M&M Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník VII číslo 3

Ahoj kamaráde, kamarádko!

Posíláme ti vzorová řešení úloh z první série spolu s tabulkou průběžného pořadí a prvními články k zadaným tématům. Řešení témat zdaleka nekončí, ba právě naopak. Na příspěvky svých kolegů můžeš dále reagovat, doplňovat je, nebo třeba navrhnout úplně jiná řešení či postupy.

Pokud řešíš náš seminář prvním rokem, mohly tě patrně překvapit záhadné zkratky před tvým jménem či jmény některých spoluřešitelů ve výsledkové listině. Jedná se o tituly udělované vždy při dosažení určitého počtu bodů podle následujícího klíče:

Bakalář	Bc.	10 bodů
Magistr	Mgr.	20 bodů
Doktor	Dr.	50 bodů
Docent	Doc.	100 bodů
Profesor	Prof.	200 bodů
Akademik	Akad.	500 bodů

Body získané v předchozích letech se samozřejmě započítávají také, takže o získaný titul už nemůžeš přijít. Oproti minulosti je zde malé vylepšení v tom, že tituly jsou přidělovány okamžitě po získání daného počtu bodů a ne až o sérii později, jak tomu bývalo.

Uveřejněná řešení témat z prvního čísla, která sepsali Tví kolegové a kolegyně, můžeš použít k vlastní práci na dalším rozvíjení příslušného tématu. Termín odeslání takových příspěvků je stejný jako termín úloh druhého čísla, tj. **3. ledna 2001**.

Další soustředění M&M proběhne 18.–25. února 2001 v Krásné pod Lysou horou v Moravskoslezských Beskydech, tj. blízko hranic se Slovenskem. Na soustředění budeme vybírat nejlepší řešitele z řad děvčat i kluků. Část z vás jsme pozvali podle výsledků uveřejněných v tomto čísle, ale z celkového počtu 26 míst bude asi tak 10 míst volných. Pokud jsi nedostal poštou pozvánku na soustředění, ještě stále máš šanci. Zbylá místa budou doplněna nejlepšími řešiteli v polovině ledna na základě výsledků druhého čísla a došlých témat.

A ještě informace na závěr: Spolu s časopisem M&M byste měli dostat i jednu disketu s programem Famulus 3.5. Jedná se o program pro matematické výpočty a simulace. Můžete ho použít při řešení tématu 3. Na disketě je v souboru `readme.txt` popsán postup instalace.

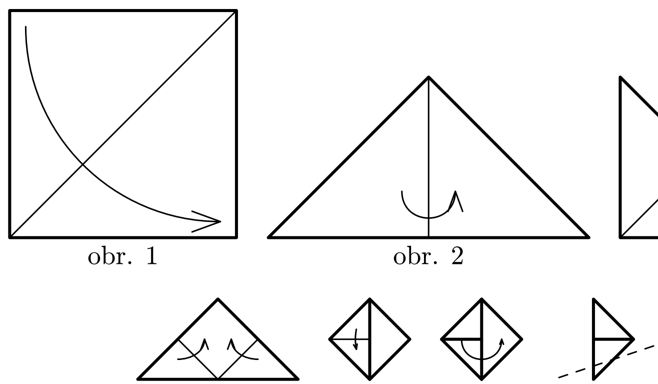
redakce M&M

Téma 1 – Papírové koberečky

Řešení motivační úlohy

Bc. Tibor Vansa

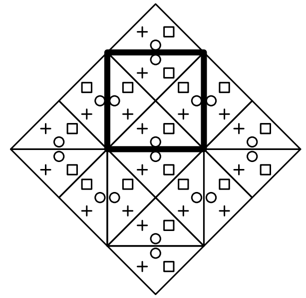
Čtverec přeložíme na polovinu a ještě jednou na čtvrtinu (obr. 1, 2). Přeložíme ještě jednou na polovinu (obr. 3). Cípy s ostrým úhlem přeložíme k pravoúhlému vrcholu (obr. 4). Roh, ve kterém je střed původního čtverce, ohneme k protilehlému rohu (obr. 5). Ještě jednou přehneme na polovinu (obr. 6) a provedeme šikmý střih (obr. 7).



obr. 1 obr. 2 obr. 3

obr. 4 obr. 5 obr. 6 obr. 7

Pokoušel jsem se v tvoření najít nějaké zákonitosti. Skládáme-li čtverec symetricky, tzn. přeložením na polovinu, můžeme tím získat nakonec buď trojúhelník, čtverec nebo obdélník. Vystřihneme-li na tomto obrazci nějaký ornament, bude se výsledný obrazec skládat z těchto ornamentů, a to tak, že stejné strany půjdou k sobě. Různými asymetriemi ve skládání se některé věci vystřihnou a jiné ne. Pravidelnost mezi nimi se mi ale najít nepodařilo.



Pozn. red:. Dostali jsme spoustu zajímavých ubrousků, málokdo se však mezi nimi pokoušel najít nějaké další souvislosti. Proto otiskujeme pouze jeden příspěvek. Za všechny výtvarně hodnotné příspěvky však děkujeme a těšíme se, co k tématu vymyslíte příště.

Ája

Téma 2 – Z vodní říše

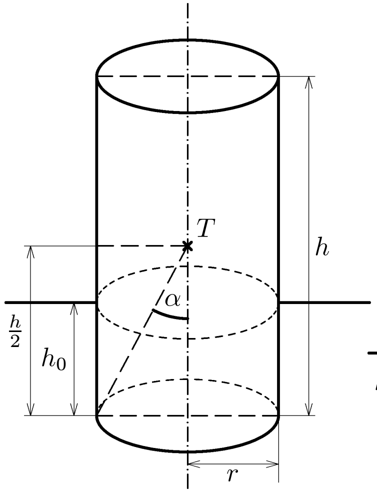
Z došlých příspěvků jsme vybrali článek *Doc.Michala Tarany*, ostatní příspěvky byly pěkné, bohužel vysvětlovaly podstatu rovnovážných poloh méně srozumitelně.

Valec

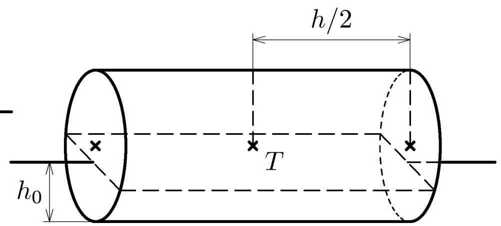
Doc.Michal Tarana

Uvažujme valec s polomerom r, výškou h a hustotou ϱ. Jeho ťažisko je na osi rotácie valca vo výške $h/2$. Podľa Archimedovho zákona platí:

$$h_0 = h\frac{\varrho}{\varrho_{H_2O}}\,. \tag{1}$$

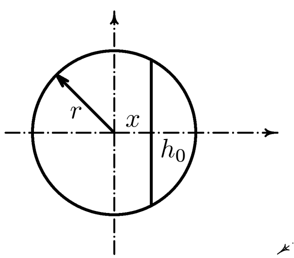


Obr. 1

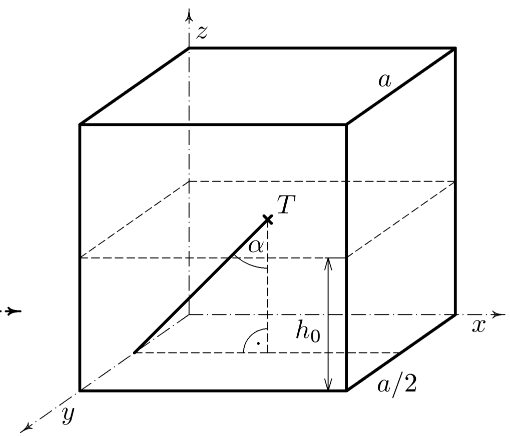


Obr. 2

Z rovnice (1) vyplýva podmienka toho, aby valec plával: $\varrho < \varrho_{H_2O}$.



Obr. 3



Obr. 4

Aby sme mohli opäť sformulovať Archimedov zákon, potrebujeme vedieť plochu krivočiareho lichobežníka[1] na obr. 3. Pre hľadaný obsah platí:

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{r-h_0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{r^2}{2}\left(\pi - 2\arcsin\frac{r-h_0}{r} - \sin\left(2\arcsin\frac{r-h_0}{r}\right)\right)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Určite bude platiť, že ak $r < h$, táto ležiaca poloha by mala byť oveľa stabilnejšia. Prvá poloha bude stabilnejšia vtedy, keď $h \ll r$. Tým sme rozlíšili plávanie napr. mince a nohy stoličky.

Kocka

Kocka, na rozdiel od valca, nie je rotačné teleso, zato má dostatok priamok a rovín súmernosti. Je jasné, že jej ťažisko je v strede. Asi najprirodzenejšia poloha plávajúcej kocky je na obr. 4.

