Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník VII číslo 4

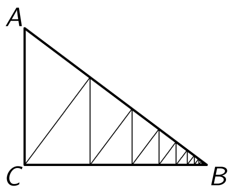
Termín odeslání: **5. března 2001**

Milá kamarádko, milý kamaráde,
v novém čísle Ti nabízíme spolu se třemi úlohami dvě zbrusu nová témata. Starší témata můžeš samozřejmě řešit dál. Přejeme Ti hodně zdaru a už se moc těšíme na Tvé články, řešení a vůbec na vše zajímavé, co nám pošleš.

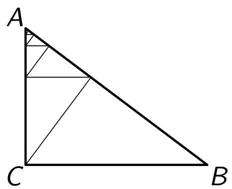
Zadání úloh

7. Úloha – Lomená čára (4b)

Z vrcholu A do vrcholu B pravoúhlého trojúhelníku (obr. 1) vede lomená čára, jejíž úseky jsou kolmé střídavě k odvěsně BC a k přeponě AB. Celková délka lomené čáry je 260 dílků.



Obr. 1



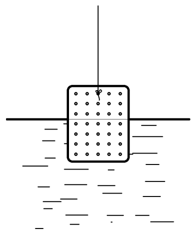
Obr. 2

Z vrcholu B do vrcholu A téhož trojúhelníku (obr. 2) vede lomená čára, jejíž úseky jsou kolmé střídavě k odvěsně AC a k přeponě AB. Celková délka této lomené čáry je 78 dílků.

Jaké jsou délky stran trojúhelníka ABC?

8. Úloha – Slyšíte to? (5b)

Matouš zavěsil kovovou destičku ze stavebnice Merkur na nit a rozezněl ji úderem druhé destičky. Destička nějakou dobu vydávala tón stejné výšky, postupně slábnoucí. Potom napustil umývadlo plné vody, destičku znovu úderem rozezněl a pomalu ji ponořoval. Jak a proč se měnila výška tónu s měnící se hloubkou ponoru?



9. Úloha – Poker (5b)

Aleš a Bzučo spolu hrají sérii partií pokru. Oba jsou stejně mazaní, mají tedy oba v každé hře stejnou šanci vyhrát (k remízám, jak známo, v pokru nedochází). Předpokládáme, že hry jsou nezávislé, t.j. výsledky jednotlivých her

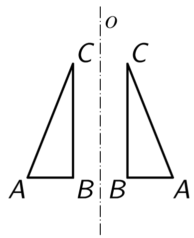
nijak neovlivňují pravděpodobnost výhry jednoho nebo druhého v partiích následujících. Hraje se o 50 velikých chutných tvarohových palačinek se šlehačkou, které dostane ten, kdo první vyhraje šest her. Najednou Bzučovi přišel mail a hra musela být předčasně ukončena za stavu 5 : 3 pro Aleše. Jak si mají spravedlivě rozdělit palačinky? Zkus přemýšlet, jak bys jim poradil, kdyby platilo jedno z následujících zobecnění:

(a) Hra byla ukončena ve stavu $a : b$ (speciálně $a = b = 0$),
(b) pravděpodobnost výhry Bzuča v každé partii je p, pravděpodobnost výhry Aleše je $q = 1 - p$,
(c) Alešovi stačí k získání palačinek vyhrát k partií, Bzučovi stačí vyhrát s partií.

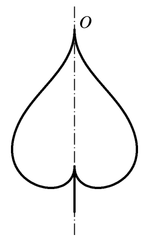
Zadání témat

Téma IV. – Lipový list

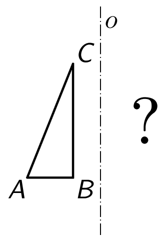
Na základní škole se probírá zobrazení, které se nazývá *osová souměrnost*. Pro toto zobrazení je důležitá přímka o, které se říká osa souměrnosti. Podle této přímky se geometrické objekty v rovině „zrcadlí“. Na obrázcích 3 a 4 je nakreslen obraz trojúhelníku ABC a poloviny lipového listu v osové souměrnosti.



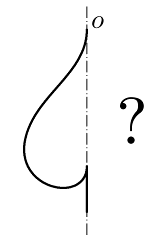
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Matematicky můžeme definovat osovou souměrnost podle přímky o jako jediné zobrazení, které splňuje tyto podmínky:

1. Rovnoběžka s osou má obraz rovnoběžný s osou.
2. Pokud není přímka rovnoběžná s osou souměrnosti, potom se protíná se svým obrazem na ose o.
3. Délka úsečky je rovna délce obrazu této úsečky.

Zkusme vymyslet nové zobrazení, které bude splňovat podmínky 1. a 2., ale podmínku 3. nahradíme podmínkou $3'$:

$3'$. Střed úsečky spojující bod a jeho obraz leží na ose souměrnosti.

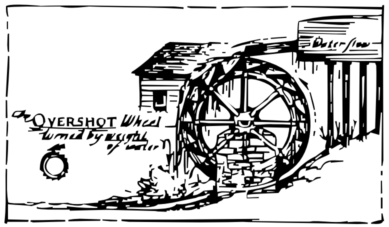
Nakresli obraz trojúhelníka (obr. 5), půlky lipového listu (obr. 6) a dalších geometrických objektů v tomto zobrazení. Popiš, jak jsi obrázky nakreslil! Pokus se vystihnout vlastnosti nového zobrazení. Jak se změní obsah zobrazovaných útvarů?

