

M&M Číslo 5 Ročník VI

Téma 1 – Elektron

Bc. Jan Novotný se pokusil spočítat integrál z čísla 3, který zanechal Mgr. Zoltán Mics nevyřešený.

Náš integrál je ve tvaru:

$$t = \int_0^{d_0} \sqrt{\frac{m_e}{2Ce^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_0}\right)}} dr. \quad (*)$$

Nejprve si spočítáme neurčitý integrál:

$$\int \sqrt{\frac{m_e}{2Ce^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_0}\right)}} dr = \sqrt{\frac{m_e d_0}{2Ce^2}} \int \sqrt{\frac{r}{d_0 - r}} dr.$$

Zaveďme substituci $t = \sqrt{\frac{r}{d_0 - r}} \implies r = \frac{d_0 t^2}{1 + t^2} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{2d_0 t}{(1 + t^2)^2},$

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot 2d_0 \left(\int \frac{dt}{1 + t^2} - \int \frac{dt}{(1 + t^2)^2} \right) &= 2d_0 \Gamma \left(\arctg t - \frac{1}{2} \frac{t}{1 + t^2} - \frac{1}{2} \arctg t \right) = \\ &= \Gamma \left(d_0 \arctg \sqrt{\frac{r}{d_0 - r}} - \sqrt{r(d_0 - r)} \right) + \Phi, \quad \Phi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{r \rightarrow d_0^-} \Gamma \cdot \left(d_0 \arctg \sqrt{\frac{r}{d_0 - r}} - \sqrt{r(d_0 - r)} \right) - \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma \cdot \left(d_0 \arctg \sqrt{\frac{r}{d_0 - r}} - \sqrt{r(d_0 - r)} \right) \\ &= \Gamma \cdot d_0 \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2 m_e d_0^3}{8Ce^2}} \quad (1) \end{aligned}$$

† označme tento výraz Γ

Mgr. Peter Čendula: Komentár k predchádzajúcim článkom[♦] Mgr. Zoltána Micsa v čísle 3

- Pokúsme sa riešiť integrál

$$\int_d^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2CQ}{m} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d}\right)}} = \int_0^T dt, \quad (2)$$

kde používame značenie zavedené v predchádzajúcom čísle. Okamžitá vzdialenosť náboja Q od bodu vrcholu (bod S) je x . Čas T je čas, za ktorý padne náboj Q do bodu S. d je počiatočná vzdialenosť Q od S. Zavedme substitúciu

$$\begin{aligned} x &= d \cdot \sin^2 \theta & \text{pre } x &= d & \theta &= -\frac{\pi}{2} \ddagger \\ \frac{dx}{d\theta} &= 2d \sin \theta \cos \theta & \text{pre } x &= 0 & \theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{2md^3}{CQ^2}} \int_{-\pi/2}^0 \sin^2 \theta d\theta = \sqrt{\frac{2md^3}{CQ^2}} \cdot \left[\frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2} \right]_{-\pi/2}^0 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2md^3}{CQ^2}}. \quad (3)$$

Vzťah (6) v č. 2 dáva hodnotu $T_0 = \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{2dm}{C}}$, teda $\frac{T_0}{T} = \frac{4}{\pi} \approx 1,27$.

- Môžeme postupovať analogicky ako pri gravitačnej sile a použiť obmenený Keplerov zákon v mnou odvodenom tvare.

Uvažujme teleso m_1 obiehajúce po kruhovej dráhe s polomerom r okolo centrálného telesa s hmotnosťou M . Z rovnováhy síl (odstredivá a gravitačná) dostaneme

$$m_1 \omega^2 r = \kappa \frac{m_1 M}{r^2} \implies \omega^2 = \frac{\kappa M}{r^3},$$

kde obežná doba $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$. Iné teleso m_2 začne padať zo vzdialenosti $r = d$ na centrálné teleso M . Doba jeho pádu nech je T_2 . Predpokladajme, že teleso m_2 nespadne na M , ale obehne okolo neho po veľmi pretiahnutej elipse s veľkou poloosou $\frac{d}{2}$. Keplerov zákon hovorí, že

$$\frac{T_1^2}{(2T_2)^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{r^3}{(d/2)^3} \implies T_2 = \frac{\pi d}{2} \sqrt{\frac{d}{2\kappa M}}.$$

Teraz stačí uvážiť, že rovnaké rovnice musia mať rovnaké riešenia, a teda

$$\left. \begin{array}{l} \text{elektrón} \quad F = \frac{CQ^2}{d^2} \\ \text{gravitácia} \quad F = \frac{\kappa m M}{d^2} \end{array} \right\} \implies CQ^2 = \kappa m M. \quad (4)$$

[♦] Autor sa nemusí ztotožňovať so závermi. Sú to len matematické pripomienky.

[‡] Pokuste se přijít na to, proč by jako řešení nemohlo vyhovovat taky např. $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Potom $T = \frac{\pi d}{4Q} \cdot \sqrt{\frac{2md}{C}}$, čo je ekvivalentné s výsledkom (3) na predchádzajúcej strane.

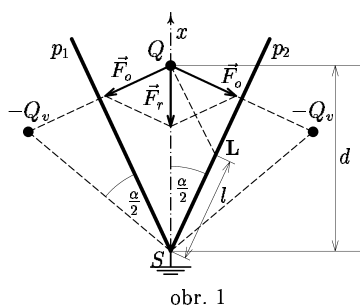
- **Pozn.:** Vlúdila sa tiež chyba v značení v čísle 2. Vzťah (3) v č. 2 definuje $F = \frac{kCQ^2}{d^2}$, pričom autor uvažuje $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Ďalej analogicky zavádza potenciálnu energiu, ale chybné, pretože by malo byť $E_{pot.} = -\frac{kCQ^2}{d}$, pričom vynechal k . Ja som do konštanty C v predchádzajúcich výpočtoch zahrnul už aj k . Doba pádu elektrónu do bodu S je teda

$$T = \frac{\pi d}{4Q} \cdot \sqrt{\frac{2md}{C}}, \quad (5)$$

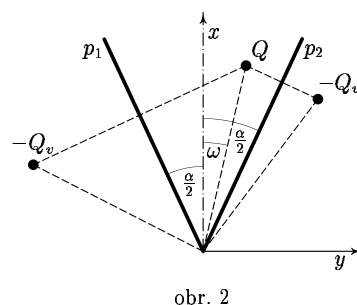
kde $C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot A$, kde A je zatiaľ neznáma bezrozmerná konštanta.

- Treba sa zamyslieť nad korektným používaním zrkadlových nábojov. Ja sám som nepochopil myšlienku použitia zrkadlových nábojov v čísle 2. Výpočet nie je podstatný, ide o to, ako autor používa zrkadlové náboje. Chceme ho preto poprosiť o bližší komentár.*

Dalšie výpočty Mgr. Petra Čendulu



obr. 1



obr. 2

Vzhľadom na to, že rozmery dosiek sú priam obrovské, v smere ich priesečnice môžeme každé miesto na priamke s ňou rovnobežnej a ležiacej v rovine osi uhla α považovať za identické. Preto budem uvažovať len náboj Q medzi dvoma vodivými priamkami, ktoré zvierajú uhol α a sú uzemnené[‡].

Kvalitatívny popis. Náboj Q v pokoji: Aby mali priamky konštantný potenciál (obe rovnaký, rovný potenciálu zeme), musí sa na nich indukovať rozloženie náboja. Lenže toto rozloženie náboja má

* *Pozn. red.:* Peter Čendula snad pochopí problematiku virtuálneho náboje z článku Michala Tarany, ktorý otiskujeme v tomto čísle.

‡ *Pozn. red.:* Autor predpokladá, že rozloženie hustoty náboje v prípade, že se jedná o desku, je stejné jako v případě, že se jedná o přímku. Je tomu skutečně tak? Jaký je váš názor?

na ne samotné tiež vplyv (indukované náboje na p_1 indukujú náboj na p_2 a vice versa[†]). Pozri obrázok 1. Môžeme písať

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(d \cos \frac{\alpha}{2} - l\right)^2 + \left(d \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}} + \varphi_{p_1(L)} + \varphi_{p_2(L)} = 0, \quad (5)$$

kde $\varphi_{p_1(L)}$ značí potenciál v bode L od priamky p_1
 $\varphi_{p_2(L)}$ značí potenciál v bode L od priamky p_2 .

Potenciál od platní p_1 a p_2 je práve taký, ako potenciál od náboja $-Q_r^*$ osovno súmerného podľa p_2 s Q . Celý pohyb náboja Q po úsečke osi uhla α si teda možno zjednodušiť na pohyb Q k S so súčasným pohybom zrkadlových nábojov $-Q_r$ v osových súmernostiach s p_1 , p_2 . Pri vzdialenosti x od S platí pohybová rovnica (zatiaľ neuvažujem fluktuácie v smere kolmom na os x).

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{QQ_r}{\left(2x \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\Psi}{x^2}, \quad \text{kde } \Psi = \frac{QQ_r}{8\pi\epsilon_0 m \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (7)$$

Znova použijeme analógiu s gravitáciou, kde pre dve telesá ($M \gg m$, M sa nepohybuje) a pád telesa m na M platí rovnica

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\kappa M}{x^2}, \quad \Psi \rightarrow \kappa M.$$

V predchádzajúcej časti som odvodil v rovnici (3) pre dobu pádu čas

$$T = \pi \sqrt{\frac{d^3}{8\kappa M}} \rightarrow T = \pi \sqrt{\frac{d^3}{8\Psi}} = \pi \sqrt{\frac{d^3}{QQ_r/\pi\epsilon_0 m \sin \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\pi d}{\sqrt{QQ_r}} \cdot \sqrt{\pi\epsilon_0 m d \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

$$\text{Pre } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ vychádza } T = \frac{\pi d}{\sqrt{QQ_r}} \sqrt{\pi\epsilon_0 m d \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\text{Pre } \alpha = 0 \text{ máme } T = 0.$$

Nie je to ale celkom korektné, pretože ako som spomenul, neuvažovali sme fluktuácie v pohybe v smere kolmom na os x . Domnievam sa, že v 3 rozmeroch sa riešenie nezmení, pretože zrkadlové náboje majú tu istú polohu a náboj.[†] Logické dôsledky vzťahu (8) sa zhodujú s fyzikálnou intuíciou a zjavnými vlastnosťami hľadaného riešenia.