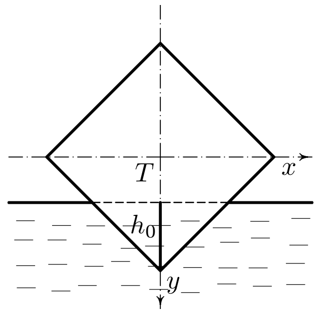
V tomto prípade platí:

$$h_0 = a\frac{\varrho}{\varrho_{H_2O}}\,. \tag{3}$$

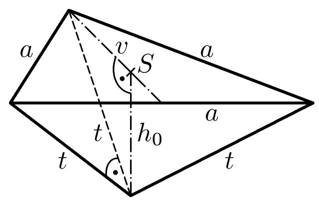
Teraz uvažujme, že kocku vychýlime tak, aby os otáčania bola kolmá na rovinu ϱ_{xz}. Potom pre kritický uhol zmeny polohy platí:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1\,, \qquad \text{teda} \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}\,. \tag{4}$$

Po jeho prekročení sa kocka pretočí, ale zaujme vďaka symetrii rovnakú polohu ako na obr. 4. Z toho je jasné to, že os rotácie prechádza ťažiskom a je kolmá na ϱ_{xz}. V tomto medznom uhle však tiež kocka dosiahne rovnovážnu polohu.



Obr. 5



Obr. 6

[1] *Pozn. red.:* autor zde myslí kruhovou úseč

Ako bude situácia vyzerať spredu, ukazuje obr. 5. Pre hĺbku ponoru dostávame vzťah:

$$h_0 = a\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_{H_2O}}}\,, \tag{5}$$

respektive ak $h_0 > a\sqrt{2}$, potom

$$h_0 = a\sqrt{1 - \frac{\varrho}{\varrho_{H_2O}}}\,. \tag{6}$$

Je jasné, že táto poloha je labilná a každá výchylka spôsobí prechod do predchádzajúcej polohy. Treťou možnou rovnovážnou polohou je tá, pri ktorej je jedna telesová uhlopriečka orientovaná vertikálne. Hladina bude kocku „rezať" v rovnostrannom trojuholníku, ktorý bude podstavou kolmého trojbokého ihlana s výškou h_0.

Z obr. 6 vyplýva:

$$\left(\frac{2}{3}v\right)^2 + {h_0}^2 = t^2 \qquad \text{a} \qquad 2t^2 = a^2, \qquad \text{teda} \qquad a = h_0\sqrt{6}\,. \tag{7}$$

Opäť Archimedov zákon:

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}\varrho}{2\varrho_{H_2O}}}\,. \tag{7}$$

Vodná hladina a ťažisko

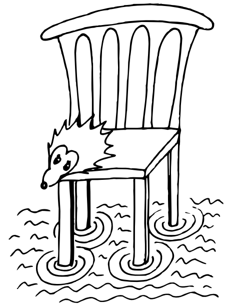
Pre valec v ležiacej polohe a pre kocku v posledných dvoch polohách závisí vzťah pre hĺbku ponoru od polohy ťažiska vzhľadom na vodnú hladinu. To určuje pomer hustoty telesa a kvapaliny. Čím je drevo hustejšie, tým je teleso viac ponorené (viď napr. obr. 1 alebo obr. 7). Ak sa však ťažisko ponorilo, je to presne naopak. V tých prípadoch, ktoré sme diskutovali, je to dané tvarom telesa. [2]

Os otáčania

Plávajúce teleso môžme považovať za sústavu dvoch hmotných bodov. Sú to ťažisko telesa a ťažisko ponorenej časti, pretože v nich sú pôsobiska tiažovej a vztlakovej sily. Tieto sily majú určité momenty vzhľadom na os otáčania v danom okamihu. Teleso bude v rovnovážnej polohe vtedy, keď budú momenty síl pôsobiacich na tieto dva body vzhľadom na os otáčania v rovnováhe.

V telesách, ktorých plávanie sme rozobrali, boli obe ťažiská na spoločnej osi, ktorá prechádzala aj osou otáčania. Napr. na obr. 5 je ťažisko kocky na jej zvislej osi y, ale rovnako na nej bude ležať aj ťažisko ponorenej časti. Preto je dôležitá symetria plávajúceho telesa.

[2] *Pozn. red.:* Redakci není příliš jasné, co tím autor myslel.



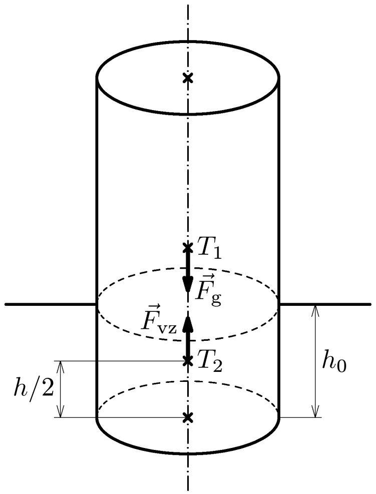
Vráťme sa späť k valcu. V stojacej polohe ide vlastne o dva valce, ktorých ťažiská nie je ťažké určiť. Ak valec vychýlime, situácia sa úplne zmení. Nie je taká sranda nájsť ťažisko ponorenej časti. S meniacou sa polohou valca sa bude meniť poloha ťažiska T_2, viď obr. 7. Je jasné, že v tomto prípade už momenty síl F_g a F_vz nebudú nulové a v danom okamihu sa valec bude otáčať okolo určitej osi. Skúsme odhadnúť veľkosť výsledného momentu síl. Pre malé uhly α a pre malé polomery môžeme aj po vychýlení sústavu považovať za dva valce. Z rovnice (1) a obr. 8 vidno, že ide o dvojicu síl $F_\mathrm{g} = -F_\mathrm{vz}$.

$$M = F\left(\frac{h}{2} - \frac{h_0}{2}\right)\sin\alpha \tag{8}$$

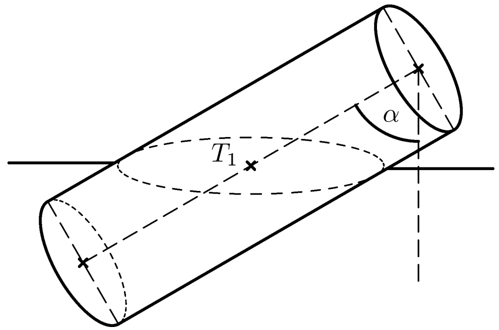
Dosadíme z rovnice 1 a pre moment vzhľadom na bod O platí

$$|\vec{M}| = \frac{\pi r^2 h^2 \varrho g}{2}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{H_2O}}\right)\sin\alpha\,. \tag{9}$$

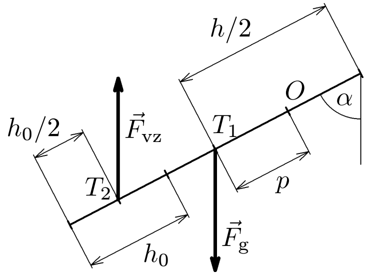
Tolik tedy Doc.Michal Tarana. Jelikož příspěvků o plování židle a jiných nepravidelných těles nebylo mnoho, necháme si je na příště. Takže bádejte, pište a hlavně posílejte.



Obr. 7

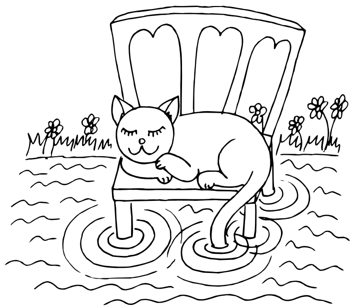


Obr. 8



Obr. 9

Na závěr ještě malou motivaci od *Zuzany Svobodové*:



Vodička je stále chladná
a anóda zase kladná.
Stolička má štyri nohy
a stôl zväčša štyri rohy.
Štokrlík vo vani pláva,
mama kričí: „Moja hlava!“.
Pokusy sa stále množia,
až ma úplne nepoložia.
Ale ja len pilne bádam
a úlohám M&M sa oddávam.

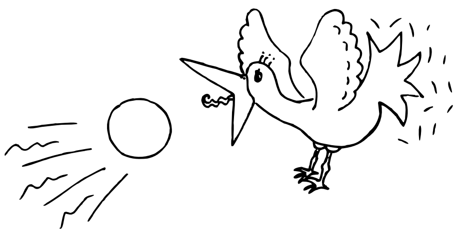
Dáša

Téma 3 – Problémy z historie

Jak na Brno?

Mgr.Karel Žídek

Za třicetileté války pořádaly různé severské armády zájezdy (resp. nájezdy) do našich končin. Na jaře roku 1645 se švédská vojska dostala až k Brnu, a poté co se utábořili, jali se jej ostřelovat. Není pravdou, že by věž nějak šetřili, ale hodinám se nestalo nic, takže lstiví Brňáci (nápad údajně dostal generál Souches) zvonili při útoku již o hodinu dříve. Nejen, že tím zachránili Brno, ale zároveň se dá tento čin kvalifikovat jako první pokus o zavedení letního času v praxi, čímž Morava, jako vždy, o několik století předběhla svou dobu.



Budiž ale toto dáno stranou a zaměřme se na fyzikální stránku problému. Tak nejdříve dělo. Za třicetileté války byl podle [1] nejoblíbenějším dělem tzv. falkonet, který používal náboje o váze 1,5 kg. Takové dělo se hodí proti pěchotě, ale s věží by moc nepohnulo. Proto jsem šel na věc trochu jinak. Švédové totiž při svých cestách navštívili i Opavu (a to několikrát), a i když ji vypálili, tak alespoň radniční věž nám nechali a na té věži až dodnes zůstala zazděná jedna švédská dělová koule, která neměla potřebnou rychlost

Podle projektů rekonstrukce radnice je tato věž široká 8,3 m. Z poměrů úhlových velikostí předmětů vychází, že je to ráže okolo 225 mm (při výpočtu jsem použil 3 různé fotky z [2], ale přesto bych na přesnost moc nesázel – koule je z větší částí zazděná). Z knihy [1] jsem dále vyčetl, že děla používala nástřelové úhly 0°–45°.