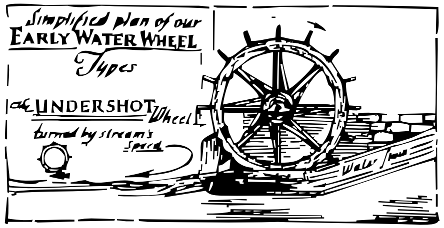
Téma V. – Kolo kolo mlýnský

Jak nejlépe využít vodní energii? V minulosti lidé stavěli mlýnská kola. Kdybyste v těch dobách žili, jaký mlýn byste postavili: s horním náhonem, anebo s podběhem? Jaká je účinnost v těchto případech? Jak závisí na tvaru kola? Jaké fyzikální podmínky účinnost ovlivňují?

Postavte několik jednoduchých modelů. Vhodné je např. vystříhnout z kartonu kola s různými poloměry a do nich zaříznout různý počet lopatek nejrůznějších tvarů. Jak zabezpečit karton, aby byl vodovzdorný, necháváme na vás. Své modely můžete roztáčet na špejli pod vodovodem a pozorovat.

Zkuste navrhnout lepší zařízení (s větší účinností) než mlýnské kolo.



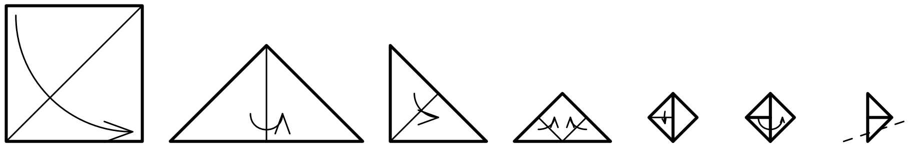


Téma 1 – Papírové koberečky

Strihanie trojuholníkov

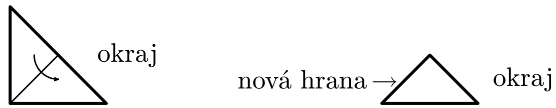
Bc. Pavla Reiffersová

Pozn. red.: Z řešení autorky vybíráme zajímavé pasáže:



obr. 1 obr. 2 obr. 3 obr. 4 obr. 5 obr. 6 obr. 7

…už po druhom kroku (obr. 2) zistíme, že trojuholník má dve také strany (odvesny), ktoré zodpovedajú vnútrajšku štvorca. Ak striháme cez tieto hrany, objavia sa nám útvary na okraji koberčeka, ak striháme cez tretiu hranu, všetky obrazce budú vovnútri papiera. Ak takto pokračujeme ďalej v prekladaní papiera do trojuholníka alebo štvorca (kroky 3, 4 a 7), vždy ostane iba jedna hrana obsahujúca okraje pôvodného papiera. Každá novovzniknutá hrana predstavuje vnútro štvorca.

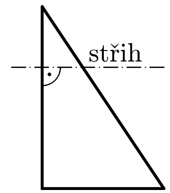


obr. 3 obr. 4

Ak prekladáme papier podľa krokov 3, 4 a 7, potom po vystrihnutí vnútra bude zvyšok koberčeka spojitý. Nedôjde k prestrihnutiu okrajovej hrany, pretože táto sa nachádza na jednej z odvesien, zatiaľčo my strihАme papier cez preponu. Ak nedôjde k prestrihnutiu hrany (pri úplnom prekladaní k tomu nedôjde, pretože každá hrana zostáva na okraji), bude celý zvyšok po vystrihnutí vnútra spojitý.

Dělení koberečků

Dr. Václav Cviček



Na začátek je třeba stanovit přesná pravidla tvorby koberečků. Máme papírový čtverec, který přehneme kolem nějaké přímky procházející obrazcem. Pak vezmeme nůžky a vzniklý útvar (předpokládáme, že zůstane ve dvou rozměrech) po stranách ostřihneme a nakonec rozložíme (nepočítám s tím, že bychom po jednom stříhání mohli obrazec opět přeskládat a znovu ostříhat). Otvory v koberečku musí mít nějaký rozměr, nemohou vzniknout jen nastřižením papíru.

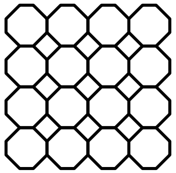
Dělení koberečků

1. Prvním faktorem pro rozdělení koberečků by mohl být tvar čáry, po které jsme provedli střih. Typ čáry může být např.:
   (1) přímá čára (část přímky)
   (2) část kružnice
   (3) lomená čára (složená z úseček)
   (4) část nějaké pěkné křivky[1]
   (5) nepravidelná křivka[1]
2. Dalším kritériem může být počet střihů
   (1) pouze rovnoběžně se stranami čtverce
   (2) i v úhlu 45° na strany čverce
   (3) nepravidelně
3. Důležitým kritériem bude počet, kolikrát jsme přehnuli papír, než jsme začali stříhat. Pro mnou použitý papír připadá v úvahu 10 prohnutí[2].
4. Dalo by se zamyslet také nad tím, jakým směrem jsme přehýbali vzhledem ke stranám čtverce. Např. jen rovnoběžně s jeho stranami.

Otázkou zůstává, co od tohoto dělení očekáváme. Takto můžeme např. popsat jednodušší koberečky.

[1] *Pozn. red.:* Jak je definována pěkná křivka, autor neuvádí. Mohli byste mu pomoci s definicí? Jaký je rozdíl mezi *pěknou* a *nepravidelnou* křivkou?

[2] *Pozn. red.:* Proč deset a ne např. 9 nebo 11? Komu se podaří přehnout papír alespoň 12krát?