[‡] lat. naopak

* Peter Čendula měl v řešení uvedený virtuální náboj Q . Redakce si dovolila změnit tento náboj na Q_r , kde $Q_r = CQ$, $C \in \mathbb{R}$ je konstanta. Redakce se domnívá, že výsledný náboj Q_r nebude roven Q .

† Autor článku se mýlí, neboť v 2D vypadá potenciál bodového náboje úplně jinak než v 3D (je to jako kdybychom v 3D brali nekonečnou tyč).

Potenciál bodového náboje v 3D je $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ a v 2D to je $\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r}$.

Ďalšia vec, ktorú by bolo vhodné uvažovať, je náhla fluktuácia polohy náboja v osi y a následné „vybočenie“ z osi uhla α . Účinok zrkadlových nábojov od p_1 a p_2 sa teraz v smere osi y už neruší, a vyvoláva silu s nenulovou zložkou kolmou na os x . Pozri obrázok 2.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{QQ_r}{\left(2r \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \omega\right)\right)^2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{QQ_r}{\left(2r \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \omega\right)\right)^2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \quad (9.1)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{QQ_r}{\left(2r \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \omega\right)\right)^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{QQ_r}{\left(2r \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \omega\right)\right)^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}, \quad (9.2)$$

pričom $r^2 = x^2 + y^2$ $\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}$. V kartézskych súradniciach nie je veľmi príjemné riešiť túto sústavu.

Prejdime preto k polárnym súradniciam r, ω . Platí $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(-r \sin \omega \frac{d\omega}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \omega \right) = \\ &= -\sin \omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\omega}{dt} \cos \omega \frac{d\omega}{dt} - r \sin \omega \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{d^2r}{dt^2} \cos \omega - \frac{dr}{dt} \sin \omega \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos \omega - 2 \sin \omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dr}{dt} - r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \cos \omega - r \sin \omega \frac{d^2\omega}{dt^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

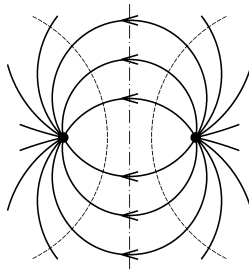
Sústava diferenciálnych rovníc (9.1), (9.2) v sebe obsahuje napr. členy $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \omega\right)$, ktoré nie sú veľmi príjemné pri hľadaní analytického riešenia sústavy. Domnievam sa, že jej riešenie je pre spomínané siny asi nie celkom elementárne, ak vôbec analyticky riešiteľné. Osobne by som odporúčal numerické riešenie.

Doc. Michal Tarana: Elektrostatické zrkadlá

Uvažujme pole dvoch bodových nábojov Q^+ a Q^- . Siločiaru poľa (plnou čiarou) a ekvipotenciálne plochy (čiarkovane) možno vidieť na obrázku vpravo. Preložme niektorou ekvipotenciálnou plochou tenký plech. Ak upravíme jeho potenciál na potenciál ekviplochy, na ktorej leží, situácia sa vôbec nezmení. Pole bude stále rovnaké. Takto môžeme zmeniť aj plochu A. Musí platiť, že vektor intenzity v prieniku s plochou bude na túto kolmý. Že to bude platiť, je zřejmé, pretože siločiaru sú vždy kolmé na ekviplochu. Z toho vyplýva, že môžeme riešiť inú úlohu. Majme daný bodový náboj Q^+ a vodivú rovinu. Pole náboja spôsobí, že na doske sa rozloží záporný náboj. Vyjadríme intenzitu poľa homogénne nabitej roviny s použitím Gaussovoho zákona.

Polia na oboch stranách roviny sú (čo do veľkosti) rovnaké. Pre veľkosť elektrickej intenzity platí:

$$E = 2E_{\perp} \cos \alpha = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cos \alpha}{h^2 + r^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

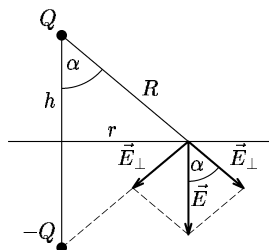


Takže na náš náboj působí síla

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2r)^2}. \quad (2)$$

Toto je řešení pre prípad, že $\alpha = \pi$. Spočítajme ešte výsledný indukovaný náboj \bar{Q} . Platí

$$\bar{Q} = \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^\infty -\frac{2hQ}{4\pi(h^2+r^2)^{3/2}} 2\pi r dr = \dots = -Q.$$

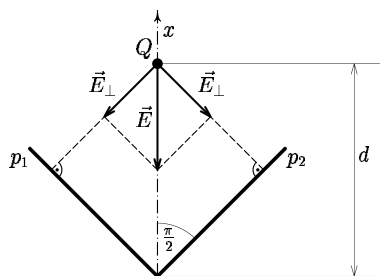


Riešme zadanú úlohu pre $\frac{\pi}{2}$. V tomto prípade vznikne symetrický kvadrupól podľa obr. 3. Platí:

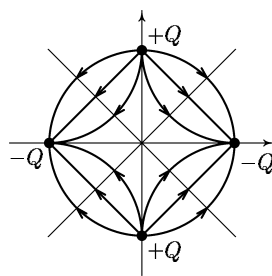
$$\frac{a_\perp}{d} = \cos \frac{\pi}{4}, \quad F_\perp = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{4d^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}}.$$

Uvažujme, že celý dej je nerelativistický. Uvedený výsledok však ani zďaleka nie je úplný. Treba započítať ešte posledný náboj v kvadrupóle (pozri obr. 4). Výsledná síla bude potom

$$F = 2F_\perp + F_\parallel = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2 \cos \pi/4}{4d^2 \cos^2 \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2d)^2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}. \quad (3)$$



obr. 3



obr. 4

Teda ako vidíme, počet virtuálnych nábojov závisí od α , napr.:

$$\begin{aligned} \alpha = 90^\circ &\rightarrow 3 \text{ virtuálne náboje} \\ \alpha = 60^\circ &\rightarrow 5 \text{ virtuálnych nábojov} \\ \alpha = 30^\circ &\rightarrow 11 \text{ virtuálnych nábojov} \end{aligned}$$

Pre $\alpha \rightarrow 0$ pôjde vlastne o kružnicu so stredom vo vrchole dosiek, kde bude nulový potenciál. Preto tam bude na elektrón pôsobiť síla $F \rightarrow 0^\ddagger$.

Bzučo

[‡] Vidíme, že závery Petra Čenduly a Michala Tarany nejsou stejné, co se týče doby pádu náboje na desky, když $\alpha \rightarrow 0$. Jaký je váš názor?

Téma 3 – Gramatiky

Nejprve se musím velmi omluvit řešitelce *Ladě Oberreitové* za to, že jsem zašantročil její řešení, které se tak se nedostalo do předchozího čísla, kam z velké většiny patřilo. Zároveň s omluvou se pokusím chybu alespoň částečně napravit: *Lada* dostala za minulé „kolo“ tématu 7 bodů, její řešení bylo víceméně shodné s řešeními, která byla uvedena jako vzorová. Chtěl bych ji především pochválit za to, že u příkladů (4) a (5) uvedla několik řešení (která využívala pokaždé jinou techniku konstrukce gramatik) a u příkladu (9) se jí téměř podařilo dosáhnout správného řešení.

Dále od *Mgr. Ondřeje Plašila* přišlo opožděně (za což nemůžeme ani my, ani *Ondřej*) řešení minulého „kola“ gramatik, které jsem ohodnotil 14 body. *Ondřej* úspěšně vyřešil příklad (9) a ukázal podobnost příkladů (10) a (11), jejich společné zobecnění, a dokonce malou úpravu vzorového řešení. Dále pak řešitel přidal úplně nový příklad, který označil dalším číslem (13) - viz níže.

Z minulé série

(9) **Zadání:** Vygeneruj slova, jejichž počet písmen je dělitelný třemi.

- Řešení *Mgr. Ondřeje Plašila* (citace): $G = (N, T, P, A)$, $N = \{A, B\}$, $T = \{a, b, c\}$, $P = \{A \rightarrow aAc, A \rightarrow B, B \rightarrow bBc, A \rightarrow e, B \rightarrow e\}$.

Řešení je zcela správné, dokonce je lze trošičku zkrátit vynecháním pravidla $A \rightarrow e$, které lze docílit použitím po řadě pravidel $A \rightarrow B, B \rightarrow e$.

- Řešení *Lady Oberreitové*: $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \rightarrow e, S \rightarrow AbAbAb, A \rightarrow aA, A \rightarrow e\}$.

Pozorným prozkoumáním jejího řešení zjistíme, že uvedená gramatika vygeneruje vždy 3 b -čka, a mezi ně a na levý okraj vloží libovolný počet a -ček, což lze opravit jednak tak, aby a -čka byla i napravo od posledního b -čka (změna pravidla $S \rightarrow AbAbAb$ na $S \rightarrow AbAbAbA$) a jednak tak, aby byl generován libovolný počet b -ček dělitelný třemi (změnou pravidla $S \rightarrow AbAbAbA$ na $S \rightarrow SbSbSbS$ a přidáním pravidla $S \rightarrow A$).

(10) a (11) **Zadání** opakovat nebudeme, ani řešení. Řešení *Mgr. Ondřeje Plašila* bylo rozšířením řešení *Dr. J. Klimeše* (viz předchozí číslo). *Ondřej* navíc přidal opatření, aby vygenerovaná čísla nezačínala nulou (stačí změnit počáteční neterminál z A na S a přidat pravidla, která kopírují pravidla $A \rightarrow 0A, A \rightarrow 1B, A \rightarrow 2C$ tak, že vynechávají taková, která vpravo začínají nulou):

(10): $G = (N, T, P, S)$, $N = \{A, B, C, D, E, S\}$, $T = \{0, 1, 2\}$,

$$P = \{A \rightarrow e, S \rightarrow 1B, S \rightarrow 2C, A \rightarrow 0A, B \rightarrow 0D, C \rightarrow 0B, D \rightarrow 0E, E \rightarrow 0C, \\ A \rightarrow 1B, B \rightarrow 1E, C \rightarrow 1C, D \rightarrow 1A, E \rightarrow 1D, \\ A \rightarrow 2C, B \rightarrow 2A, C \rightarrow 2D, D \rightarrow 2B, E \rightarrow 2E\}.$$

(11): Analogické opatření, aby gramatika negenerovala čísla začínající nulou.