Dovolím si ještě jedno „rýpnutí“ do zadání. Švédové totiž kousek na jih od Opavy ostřelovali hrad v Hradci nad Moravicí z vrcholku vedlejšího kopce vzdáleného zhruba 600 m a o 180 m vyššího, viz [3]. Z toho vychází počáteční rychlost minimálně 250 km / hod. I toto jsem použil ve své variantě.

Dále jsem použil tabulkové údaje (hustota vzduchu a železa) a koeficient odporu C jsem vypočítal z konstanty 0,009 kg / m pro železnou kouli (jiné se tehdy údajně nepoužívaly). Použil jsem vlastní zdroj, a proto mi vyšla i jiná ráže (hmotnost koule). Nakonec jsem jako řešení určil dva údaje – pro původní zadání a pro můj odhad. Pro zajímavost pro kouli o váze 30 kg vychází ráže přibližně 195 mm.

Něco o programu: Používá výpočtu v co nejmenších časových krocích dT a v rámci jednoho kroku považuje pohyb koule za rovnoměrně zrychlený.[3] Pohyb v jednotlivých směrech se řeší rozdělením každé vektorové veličiny na tři složky (síla F na F_x, F_y a F_z). Program se zastaví buďto při zásahu věže, nebo při dopadu koule (výška $z = 0$). Coriolisova síla tady nepůsobí natolik, aby vytvořila významnější chybu, proto jsem ji pro zrychlení algoritmu později neuvažoval. Velikost by závisela na směru[4], odkud Švédové stříleli, a to se mi už opravdu zjistit nepodařilo (resp. vím, kde tábořili – v Zábrdovicích a na Královské louce, ale kdo ví, zda stříleli odtamtud). Každopádně odchylky způsobené Coriolisovou silou by byly řádově centimetry.

Zde uvádím svůj program:

```
program Delo; {pouziva jednotky SI, neni-li receno jinak}

var x,y,z   : real; {souradnice koule}
   vx,vy,vz : real; {slozky rychlosti koule}
```

[3] *Pozn. red.:* Stojí za pozornost, většina řešitelů uvažovala jenom rovnoměrný přímočarý pohyb. Takhle se podaří zvýšit konvergenci metody, t.j. pak nám stačí větší dT.

[4] největší bude při střelbě na západ nebo na východ, nejmenší při střelbě na sever nebo na jih

```
   fx,fy,fz : real; {slozky sil}
   t        : real; {casovy okamzik}

v:real;

{******************************}

const vvx  = 0; {slozky rychlosti vetru}
   vvy     = 0;
   Rov     = 1.25;{hustota vzduchu}
   g       = 9.81;
   v0      = 200/3.6; {pocatecni velikost rychlosti koule}
   alfa    = 38.36; {elevacni uhel}
   raze    = 195; {v mm}
   Rom     = 7800; {hustota materialu delove koule}
   c       = 0.485; {soucinitel odporu koule}
   VzdVeze = 200; {vzdalenost veze}
   VskHod  = 50; {vyska hodin}
   RHod    = 10; {polomer hodin, resp. tolerance
                  presnosti zasahu}
   dT      = 0.001; {urcuje presnost vypoctu}

var S : real; {celny prurez koule}
    m    : real;  {hmotnost koule}
    maxD : real; {maximalni mozna odchylka ve smeru x}

begin
   maxD:=2*v0*dT;
   m:=4/3*pi*exp(3*ln(raze/2000))*Rom;
   S:=pi*sqr(raze/2000);
   vx:=cos(alfa*pi/180)*v0;
   vy:=0;
   vz:=sin(alfa*pi/180)*v0;
   x:=0;
   y:=0;
   z:=0;
   t:=0;

   repeat
      t:=t+dT;
      fx:=-0.5*C*S*Rov*abs(vx-vvx)*(vx-vvx);  {viz pozn. (1)}
      fy:=-0.5*C*S*Rov*abs(vy-vvy)*(vy-vvy);  {za programem }
      fz:=-m*g-0.5*C*S*Rov*abs(vz)*vz;

      x:=x+vx*dT+0.5*Fx/m*sqr(dT); {Rovn. zrychleny pohyb,}
```



```
      y:=y+vy*dT+0.5*Fy/m*sqr(dT); {viz pozn. (2) za progr.}
      z:=z+vz*dT+0.5*Fz/m*sqr(dT);

      vx:=vx+Fx/m*dT;
      vy:=vy+Fy/m*dT;
      vz:=vz+Fz/m*dT;

   until ( (z<0) or ((abs(x-VzdVeze)<maxD) and (abs(y)<RHod)
                 and (abs(z-VskHod)<RHod)) );

   v := sqrt(sqr(vx)+sqr(vy)+sqr(vz));
   writeln("doba letu: ",t:4:2," s");
   writeln("x=",x:6:2," m    m= ",m:4:2," kg");
   writeln("y=",y:6:2," m    alfa=",alfa:4:1," stupnu");
   writeln("z=",z:6:2," m    v0=",v0:4:1," m/s");
   writeln("v=",v:6:2," m/s  dT=",dT:4:5," s");
   readln;
end.
```

(1) Toto je chyba, která se objevila u mnohého řešitele, uvědomme si, že když síla je úměrná čtverci rychlosti, z toho ještě neplyne, že by také x-ová složka síly byla úměrná čterci x-ové složky rychlosti.

(2) Pohyb v elementárním časovém kroku se uvažuje rovnoměrně zrychlený a ne jenom rovnoměrný přímočarý.

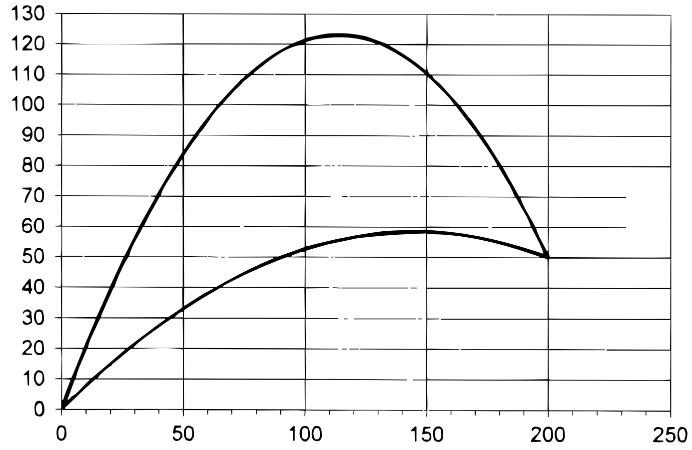
Použitím tohoto programu jsem zjistil, že pro kouli o hmotnosti 30 kg (ráže zhruba 195 mm), nulovou rychlost větru a počáteční rychlost 200 km / hod je vhodný elevační úhel $37°42'35''$.[5] Pro mou variantu zadání (ráže 225 mm, čili hmotnost 46,52 kg, nulová rychlost větru, počáteční rychlost 250 km / hod) vychází $22°1'20''$. Rychlost větru je pak spíše jen taková hračka pro radost. Lze například vypočítat potřebné natočení děla při bočním větru. Vypočítá se podle vztahu $\arctan(y/x)$ pro kladné y vpravo, pro záporné vlevo. V programu jsou vůbec různé nepotřebné nástavby, ale snažil jsem se raději vytvořit jednoduchý univerzální program. Bohužel jsem nezkoušel věrohodnost teorie v praxi. Proto uvítám veškeré praktické pokusy, které budu moci porovnat s teorií.

Literatura:

[1] Křížek, Leonid: Encyklopedie zbraní a zbroje, nakl. Libri 1997.
[2] Solnický, Josef: Opava, nakl. Profil 1984.
[3] Opavsko - Edice Klubu českých turistů, 1:50 000, 1998.

[5] *Pozn. red.:* Tento výsledek nebude správný v důsledku chyby při počítání odporové síly (viz program)

Pro ilustraci uveřejňuji graf Jakuba Jeřábka:[6]



Iterativný algoritmus na hľadanie elevačného uhla pri započítaní odporu vzduchu a porovnanie s výsledkami šikmého vrhu.

