předčasně ukončena za stavu 5 : 3 pro Aleše. Jak si mají spravedlivě rozdělit palačinky? Zkus přemýšlet, jak bys jim poradil, kdyby platilo jedno z následujících zobecnění:

- Hra byla ukončena ve stavu $a : b$ (speciálně $a = b = 0$),
- pravděpodobnost výhry Bzuča v každé partii je p , pravděpodobnost výhry Aleše je $q = 1 - p$,
- Alešovi stačí k získání palačinek vyhrát k partií, Bzučovi stačí vyhrát s partií.

Řešení: Otázka, ako spravodlivo rozdeliť palacinky, je neobčajne závažná a ťažká. Na úvod by som si dovolil dať slovo niektorým z vás.

Bc. Iva Kouřilová: „Palačinky by měli darovat hladovému spolubydlicimu, protože hráči nesplnili podmínky hry.“

Dr. Honza Klusoň: „Jelikož (...) jsme si všichni rovni, nepřipadá v úvahu jiné dělení než bratrské (...). Vždyť soudruh, který hůře hraje karty, může umět lépe dojit krávy.“

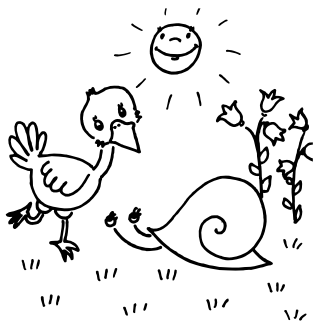
Inak sa vyjadril *Doc. Miroslav Frost*, ktorý by palacinky rozdelil pracujúcemu ľudu.

Kvůli nutnosti vyriešit tento hypotetický problém sa jedného dňa musela zvolať veľká matematická konferencia, ktorá trvala celý týždeň a deň. Ako to už je na takých konferenciách zvykom, problém sa vôbec nevyriešil, ale skôr zahmlil, zato sa však dosiahlo niekoľko netriviálnych výsledkov. Jeden z nich rozoberiem v tomto článku. Bude to odpoveď na otázku, aký je pomer pravdepodobností výhry Bzuča a výhry Aleša.

Vieme, že v každej hre má Aleš rovnakú šancu vyhrať ako Bzučo, teda $1/2$. Predpokladáme, že jednotlivé hry sú nezávislé, čo znamená to, že hry nijako neovplyvňujú nasledujúce hry. Pre tých, ktorí nevedia, čo je to pravdepodobnosť, pripomínam stručnú definíciu:

Je to funkcia definovaná na množine „javov“, ktoré môžu v danom „pokuse“ nastať, ktorá nadobúda ako hodnoty nezáporné reálne čísla a má vlastnosti:

- Pravdepodobnosť, že nastane nejaký jav, je 1.
- Pravdepodobnosť, že nenastane žiadny jav, je 0.
- Ak javy A_1, A_2, \dots majú vlastnosť, že nemôžu žiadne dva z nich nastať súčasne, tak pravdepodobnosť, že nastane buď A_1 alebo A_2 alebo... je súčtom pravdepodobností $P(A_1) + P(A_2) + \dots$



Spýtajme sa teraz, aká je pravdepodobnosť, že v dvoch po sebe nasledujúcich partiách vyhrá Bzučo. Keďže v každej partii majú obaja rovnakú šancu vyhrať a hry sú nezávislé, máme tu štyri možné kombinácie výhier: Bzučo–Bzučo, Bzučo–Aleš, Aleš–Bzučo, Aleš–Aleš, ktoré sú všetky rovnako pravdepodobné, jedna z nich určite nastane a nemôžu nastať dve z nich súčasne. Preto je pravdepodobnosť každej z nich $1/4$, lebo podľa axiémov 1) a 3) pre pravdepodobnosť x každej z nich platí $x + x + x + x = 1$.

Z podobnej úvahy plynie, že pravdepodobnosť, že vyhrá Bzučo trikrát po sebe, je $1/8$. Ak je hra v stave 5 : 3 pre Aleša, tak má Bzučo jediný spôsob, ako môže získať palacinky: musí vyhrať trikrát po sebe. Teda pravdepodobnosť výhry Bzuča je $1/8$. Z toho plynie, že pravdepodobnosť výhry Aleša je $7/8$.