(13) Citujeme *Mgr. Ondřeje Plašila*: **Zadání:** Gramatika generující čísla dávající po dělení sedmi zbytek -4 v mínusdvojkové soustavě.¹ **Řešení:** 1 znamená minus jedničku – nechce se mi vymýšlet nějaké speciální znaky. **Značení zbytků:** $A = 0, B = -1, C = -2, \dots, G = -6, H = 1, I = 2, \dots, M = 6$.

¹ Pozn. redakce: mínusdvojková soustava, ale i mnoho jiných číselných soustav bylo diskutováno v předchozích ročnících M&M.

$$G = (N, T, P, S), N = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, S\}, T = \{0, 1\},$$

$$P = \{ E \rightarrow e, \quad \text{generujeme čísla, která dávají po dělení sedmi zbytek } -4 \implies \text{musíme skončit v } E. \\ \text{opatření, aby číslo nemohlo začínat nulou.} \\ S \rightarrow 1B, \\ A \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 1B, \\ B \rightarrow 0I, \quad B \rightarrow 1H, \\ C \rightarrow 0K, \quad C \rightarrow 1J, \\ D \rightarrow 0M, \quad D \rightarrow 1L, \\ E \rightarrow 0H, \quad E \rightarrow 1A, \\ F \rightarrow 0J, \quad F \rightarrow 1I, \\ G \rightarrow 0L, \quad G \rightarrow 1K, \\ H \rightarrow 0C, \quad H \rightarrow 1D, \\ I \rightarrow 0E, \quad I \rightarrow 1F, \\ J \rightarrow 0G, \quad J \rightarrow 1A, \\ K \rightarrow 0B, \quad K \rightarrow 1C, \\ L \rightarrow 0D, \quad L \rightarrow 1E, \\ M \rightarrow 0F, \quad M \rightarrow 1G\}.$$

Pozn. redakce: Osobně si myslím, že zbytek -4 je při dělení sedmi totéž, co zbytek 3.

Od *Dr. Jiřího Klimeše* jsme dostali příspěvek ke generování matematických výrazů, který odstraňuje problém více závorek u výrazů (např. $((3)) \cdot 2$ nebo $1 + (1)$). **Řešení** (citujeme):

$$G = (N, T, P, A), N = \{A, B, C, D, N, O, Y, Z\}, T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, \cdot, /, (,)\},$$

$$P = \{ \begin{array}{llll} C \rightarrow 0C, & C \rightarrow 1C, & \dots, & C \rightarrow 9C, & C \rightarrow e, \\ D \rightarrow 1C, & D \rightarrow 2C, & \dots, & D \rightarrow 9C, & D \rightarrow 0, \\ N \rightarrow 1C, & N \rightarrow 2C, & \dots, & N \rightarrow 9C, & \\ A \rightarrow e, & A \rightarrow AOA, & A \rightarrow D, & A \rightarrow A/N, & A \rightarrow Y(B)Z, \\ B \rightarrow A/N, & B \rightarrow AOA, & & & \\ Y \rightarrow e, & Y \rightarrow AO, & Y \rightarrow A/, & & \\ Z \rightarrow e, & Z \rightarrow OA, & Z \rightarrow /NZ, & & \\ O \rightarrow \cdot, & O \rightarrow +, & O \rightarrow - \}. \end{array}$$

Vysvětlivky:

- C posloupnost číslic,
- D přirozené číslo (tedy i nula),
- N nenulové číslo,
- A počáteční znak, samostatné číslo, tvorba výrazů,
- Y slouží k rozlišení AO a A/,
- Z tvorba výrazů za závorkou,
- B nemusí být obsaženo, jestliže je $1+(1)$ výraz - pak je nahraditelné A.

Pozn.: Tímto postupem se nezbavíme např.: $1/(1-1)$.

Kontextové gramatiky

Ke kontextovým gramatikám přišlo jediné řešení od *Lady Oberreitové*. Pro pohodlné čtení doporučuji začít příkladem (2), který je z uvedených nejjednodušší:

1. **Zadání:** a^{n^2} . **Řešení** (citujeme): $G = (N, \text{Term}, P, S)$, $N = \{S, Z, Q, T, X, Y, K\}$, $\text{Term} = \{a\}$,

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow ZQK, \\ Q \rightarrow XQY, \\ Q \rightarrow e, \\ XY \rightarrow YXT, \\ TY \rightarrow YT, \\ TK \rightarrow Ka, \\ XK \rightarrow K, \\ ZY \rightarrow Z, \\ ZK \rightarrow e \}. \end{array}$$

Poznámka redakce: Vysvětlení funkčnosti je následující: Neterminály Z a K mají význam začátku a konce neterminálů (hlavně aby se nám o gramatice lépe přemýšlelo). Neterminál Q funguje jako generátor $X^n Y^n$. Společně s pravidlem $S \rightarrow ZQK$ tedy vygeneruje $ZX^n Y^n K$ (stejný počet X -ek a Y -ek, např.: $ZXXXYYYK$). Potom se vždy jedno X -ko vydá na cestu doprava přes Y -ka, a když přečleze Y -ko, vygeneruje jedno T -čko (pravidlo: $XY \rightarrow YXT$). Poté co X -ko dojede na konec Y -ek – tj. dojede ke K -čku, tak zmizí (pravidlo: $XK \rightarrow K$). Všechna T -čka, která X -ko po cestě vygenerovalo, jsou před X -kem tlačena až ke K -čku (T -čka přeskakují Y -ka: $TY \rightarrow YT$, ale X -ka je předjet nesmí – záměrně chybí pravidlo $XT \rightarrow TX$), kde se z T -čka stane a -čko, ale až za K -čkem. Co se tedy stalo? n X -ek přejelo n Y -ek a pokaždé, když se X a Y srazila, vzniklo jedno T -čko, tedy celkem vzniklo n^2 T -ček a každé T -čko se proměnilo za K -čkem v a -čko. Máme tedy slovo: $ZY^n K a^{n^2}$. Nyní se musíme zbavit neterminálů Z , Y a K – pravidla: $ZY \rightarrow Z$, $ZK \rightarrow e$ nám to přesně zaručí.

2. **Zadání:** a^{2^n} . **Řešení** (citujeme + změna komentářů): $H = (N, T, P, S)$, $N = \{S, Z, T, Q, K\}$, $T = \{a\}$,

$$P = \{ \begin{array}{ll} S \rightarrow ZGaK, & \text{„ZGaK“ } Z=\text{začátek, } G=\text{generátor, } K=\text{konec} \\ Ga \rightarrow aaG, & \text{„ZaaGK“ } G\text{-čko zdvojnásobí počet } a\text{-ček cestou doprava (ke } \\ & K\text{-čku)} \\ GK \rightarrow QK, & \text{„ZaaQK“ na konci se } G\text{-čko převleče za } Q\text{-čko} \\ aQ \rightarrow Qa, & \text{„ZaQaK“, „ZQaaK“ } Q\text{-čko se vrátí zpátky na začátek} \\ ZQ \rightarrow ZG, & \text{„ZGaaK“ až } Q\text{-čko dorazí na začátek, převleče se zpátky na} \\ & G\text{-čko (a můžeme to provést znova)} \\ ZG \rightarrow e, & \text{„aaK“ až se } G\text{-čko unaví, tak může zmizet} \\ K \rightarrow e \}. & \text{„aa“ a } K\text{-čko může taky zmizet - dokonce kdykoliv, protože} \\ & \text{jinak } G\text{-čko nemá kde skončit, a jak všichni víme, slova gene-} \\ & \text{rovaná gramatikou se mohou skládat JEN z terminálů (malá} \\ & \text{písmenka)} \end{array}$$

Poznámka redakce: Chválím *Ladu* za připojení komentářů, které jsem pro tisk upravil. Odvození slov gramatiky:

$$\begin{aligned} ZGaK \rightarrow (K \rightarrow e) \quad ZGa \rightarrow (ZG \rightarrow e) \quad a \\ \rightarrow (Ga \rightarrow aaG) \cdots \rightarrow (\text{viz výše}) \quad ZGaaK \rightarrow (ZG \rightarrow e) \quad aaK \rightarrow (K \rightarrow e) \quad aa \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} ZGaaK \rightarrow (Ga \rightarrow aaG) \quad ZaaGaK \rightarrow (Ga \rightarrow aaG) \quad ZaaaaGK \rightarrow (G \rightarrow Q) \cdots \\ \rightarrow (\text{obdobně předchozím}) \quad ZGaaaaK \rightarrow \dots \rightarrow aaaa \end{aligned}$$

ze $ZGaaaaK$ obdobně můžeme dostat $ZGaaaaaaaaK$. Povšimněte si, že G -čko vždy zdvojnásobí počet a -ček – odtud dostaneme vztah a^{2^n} .

3. **Zadání:** dvě slova nad abecedou $\{a, b\}$ zapsaná za sebou (např. $abbaabba$). **Řešení** (citujeme): $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, Q, A, B, K\}$, $T = \{a, b\}$,

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow QK, \\ & Q \rightarrow aQA, \quad Q \rightarrow bQB, \\ & AK \rightarrow aK, \quad BK \rightarrow bK, \\ & Aa \rightarrow aA, \quad Ab \rightarrow bA, \quad Ba \rightarrow aB, \quad Bb \rightarrow bB, \\ & Q \rightarrow e, \quad K \rightarrow e\}. \end{aligned}$$

Poznámka redakce: Q generuje dvě stejná slova – vlevo z malých písmen a, b (ta už měnit nebudeme) a vpravo z velkých A, B (s těmi budeme dále pracovat). Cílem je dostat A, B až na konec, s tím, že se nesmějí předjíždět a na konci se před K -čkem změni na odpovídající malá písmenka. Tato malá písmenka jsou přeskakována písmenky velkými. Například odvození slova $bbabba$:

$$\begin{aligned} QK \rightarrow bQBK \rightarrow bbQBK \rightarrow bbaQABK \rightarrow bbaABK \rightarrow bbaABbK \\ \rightarrow bbaAbBK \rightarrow bbaAbbK \rightarrow bbabAbK \rightarrow bbabbAK \rightarrow bbabbaK \rightarrow bbabba \end{aligned}$$

10. **Zadání:** a^n , kde p je libovolné prvočíslo – jinými slovy: Napište gramatiku, která vygeneruje všechna slova prvočíselné délky.