Bc. Tomáš Škereň

Najľahší spôsob ako riešiť úlohu je zanedbať odpor vzduchu. Pre počiatočnú rýchlosť a jej zložky platia nasledujúce vzťahy:

$$v_x = v\cos\alpha\,, \tag{1.1}$$
$$v_y = v\sin\alpha\,, \tag{1.2}$$

kde α je hľadaný elevačný uhol. Zanedbávame odpor vzduchu, takže x-ová zložka rýchlosti sa nemení. Pre čas, za ktorý guľa doletí ku zvonu, platí

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v\cos\alpha}\,, \tag{2}$$

[6] *Pozn. red.:* Prosím řešitele, aby měli všechny grafy řádně popsané, t.j. nadpis, popisky os, a v jakých jednotkách se veličina do grafu nanáší, něco jako l [m], nebo v [m s^{-1}] apod.

kde l je vzdialenosť veže od dela. Aby guľa trafila zvon musí platiť nasledujúca rovnosť:

$$h = tv_y - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{3.1}$$
$$h = \frac{l}{\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{2}\frac{gl^2}{v^2\cos^2\alpha}\,. \tag{3.2}$$

kde h je výška hodín. Riešenie rovnice je veľmi zdĺhavé. Podstatné je, že rovnica má dva korene. Ich číselné hodnoty sú:[7]

$$\alpha_1 \approx 36{,}63341577^\circ\,,$$
$$\alpha_2 \approx 67{,}40255707^\circ\,.$$

Tieto hodnoty sú však nepresné, pretože sme zanedbali odpor vzduchu. Ak chceme tento aspekt zahrnúť do riešenia, nebude už vyčísľovanie výsledkov také jednoduché. Pre pohyb šikmo vrhnutého telesa v odporujúcom prostredí platí:

$$\vec{a}m = \vec{F}\,, \tag{4.1}$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt}m = m\vec{g} - k\vec{v}|\vec{v}|\,. \tag{4.2}$$

Nemá zmysel pokúšať sa túto rovnicu riešiť analyticky, preto použijeme na výpočet vhodného uhla pre trafenie hodín na veži počítač. Vytvoríme procedúru, ktorá z počiatočných podmienok výstrelu zistí, v akej výške zasiahne guľa vežu. Na výpočet uhlu α použijeme iteratívny algritmus, ktorý bude mať na vstupe dve hodnoty uhlov, pričom jedna z nich bude určite menšia ako α a druhá bude určite väčšia. Potom dopočíta dopadovú výšku pre uhol, ktorý je aritmetickým priemerom dvoch zadaných uhlov a zistí, medzi ktorými uhlami sa α skutočne nachádza. Tieto dva uhly sa opäť dostanú na vstup algoritmu. So zvyšujúcim sa počtom iterácii bude narastať aj presnosť nájdeného α. Jediný problém je vhodne zvoliť správne počiatočné vstupné hodnoty algoritmu. Ako sme už spomenuli, úloha má dve riešenia, a preto treba nájsť dve dvojice vstupných uhlov. My sme ich zvolili podľa približných výsledkov, ktoré sme dostali pri zanedbaní odporu vzduchu. Výsledky, ktoré sme týmto dostali, sú:[8]

$$\alpha_1 = 36.66436912^\circ\,,$$
$$\alpha_2 = 67.33766483^\circ\,.$$

[7] *Pozn. red.:* Zamyslite sa nad zmysluplnosťou toľkého počtu desatinných miest.

[8] *Pozn. red.:* Tieto výsledky nemôžu byť správne, kvôli chybe v programe, viz pozn. (1) za programom `Gula`.

Ukazuje sa, že odpor vzduchu nemá na let gule veľký vplyv.[9] Je to spôsobené najmä jej veľkou hmotnosťou. Ako vieme, odpor vzduchu narastá s plochou rezu telesa rovinou kolmou na smer pohybu, čo u gule znamená, že odpor je úmerný druhej mocnine polomeru gule, jej hybnosť rastie úmerne s hmotnosťou a hmotnosť je úmerná tretej mocnine polomeru (pri konštantnej hustote gule). 30 kg teleso je už teda dosť ťažké na to, aby bez väčších problémov prekonávalo tento odpor.

```
program Gula;

const
     g = 9.81;
   Vzd = 200;
   Vys = 50;
     v = 200/3.6;
     k = 0.009;
     m = 30;
    dt = 0.0001;
var
   Tab                     : array[1..3,1..2] of Extended;
   ch                      : char;

function SpocitajDopad(ang : Extended):Extended;
var
   x,y,vx,vy,Fo,Fox,Foy,dop : Extended;
begin
   ang:=ang/360*2*Pi;
   vx:=cos(ang)*v;
   vy:=sin(ang)*v;
   x:=0;
   y:=0;
   repeat
      x:=x+dt*vx;
      y:=y+dt*vy;
      Fo:=k*{sqrt}(sqr(vx)+sqr(vy));   {viz pozn. (1)}
      Fox:=cos(ang)*Fo;                {za programom }
      Foy:=sin(ang)*Fo+m*g;
      vx:=vx-Fox/m*dt;
      vy:=vy-Foy/m*dt;
      ang:=arctan(vy/vx);
   until (y<=0) or (x>=200);
```

[9] *Pozn. red.:* Skúste pomocou počítača zistiť, v akej výške by Švédi trafili vežu, keby zvolili elevačný uhol vypočítaný bez zahrnutia odporu vzduchu.


```
   Dop:=y-50;
   if x<200 then Dop:=-51;   SpocitajDopad:=dop;
end; { SpocitajDopad }

begin
   tab[1,1]:=89;  {tu sa zadavaju tie pociatocne uhly, vacsi}
   tab[3,1]:=45;  {a mensi}
   tab[1,2]:=SpocitajDopad(tab[1,1]);
   tab[3,2]:=SpocitajDopad(tab[3,1]);

   repeat
      tab[2,1]:=(tab[1,1]+tab[3,1])/2;
      tab[2,2]:=SpocitajDopad(tab[2,1]);
      writeln(tab[2,1]:10:8,"   ",tab[2,2]:10:8);
      if tab[1,2]*tab[2,2]<0 then
      begin
         tab[3,2]:=tab[2,2];
         tab[3,1]:=tab[2,1];
      end;
      if tab[3,2]*tab[2,2]<0 then
      begin
         tab[1,2]:=tab[2,2];
         tab[1,1]:=tab[2,1];
      end;
      write("Next iteration <RET> or   quit <q><RET>");
      readln(ch);
   until ch="q";
end.
```

(1) V pôvodnom autorovom riešení je nesprávne použitá funkcia `sqrt`, ktorá vracia odmocninu argumentu. Keďže odporová sila závisí na štvorci rýchlosti, odmocnina tam nemá čo hľadať. Z toho plynie, že ani autorove numerické výsledky nemôžu byť správne.

Poznámky k článkům

Při počítání odporové síly v programu měla řada z vás problémy. Proto uvádím pár elegantních řádků, které v nějaké formě uvádí ve svých programech *Jakub Jeřábek, Miroslav Hejna* a *J. Tománek* (pokud jsem někoho vynechal, ať mi promine):

```
   v :=  sqrt(sqr(vx)+sqr(vy));
  Fx := -k*v*vx;
  Fy := -k*v*vy - g*m;
```

V uvedeném výpočtu se správně počítá velikost odporové síly i se znaménkem. Můžete si všimnout, že síla bude vždy působit proti směru vektoru rychlosti.

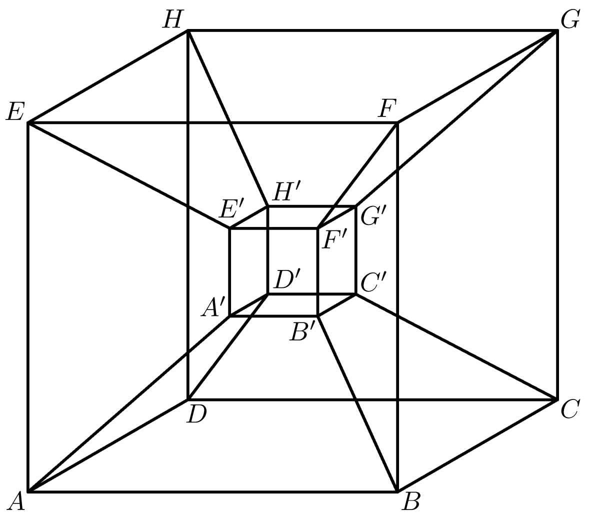
Nabídka na rozšíření tématu

Vraťme se do doby krátce po neúspěšném švédském nájezdu na Brno. Tehdy si nizozemský astronom *Christiaan Hugens* uvědomil, že dělová koule může sloužit i k měření času, pokud se zavěsí na dlouhý provaz. Řeč je o kyvadle. Jedním z problémů, na které Hugens narazil při konstrukci přesných kyvadlových hodin, je závislost periody kmitu na jeho amplitudě. Proveďte jednoduchý experiment i počítačovou simulaci a zjistěte, jak závisí čas odměřený hodinami – kyvadlem na různých parametrech. Zkuste naprogramovat co nejreálnější model a diskutujte přesnost takových hodin.

Martin

Úloha 1 – Čtyřrozměrná krychle

Vrcholy kocky som označil písmenami podľa obr. 1.

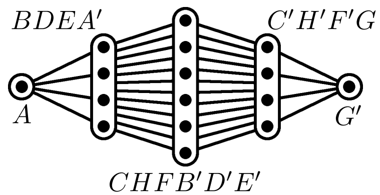


Obr. 1

Značenie vrcholov je teda trochu iné než v zadaní úlohy a konce telesovej uhlopriečky sú teraz body AG'. Bez ujmy na obecnosti si môžeme každú n-rozmernú kocku predstaviť v súradnej sústave, pričom bod A bude v bode $(0,\dots,0)$ a opačný koniec telesovej uhlopriečky v bode $(1,\dots,1)$. Špeciálne v 4-rozmernom priestore bude A $= (0,0,0,0)$. Pripojme teraz na konce telesovej uhlopriečky napätie U. Čo sa stane? Niektorými hranami kocky začne tiecť prúd. Zo symetrie úlohy je jasné, že hranou AB potečie rovnaký prúd

ako hranou AD alebo AE alebo AA' (pozri obrázok 1). Keďže odpor medzi AB, AD atď. je rovnaký, je tiež napätie medzi bodmi AB, AD, AE a AA' rovnaké. Preto tieto body majú voči A taký istý potenciál a môžeme ich stotožniť. Keby sme vrcholy B,D,E,A' spojili bezodporovým drôtom, netiekol by ním žiadny prúd a úloha by sa nezmenila. Podobne majú rovnaký potenciál body CHFD'B'E' a body GF'H'C'. Prečo? Dobrá predstava je taká, že keď budete mať 4-rozmernú kocku a na nej označené len body A a G', tak body vo vyššie uvedených skupinkách sú nerozlíšiteľné. Keď vám niekto povie, nech si vyberiete ľubovoľný bod z jednej tejto skupinky a potom vám za chrbtom kocku otočí, nebudete môcť spoznať, ktorý z bodov ste si vybrali.