Pozastavil bych se jen u příkladu, kdy přehýbáme čtverec podle přímek procházejících daným bodem (nejlépe středem). Při odstřižení vrcholu s tímto bodem dostaneme 2^{n-1}-úhelník (někdy mohou ležet dvě sousední strany na jedné přímce, dostaneme tedy m-úhelník[3], kde $m < n$, n je počet přehybů). Pokud překládáme pravidelně, vždy napůl, vznikne nám pravidelná 2^{n-1}-cípá hvězda. Pokud navíc stříháme kolmo na osu útvaru, dostaneme pravidelný 2^{n-1}-úhelník.

Pozn. autora:

1 Některé koberečky je možné vytvořit více způsoby. Stejný kobereček dostaneme např. (používám-li mnou výše zavedený zápis) jako $[6-1-1-1]$ a $[4-1-4-1]$. Můžete ho vidět na předcházejícím obrázku.

   Pozn. red.: Podařilo se nám vytvořit tento kobereček i jinak. Přijdete na to, jak?

2 Jedním přímým střihem lze vytvořit libovolný pravidelný p-úhelník. Ohýbáme vždy přes střed p-úhelníku. Počet potřebných přehnutí p je pak $\log_2(p) \leq n < \log_2(p) + 1; p \in \mathcal{N}$.

Pozn. red.: Má někdo nápad, jak vylepšit navržené rozdělení koberečků? Např. odstranit skutečnost, že stejné koberečky lze vytvořit více způsoby. Dosud jsme se zabývali jenom tím, jaké pěkné koberečky lze vyrobit metodou stříhání poskládaného papíru. Zkuste se ale zamyslet nad tím (a pokud možno ukázat nebo dokázat), které tvary naopak *nelze* touto metodou vystříhnout. Dovede někdo z vás vystříhnout pravidelný trojúhelník nebo pětiúhelník?

Případní řešitelé budou odměněni hojným počtem bodů.

Bzučo

Téma 2 – Z vodní říše

Mgr. Peter Murárik se zamýšlel nad tím, jaká bude stabilní poloha těles v tekoucí vodě, bohužel jeho úvahy byly scestné.

Fyzika plavání těles je velmi důležitá v loďařství. Navrhněte tvary lodí ideálních pro plavbu v nejrůznějších podmínkách (např. klidné moře, rybník, bouře v Tichém oceánu, rychlý horský potok, Niagárské vodopády apod.).

Do příště se také můžete zamyslet, jak to bude vypadat, budou-li plavat na hladině (klidně i tekoucí) nehomogenní tělesa.

Bzučo

[3] *Pozn. red.:* Přeložme třikrát papír, jako kdybychom chtěli získat pravidelnou 8-cípou hvězdu. Stříhejme pak podle obr. 1. Namísto osmiúhelníku dostaneme pravidelný čtyřúhelník.

Téma 3 – Kyvadlo

Závislost periody kyvadla na amplitudě pro úhly větší než malé – numerické řešení pohybové rovnice.

Doc. Jura Tománek

Otáčivý pohyb kyvadla kolem vodorovné osy je určen pohybovou rovnicí

$$M = -mgd \cdot \sin\phi = J \cdot \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vhledem k ose otáčení, m je jeho hmotnost, d vzdálenost těžiště od osy otáčení a g tíhové zrychlení. Je-li amplituda ϕ_m úhlové výchylky malá, platí $\sin\phi \approx \phi$ a pohybová rovnice kyvadla se zjednoduší na tvar

$$M = -mgd \cdot \phi = J \cdot \varepsilon = J \cdot \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

který je analogický jako u pohybové rovnice pružinového oscilátoru. V této analogii kinematickým veličinám ϕ, ω, ε otáčivého pohybu kyvadla odpovídají kinematické veličiny y, v, a posuvného pohybu závaží, momentu setrvačnosti J kyvadla odpovídá hmotnost závaží a direkčnímu momentu $D = mgd$ kyvadla odpovídá tuhost pružiny. Kmity kyvadla, které vychýlíme z rovnovážné polohy o malý úhel $\phi_m < 5°$ a v čase $t = 0$ uvolníme, jsou popsány vztahem

$$\phi = \phi_m \cdot \cos(\Omega \cdot t) = \phi_m \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{mgd}{J}} \cdot t\right).$$

Doba kyvu τ_0 je polovinou periody T_0,

$$\tau_0 = T_0/2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mgd}}\,.$$

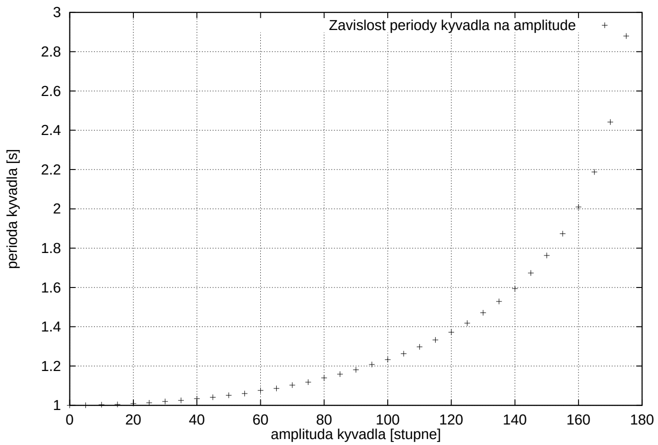
Dobu kyvu τ při velké amplitudě úhlové výchylky určíme z modelu kmitavého pohybu jako dvojnásobek doby, za kterou se kyvadlo po uvolnění z krajní polohy dostane do rovnovážné polohy. Použijeme metodu AVR[4] aplikovanou na veličiny ε, ω, ϕ. Pohybovou rovnici upravíme na tvar

$$\varepsilon = \frac{-mgd}{J} \cdot \sin\phi = -\frac{\pi^2}{\tau_0^2} \cdot \sin\phi\,.$$

V následujícím programu provádíme modelování opakovaně, pričemž pokaždé zvětšíme počáteční úhlovou výchylku ϕ_m. Zjištěné doby kmitu jsou zachyceny v tabulce a grafu.