Lada se o tento příklad pokusila, ale v řešení je dost chyb, takže se mi nepodařilo rekonstruovat „co tím chtěl básník říci“. Vzhledem k tomu, že je řešení příliš dlouhé a pouze technické, neuvádím ho zde. Popíšu pouze základní myšlenku (která možná napadla více lidí): Nejprve si vygenerujeme a^n , pak zkusíme, je-li n prvočíslo. To znamená, že musíme umět dělit, musíme umět kopírovat počet a musíme umět dělat „for-cyklus“, tj. zkoušet to od $n - 1$ do 2. Pokud nám vyjde, že je n něčím dělitelné, nemůže být n prvočíslo. Pozn.: zde se rozhodně nevyplatí začínat od $n/2$, protože je to zbytečně technicky náročné.

Poznámka redakce: Doufám, že vás řešení *Lady* motivuje k dalšímu pokračování tohoto tématu. Můžete se pokusit řešení obměnit, vymyslet si nová zadání nebo alespoň dořešit příklady (4)–(9) plus zůstává několik nedodělávek z předcházejících čísel.

P.S.: Pokud vás toto téma nadchlo, můžete se těšit na soustředění M&M (bude pravděpodobně v říjnu), kde se o gramatikách a podobných věcech dozvíte daleko více. Mnoho úspěchů v zápolení s gramatikami vám přeje

Ziki

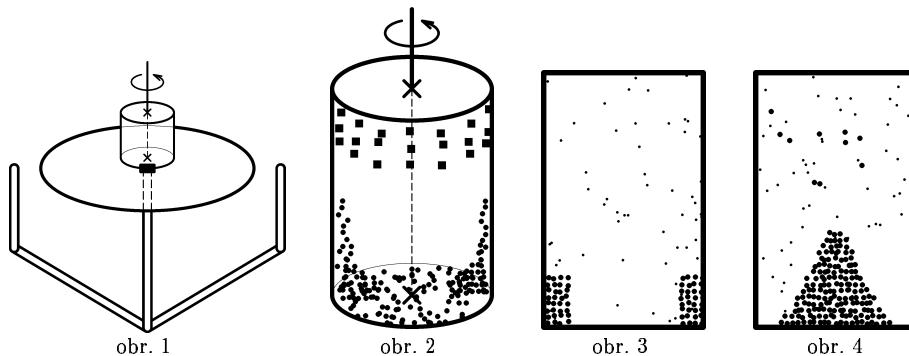
Téma 4 – Čajové lístky

Mgr. Peter Čendula: Spin-Down, Спин-Довн

Pozn. red.: Článek je uveřejněný bez větších zásahů do textu.

Popis experimentov: Používaná aparátúra bola opísaná v čísle 2, použitý zaváraninový pohár objemu 370 ml, čaj značky *Baliarne Poprad*. Na rotáciu vody v pohári bol použitý kuchynský prístroj značky ETA 02 na strúhanie, mletie apod. Na rotujúcu os a nástavec stačilo prilepiť plastelínu, a na to pohár tak, aby jeho os bola zhodná s osou rotácie prístroja. Vyskytli sa problémy s drobnou precesiou osi rotácie, ktorú som minimalizoval ručne cez kruhový nástavec na strúhanie (obr. 1). Prístroj sa točil s frekvenciou okolo 3 Hz, presný údaj som nezistil.

Čajový sáčok sa musí nechať vylúhovať vo vriacej vode, aby sa čajové lístky v ňom zmáčali. Potom ich môžeme pod vodou vložiť do pohára (priemerný rozmer lístkov ≈ 1 mm). Pokým sa prístroj roztáča, lístky sú odstredivou silou tlačené ku stenám a súčasne sa zdvihnú asi do polovice výšky pohára. Tesne pod viečkom plávajú už iba väčšie lístočky (obr. 2).



Asi po 10 s sa vrstva menších lístkov ustáli na menšej výške a je potom dost' ostrá hranica medzi ňou a okolitou vodou, v ktorej plávajú väčšie lístky (obr. 3). Po zastavení stroja a pohára na ňom rotuje iba voda v pohári, pokým ju neubrzdí viskózná sila. Menšie lístky vytvoria na dne akúsi pyramídu, navrchu ktorej sú tie najmenšie lístočky. Veľké lístočky, ktoré predtým plávali v hornej časti, sa usadia pod viečkom (obr. 4). Všimol som si, že po ustálení rotácie sa pod viečkom veľké lístky zhromažďujú v strede. Pri miešaní čaju v hrnčeku s lístkami sa tie buď zhromažďujú vo vzniknutom lieviku, ktorý pribrzdovaním rotácie zaniká, alebo sú na dne a vytvoria spomínanú pyramídu.

Aby som zistil, čo sa deje na dne, pretože dosiaľ som to cez nepriehľadné veiko nevidel, otočil som pohár dnom hore. Pri pokuse obrátiť pohár hore dnom sa prejavila pružnosť veka, a po zatlačení naň vošiel do pohára vzduch (dve-tri bublinky). Avšak pri roztáčaní posunutie ôs zapríčinilo, že pohár mi vystrelilo do boku, ten sa rozbil a aparátúra bola v čuďu. Už sa mi to nechcelo znova pripravovať, tak sa budem spoliehať na vykonané pokusy.

Roztáčanie tekutiny (čaju) tzv. *spin-up* resp. *spin-down* som videl modelované v knihe *H. Greenspana*, ale iba som ju listoval. Odporúčam:

H. GREENSPAN: Teorija Vraščajuščichsia Židkostež, Gidrometeoizdat, 1975,

Teoretický rozbor: Pohár naplnený vodou (bez vzduchu), který rotuje: Prebieha konvekcia vody od osi obvodu v hlavnom objeme a od obvodu k osi v hraničných vrstvách (teda na dne a pod viečkom). Tá tiež zabezpečuje prenosom momentu hybnosti výsledné ubrzdzenie rotácie. Čajové lístky sledujú pohyby tejto konvekcie, preto sa na dne a povrchu zhromažďujú okolo osi rotácie a v hlavnom objeme rovnomerne.

Keby rotácia vody bola udržovaná nejakým zdrojom energie, lístky by sme pozorovali pri stene. Lenže keď sa zpomaluje viskozitou a trením o steny, keď sa lístočky dostanú do stredu, už ich to zasa neodnesie tak ku stenám a ostanú tam. Som si vedomý, že model nemá kvantitatívne spracovanie a tiež že nemožno robiť závery, pokiaľ nevieme rádový dosah spomenutých javov.

Pozn. red.: Pokusí se někdo vypracovat alespoň kvalitativní teorii proudění vody v sklenici?

Stanislav Hampl se domnívá, že ve sklenici dochází k turbulenci. Nastává proudění směrem do středu sklenice. Za povšimnutí stojí také to, že čím více se voda ve sklenici otáčí, tím více jsou lístky ve středu, a dokonce putují v okolí osy rotace nahoru. Autor se domnívá, že lístky mají hustotu jenom nepatrně větší než voda[‡], jinak by tento pohyb nebyl možný. *Bzučo*

Téma 5 – Hodiny

Bod Bod (i)(a)

Mgr. Jan Beneš: Další aspekt ručičkového problému

Zaujal mne problém nastíněný ve třetím čísle časopisu, totiž situace, kdy jsou všechny ručičky stejně dlouhé, přičemž hodinová a minutová ručička se pohybují plynule, zatímco sekundová skokem.

Pro srozumitelné řešení bych si dovilil definovat pohyb skokem. Jestliže se sekundová ručička pohybuje skokem, potom v čase 00:00:00:00 je na dvanáctce, v čase 00:00:00:xx je stále na dvanáctce a v čase 00:00:01:00 je už na prvním dílku. Její pohyb z dvanáctky na první dílek považujeme za nekonečně rychlý.

V tomto článku bych navázal na mnou uveřejněné rovnice otisklé v čísle 3. Protože hodinová a minutová ručička se stále pohybují plynule, potom vztahy pro výpočet času v obou variantách, tj. vztah (2) a (9), zůstanou stejné.

Sekundová ručička se ale pohybuje skokem, tedy její úhlovou rychlost můžeme definovat jako $\omega_s = \frac{\pi}{30} \text{ s}^{-1}$. Nicméně protože se tato ručička pohybuje skokem, její rychlost má smysl uvažovat jen v souvislosti s celočíselným počtem sekund.

Čas t tedy vyjádříme jako:

$$t = \frac{x+4}{11} \text{ h} = \frac{3600 \cdot (x+4)}{11} \text{ s}. \quad (5.1)$$

[‡] Máte stejný názor? Kdo se pokusí experimentálně určit hustotu čajových lístečků?

Varianta 1

Protože nás však zajímá jen celočíselný počet sekund, budeme z tohoto výrazu brát jen celou část.

Dosazením do rovnice (5) v č. 3 dostaneme:

$$\omega_h \cdot t + \omega_h \cdot x \cdot 1 \text{ h} + \frac{4}{3}\pi = \omega_s \cdot t - 2p\pi, \quad (5.2)$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{x+4}{11} + \frac{\pi}{6} \cdot x \cdot 1 \text{ h} + \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{30} \cdot \left\lfloor \frac{3600 \cdot (x+4)}{11} \right\rfloor - 2p\pi. \quad (5.3)$$

Úpravou tohoto vztahu dostaneme:

$$p = \frac{11 \cdot \left\lfloor \frac{3600 \cdot (x+4)}{11} \right\rfloor - 60x - 460}{660}. \quad (5.4)$$

Aby ručičky někde vytvořily přesně rovnostranný trojúhelník, potom by se hodilo, kdyby p vyšlo naprosto přesně přirozené číslo. Po prověření x od 0 do 11 jsem bohužel takové x neobjevil. Jediný trochu zajímavý případ nastal pro $x = 8$, kde p vyšlo 64,025. To znamená, že sekundová ručička opsala $0,025 \cdot 360^\circ = 9^\circ$ navíc, tj. v obrázku úhel β bude ne 120° , ale 129° .