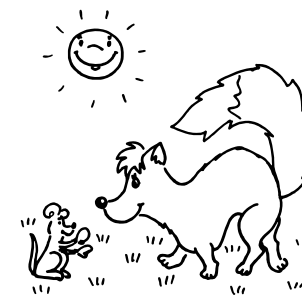
Teda keby si mali rozdeliť palacinky podľa pomeru pravdepodobností, mohli by si ich rozdeliť v pomere 7 : 1, napríklad takto: Aleš 7 palaciniiek, Bzučo 1 a ostatné spolubývajúci.

Ešte zistíme pravdepodobnosti výhier za predpokladov, že Alešovi stačí vyhrať k partií, Bzučovi s partií a pravdepodobnosť výhry Bzuča je p , Aleša $q = 1 - p$. Bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať, že hra je v stave 0 : 0, lebo ak by bola v stave Bzučo : Aleš = $a : b$, tak situácia je úplne ekvivalentná situácii 0 : 0, v ktorej Alešovi stačí vyhrať $k - a$, Bzučovi $s - b$ partií. (Napríklad prípad 5 : 3 pre Aleša, ak sa hrá do šesť, je rovnaký ako prípad 0 : 0, v ktorom Alešovi stačí vyhrať 1 partiu a Bzučovi 3 partie.)

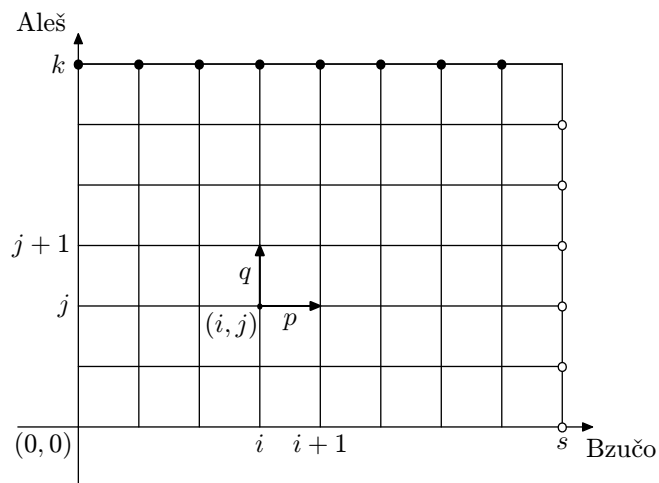
Obecnú pravdepodobnosť výhry Bzuča spočítame tak, že sčítame pravdepodobnosti všetkých možných priebehov hry takých, že Bzučo vyhráva.

Bzučo vyhráva, ak hra skončí v stave Aleš : Bzučo = $x : s$, kde $x < k$. Udalosti, že hra skončí v stave $x : s$, $x < k$, sú nezlučiteľné, a jedna z nich nastane práve vtedy, ak vyhrá Bzučo. Teda pravdepodobnosť výhry Bzuča je suma pravdepodobností, že hra skončí v stave $x : s$, kde $x = 0, \dots, k - 1$. Aká je pravdepodobnosť, že hra skončí v stave $i : s$, $i < k$? Tento stav mohol nastať rôznymi priebehmi, t.j. hra sa mohla do tohto stavu dostať obecnou rôznymi spôsobmi. Každému spôsobu, akým sa hra dostala do stavu $i : s$, môžeme jednoznačne priradiť postupnosť núl a jedničiek, v ktorej 1 zodpovedá výhre Bzuča a 0 výhre Aleša. Hra 1, 1, 0, 1, 1 znamená, že 2 krát vyhral Bzučo, raz Aleš a potom opäť 2-krát Bzučo. Z predpokladu nezávislosti jednotlivých partií plynie, že pravdepodobnosť takejto hry je p^4q ; obecne, ak sa v nejakej postupnosti, ktorá zodpovedá vývoju hry, vyskytuje m krát jednotka a n krát nula, tak pravdepodobnosť takejto hry je $p^m q^n$. Teda každý konkrétny priebeh hry, ktorá sa vyvinula do stavu $i : j$, $i < k$, $j < s$, má pravdepodobnosť $(p^i) \cdot (q^s)$. Takých hier je však práve $\binom{i+j}{i}$, lebo toľko je možností, ako vybrať i prvkov z $i + j$; my vyberáme z $i + j$ členov postupnosti i miest, na ktorých je nula.