[4] To znamená, že nejprve vypočteme zrychlení, z něj rychlost, posléze z ní polohu, přičemž v každém kroku změnu rychlosti, resp. polohy linearizujeme.

```
Závislost doby kyvu sekundového kyvadla na amplitudě úhlové
výchylky.
--------- proměnné, konstanty, procedury a funkce -----------

T0 = 1; K=pi^2/T0^2
h=0.001; dfm=5

------------------- počáteční hodnoty -----------------------

fm=0; T=1;
DISP

-------------------  model ----------------------------------

fm=fm+dfm; f=fm*pi/180; t=0; w=0
REPEAT               !
     e=-K*sin(f)     !               e..úhlové zrychlení
     w=w+e*h         ! Metoda AVR    w..úhlová rychlost
     f=f+w*h         !               f..úhlová výchylka
     t=t+h
UNTIL f<0
   t=t+f/w; T=2*t    ! Určení doby kyvu pro danou amplitudu fm
IF fm>=179 THEN STOP END
```



V grafu je zachycena závislost periody kyvadla na jeho amplitudě, přičemž kyvadlo je takové, že pro malé amplitudy ($\phi_m \to 0$) je perioda kmitavého pohybu rovna $T_0 = 1{,}0\,\mathrm{s}$.

amplituda [°]	0	5	10	15	20	25
perioda [s]	1.00000	1.00052	1.00309	1.00470	1.00933	1.01297

amplituda [°]	30	35	40	45	50	55
perioda [s]	1.01959	1.02517	1.03366	1.04103	1.05122	1.06017

amplituda [°]	60	65	70	75	80	85
perioda [s]	1.07582	1.08608	1.10285	1.11804	1.13951	1.15910

amplituda [°]	90	95	100	105	110	115
perioda [s]	1.18066	1.20796	1.23277	1.26279	1.29766	1.33295

amplituda [°]	120	125	130	135	140	145
perioda [s]	1.37212	1.41849	1.47118	1.52905	1.59455	1.67352

amplituda [°]	150	155	160	165	170	175
perioda [s]	1.76280	1.87350	2.00949	2.18756	2.44164	2.87935

Martin Mucha

Úloha 4 – Pexeso

Zadání: *Na soustředění M&M se konal pexesový turnaj. Šest hráčů mělo po dvojicích změřit své duševní síly tak, aby si každý z nich zahrál právě jednou s každým z pěti ostatních. Hra byla rozdělena do pěti kol, přičemž v každém kole probíhaly současně tři hry tří dvojic (nikdo nehrál dvě pexesa zároveň).*

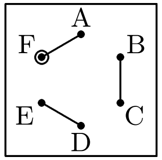
Jaký je nejmenší počet vzájemně různých pexes potřebných k tomu, aby nikdo z hráčů nehrál vícekrát se stejným pexesem? Od každého pexesa je k dispozici pouze jedna sada. Pokud se ti zdá úloha příliš lehká, zkus najít nejmenší počet pexes, která by za týchž podmínek potřebovalo $2n$ *hráčů* $(2, 4, 6, 8, \ldots)$.

Řešení: Ukažme si řešení pro šest hráčů. Je zřejmé, že pexes nemůže být méně než pět. Tvrdím, že nejmenší počet je šest. Důkaz se skládá ze dvou kroků.

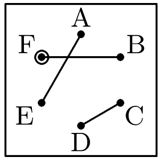
i. Tabulka 1 ukazuje kombinaci pro šest hráčů. Dovolil jsem si použít tabulku *Dr. Dáši Eisenmannové.*

—	Pexeso					
Kolo	A	B	C	D	E	F
1	1-2	5-6	3-4			
2	4-6	1-3	2-5			
3	3-5			2-6	1-4	
4		2-4		1-5		3-6
5			1-6		2-3	4-5

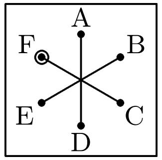
ii. Ukážu, že to nejde pro pět pexes.



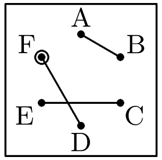
Obr. 1



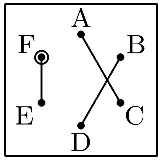
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

1. Bod F spojíme v každém obrázku s jiným vrcholem.
2. Obrázek 1 dokončíme BÚNO[5] nějakým spojením zbylých čtyř bodů.
3. Na obrázku 2 si můžeme BÚNO vybrat, zda s bodem A spojíme E nebo D (na obr. 1 jsou body E a D rovnocenné).
4. Obrázky 3, 4, 5 jsou už určeny jednoznačně.

Obrázky 1–5 představují zápis pěti kol. Jakékoli jiné sehrání pěti kol se od těchto obrázků liší pouze přejmenováním hráčů. Hrana mezi dvěma vrcholy na obrázcích znamená „hráči x a y hrají spolu nějaké pexeso“.

Napišme si zápis her výčtem hran z obr.1-5.

obr.č.	seznam her
1	AF, BC, ED
2	AE, BF, CD
3	AD, BE, CF
4	AB, CE, DF
5	AC, BD, EF

Aby stačilo pět pexes, musí existovat způsob, jak vybrat pět trojic hran, kde prvky téže tříprvkové množiny pocházejí z různých kol (obrázků). Každá taková trojice hran představuje hry s týmž pexesem. Ukážeme, že vybrat 5 trojic hran, kde hrany v každé trojici pocházejí z různých kol, není možné.