Varianta 2

Postupujme analogicky k variantě 1. Dosazením do rovnice (10) z minulého čísla dostaneme rovnici:

$$\omega_h \cdot t + \omega_h \cdot x \cdot 1 \text{ h} + \frac{2}{3}\pi = \omega_s \cdot t - 2p\pi, \quad (5.5)$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{x+8}{11} + \frac{\pi}{6} \cdot x \cdot 1 \text{ h} + \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{30} \cdot \left\lfloor \frac{3600 \cdot (x+8)}{11} \right\rfloor - 2p\pi. \quad (5.6)$$

Po úpravě tohoto vztahu dostaneme:

$$p = \frac{11 \cdot \left\lfloor \frac{3600 \cdot (x+8)}{11} \right\rfloor - 60x - 260}{660}. \quad (5.7)$$

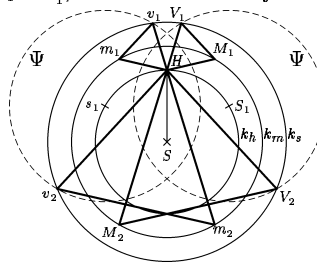
Při prověření všech $x \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ jsem ale v této variantě nenalezl nic zajímavého, tedy desetinná část čísla p nikdy nebyla natolik zajímavá, že by úhel α byl v intervalu $(110^\circ, 130^\circ)$.

Bod (i)(b)

Zopakujme pohled 2 na problém (i)(b) tak, jak byl uveřejněn v čísle 3. Máme ručičky o délkách h (hodinová), m (minutová) a s (vteřinová), kde h, m, s jsou vzájemně různá kladná čísla. Koncové vrcholy hodinové a minutové ručičky nechme nakreslit soustředné kružnice k_h, k_m . Koncový vrchol hodinové ručičky označíme H . Koncový vrchol minutové ručičky označíme M . Hodinovou ručičku zastavíme – nechť ukazuje pořád nahoru. Minutovou ručičku necháme jednou oběhnout kolem ciferníku (bod M tedy necháme pohybovat po kružnici k_m). Ke každé poloze bodu M chceme najít bod V tak, aby HMV byl rovnostranný trojúhelník. Délka strany trojúhelníku se bude s pohybem bodu M po kružnici měnit. Bod V se bude pohybovat po nějaké křivce ψ_V . Necháme-li vteřinovou ručičku opsat kružnici k_s , potom každý průsečík křivky ψ_V s kružnicí k_s bude vrcholem V' nějakého rovnostranného trojúhelníka $H'M'V'$, kde H' je poloha konce hodinové ručičky, M' poloha konce minutové ručičky, V' poloha konce vteřinové ručičky. Pak už stačí jen ověřit, jestli tyto konstelace ručiček mohou nastat (to samozřejmě bude záležet na volbě h, m, s).

Mgr. Karel Martišek, Bc. Hanns Novotný: Různě dlouhé ručičky a rovnostranný trojúhelník – shrnutí výsledků výzkumu obou autorů.

Oba autoři napsali, že se křivka ψ_V skládá ze dvou kružnic k_1 a k'_1 , a nakreslili následující obrázek:



Mgr. Karel Martišek k tomu dodal, že středy těchto kružnic S_1 a S'_1 leží na kružnici k_h . Pokusí se někdo dokázat, že se opravdu jedná o kružnice? A určí někdo přesně polohu jejich středů? Zkuste si pozorně prohlédnout obrázek!!! Pokud se nikdo nenajde (což bych se divil), prozradím vám správné řešení v příštím čísle. Nápopěda: všimněte si, jaký je poloměr obou kružnic k_1, k'_1 .

Až určíte polohu středů S_1 a S'_1 , napište si obecné a parametrické rovnice kružnic. Snad vám to pomůže konečně vyřešit problém rovnostranného trojúhelníku pro ručičky různých délek.

Bod (iii)(A,B,C)

Studiu Archimédovy spirály se věnovali Mgr. Karel Martišek, Peter Murárik, Bc. Hanns Novotný a Bc. Jiří Tománek. Petru Murárikovi děkujeme za pěkné grafy. Článek jsme sestavili z příspěvku kolegy Bc. Tománka.

Bc. Jiří Tománek: Trajektorie mouchy

Jak bylo uvedeno v čísle 4, je trajektorie mouchy Archimédova spirála, popsána v polárních souřadnicích rovnicí

$$\varrho = \frac{r_0}{2\pi} \varphi, \quad (*)$$

kde r_0 je vzdálenost pohybujícího se bodu od pólu po jedné otáčce.

Spočítejme r_0 pro pohyb mouchy.

- ω_r buď úhlová rychlost otáčení ručičky, $\omega_r = \frac{2\pi}{T_r}$,
- T_r je perioda otáčení ručičky, $T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}$,
- v_m je rychlost pohybu mouchy po ručičce.

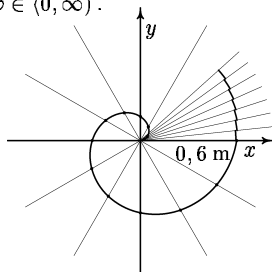
Pro r_0 platí: $r_0 = v_m \cdot T_r = \frac{v_m \cdot 2\pi}{\omega_r}$. Když tento vztah dosadíme do rovnice Archimédovy spirály (rovnice (*)), dostaneme

$$\varrho = \frac{v_m}{\omega_r} \varphi, \quad \varphi \in (0, \infty).$$

V kartézských souřadnicích má tato křivka rovnici

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad \varphi \in (0, \infty).$$

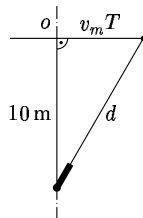
Narýsujme část křivky pro hodnoty $v_m = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_r = \frac{\pi}{30}$ (úhlová rychlost vteřinové ručičky). Tedy $\varrho = \frac{0,3}{\pi} \varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. V úseku $\varphi \in (2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6})$ zakreslíme, jak by se moucha pohybovala, kdyby v tomto úseku konala vteřinová ručička pohyb se skokem.



Bod (iii)(E)

Miroslav Frost: Likvidace mouchy těžkotonážním dělem

V čase 0 je moucha ve středu hodin, střela v děle. V čase t_0 urazí moucha po ručičce vzdálenost $v_m \cdot t_0$ a úhel $\omega \cdot t_0$, kde $\omega = \frac{\pi}{30} \text{ s}^{-1}$. Zároveň v čase t_0 vystřelíme z děla. V čase T zasahuje střela mouchu. Nepůsobí-li na ni gravitace, urazí střela dráhu $d = \sqrt{10^2 + (v_m \cdot T)^2}$, viz obrázek „z ptačí perspektivy“:



Doba od výstřelu po zásah je $t_L = T - t_0$. Střela urazí dráhu d za dobu t_L rychlostí v_s . Platí tedy

$$d = v_s \cdot t_L = \sqrt{100 + v_m^2 T^2}.$$

Zde dosadíme $T = t_L + t_0$ a upravíme:

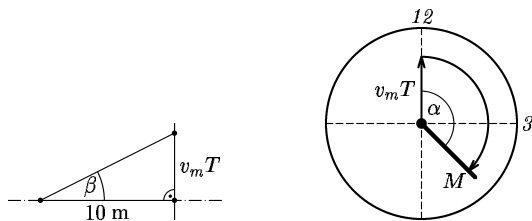
$$\begin{aligned} v_s^2 t_L^2 &= 100 + v_m^2 (t_L + t_0)^2, \\ v_s^2 t_L^2 - v_m^2 t_L^2 - 2v_m^2 t_L t_0 &= 100 + v_m^2 t_0^2, \\ t_L^2 (v_s^2 - v_m^2) - t_L (2v_m^2 t_0) - (100 + v_m^2 t_0^2) &= 0. \end{aligned}$$

Tuto krásnou kvadratickou rovnici lehce vyřešíme (známe-li ovšem hodnoty v_s, v_m, t_0) a získáme t_L .

Za t_L urazí moucha úhel $t_L \cdot \omega$, tedy v čase zásahu T bude vteřinová ručička s mouchou svírat s počátečním stavem úhel $\alpha = \omega \cdot (t_L + t_0) = \frac{\pi}{30} (t_L + t_0)$.

Dělo tedy nastavíme nejprve o úhel β vzhůru, a potom hlavěň otočíme po kružnici o úhel α .

Zbývá určit β – viz pohled „z boku“:



$$\tan \beta = \frac{v_m T}{10} \Rightarrow \beta = \arctan \left(\frac{v_m (t_0 + t_L)}{10} \right).$$

Tomáš tedy zvedne hlavěň vůči ose o o úhel β , a potom hlavěň otočí po kružnici s poloměrem $v_m(t_0 + t_L)$ a středem na ose o .

Bod (v)

Miroslav Frost: Výpočet k seřizování hodin

Definujme, že první hodiny se zpožďují o m minut, druhé se předbíhají o n minut. Čas na prvních hodinách nastavím na své hodinky a přejdu k druhým hodinám. Znam teď čas, který ukazují první i druhé hodiny. Jejich odečtením (odečítám menší od většího) zjistím délku časového intervalu K . Tuto délku intervalu K budu značit k .

Příklad:

1. hodiny se zpožďují o 10 minut $\rightarrow m = 10$,
2. hodiny se předbíhají o 5 minut $\rightarrow n = 5$.

První ukazují 16:31 – nastavím, přejdu k druhým, které ukazují 16:53, moje hodinky teď ukazují 16:41 (10 min cesta), tedy $k=12$. Teoreticky může být 13 možných časů (16:41, 16:42, 16:43 ... 16:53). Ukážeme, že tento počet lze snížit.