Preto môžme naše zapojenie nakresliť takto:



Obr. 2

Máme tu teda niekoľko potenciálových hladín: pod potenciálovou hladinou rozumiem množinu bodov, ktoré majú rovnaký potenciál voči A. Bod A tvorí nultú potenciálovú hladinu, body BDEA' prvú, body CHFD'B'E' druhú, F'C'H'G tretiu a bod G' štvrtú. Od A k prvej hladine vedú štyri hrany. Medzi 1. a 2. hladinou je 12 hrán preto, lebo z každého vrcholu kocky vychádzajú 4 hrany, teda zo 4 bodov v 1. hladine ich musí vychádzať 16, a 4 už idú do A. Podobne je 12 hrán medzi 2. a 3. hladinou.

Odpor medzi i-tou a j-tou hladinou označme R_{ij}. Celkový odpor medzi bodmi A, G' bude potom R_{04} a bude to súčet odporov medzi jednotlivými hladinami:

$$R_{AG'} = R_{04} = R_{01} + R_{12} + R_{23} + R_{34}\,.$$

Odpor jednej hrany nech je R. Potom

$$\frac{1}{R_{01}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R},$$

t.j. $R_{01} = 1/4R$. Podobne $R_{12} = R_{23} = 1/12R, R_{34} = 1/4R$. Preto

$$R_{AG'} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4})R = \frac{2}{3}R\,.$$

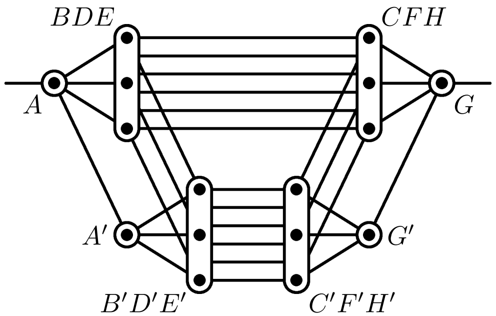
Ako by to bolo s odporom telesovej uhlopriečky n-rozmernej kocky? Opäť si ju rozdelíme na $n+1$ potenciálových hladín a pre odpor medzi i-tou a $(i+1)$-vou platí $R_{i(i+1)} = R/n_i$, kde n_i je počet hrán idúcich z i-tej hladiny do $(i+1)$-ej. Vrcholy v i-tej potenciálovej hladine sú práve tie, ku ktorým vedie najkratšia cesta od A cez i hrán. Je ich $\binom{n}{i}$, lebo sú to body, ktorých súradnice $(x_1,\ldots,x_n)$ obsahujú práve i jednotiek a $n-i$ núl. Hrany, ktoré idú do $(i+1)$-ej hladiny, sú práve hrany, ktoré idú od nejakého $(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$ do $(x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},...,x_n)$, kde $x_j=0$ a $y_j=1$. Tých je $n-i$, lebo bod $(x_1,\ldots,x_n)$ má $n-i$ núl. Teda počet hrán vedúcich z i-tej do $(i+1)$-vej hladiny je $\binom{n}{i}(n-i)$ pre $i=0,\ldots,n-1$. Celkový odpor je teda

$$R_{0n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{i}(n-i)}R=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{i}}R\,.$$

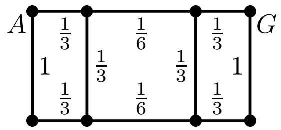
Na tento vzorec mnohí z vás prišli podobnými úvahami. Niekto z vás dokonca vyslovil hypotézu, že odpor telesovej uhlopriečky n-rozmernej kocky ide k nule pre $n\to\infty$; je to pravda.

Ťažšie to je s odporom dvoch bodov, ktoré neležia na telesovej uhlopriečke. Spočítam odpor AG v našej štvorrozmernej kocke, t.j. bodov, ktorých najkratšia vzdialenosť sú 3 hrany . Všimnime si, že ak si dajako označíme body A a G, zavrieme oči a niekto nám kocku otočí tak, že A a G sa nezmenia, opäť nemôžme rozlíšiť body v skupinkách „BDE“, „B‘ D‘ E‘ “, „CFH“ a „C‘ F‘ H‘ “

Ekvivalentné zapojenie je:

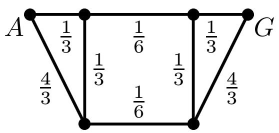


Obr. 3

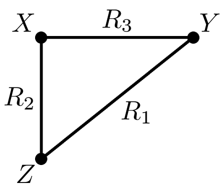


Obr. 4

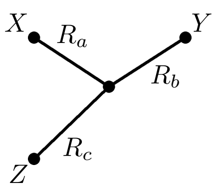
Predpokladajme pre jednoduchosť, že odpor každej hrany je 1. Môžeme teda nahradiť skupiny k čiar v obrázku jedným odporom veľkosti $1/k$ a máme obr. 4 alebo, keďže $1+1/3=4/3$,



Obr. 5

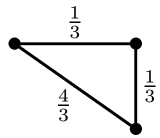


Obr. 6

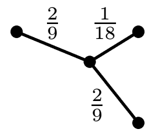


Obr. 7

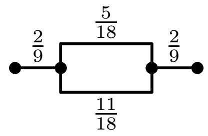
Ako však spočítame odpor útvaru na obr. 5? Na to existuje vo fyzike bežný a často používaný trik. Každý trojuholník obr. 6 sa dá prekresliť na hviezdu ako na obr. 7.



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

Odpory medzi krajnými bodmi sú tu rovnaké. Pre odpory R_a, R_b, R_c platia vzorce

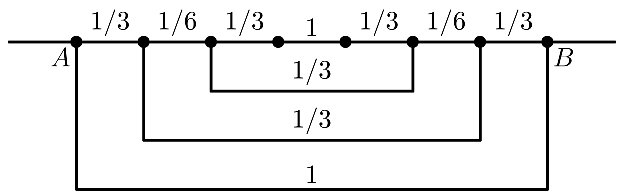
$$R_a=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3},$$
$$R_b=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3},$$
$$R_c=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3},$$

ktoré nie je ťažké overiť. Trojuholník na obr. 8 je teda ekvivalentný hviezde na obr. 9. Dosadením do pôvodného obrázku a úpravou máme obr. 10, a teda výsledný odpor je:

$$R_{AG}=\frac{2}{9}+\frac{1}{\frac{18}{11}+\frac{18}{5}}+\frac{2}{9}=\frac{61}{96}\,.$$

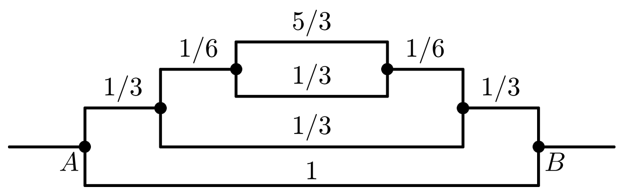
Keby odpor hrany nebol jedna, ale R, bolo by teda $R_{AG}=\frac{61}{96}R$. Je možné, že by sa to dalo spočítať aj jednoduchšie. Ale neviem ako.

Podobne možno vyrátať aj odpor susedných vrcholov AB. Dospejeme k obrázku 11,



Obr. 11

ktorý po zjednodušení dá obr. 12,



Obr. 12

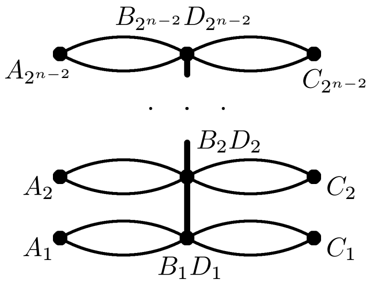
a mal by vyjsť výsledok

$$R_{AB} = \frac{15}{32}R.$$

Tým istým spôsobom možno zistiť aj odpor bodov AC. To nám vyšlo $7/12R$. Bolo to však trochu pracné. Ale potom Bzuča napadol elegantný trik, ktorým to ide jednoduchšie. Dokázali sme totiž takéto obecné tvrdenie: Odpor dvoch vrcholov n-rozmernej kocky vzdialených najkratšou cestou 2 hrany je rovnaký, ako odpor dvoch susedných vrcholov $(n-1)$-rozmernej kocky. To znamená, že odpor AC je rovnaký, ako odpor dvoch susedných bodov v trojrozmernej kocke. Ten sa spočíta ľahko: keď si vrcholy trojrozmernej kocky označíme ABCDEFGH a hľadáme odpor AB, môžme stotožniť body DE a body FC a dostaneme jednoduchú schému, z ktorej sa ľahko spočíta odpor $7/12R$.

Prečo je odpor dvoch vrcholov n-rozmernej kocky vzdialených 2 hrany rovnaký, ako odpor susedných vrcholov $(n-1)$-rozmernej kocky?