1. BÚNO vybereme dvojici hráčů AB, k němu BÚNO CF, DE. Kolo: AB, CF, DE.
2. Ukažme si, jak bude vypadat uspořádání pro dvojici AC. Máme tyto celkem tři možnosti:
   (a) BD, EF
   (b) BE, DF
   (c) BF, DE

   Možnost (c) zjevně nejde. Je jedno, vyberu-li (a) nebo (b). Zvolme tedy (b). Kolo: AC, BE, DF.
3. Jak bude vypadat dvojice pro AE? Máme tři možnosti.

[5] Bez újmy na obecnosti.

   (a) BF, CD
   (b) BC, DF
   (c) BD, CF

   Všechny kombinace jsou nemožné. **QED**[6].

Dále jste se pokoušeli získat výsledky pro některá malá n (většinou hrubou silou). Pro $n = 1$ je třeba jedno pexeso, pro $n = 2$ je jich třeba šest. Pro $n = 4$ se už výsledky lišily, a to od sedmi po jedenáct. Chtěl bych zde pochválit programovací nadšení *Mgr. Martina Demína*, které mu vydrželo na 10 stránek A4 zdrojového textu velmi malým fontem.

Obecné řešení se nikomu z vás nepodařilo vymyslet, a proto tuto problematiku nechávám stále otevřenou.

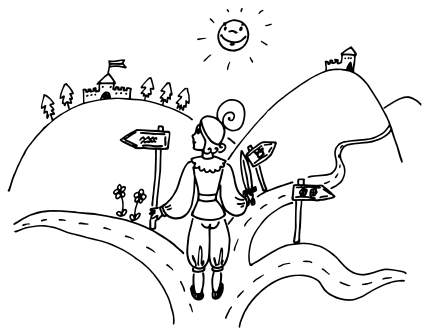
Hanss

Úloha 5 – Cesta za Drakem

Zadání: *Bylo jednou jedno království, v němž žila princezna, kterou jednoho rána unesl Drak. Zachránit se ji vydal její nadějný nápadník – udatný rytíř Mudrlant. Šel cestou necestou, až přišel na rozcestí, kde potkal dva bratry, kteří radí kolemjdoucím, kudy dál. První cesta vedla do močálů, kde poutníka čekala jistá smrt, druhá cesta vedla do Drakovy jeskyně (kde poutníka čeká též jistá smrt, ale aspoň uvidí princeznu).*

U těchto dvou bratrů stála tabule s nápisem: „Jeden z bratrů je Lhář, druhý je Poctivec.“ Lhář je člověk, který na každou otázku odpoví lží. Poctivec naopak vždy musí odpovídat pravdivě. Pocestný může položit jen jednu otázku jedinému z bratrů, a přitom neví, který je který. Jak se musí rytíř zeptat, aby si mohl být jist, že se dostane do Drakovy jeskyně? Dokážeš Mudrlantovi poradit, i kdyby se za stejných podmínek rozhodoval mezi třemi cestami?

Řešení:



Najväčší problém pri riešení a opravovaní tejto úlohy bol ten, že nie je jednoznačne dané, čo je to otázka, odpoveď, pravda a klamstvo. Súvisí to s tým, že v bežnom živote používame slová, ktoré nie sú ani zďaleka tak presne definované ako v matematike. V exaktnej matematickej teórii je každé tvrdenie buď pravdivé, alebo nepravdivé, alebo nerozhodnuteľné z daných axióm. Keďže v zadaní úlohy o drakovi sme použili nematematické výrazy z bežného jazyka, riešenie závisí na tom, ako si zvolíme triedu prípustných otázok a odpovedí. Prvé, čo človeka napadne v prípade dvoch ciest, je otázka

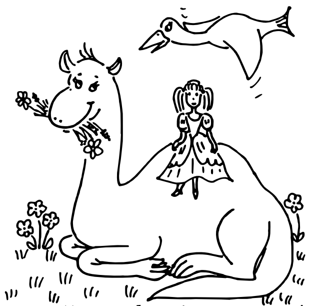
„Ktorou cestou by ma poslal tvoj brat?“

Označme cesty $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Očakávame, že ak mi odpovie $\mathcal{A}$, tak správna cesta je $\mathcal{B}$ a ak mi odpovie $\mathcal{B}$, tak správna cesta je $\mathcal{A}$. Avšak čo keby nám Klamár

[6] Quod erat demonstrandum –lat. což bylo dokázati.

odpovedal „cestou $\mathcal{E}$“, „žiadnou“, „do pekla“, alebo „cestou, ktorá vedie do močiara“, alebo Poctivec by mohol povedať „tou, ktorou by ťa poslal“ alebo „do močiara“? V prípade dvoch ciest $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ by sa náš Mudrlant ešte stále vynašiel: ukáže na cestu $\mathcal{A}$ a povie:

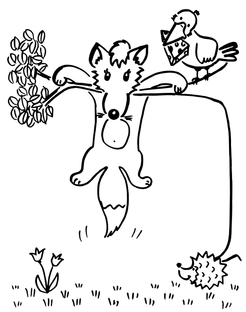
„Keby sa ťa niekto spýtal, či táto cesta vedie k princezne, povedal by si áno?“