Ďalej si uvedomme, že hra, ktorá sa dostala do stavu $i : s$, $i < k$, sa tam



musela dostať zo stavu $i : (s-1)$ a nie zo stavu $(i-1) : s$ (v ktorom by hra bola skončila). Teda pravdepodobnosť, že sa hra dostane do stavu $i : s$, je pravdepodobnosť, že sa dostane do stavu $i : (s-1)$, vynásobená pravdepodobnosťou výhry Bzuča (t.j. poslednej výhry, ktorá posunie pozíciu z $i : (s-1)$ na $i : s$).



Z týchto úvah plynie, že pravdepodobnosť výhry Bzuča je

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{s+i-1}{i} p^{s-1} q^i p = p^s \sum_{i=0}^{k-1} \binom{s+i-1}{i} q^i.$$

Pravdepodobnosť výhry Aleša sa spočíta podobne.

Odpovede na ďalšie otázky (napríklad stredná doba trvania hry) súvisiace s pokrom nájdete v pomerne ľahko čitateľnej knihe *Matematika náhody* od *Jiřího Anděla*.

Peto

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235

E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz

WWW: <http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/>



Výsledková listina

Pořadí	Jméno	Třída	Σ_{-1}	Témata					Úlohy			+	Σ_0	Σ_1
				1	2	3	4	5	7	8	9			
1.	Dr. Martin Demín	1.	70				4	9	4	4	5		26	70
2.	Dr. Tibor Vansa		66	6	5	4	0	14	1	2	4		36	66
3.	Dr. Jakub Jeřábek	septima	58				5		4	3	6		18	58
4.	Doc. Jirka Klimeš	3.B	152				5	10	4	3	5		27	53
5.	Doc. Vašek Cviček	4.A	106				5	7	4	3	4		23	52
6.	Dr. Martin Beránek	septima	54				12		2	5			19	43
7.	Mgr. Karel Židek	4.E	41		4				4	4	1		13	41
8.	Doc. Miroslav Frost	septima A	115				10		3	2	3		18	38
9.	Dr. Honza Klusoň	sexta	75						4	1	1		6	32
10.	Mgr. Peter Bališ	I.A	31				1	7	0	2	1		11	31
11.-13.	Doc. Michal Tarana	4.B	158		7								7	28
	Doc. Jura Tománek	4.	106										0	28
	Mgr. Gabriela Boháčová	1.	28				5	9		3			17	28
14.-15.	Dr. Dáša Eisenmannová	4.A	62										0	21
	Mgr. Dana Beránková	1.	21										0	21
16.-17.	Bc. Jozef Tinaj	3.D	18						1	2	1		4	18
	Mgr. Peter Murárik	3.	39										0	18
18.-23.	Bc. Lucie Vasická	9. ZŠ	17										0	17
	Bc. Pavla Reiffersová	4.	17										0	17
	Mgr. Lenka Beranová	septima C	28						4				4	17
	Bc. Tomáš Kovař	3B	17				8			1	1		10	17
	Bc. Zdeněk Nováček		17										0	17
	Bc. Jana Babováková	kvarta	17							1		5	6	17
24.	Bc. Martin Včelák		16										0	16
25.-26.	Bc. Zuzana Svobodová	3.	15					3		2	1		6	15
	Bc. Anna Zoulová	3.	15				1	3	2	2	1		9	15
27.	Bc. Blanka Balážová	septima	14	1			5		2		3		11	14
28.-29.	Bc. Michaela Šikulová		13										0	13
	Bc. Miroslav Hejna	2.	13										0	13
30.-31.	Dr. Ondřej Plašil	oktáva B	92				4		4	2	2		12	12
	Bc. Iva Kouřilová	3.B	12								1		1	12
32.	Bc. Tomáš Škereň	3.B	11										0	11
33.-35.	Mgr. Tomáš Svatoň		49										0	10
	Dr. Karel Martišek	sexta A	96										0	10
	Bc. Tomáš Rieb		10										0	10
36.-37.	Juraj Konečný		7										0	7
	Peter Petrovský	3.B	7										0	7
38.-41.	Ivan Banas	4.G	5										0	5
	Aleš Hanák	2.A	5								1		1	5
	Eva Macúšová	4B	5										0	5
	Milan Ruzička	3.B	5										0	5
42.	Radka Picková	2.	3										0	3
43.-44.	Jiří Vlach	sexta	3										0	1
	Jiří Hampl	2.	1										0	1