Nech $n > 2$. Potom n-rozmernú kocku si môžeme predstaviť ako štyri $(n-2)$-rozmerné kocky K_1, K_2, K_3, K_4 pospájané hranami tak, že kocka K_1 pozostáva z bodov $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{n-2}}$, kocka K_2 z bodov $B_1, B_2, \ldots, B_{2^{n-2}}$, kocka K_3 z bodov $C_1, C_2, \ldots, C_{2^{n-2}}$, kocka K_4 z bodov $D_1, D_2, \ldots, D_{2^{n-2}}$, a z bodu A_i ide ešte hrana do B_i a D_i, z bodu B_i do A_i a C_i, z bodu C_i do B_i a D_i, kde $i = 1, \ldots, 2^{n-2}$. Chcem povedať, že n-rozmerná kocka nie je nič iné, iba akýsi „štvorec“ $K_1K_2K_3K_4$, kde K_i nie je obyčajný bod, ale $(n-2)$-rozmerná kocka. Hľadáme odpor medzi A_1 a C_1. Keďže body B_i a D_i sú nerozlíšiteľné, dostávame takúto schému z obr. 13,



Obr. 13 ,

pričom vrcholy A_i, B_i, atď., $i = 1, \ldots, 2^{n-2}$ sú ešte pospájané medzi sebou tak, že tvoria $(n-2)$-rozmerné kocky. Teraz si uvedomme, že všetky body B_i a D_i majú voči A_1 rovnaký potenciál, totiž polovičný než C_1. To je vidno zo symetrie obrázku: ľubovoľný bod B_i alebo D_i má rovnakú cestu k bodu A_1 ako aj k bodu C_1, preto musí byť napätie $U_{A_1B_i}$ resp. $U_{A_1D_i}$ rovnaké ako $U_{B_iC_1}$ resp. $U_{D_iC_1}$. Z toho je jasné, že napätie $U_{A_1B_i} = U_{A_1D_i} = 1/2U_{A_1C_1}$, teda všetky body B_i, D_i sú na rovnakej potenciálovej hladine. Tým pádom môžme škrtnúť všetky zvislé čiary spájajúce B_i, D_i navzájom. Keď ich ale škrtneme, tak môžme nahradiť každé schéma z obrázku

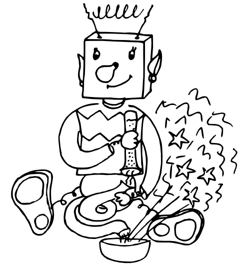
Obr. 14

jednou hranou s odporom R.

Ale tým sme škrtli kocky K_2 a K_4 a ostali nám dve $(n-2)$-rozmerné kocky K_1, K_3 spojené hranami tak, že každý vrchol A_i je spojený s vrcholom C_i, $i = 1, \ldots, 2^{n-2}$ jednou hranou s odporom R. Dve $(n-2)$-rozmerné kocky spojené takýmto spôsobom nie sú však ničím iným, než obyčajnou $(n-1)$-rozmernou kockou. Vrcholy A_1 a C_1 sú teraz susedné. Tým sme tvrdenie dokázali. Nevieme, či sa to dá dajako jednoducho zobecniť. Vzorec pre nájdenie odporu medzi ľubovoľnými dvoma bodmi n-rozmernej kocky sa nám nepodarilo nájsť. Môžte to skúsiť. Odmenou za riešenie sú palacinky s čokoládou a šľahačka.

Peťo

Úloha 2 – Robot



Zadání této úlohy bylo trochu nejednoznačné, protože přesně neříkalo, co znamená slovo „bezprostředně“. Správných (i když různých) řešení přišlo opravdu hodně a tady je shrnutí i se všemi jestliže a kdyby:

Na začátek poznamenejme, že lupič ani robot samozřejmě nepoznají, co vypili, protože hrnky nejsou nijak očíslované ani jinak označené.

Verze 1 – piji jen jedy, které mi dá robot a on jen ty ode mne:

V tomto případě neexistuje „výherní strategie“ (tedy způsob, jak sám přežít a druhého zabít) ani pro jednoho z hráčů. Jeden druhého totiž vždy zabije kombinací silnější jed , slabší jed a otrávený (tedy v tomto případě oba) proti tomu nemůže nic dělat.

Verze 2 – mohu pít i své jedy a robot své:

V tomto případě je nejlepší se před vstupem do místnosti napít jedu číslo 1 a robotovi donést vodu. On mi dá nějaký jed (jistě silnější než 1), čímž mě vyléčí a protože předpokládá, že vypil jed, otráví se tím, že se ho pokusí neutralizovat (nejspíše číslem 6).

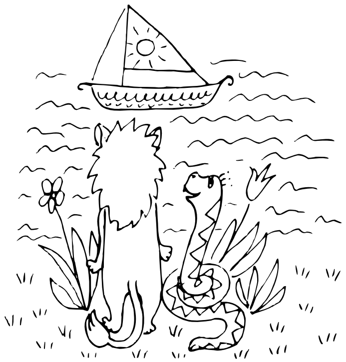
Standa

Úloha 3 – Placka, anebo koule?

Vyjádření grantové komise jeho veličenstva Ferdinanda Kastilského

Jelikož mnoho z vás se snaží dostat do Indie západní cestou, a moji rádci mě přesvědčují, že to není jenom nápad bláznů, ale čin géniů mající naději na úspěch, rozhodl jsem následovně: Vybral jsem 3 statečné mořské vlky, kteří mě nejvíce přesvědčili, že jim jde o slávu a blaho Španělska (a tedy i mě) více než o blaho své. Bohužel královská pokladnice je po bojích o Granadu velice vyčerpaná, a proto nemohou být žádosti o mecenování naplněny všechny a v plné výši. Proto každý vybraný kapitán dostane 2/3 žádané částky jako projev mé …ehm …, důvěry a dvě lodě s námořníky k tomu (na objevení Ameriky dvě lodě bohatě stačí). Moji nejmilejší poddaní, kteří nebyli vybráni, se nemusí rmoutit, že přijdou zkrátka a dějiny na ně zapomenou. Za několik let se chystám vypsat soutěž o dobytí říše Aztéků a Inků, jakožto se hledá i kapitán, který by obeplul svět kolem Ohňové země. Podmínkou je jedině jméno, měl by se jmenovat Fernao Magalhãeas. Rytíři tohoto ctěného jména zběhlí v mořeplavbě nechť se hlásí u královské grantové komise.

Bohužel musím oznámit, že z celkového počtu 20 mořeplavců jsem shledal důvěryhodnými jenom tři (více si královská pokladna dovolit nemůže), jmenovitě *Dr.Mirek Frost, Bc.Tibor Vansa* a *Mgr.Jakub Jeřábek*. Mezi statečné mořeplavce se ale vloudila lůza, kterou jsem jasnozřivě odhalil! Rouhali se k Písmu Svatému a vyhrožovali mi a jinak nestoudně se chovali v mé přítomnosti. Dokonce nestydatě tvrdili, že Země je koule![1] Každý přísný král by je poslal na hranici, ale já jsem blahosklonný, a tudíž jsem je jenom blahosklonně uvrhl do žaláře, kde mohou dobrovolně strávit půlku života, nebo předstoupit před Boží soud. Jelikož nevíme, kolik budou živi, necháme je pro jistotu ve vězení pořádně dlouho! Bláznivého kapitána, který předstoupil přede mě v renesančních šatech střihu převážně německého, zhotovených z modrého aksamitu, brokátu střihem hojně krumplovaného barvy starorůžové a bílého plátna, jsem raději poslal na hranici, jako výstrahu všem, kdo by chtěli zavádět nové módy a napodobovat jej.



Ferdinand Kastilský, z boží vůle král Španělský, Kastilský, Aragonský, Andalúzský a Granadský, osvícený panovník a příkladný křesťan

Mgr.Jakub Jeřábek

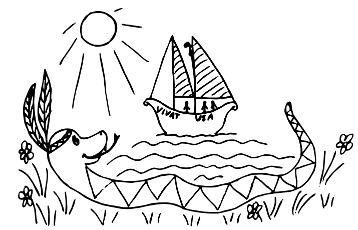
„…Můj králi, již v této chvíli se Portugalci pokoušejí dostat do Indie východní cestou. Je to sice nemožné, protože při obeplouvání Afriky prý člověk musí projít kraji tak horkými, že se tam mořská voda vaří a ryby z ní vyskakují, aby se jenom trochu ochladily. Ale kdyby se jim to přece jenom podařilo, ovládli by Portugalci mocné říše v Zadní Indii a možná i Ostrovy Koření nebo Cipangu.

Když podpoříte moji výpravu do Indie západním směrem, dostaneme se tam určitě dříve než Portugalci a já budu moci získat nové poddané pro korunu

[1] Oni to tvrdili téměř všichni, někdy jsem je ale přeslechl.

jeho Veličenstva. V Indii jsou prý řeky, které jsou plné tekutého zlata a Cipangu je proslulé svým bohatstvím, o kterém jste už určitě někdy slyšel. Určitě by to znamenalo podporu pro státní pokladnu po těch válkách s Maury. Můj pane, dejte mi tři lodě a za několik měsíců vám je přivezu plné zlata!