Na to sa naozaj už očakáva jednoznačná odpoveď áno alebo nie a v prípade správnej cesty $\mathcal{A}$ obaja povedia „áno“, v prípade správnej cesty $\mathcal{B}$ obaja povedia „nie“. Čo však robiť, ak budú cesty tri? Tu už nevystačíme s otázkami, na ktoré možno odpovedať len áno alebo nie. Zrejme informácia áno-nie obsahujúca presne jeden bit nestačí na rozhodovanie medzi *troma* cestami. Náš algoritmus je totiž zobrazenie z množiny možných odpovedí do množiny ciest. Ak sú však možné odpovede len dve a cesty tri, bude existovať aspoň jedna cesta, ktorá v našom algoritme nemá vzor. Preto musíme uvažovať len otázky, na ktoré je možných odpovedí viac. Ako však definovať, čo je odpoveď, čo je klamstvo, apod.? Tu jednoznačné riešenie naozaj nejestvuje. Uvádzam jedno *možné* riešenie v rámci *jedného modelu*, ako príklad chápať.

Môj model je takýto:

Otázky-odpovede budú len také dvojice, že na každú otázku existuje neprázdna aspoň dvojprvková množina možných odpovedí, o každej odpovedi z tejto množiny možno jednoznačne rozhodnúť, či je pravdivá alebo nie, aspoň jedna odpoveď je v každej situácii (rôzne správne cesty, prípady oboch bratov, ktorých sa pýtame…) pravdivá, každá, ktorá nie je pravdivá, je nepravdivá a aspoň jedna odpoveď je v každej situácii nepravdivá. Pritom jeden aj druhý odpovedajú len odpoveďami z tejto množiny.



Potom existujú dva typy otázok: také, na ktoré *správna odpoveď* závisí na tom, či sa pýtame Klamára alebo poctivca (napr. *„Klameš?“*) a také, pri ktorých správna odpoveď nezávisí na tom, koho sa pýtame (napr. *„Koľko je hodín?“*). Ľahko sa ukáže, že v prípade otázky druhého typu (t.j. *„Koľko je hodín?“*) nie je možné jednou otázkou zistiť správnu cestu. Jediná možnosť je spýtať sa na niečo, čoho pravdivosť závisí na tom, koho sa pýtame. To sú otázky, v ktorých sa vyskytuje slovné spojenie *„Keby sa ťa niekto spýtal…“*, *„keby sa niekto spýtal tvojho brata…“* alebo s nimi ekvivalentné.

Väčšina z vás poslala takúto otázku na tri cesty:

„Keby sa niekto spýtal tvojho brata, ktorá cesta vedie k princezne, ktorú cestu by neukázal?“

Tu by sme mohli naozaj očakávať, že sa dozvieme cestu k princezne, ak predpokladáme, že množina odpovedí je len trojprvková a sú to práve naše tri cesty, a že Poctivec *nevie*, ktorú z dvoch nesprávnych ciest by jeho brat ukázal na otázku, ktorá cesta vedie k princezne. Ak to nevie, musí odpovedať tak, aby bolo isté, že odpovedá pravdivo, a teda ukáže cestu k princezne, lebo tú by Klamár určite neukázal. Ak sa spýtame Klamára, má samozrejme jedinú šancu, aby klamal: ukázať správnu cestu.

Má to však háčik: Čo ak sa Klamár nerozhoduje náhodne? Čo ak v prípade nesprávnych ciest $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ na otázku, ktorá cesta vedie k princezne, odpovie vždy „$\mathcal{B}$“ a Poctivec to vie? V tom prípade by Poctivec mohol odpovedať „$\mathcal{C}$“, lebo vie, že Klamár by povedal $\mathcal{B}$ a teda by nepovedal $\mathcal{C}$. Aby sme teda uznali túto otázku ako správne riešenie, musíme prijať istý dodatočný predpoklad, čo nie je celkom pekné.

Ako zaujímavosť uvádzam dole pár riadkov od *Mgr. Lenky Beranovej*, ktorá zaručuje Mudrlantovi 2/3 šancu nájsť draka a od *Mgr. Martina Beránka*, ktorý zaručil 3/4 šancu.

Ja by som rytierovi poradil takúto otázku - vo vyššie popísanom modeli by mala fungovať:

„Zdravíčko! Ktorá z týchto ciest má vlastnosť, že vedie k drakovi a krásnej princezne práve vtedy, keď si Poctivec?“

Samozrejme predpokladám, že je „daná“ trojprvková množina možných odpovedí, sú to práve naše tri cesty a princezna je krásna.

Mgr. Lenka Beranová

Asi bych mu poradila, aby se prostě dotázal na jednu z nich otázkou, kterou jsem vymyslela pro dvě cesty[7].

Pokud zjistí, že je to správné, má štěstí a vydá se po ní. Pokud zjistí, že je špatná, může si hodit korunou, po které ze zbývajících dvou cest se vydá[8].

Mgr. Martin Beránek

„Jakou cestu by mi tvůj bratr poradil, kdybych se ho ptal, kudy se nedostanu k Drakovi?“

[7] „Je na otázku, zda je tato cesta správná a zda jsi Poctivec, stejná správná odpověď?“

[8] S pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$ uhádne správnu cestu, s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$ neuhádne, a v tom prípade si s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ zvolí správnu cestu, takže $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

Pokud se takto zeptám Poctivce (1/2 šance), tak je vše jasné, protože Lhář by mi poradil cestu, která k Drakovi VEDE (ptal jsem se která NEVEDE) a Poctivec mi to pouze přetlumočí. Takže se vydám tou cestou, co uslyším jako odpověď. Horší je, pokud se zeptám Lháře. Poctivec by mi totiž doporučil jednu ze dvou cest, které k Drakovi NEVEDOU, a Lhář to pak zneguje, takže mám 1/2 šanci, že mi poradí cestu, která k Drakovi VEDE, a 1/2, že mi poradí tu druhou, co k Drakovi NEVEDE[9].