Každé hodiny musí mít alespoň 1-minutovou odchylku (jinak by šly přesně), ale zároveň odchylka nemůže být větší než zadaná. (V našem příkladě nemůže být např. 16:46 – 2. hodiny by se předbíhaly o 7 minut).

Obecně to lze vyjádřit tabulkou:

- (a) $k - 1 > m \wedge k - 1 \leq n \rightarrow m$ možností
 (b) $k - 1 \leq m \wedge k - 1 > n \rightarrow n$ možností
 (c) $k - 1 > m \wedge k - 1 > n \rightarrow (m + n + 1 - k)$ možností*
 (d) $k - 1 \leq m \wedge k - 1 \leq n \rightarrow k - 1$ možností

Od délky intervalu k odečítáme 1 minutu, která musí být v 1. (2.) intervalu; zbytek z k se musí vejít do 2. (1.) intervalu.

V prvé části tabulky jsou uvedeny počty možností, tedy kolik „správných časů“ může být. (Náš příklad spadá do $k - 1 > m \wedge k - 1 > n$, existují proto $m + n + 1 - k = 4$ možnosti správných časů.) Tyto možné „správné časy“ zjistíme, když interval K rozložíme na intervaly délky a, b ($a + b = k$, $a, b \in \mathbb{N}$) tak, aby $a \leq m, b \leq n$. Potom k času na hodinkách přičtu a , čímž zjistím možný správný čas. (Náš příklad: $k = 12$, $12 = 10 + 2 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5$ – všechny možnosti, tedy „možné správné časy“ jsou: 16:48 (41+7), 16:49 (41+8), 16:50 (41+9), 16:51 (41+10).)

Z možností si teď vyberu aritmetický průměr a podle něj seřídím hodinky (v našem případě 16:49:30 – avšak jelikož pracujeme s přesností celých minut, zaokrouhlíme i průměr na minuty: 16:50; mám jistotu, že největší možná odchylka je 3 minuty).

Pravděpodobnost p určíme vztahem $p = \frac{1}{x}$, kde za x dosadíme počet možností z pravé strany tabulky (v našem případě $p = 1/(m + n + 1 - k) = \frac{1}{4}$).

Poznámka: ve svém příspěvku jsem pracoval s přesností na minuty, rozdělení pravděpodobnosti považuji za rovnoměrné, pojmem „správný čas“ je myšlen oficiální čas platný v republice.

Výhoda tohoto řešení je univerzálnost. Postihuje všechny možnosti m, n a k a lze se jím řídit pro libovolné hodnoty m, n, k . Matouš

Téma 6 – Strategie

Piškvorky

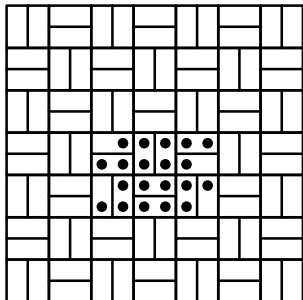
Musím bohužel podotknout, že žádný z vás nepochopil pořádně, co se má u piškvorek dokázat. Asi tři z vás popisovali nadšeně strategii, kterou si vymysleli, ovšem bez jediného pořádného důkazu. Některé tyto strategie (jako např. umísťovat křížek těsně vedle soupeřových koleček a to pokud možno za jeho nejdelší řadu) jsou intuitivně jasné každému, o to více by potěšil pořádný důkaz.

Pro menší hrací plány (např. 5×5 na 5 piškvorek) se takový důkaz může udělat ručně probráním všech možností (s uvážením symetrie), pro obecné hrací plány je nutno vymyslet nějaký trik. Abych nehovořil jen tak do větru, ukáži vám jednu takovou dokonalou remízovou strategii.

* Pokud $(m + n + 1 - k) \leq 0$, je to podvod a nemá smysl pokračovat v určování času – v zadání je pak někde chyba.

Robert Špalek: Remízová strategie pro 5 piškvorek ve vodorovné nebo svislé řadě na libovolně velkém hracím plánu

Rozdělme si nekonečný hrací plán na skupiny políček (tvaru 2×1 nebo 1×2 jako u domina) podle následujícího schématu:



Nyní si uvědomme, že každá vodorovná či svislá řada 5 piškvorek za sebou musí **nutně** zaplnit alespoň jednu **celou** dominovou kostičku – díky symetrii stačí uvažovat pouze vodorovné piškvorky a všechna možná umístění piškvorek jsou vyznačena na obrázku.

Nyní je řešení zřejmé: pokaždé když soupeř umístí piškvorku, my ji umístíme do opačného políčka příslušné dominové kostičky. Tak se stane, že nikdy nemohou být v jedné skupině dvě piškvorky stejné barvy a tedy žádný ze soupeřů nemůže udělat 5 piškvorek v řadě.

Doufám, že se vám uvedená strategie líbí a zkusíte nalézt nějakou podobnou pro jinou variantu této hry.

NIM – odebírání sirek

Ani u sirek není situace o mnoho lepší, není to však nepochopením zadání, ale příliš těžkými úlohami. Autoři se snažili vyřešit převážně tyto 2 (náročné) úlohy:

- NIM – N hromádek, v každém tahu si vybereme jednu hromádku a odebereme z ní libovolný počet sirek. Vyhrává/prohrává ten, kdo vezme poslední sirku.
- NIM2 na 2 hromádkách – obecně N hromádek, v každém tahu buď odebereme z jedné hromádky libovolný počet sirek nebo ze 2 různých hromádek odebereme libovolný **stejný** počet sirek. Opět můžeme zkoumat obě varianty hry, kdy vyhrává/prohrává ten, kdo vezme poslední sirku.

Abyste mohli do dalšího čísla lépe zkoumat, napišete několik rad, jak se úlohy tohoto typu řeší:

- NIM: Necht' vyhrává ten, kdo odebere poslední sirku.
Většina z vás přišla na to, že se 2 hromádkami je úloha triviální. Prohrané pozice jsou pozice tvaru (k, k) , ve kterých je na obou hromádkách stejný počet sirek. Ať odebereme libovolný počet sirek, soupeř stejný počet odebere z druhé hromádky a jsme zase tam, kde jsme byli. Takto to trvá až do doby, než soupeř odebere poslední sirku.

Toto platí pro 2 hromádky. Vy, kteří jste zkoumali situaci pro více hromádek, jste se snažili nakombinovat na stav (a, b, c) rovnost $a + b = c$ a jí podobné, což se nikomu z vás nepodařilo. Uznávám, že vyřešit tuto úlohu bez jistého triku je docela těžké, tak vám něco poradím: *Zkuste místo zkoumání operace plus zkoumat operaci XOR* – programátoři jistě vědí, o čem mluvím, ostatní nechtě si přečtou následující popis:

Def. Operace XOR je nad logickými hodnotami definována jako nonekvivalence, tedy nabývá jedničky právě tehdy, jsou-li obě vstupní hodnoty různé. Vše je zřejmé z následující tabulky:

a	b	$a \text{ XOR } b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

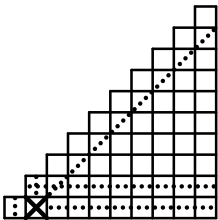
Operaci XOR můžeme po jednotlivých bitech rozšířit na přirozená čísla. To znamená, že si čísla zapíšeme ve dvojkové soustavě a nad jednotlivými bity provedeme operaci XOR. Výsledkem je číslo odpovídající výslednému binárnímu zápisu.

Aplikujete-li vhodným způsobem operaci XOR, možná vás napadne řešení pro libovolný počet hromádek.

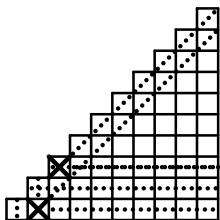
- NIM2: Uvažujme pouhé 2 hromádky, prohrává ten, kdo vezme poslední sirku.

Mgr. Karel Martišek a Miroslav Frost se podrobněji zamýšleli nad touto variantou metodou hrubé síly – prostě zkoušeli všechny malé počty hromádek a hledali prohrané pozice. Tato metoda jistě vede k řešení (dokonce se dá implementovat jako počítačový program), ale vinou špatné symboliky měli ve výpočtu oba dva stejnou chybu – zapomněli na prohazování hromádek, tzn. že pozice (m, n) je ekvivalentní pozici (n, m) .

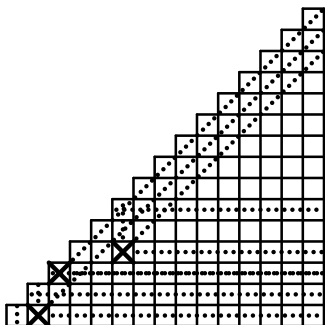
Nejlépe se prohrané pozice zakreslují do čtverečkované sítě. Prohranou pozici si označíme křížkem, načež všechny pozice, ze kterých se dá **bezprostředně** dostat této prohrané pozice, proškrtáme jako vyhrané. Označíme si další prohranou pozici a postup opakujeme. Algoritmus je snad jasnější z přiloženého diagramu:



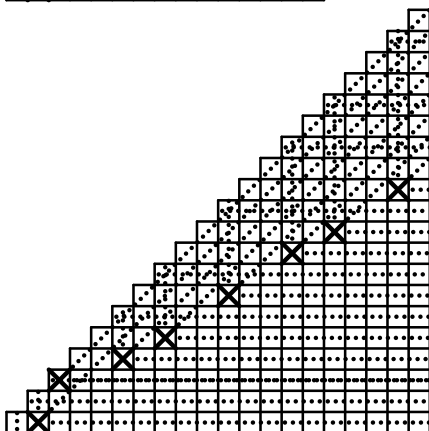
Pozice $(0, 0)$ je vyhraná, označíme $(1, 0)$ a proškrtáme všechna políčka doprava a šikmo nahoru doprava. Dále proškrtáme všechna políčka nahoru, dojedeme na diagonálu a pak ještě všechna políčka doprava – kvůli symetrii prohazování hromádek kreslíme pouze políčka pod diagonálou.



První neproškrtnuté pole je (2, 2). Označíme ho křížkem a proškrtneme všechny následníky stejným způsobem.



Na pozici (5, 3) jsme našli další prohranou pozici, pokračujeme v proškrťování.