Nevěřím tomu, že na západním konci světa padá všechna mořská voda do propasti. Je Božím řízením, že právě Vy, velký Ferdinand Aragonský jste vyslal výpravu, která zvítězí nad silami temnot, překoná nezměrné hlubiny Oceánu a bude hlásat Boží slovo i v nejodlehlejším konci světa. Je to Vaší povinností vládce celého Španělska, abyste připojil nové zámořské země a vytvořil říši, nad níž Slunce nikdy nezapadá. Klaním se Výsosti…“



Dr.Miroslav Frost

Abych si mohl připravit svou řeč, musel jsem se vžít do doby v roce 1492.

* Před 23 lety vzniklo „nové Španělsko“ – svatbou Izabely Kastilské a Ferdinanda Aragonského se sjednotila Kastílie a Aragon – vznikl základní kámen moderního Španělska.
* Před 6 lety doplul Bartolomeo Díaz k Mysu Dobré naděje, další impuls pro dravého souseda a rivala Portugalsko, aby zvýšilo svůj náskok.
* Tento rok (1492) se konečně podaří vyhnat Araby z jihu Pyrenejského poloostrova a nastolit v zemi mír.
* Ferdinand Aragonský (tou dobou na trůně) je **katolík**, který potřebuje zvýšit svou prestiž a moc v celé západní Evropě. Blízký východ a jižní Evropu ovládají Turci.
* Názor na tvar Země, tvrdě vnucovaný katolickou církví všem je, že Země je placka, jejíž střed je někde v Jeruzalémě a Slunce a Měsíc s hvězdami krouží kolem ní (tento názor se velice těžce vyvrací, protože teorie nahrazující kulatost Země a její pohyb kolem Slunce byla výborně vypracována (problémy střídání dne a noci, ročních období, podnebních pásem) a kvůli relativitě pohybu (A se pohybuje vůči B $\Longleftrightarrow$ B se pohybuje vůči A) ji není možné empiricky ověřit tak, abyste vystačili s běžnými pomůckami a bez možnosti využívat větších vzdáleností) – navíc je král katolík!
* Jediná šance jak zaujmout panovníka, je mít řeč co nejzajímavější, nejvtipnější a nejlichotivější.

A teď samotná řeč:

„Vaše Veličenstvo, dovolte mi, abych Vás přesvědčil o svém nápadu na obeplutí Země.

*Tak jako jablko ve Vaší levici, tak jako Slunce či Měsíc nad hlavou, tak i Země, domnívám se, má tvar koule – ostatně to tvrdili i velcí myslitelé starověku, jakým byl Eratosthénes. Anebo alespoň tvar kouli podobný (*Z kapsy vytahuji vajíčko a pokládám ho na dlaň před krále*). Cesta do Indie po souši je daleká a namáhavá, na naše karavany útočí bouře i spalující slunce pouště, divoká zvěř i Turci a jiní pohané okrádající naše obchodníky a zabíjející naše misionáře (*Perem kreslím klikatou cestu z bodu označeného jako Španělsko do bodu někde ve středu protější strany vejce, označeného jako Indie*). Cesta po souši je dlouhá a plná nebezpečí. Však moře, ta širá pustina života, nezná drancování pohanů či neproniknutelné lesy či nezdolatelné hory Arábie. S příznivými větry v zádech by byla má cesta, trvající toliko jeden a půl úplňku, přímá, jak Vaše jednání, a rychlá, jak Vaše rozhodnutí (*Kreslím přímou a nejkratší spojnici mezi vyznačeným Španělskem a Indií na vajíčku druhou stranou – vůči klikatici*). Je jen na Vás, zda mi dáte svůj souhlas a tím i šanci ukázat nepřátelům Španělska Vaši sílu a odhodlanost pomáhat svaté víře a svému lidu. Neboť pod skořápkou obtíží se může skrývat sláva, bohatství a moc, v neznámém může být ukryto známé (*Opatrně rozmáčknu vajíčko, odstraním skořápku z dlaně a přítomným ukážu žloutek*).“*

Pozn.: Velmi důležité je na audienci přijít včas, slušně oblečen a umyt, stále se usmívat – především na královnu, a nezapomenout na vajíčko!!

Bc. Tibor Vansa

„Její veličenstvo, královno Izabelo,

chtěl bych Vás požádat o trochu Vašeho drahocenného času o vyslechnutí mého plánu nalezení cesty do Indie, Cataie, Zipangu a spousty dalších nesmírně bohatých a podivuhodných zemí, tak nádherně líčených Marcem Polem. Veličenstvo, Marco Polo nevyprávěl báchorky, na to byl příliš zkušený a svědomitý. On nám popisuje skutečně obrovské země, jejich bohatství, slávu a moc. Považte, jaké obrovské zisky by přinesl objev těchto zemí. Barvy na vlněné a hedvábné látky, slonová kost, tisíce liber koření jako zázvor, koriandr, hřebíček, pepř a šafrán a jiné, po kterých dnes Evropa po obsazení Konstantinopole tak prahne, jaké nepředstavitelné zisky by to přineslo královské pokladnici, v dnešní době tak vytížené problémy s Francií. Můžete namítat, že Marco Polo si nepřinesl ze své dlouhé a strastiplné cesty nic víc než pár drahokamů. Ale já, moje Veličenstvo, se chci vydat do těchto zemí západní cestou. Na lodích je to něco úplně jiného než pěšky, mohli bychom si toho dovézt, co hrdlo ráčí. Atlantik není nekonečný, jak si mnozí lidé myslí, Země je opravdu kulatá![10] Neváhejte, Vaše Veličenstvo, Portugalci jsou již na své východní cestě do Indie velice blízko svému cíli. Vaše Veličenstvo, co je pár lodí pro mne vypravených proti možnému nepředstavitelnému zisku zlata a drahého koření. Jestliže Portugalci dopluji do Indie dříve, bude to pro Španělsko nepředstavitelná a nenapravitelná ztráta v jeho výsadním postavení na moři a v obchodě. To nemůžete dopustit!!! I papež a Církev Svatá by tento bohulibý čin náležitě ocenila. Tolik nových duší obrácených v pravou víru. I tehdejší Cataiský císař Chibilaj projevil Marcu Polovi živý zájem o naši víru, o papeže, o historii Svatého hrobu. S takovým množstvím zlata bychom mohli osvobodit i Jeruzalém! Veličenstvo, Bůh je mi svědkem, že západní cestou můžeme dosáhnout těchto zemí!

Jistě byste chtěla vědět, z čeho pramení má jistota v těchto věcech. Dlouhá léta jsem studoval spisy největších učenců všech dob, jako byli Archimédes, Eratosthénes nebo Ptolemaios. I učenci z jiných zemí, např. z Arábie, země původu naší číselné soustavy, se s nimi shodují v názorech na velikost a tvar Země. Jsem v písemném styku s velikým Toscanellim, největším kartografem a polyhistorem dneška, který naprosto podporuje moji myšlenku. Zdají se Vám řeči o kulatosti Země rouhačstvím proti Bibli? Není tomu tak, stačí si pouze pozorně všímat okolí. Dívala jste se někdy, jak stateční námořníci pomalu mizí za obzorem? Jako by se propadali do vodní spousty. Nejprve pomalu mizí trup. Pak stožáry s plachtami a nakonec vlajka. Stejně jako zapadá Slunce. Neutápí se ve vodě, nezapadá za nekonečně vzdálený okraj Země. To jen se nám ztrácí za obzor, aby lidem na druhé straně zeměkoule započalo nový den. Už je tma, Veličenstvo. Podívejte se na tento pomeranč, který jakoby byl Zemí, a tento svícen, představující v naší představě Slunce. Otáčím-li svícnem okolo pomeranče, je osvícená vždy jen jeho polovina, na druhé je tma, noc. Stejně tak se chovají všechny hvězdy a nebeská tělesa, pomalu se otáčejí kolem naší Země. Zdá se Vám to příliš fantastické a nepodložené? Uvedu Vám další důkaz tohoto tvrzení. Měsíc, svítící v noci na nebi, je stejně jako Slunce tvaru koule. Pomalu ho temná noc pravidelně ukrajuje a pak ho zase přibývá. To, jak se pomalu dostává do zákrytu se Zemí,[11] ta ho pomalu ukrajuje, ta pomalu zabraňuje dostat se sluneční záři na jeho povrch, jako tento pomeranč vrhá kruhový stín na stěnu místnosti. Stejně tak proto vidíme kruhové Slunce a Měsíc. Koule je jedinečný tvar, nejdokonalejší na celém světě. Nemá konce ani začátku, pořád dokola, jako se střídá den s nocí, život se smrtí. Proto si ji i Bůh vybral za tvar Země. Zbývá ale zodpo-

[10] Za toto tvrzení by měl být shledán kacířem, bohužel jsem právě tehdy spal.

[11] *Pozn. red.:* Ve skutečnosti to není pravda. Měsíc mění fáze kvůli Slunci.

vědět jednu otázku, která trápí nevěřícné. Jak by pak mohli lidé žít na spodní straně Země, aniž by spadli do nekonečna, jak by se tam mohly udržet oceány. Co myslíte, královno, může se voda udržet v misce, obrátíme-li ji vzhůru nohama? Zdravý rozum velí, že ne. A hle, jestli roztočíme tuto misku, voda v ní zůstává, i když je vzhůru nohama! Nevíme proč, moje královno, ale je to tak. Na zemi je mnoho záhadných a nevyřešených věcí, stačí mít jen odvahu a víru v úspěch. Stejně je to i s cestou na západ, stačí mít jen trochu odvahy a sláva s bohatstvím Vás nemine.