V každém případě se vydám tou cestou, kterou jsem uslyšel jako odpověď, a mám už 3/4 (= 1/2 + (1/2 z 1/2)), že se dostanu úspěšně k cíli!

Peťo

Úloha 6 – Fatamorgána

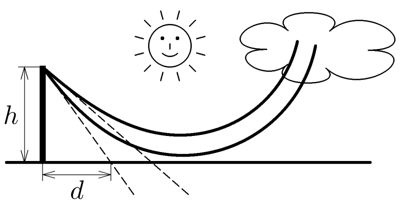
Zadání: *Žíznivý velbloud jde po dlouhé a rovné silnici Saharou. Náhle před sebou spatří kaluž vody. Rozběhne se z plných sil, těše se na chladné osvěžující doušky životodárné tekutiny. Po několika hodinách usilovného běhu se velbloud zastaví a zamyslí. Ano, náš velbloud je ve skutečnosti velice vzdělaný, vzpomene si, že kdysi kdesi četl o jevu zvaném fata morgána, a tak zanechá pronásledování podezřelé louže a šetře sil dojde do svého původního cíle – nádherné oázy plné pramenité vody.*

Vysvětli podstatu jevu, kvůli kterému přišel velbloud málem o život, a nakresli, jak se paprsky ohýbaly do jeho očí. Spočítej, jak daleko před sebou velbloud viděl domnělou kaluž vody, víš-li, že teplota saharního vzduchu činí $35^\circ C$ a teplota vzduchu u povrchu silnice dosahuje $70^\circ C$. Ukaž, že místo, kde velbloud louži vidí, nezávisí na průběhu hustoty vzduchu nad silnicí.

Indexy lomu vzduchu pro dané teploty za normálního tlaku jsou $n(35^\circ C) = 1{,}000\,262$ a $n(70^\circ C) = 1{,}000\,235$. Velbloudovy oči hledí ve výšce $2\,\mathrm{m}$ nad silnicí.

Řešení: Celá situace je nakreslena na obr. 1:

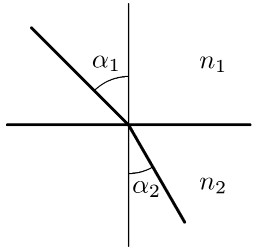
Velbloud má oči ve výšce $h = 2\,\mathrm{m}$ a vidí kaluž, začínající ve vzdálenosti d od sebe. Obraz kaluže vzniká tak, že světlo jdoucí od mraků na obloze se nad zemským povrchem vlivem změn indexu lomu prostředí láme a poté dopadá na sítnici velbloudova oka. Velbloudovo oko si tyto paprsky prodlouží přímkou ve směru, ze kterého paprsky přišly, a tak oko vidí mrak na zemi, který našemu velbloudovi připadá jako voda.



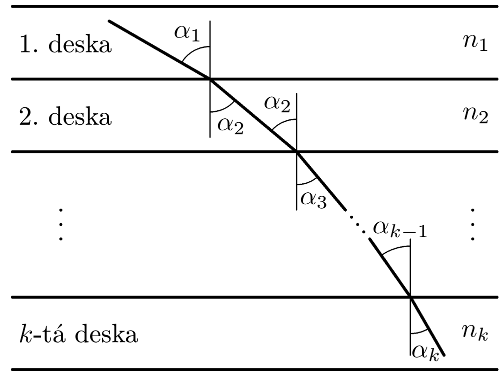
Obr. 1

Do velbloudova oka dopadá pod největším úhlem paprsek, který se ohýbá těsně nad zemí, a právě tento paprsek po prodloužení odpovídá začátku kaluže ve vzdálenosti d od velblouda. Ostatní paprsky, jež se ohýbají výše, dopadají do velbloudova oka pod menšími úhly a způsobují, že velbloud vidí i vzdálenější části kaluže. Pokusme se spočítat, jak daleko je začátek kaluže d od velblouda.

[9] V prípade nesprávnych ciest $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ by Poctivec povedal $\mathcal{B}$, Klamár to zneguje a povie buď $\mathcal{A}$, alebo $\mathcal{C}$.



Obr. 2



Obr. 3

Paprsek světla přecházející z prostředí opticky řidšího do prostředí opticky hustšího se láme směrem ke kolmici (viz obr. 2). Vztah mezi indexy lomu jednotlivých prostředí a úhly paprsků popisuje Snellův zákon

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}\,.$$

Položme si k skleněných desek o indexech lomu $n_1, n_2, \ldots, n_k$ na sebe a nechme dopadat paprsek na první desku. Označme si úhly, pod jakými se paprsek šíří v jednotlivých deskách, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (viz obr. 3). Snellův zákon nám pro jednotlivé přechody dá vztahy

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}\,, \qquad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}\,, \qquad \ldots\,, \qquad \frac{\sin\alpha_{k-1}}{\sin\alpha_k} = \frac{n_k}{n_{k-1}}\,,$$

kde po odstranění zlomku dostáváme:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = \ldots = n_k \sin\alpha_k\,.$$

Vidíme, že $n_i \sin\alpha_i$ je konstantní. Vyjádřeme si úhel α_k v závislosti např. na prvním úhlu α_1 a indexech lomu n_1 a n_k.