Takhle vypadají všechny prohrané pozice, ve kterých jsou počty serek na obou hromádkách maximálně 20.

Robert

Téma 7 – Chronometr

Pozn. red.: Přišlo nám poměrně velké množství příspěvků, které obsahovaly prakticky úplné řešení úvodní úlohy a zároveň její podstatné rozšíření víceméně na libovolné časy. Pro přehlednost vybíráme článek *Miroslava Frosta*. Podobné řešení poslali také *Bc. Jan Novotný*, *Bc. Jiří Tománek*, *Mgr. Karel Martišek* a *Mgr. Václav Cviček*. Ostatní přispěvatelé vyřešili zpravidla první část problému — odměření časů tvaru $1/2^n$.

Miroslav Frost: Chronometr (mírně upraveno)

- (a) Popíšeme nejprve přesnější metodu, která umožňuje vyřešit úvodní úlohu. První šňůru zapálíme na obou koncích a současně druhou na jednom konci. Až první šňůra shoří (to bude právě za půl hodiny), zapálíme i druhý konec zbytku druhé šňůry. Druhá šňůra dohoří za čtvrt hodiny, dohromady tedy obě šňůry hořely $3/4$ hodiny.

Obecně, pokud máme větší počet šňůr (řekněme n), můžeme vytvořit výše popsaným postupem časový interval

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

hodiny. Můžeme-li si ještě navíc šňůry „připravit“ před samotným odměřováním (tzn. nejprve si vytvoříme několik šňůr o různých délkách hoření, a teprve potom začneme odměřovat čas), můžeme vytvořit z velkého počtu šňůr libovolné součty libovolně mnoha zlomků hodiny ve tvaru

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

hodiny. Počet šňůr potřebných k takovému měření samozřejmě prudce stoupá a s tím stoupá i nepřesnost. Když budeme mít zapalovač a šňůry, které lehce vzplanou blízko sebe, můžeme interval mezi zapálením dvou šňůr zkrátit až na dvě sekundy. Můžeme také dát konce šňůr k sobě a zapálit jich více naráz. Pokud tedy nevyžadujeme intervaly menší než 1,5 minuty a odchylka v řádu 8 sekund nám nevádí, je tato metoda dostatečně přesná.

- (b) Teď uvedu metodu méně přesnou, která nám ale zato umožní odměřit libovolný časový interval ve tvaru $1/n$ hodiny. První šňůru zapálíme na obou koncích a až dohoří, zapálíme druhou šňůru tak, aby hořela neustále na čtyřech místech, např. zapálíme oba konce a uprostřed zapálíme šňůru tak, aby se plamen šířil na obě strany. Jakmile se dva plameny setkají a druhé dva budou ještě hořet, ihned někde uprostřed hořícího zbytku opět vytvoříme další dva plameny. Můžeme také na začátku šňůru rozpálit a pak postupovat stejně. Celkem tak získáme ony tři čtvrtě hodiny.

Obecně, šňůru zapálíme na n místech, a potom stále udržujeme n plamenů. Tím vytvoříme na jediné šňůře časový úsek $1/n$ hodiny, s více šňůrami můžeme získat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{n}$$

hodiny. Výhoda tohoto postupu je v možnosti vytvořit i např. $1/3$, $1/5$ hodiny, nevýhodou je rychle rostoucí nepřesnost.

Na závěr shrneme nejdůležitější výhody a nevýhody obou metod.

- (a)
- ⊕ metoda spolehlivá, lehce realizovatelná, nepřesnosti v řádu sekund,
 - ⊕ přesnost se s rostoucím počtem šňůr příliš nezmenšuje,
 - ⊖ zlomky jen ve tvaru $1/2^n$ hodiny a jejich součty,
 - ⊖ na měření je zpravidla potřeba více šňůr,
 - ⊖ měření vyžaduje přípravu.

(b)

- ⊕ zlomky ve tvaru $1/n$ hodiny a jejich součty,
- ⊕ často stačí k měření jediná šňůra,
- ⊖ měření není příliš přesné,
- ⊖ při měření menších částí hodiny nepřesnost roste do velkých čísel,
- ⊖ metoda nespolehlivá, špatně prakticky realizovatelná.

Bc. Jan Novotný: Jak zjistit, za jak dlouho shoří neznámý provázek

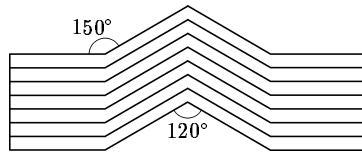
Předpokládejme, že provázek shoří za méně než hodinu. V opačném případě nejprve odpálím celočíselné násobky hodin, a potom budu se zbytkem postupovat tak, jako by platil předpoklad. Nejprve si stanovím přesnost, s jakou mě zajímá požadovaný čas. Řekněme, že je to $1/m$ hodiny, kde $m \in \mathbb{N}$. Pak si připravím l šňůr, které budou postupně hořet

$$\frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \dots, \frac{l}{l}$$

hodiny. Platí $m = 2l$ (pokud m je sudé; v opačném případě musím vzít nejbližší sudé číslo a stanovit nepřesnost buď větší nebo menší). Zjistím, mezi kterými dvěma časovými jednotkami šňůra shořela, a dostanu požadovaný čas s přesností $\pm 1/m$ hodiny. Tomáš

Úloha 14 – Umíte dělit?

Příklad má velmi jednoduché řešení, kdo hledal cokoli složitějšího, byl možná zklamán. I přes svou jednoduchost se nám do zadání vloudila malá chybička (špatně popsáné úhly), která však naštěstí neměnila smysl řešení. Obrázek můžeme rozdělit na libovolný počet menších dílků podle následujícího schématu:



Ája & Robert

Úloha 15 – Tepelný stroj

Pro začátek předpokládejme, že O_2 je ideální plyn. Při pohledu na obrázek je zřejmé, že mezi body A, B a C, D probíhá izobarický děj, a mezi D, A a B, C děj izochorický. Platí tedy:

$$\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_C}{T_C} \implies p_C = \frac{T_C}{T_B} p_B = \frac{T_A}{T_B} p_A, \quad \text{protože } T_A = T_C.$$

Děj D, A je také izochorický, a tudíž

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_D}{T_D} \implies T_D = T_A \frac{p_D}{p_A} = \frac{T_A^2}{T_B}, \quad \text{protože } p_D = p_C.$$

Teplo, které musíme plynu dodat v reakci A, B , je

$$Q_{AB} = mc_p(T_B - T_A),$$

kde c_p je měrná tepelná kapacita kyslíku při stálém tlaku a m je hmotnost kyslíku, v našem případě asi $0,454 \text{ kg}^\dagger$. Podobně

$$Q_{BC} = mc_v(T_C - T_B),$$

$$Q_{CD} = mc_p(T_D - T_C),$$

$$Q_{DA} = mc_v(T_A - T_D).$$

Protože $T_A < T_B > T_C > T_D < T_A$, v dějích A, B a D, A teplo kyslíku dodáváme, zatímco v dějích B, C a C, D kyslík odevzdává teplo okolí, neboť Q_{BC} a Q_{CD} jsou záporné. Tedy teplo, které musíme kyslíku dodat, je

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{DA} = m(c_p(T_B - T_A) + c_v(T_A - T_D)).$$

Práce W , kterou kyslík během cyklu vykoná, je rovna celkovému teplu, které kyslík během cyklu přijme, t.j.

$$W = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA},$$

protože změna vnitřní energie na počátku a na konci je nulová. Tedy účinnost

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 1 + \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = \\ &= 1 + \frac{m(c_v(T_C - T_B) + c_p(T_D - T_C))}{m(c_p(T_B - T_A) + c_v(T_A - T_D))} = \\ &= 1 - \frac{c_v(T_B - T_C) + c_p(T_C - \frac{T_A^2}{T_B})}{c_p(T_B - T_A) + c_v(T_A - \frac{T_A^2}{T_B})} = \\ &= 1 - \frac{T_B - T_A + \kappa(T_A - \frac{T_A^2}{T_B})}{\kappa(T_B - T_A) + T_A - \frac{T_A^2}{T_B}} = \left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right) \frac{\kappa - 1}{\kappa + \frac{T_A}{T_B}}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že účinnost nezávisí na hmotnosti ani na objemu látky. Jediné, na čem závisí, je κ , která je pro každý dvouatomový plyn stejná.[‡]

Po dosažení: $\eta = 0,0745 = 7,41\%$, $Q_1 = 179 \text{ kJ}$.

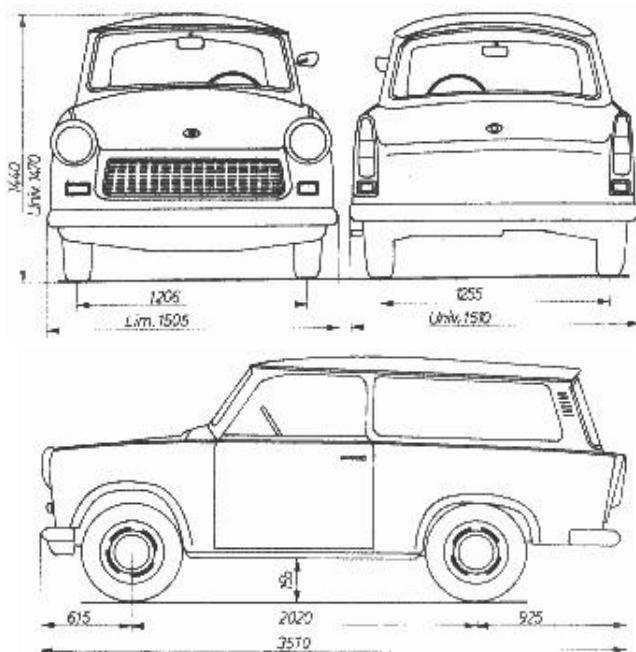
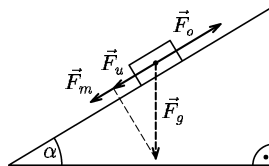
Bzučo & Peľo

[†] To je ta jedna libra.

[‡] Pro výpočet κ platí: $\kappa = \frac{s+2}{s}$, kde s je počet stupňů volnosti. Každý jednoatomový plyn má 3 stupně volnosti, dvouatomový 5 stupňů volnosti.