Ta vzdálenost není nekonečná, spočítali ji již mnozí přede mnou. Podívejte se na slavnou Toscanelliho mapu, vzdálenost mezi Azory a Zipangem je skoro stejně veliká jako mezi Azory a Evropou. A já ji překonám, jsem si tím jist. Podívejte se zde, nakreslil jsem způsob měření Země, jak si jej představoval starověký učenec Ptolemaios. Podle něho pravil Poseidonios, že nejjasnější hvězda na jižním nebi je Kanobos, v kormidle lodi Argo. V Řecku je neviditelná. Jedeme-li k jihu, ukáže se nejdříve v Rhodu. Ale ihned, jakmile se spatří na obzoru, zase pod ním zmizí. Postoupíme-li o 5000 stádií k jihu do Alexandrie, shledáme, že se tam hvězda, když právě prochází poledník, zvedá nad obzorem o čtvrtý díl znamení, tedy o 1/48 zodiaku. Část poledníku, která je mezi Rhodem a Alexandrií, rovná se tedy 48. dílu zodiaku. Jelikož také obzor Rhodských je od obzoru Alexandrijských tak vzdálen. Ježto prý se délka na Zemi, která je ve stejném poměru k této části poledníku, rovná 5000 stádií. A ostatní stejné části se taktéž shodují. Největší kružnice má pak 180 000 stádií, jak proměřil Ptolemaios. Jestliže veliký Toscanelli počítá vzdálenost Lisabon–Catay 240° východním směrem, musí být vzdálenost západním směrem 6000 mil. Jestliže Díaz uplul východním směrem 8400 mil a urazil tím poloviční cestu do Indie, je západní cesta mnohem kratší!

Vaše Veličenstvo, poskytněte mi jen pár lodí, peníze na potraviny na cestu a plat námořníků a já vám tady před Bohem slibuji, že Vás učiním tou nejbohatší královnou na světě a Kastílii světovou velmocí. Za tyto služby bych jako oddaný poddaný požadoval skromné odměny: hodnost námořního admirála, jakož i titul místodržitele a guvernéra všech zemí, které objevím. Tyto tituly a úřady budou dědičné pro mé syny a jejich syny a syny jejich synů, dále požaduji povýšení do šlechtického stavu, právo na jednorázovou odměnu i deset procent z výnosu všech obchodů a dopravy v nových zemích, včetně zlata, stříbra a drahokamů, které budou dopraveny do Španělska. Toť vše, doufám, že její Výsost si vše uvážlivě rozmyslí a spravedlivě přihlédne ke všem výhodám mého plánu, a vstoupí do dějin jako největší královna všech dob.“

Komentár k riešeniam

Rad by som pripomenul, že myslenie a logika ľudí v stredoveku bola iná ako teraz. Považovali za samozrejmé iné skutočnosti, o ktorých teraz vieme, že nie sú pravdivé, a naopak veľa vedomostí z dnešnej doby im nič nehovorilo (napr. rádio, kvantová mechanika či Glummov princíp). Základom riešenia bolo teda oprostiť sa od naučených vedomostí a snažiť sa použiť iba tie, ktoré mali šancu pochopiť. Ako príklad uvádzam niektoré vaše tvrdenia a moje *nesprávne*

argumenty (ako zástancu teórie, že Zem je „placka“). Pre mňa ako človeka, ktorý má obmedzené skúsenosti, sú tieto argumenty pravdivé. Skúste prísť na to, ako by ste ich vyvrátili. Na sústredení sa o tom môžeme porozprávať, a ja vás presvedčím, že Zem je PLACKA.

Veď už Kopernik zistil …	Nepoznám žiadneho Kopernika. (V tej dobe Kopernik ešte iba premýšľal nad tým, ako zjednodušiť Ptolemaiov systém nebeských sfér, a svoje myšlienky sa neodvážil povedať nahlas. Svoje dielo publikoval až o 50 rokov neskôr.)
Prečo uvidíme najskôr sťažeň, a až potom celú loď?	Pretože je vždy viac slabej hmly tesne nad hladinou mora ako vyššie nad ním. Veď aj jas Slnka slabne, keď Slnko zapadá. Rovnako ak sa pozrieš do údolia, hmla sa drží tesne nad zemou a nahor nestúpa. Naviac voda predsa určuje vodorovnú hladinu! Mýlim sa ak poviem, že stavitelia, ak potrebujú určiť vodorovný smer, použijú vodováhu?
Keďže Slnko a Mesiac sú guľového tvaru, tak na základe podobnosti by aj Zem mala byť guľového tvaru.	I. Skús sa občas pozrieť na Mesiac. Uvidíš stále tie isté moria a ani pevnina nemení svoju polohu. To znamená, že Mesiac je doska, ktorá nemení svoju polohu voči Zemi, je k nej stále priklonená. Rovnako je to aj u Slnka, bohužiaľ je tak jasné, že na ňom nedokážeme vidieť žiadne moria. II. Ak by aj boli guľového tvaru, tak to nič nehovorí o tom, aký je tvar Zeme. Veď ak by Zem bola guľou, tak ľudia žijúci niekde inde ako na samom vrchu by museli stále chodiť do kopca a z kopca!
Keby loď doplávala príliš ďaleko, spadla by do horúcich pekiel, ak by Zem bola placka. Ale žiadna loď tam ešte nikdy nespadla.	Ak by aj spadla, tak určite sa nevrátia námorníci späť, aby o tom podali svedectvo. Naviac, mnoho námorníkov tak už zaiste spadlo, je mnoho lodí, ktoré sa nikdy nevrátili do prístavu.

Eratostenov pokus, ktorý uviedol *Bc. Vansa*.

Ale Slnko predsa nie je nekonečne ďaleko! Je síce vysoko na oblohe, ale dosť nízko na to, aby sa dala zistiť skutočnosť, že nie je nekonečne vzdialené. Eratostenés nezmeral obvod Zeme (pretože Zem nie je guľa), ale zo svojich výpočtov mohol zistiť výšku Slnka nad zemou.

Slnko vychádza na východe a putuje na západ. Kadiaľ ide, ak sa ďalší deň objaví zasa na východe?

Ide predsa popod Zem. Zem je placka!

Ak by Zem bola placka, voda by sa vyliala do pekelných ohňov!

Voda sa predsa leje do pekelného ohňa, tam sa vyparí a ako mrak sa vracia nad pevninu, kde spadne dole ako dážď.

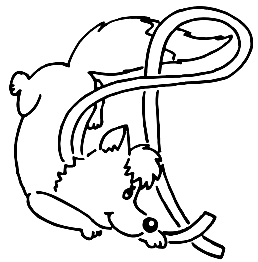
Pozn. red.: Ak bol niekto poslaný do väzenia, dostal rovnaký počet bodov ako keď do väzenia nešiel. Väzenie som bral v tomto okamihu ako „kolorit“ úlohy.

Bzučo

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235
E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz
WWW: http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/MaM/



Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina

				Témata			Úlohy				
Pořadí	**Jméno**	**Škola**	**Celkem**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**∑**	**Letos**
1.–2.	Mgr. Karel Žídek		28			11	7	5	5	28	28
	Mgr. Martin Demín		28	4	3	6	7	5	3	28	28
3.	Mgr. Jakub Jeřábek		27	3		12	5	2	5	27	27
4.	Doc. Michal Tarana		151		15	1	5			21	21
5.–6.	Bc. Tibor Vansa		17	7			4		6	17	17
	Doc. Jirka Klimeš		116	3		6	4	4		17	17
7.	Dr. Miroslav Frost		92	4				5	6	15	15
8.–11.	Bc. Miroslav Hejna		13			7	6			13	13
	Dr. Dáša Eisenmannová		54	4				5	4	13	13
	Dr. Jura Tománek		91	4	4	5				13	13
	Mgr. Martin Beránek		24	3			5	5		13	13
12.–13.	Mgr. Peter Murárik		33	3	6				3	12	12
	Bc. Dana Beránková		12	2				5	5	12	12
14.–16.	Dr. Honza Klusoň		54	4		5		0	2	11	11
	Bc. Peter Bališ		11	3	4		1		3	11	11
	Bc. Tomáš Škereň		11			8		3		11	11
17.–19.	Dr. Karel Martišek		96	4				3	3	10	10
	Bc. Martin Včelák		10	3		1		2	4	10	10
	Bc. Tomáš Rieb		10				1	5	4	10	10
20.–21.	Mgr. Lenka Beranová		20	1		3		5		9	9
	Michaela Šikulová		9	3				2	4	9	9
22.	Zdeněk Nováček		8			2		2	4	8	8
23.–25.	Juraj Konečný		7					5	2	7	7
	Peter Petrovský		7			5		2		7	7
	Lucie Vasická		7			1	1	1	4	7	7
26.–32.	Zuzana Svobodová		6		3			0	3	6	6
	Dr. Vašek Cviček		60				4	2		6	6
	Anna Zoulová		6	3			1	1	1	6	6
	Jozef Tinaj		6					2	4	6	6
	Mgr. Tomáš Svatoň		45			6				6	6
	Jana Babováková		6				1	3	2	6	6
	Gabriela Boháčová		6			3			3	6	6
33.–34.	Ivan Banas		5				1	1	3	5	5
	Milan Ružička		5	3				2		5	5
35.	Aleš Hanák		4				4			4	4
36.	Radka Picková		3	3						3	3
37.–38.	Jiří Hampl		1				1			1	1
	Jiří Vlach		3				1			1	1