$$\sin\alpha_k = \frac{n_1}{n_k}\sin\alpha_1\,.$$

Vidíme, že úhel α_k na jiných parametrech nezávisí, tedy není důležité, jaké byly indexy lomu druhé až předposlední desky. Tohoto poznatku použijme při výpočtu úhlu, pod jakým vstupuje paprsek lámající se těsně nad zemí do velbloudova oka. Označme si tento úhel α. Rozdělme si vzduch na spoustu tenkých vodorovných vrstviček. Podle předchozího pozorování víme, že nám stačí znát pouze indexy lomu vrstvičky těsně u země $n(70\,^\circ\mathrm{C})$ a vrstvičky ve výšce velbloudova oka $n(35\,^\circ\mathrm{C})$. Jelikož se paprsek ve vrstvičce těsně nad zemí otáčí, je úhel, pod jakým se zde šíří, $\beta = 90^\circ$ od kolmice. Podle výše uvedeného vzorce máme

$$\sin\alpha = \frac{n(70\,^\circ\mathrm{C})}{n(35\,^\circ\mathrm{C})}\sin 90^\circ\,.$$

Vzdálenost d závisí na h a α podle vztahu

$$d = h\tan\alpha\,.$$

Úpravou obou vztahů dostáváme pro vzdálenost d vztah

$$d = h\frac{n(70\,^\circ\mathrm{C})}{\sqrt{n(35\,^\circ\mathrm{C})^2 - n(70\,^\circ\mathrm{C})^2}}\,.$$

Dosazením pro konkrétní hodnoty dostáváme zhruba $d = 272\,\mathrm{m}$.

Epilog: Byl jsem překvapen množstvím došlých řešení a potěšen spoustou výborných. Přesto bych vás rád upozornil na časté chyby, kterých jste se dopouštěli. Mnozí z vás řešili úlohu tak, že uvažovali pouze dvě prostředí o daných indexech lomu, přičemž úlohu zredukovali na hledání úhlu, při kterém dochází k totálnímu odrazu. V případě, že máme dvě prostředí ostře od sebe oddělená, je tato úvaha správná. V našem případě se nám ale index lomu mění plynule, totální odraz tedy nemůže nastat. Vezmeme-li si libovolné rozhraní, je rozdíl indexů lomu na rozhraní nekonečně malý, tedy k odrazu nedojde a paprsek se bude plynule lámat. Toto plynulé lámání způsobí, že nejprve paprsek letí k zemi, postupně se otáčí, a posléze letí vzhůru. Toto se sice v jisté abstrakci dá chápat jako totální odraz, z fyzikálního hlediska je to ale jiný jev. Nejlépe by bylo řešit úlohu Fermatovym principem (princip, podle něhož si světlo letící z bodu A do bodu B vybere ze všech možných cest tu, která mu bude trvat nejkratší dobu), ale vzhledem k obtížnosti matematického aparátu jsem od této myšlenky upustil. Tímto bych celou kauzu velbloud versus fatamorgána uzavřel.

Aleš

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/`

Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	Škola	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	Úlohy 4	5	6	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr. Martin Demín		44				7	4	5	16	44
2.	Mgr. Jakub Jeřábek		40				4	4	5	13	40
3.	Mgr. Tibor Vansa		30				5	4	4	13	30
4.	Dr. Vašek Cviček		83	5		5	2	4	7	23	29
5.–6.	Mgr. Karel Žídek		28							0	28
	Doc. Jura Tománek		106			12			3	15	28
7.–8.	Dr. Honza Klusoň		69	3			2	5	5	15	26
	Doc. Jirka Klimeš		125				5	4		9	26
9.	Mgr. Martin Beránek		35					4	7	11	24
10.–12.	Dr. Dáša Eisenmannová		62				5		3	8	21
	Mgr. Dana Beránková		21					4	5	9	21
	Doc. Michal Tarana		151							0	21
13.–14.	Mgr. Peter Bališ		20				5	4		9	20
	Dr. Miroslav Frost		97				1	4		5	20
15.	Mgr. Peter Murárik		39		4			2		6	18
16.–18.	Bc. Lucie Vasická		17				3	4	3	10	17
	Bc. Zdeněk Nováček		17				1	4	4	9	17
	Bc. Pavla Reiffersová		17	3			5	4	5	17	17
19.	Bc. Martin Včelák		16				0	4	2	6	16
20.	Bc. Jozef Tinaj		14				1	4	3	8	14
21.–24.	Mgr. Lenka Beranová		24					4		4	13
	Bc. Michaela Šikulová		13					4		4	13
	Bc. Miroslav Hejna		13							0	13
24.–27.	Bc. Gabriela Boháčová		11						5	5	11
	Bc. Jana Babováková		11				1	4		5	11
	Bc. Iva Kouřilová		11				5	4	2	11	11
	Bc. Tomáš Škereň		11							0	11
28.–30.	Dr. Karel Martišek		96							0	10
	Bc. Tomáš Rieb		10							0	10
	Mgr. Tomáš Svatoň		49						4	4	10
31.	Zuzana Svobodová		9				1	2		3	9
32.–34.	Tomáš Kovaľ		7				4	2	1	7	7
	Juraj Konečný		7							0	7
	Peter Petrovský		7							0	7
35.	Anna Zoulová		6							0	6
36.–38.	Ivan Banas		5							0	5
	Eva Macúšová		5				5			5	5
	Milan Ružička		5							0	5
39.	Aleš Hanák		4							0	4
40.–41.	Radka Picková		3							0	3
	Blanka Balážová		3					3		3	3
42.–43.	Jiří Hampl		1							0	1
	Jiří Vlach		3							0	1