Úloha 16 – Rychlejší než Porsche

Na TrabantTM jedoucího z kopce působí tyto síly: gravitační síla F_g , odporová síla vzduchu F_o , ostatní třecí síly (třecí síla v ložiskách, odporová síla valivého tření mezi koly a silnicí, ...) – souhrnně je nazvěme F_t , hnací síla motoru F_m . Jestli ještě stále nevíte, jak takový TrabantTM vypadá, podívejte se na obrázky:



Velikost odporové síly vzduchu můžeme určit ze vzorce

$$F_o = \frac{1}{2} c_k S \rho v^2, \quad (1)$$

kde c_k je koeficient odporové síly, S průřez kolmý na směr pohybu, ρ je hustota prostředí, v němž se TrabantTM pohybuje, v je rychlost pohybu. Problém při tomto postupu je ten, že (pokud nemáme k dispozici rozměry TrabantaTM) je odhad průřezu S dosti nepřesný¹ a i koeficient odporu c_k se špatně odhaduje (u moderních vozů bývá okolo 0,30, tedy by se dalo čekat, že u TrabantaTM to bude asi 0,40).

¹ Vaše odhady se také dosti lišily.

Určit velikost ostatních třecích sil F_t je ještě obtížnější, naštěstí pro nás se dá očekávat, že při rychlostech blízkých maximální rychlosti je lze zanedbat. Argumentovat můžeme například takto: ostatní odporové síly nezávisí na rychlosti a kdyby nebyla odporová síla vzduchu mnohem větší než ostatní odporové síly, auta by při rychlostech blízkých maximální nebyla „líná“ (neakcelerovala by velmi pomalu)².

Pokud uvážíme, že při jízdě po rovině maximální rychlostí v_{\max} je v rovnováze síla odporová a hnací síla motoru, získáme mnohem lepší způsob určení odporové síly vzduchu. Výkon odporových sil (a tedy i výkon motoru) je totiž roven

$$P = Fv_{\max}, \quad (2)$$

kde F je velikost síly působící proti pohybu (zanedbáme-li ostatní třecí síly, je rovna F_o) a v_{\max} je maximální rychlost při jízdě po rovině. Dosazením vztahu (2) do rovnice (1) dostaneme

$$k = \frac{P}{v_{\max}^3},$$

kde koeficient $k = \frac{1}{2}c_k S \rho$. Je dobré si uvědomit, že výkon motoru P závisí na jeho otáčkách a při maximální rychlosti v_{\max} je menší než maximální výkon motoru P_{\max} . My toto ale pro zjednodušení nebudeme uvažovat a budeme brát $P = P_{\max}$.

Hnací síla motoru F_m závisí na výkonu motoru P a rychlosti v , kterou Trabant™ jede, podle vztahu

$$P = F_m v.$$

Tedy bereme-li výkon konstantní pro všechny rychlosti $P = P_{\max}$, je hnací síla motoru F_m při rychlosti v dána vztahem

$$F_m = \frac{P}{v}.$$

V okamžiku, kdy Trabant™ dosáhne při jízdě z kopce maximální rychlosti v , jsou síly na obr. 1 v rovnováze. Síla F_u je tečnou složkou síly gravitační F_g , platí

$$F_u = F_g \sin \alpha.$$

Rovnováhu sil vyjadřuje rovnice

$$F_o = F_m + F_u, \quad (3)$$

ze které po dosazení dostáváme

$$kv^2 = \frac{P}{v} + F_g \sin \alpha$$

$$\frac{P}{v_{\max}^3} v^2 = \frac{P}{v} + mg \sin \alpha, \quad (4)$$

kde m je hmotnost Trabantu™.

Získali jsme rovnici třetího stupně pro rychlost v . Zde lze použít Cardanových vzorců nebo řešit pro konkrétní hodnoty numericky.

² Samozřejmě i pro odporové síly nezávislející na rychlosti bude existovat maximální rychlost (jak je patrné ze vzorce (2)), ale pokles zrychlení nebude tak znatelný.

- (b) I k druhé části úlohy jsem dostala mnoho příspěvků. Rozdělili jste se na dvě disjunktí skupiny. První skupina byla přesvědčená o tom, že číslo $2^{10} + 5^{12}$ je prvočíslo, druhá skupina tvrdila, že není. A jak to tedy doopravdy je? Hodně z vás na to šlo hrubou silou – zjistili jste si skutečnou hodnotu výrazu a dali to kalkulačce nebo počítači, ať si to přebere.

Existuje však i mnohem hezčí řešení, na které vůbec žádnou elektroniku nepotřebujete. Je velmi snadné, uvědomíte-li si možnost přičtení a odečtení stejného čísla zároveň:

$$\begin{aligned} 2^{10} + 5^{12} &= (2^5)^2 + 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 - 2 \cdot 2^5 + 5^6 + (5^6)^2 = \\ &= (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 \cdot 5^6 = \\ &= (2^5 + 5^6)^2 - (10^3)^2 = \\ &= (2^5 + 5^6 + 10^3) \cdot (2^5 + 5^6 - 10^3). \end{aligned}$$

Číslo lze rozložit, proto je to složené číslo, nikoliv prvočíslo.

- (c) Vzhledem k tomu, že třetí část úlohy se pokusilo řešit jen velmi málo lidí (snad se vám zdála nezajímavá nebo těžká), rozhodli jsme se, že vám trošku napovíme: Všechna permutovatelná prvočísla se mohou skládat jen z cifer 1, 3, 7, 9, protože kdyby obsahovala číslice 0, 2, 4, 6 nebo 8, byla by alespoň jedna z permutací dělitelná 2; kdyby obsahovala 5, pak by 5 dělilo minimálně jednu z permutací.

Dále platí: Číslo ve tvaru $11 \dots 1$ k -krát je číslo složené, je-li k složené. Číslo není permutovatelné prvočíslo, jdou-li jeho cifry přerovnat tak, že rozdíl čísel na lichých a sudých místech je dělitelný 11 (číslo je dělitelné 11). Když je jedna permutace čísla ve tvaru

$$11 \dots 133 \dots 377 \dots 799 \dots 9$$

(a -krát, b -krát, c -krát, d -krát), alespoň dvě čísla z a, b, c, d jsou nenulová a nejmenší společný dělitel a, b, c, d je větší než 1, pak je jedna z permutací číslo složené.

Doporučuji tento příklad neřešit „ručně“ (i když dobrovolnosti se meze nekladou), u tohoto příkladu určitě doceníte pomoc počítače. Pokud objevíte nějaké efektivní použití kritéria pro dělitelnost, tak neváhejte a napište nám ho. Chtěla bych zde vyzdvihnout řešení *Bc. Jiřího Tománka*, který nám poslal výpis počítačového programu.

Pokračujte v bádání, hledání a objevování. Těším se na další příspěvky.

Alča

Pořadí	Jméno	Škola	\sum_{-1}	Témata							Úlohy				\sum_0	\sum_1
				1	3	4	5	6	7	14	15	16	17			
1.-2.	Dr. Jiří Klimeš	Jiráskovo G, 2.B	57	3							5	5	2	15	72	
	Mgr. Peter Čendula	G M. Hoďu, 3.B	26	27	10						2	4	3	46	72	
3.	Mgr. Karel Marišek	G Elgart., kvinta	34			11	2	10			3	5	5	36	70	
4.	Mgr. Ondřej Plašil	G Chodov., sept.	39	14					7		3		4	28	67	
5.	Miroslav Frost	G Elgart., kvinta	9			10	9	10			3	5	5	45	54	
6.	Bc. Jiří Tománek	G Hranice, 3.	19			4	1	12			3	4	4	32	51	
7.	Bc. Hanss Novotný		12	4		10		11			3	2	3	38	50	
8.	Mgr. Zoltán Mics	G mad. Šahy, 3.	42											0	42	
9.	Mgr. Jan Beneš	Bisk. G, sexta B	23			7	5				5	1		18	41	
10.	Mgr. Václav Cviček	G P. Bezruč, 1.	23					10			3		2	15	38	
11.	Mgr. Jan Rychmberk Klusoň	G Jiráska, kvinta	26					6		3			1	10	36	
12.-13.	Mgr. Jiří Novák	G Ledec n. S., 4.	20										3	4	24	
	Bc. Dáša Eisenmannová	G Heyrov., 3.A	14						7	3				10	24	
14.-15.	Mgr. Jana Krátka	G Piešťany, 3.	23											0	23	
	Lada Oberreiterová	G Třebíč, 3.B	9	22										22	23	
16.-17.	Mgr. Pavel Augustínský	G Havířov, 4.	48											0	20	
	Mgr. Miro Urbánek	GVOZA, 2.B	20											0	20	
18.	Tomáš Vyskočil		9								3	2	3	8	17	
19.	Miroslav Šulc	G Stavbařů, kvinta B	0								3	4	5	15	15	
20.	Lenka Burešová	G Dopplera, 2.	7					4			4		2	10	14	
21.-24.	Mgr. Martin Rosol		20											0	13	
	Doc. Michal Tarana	GVOZA, 4. ročník	117	10							3			13	13	
	Peter Murárik	G Ľ. Štúra, 2.G	7			4					1		1	6	13	
	Bc. Majka Hanzlíková		19								3		1	4	13	
25.-26.	Bc. Peter Zelený		11											0	11	
	Bc. Jan Chmelář	G Hranice, 1.	11											0	11	
27.-28.	Mgr. Tomáš Svatoň	GJKT, 3.A	39											0	7	
	Kristýna Forrová	GJKT	7											0	7	
29.	Stanislav Hampl	GOA Sedlčany, septima	0			3	2	1						6	6	
30.-31.	Martin Troják	GVOZA, 4.B	5											0	5	
	Klára Maturová		5											0	5	
32.	Lenka Beranová	G Vrchlického, sexta C	0								3			3	3	
33.-34.	Robert Meixner	G Slovan., V.A	2											0	2	
	Jiří Vlach	GOA Sedlčany, 2. ročník	0			2								2	2	

Adresa redakce:

Tomáš Brauner, A1721
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha Holešovice