# M&M Číslo 4 Ročník VI

**Drazí řešitelé,**

posíláme vám poslední zadání úloh a témat, které jsme pro vás v letošním ročníku M&M přichystali. Dál vám budou docházet poštou už jenom opravená řešení a dvě čísla se vzorovými řešeními.

Až nám budete řešení této série posílat, napište nám prosím, jak jste byli s letošním ročníkem M&M spokojeni, zda se vám líbila témata (a moje básničky) a tak podobně. My vaše názory vezmeme v úvahu při organizaci semináře v příštích letech.

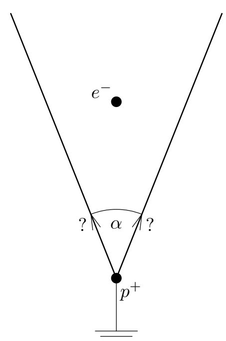
Mějte se pěkně a snažte se, nejlepší řešitele čeká odměna!

Za organizátory vás zdraví *Matouš*

## Téma 1 – Elektron

*Peter Zelený*:

Rád by som reagoval na príspevok *Mgr. Mira Urbánka*, ktorý sa domnieva, že elektrón bude priťahovaný do vrcholu. Domnievam sa, že tomu tak nie je. Elektrón musí indukovať na obidvoch platniach indukovaný náboj $Q = -e$. Lenže ako vieme, najmenší diel elektrického náboja je práve náboj elektrónu. To znamená, že buď sa naindukuje náboj na pravej alebo ľavej platni. Elektrón nám teda spadne kolmo na platňu, ale nevieme povedať na ktorú.




Takto by to vyzeralo, keby sa náboj indukoval priamo na povrchu. Je tu ale jeden malý problém. Náboj, ktorý sa naindukuje na platni, na ňu v skutočnosti pritečie zo zeme. Predstavme si, že pritečie na miesto, kde sa nám platňa rozdvojuje, a bude si musiet vybrať, ktorým smerom sa pohne. Existuje možnosť, že ostane „stáť“ vo vrchole. Elektrón nám v takomto prípade padne do vrcholu. Čo sa ale stane, ak si náboj vyberie jednu platňu?

Zdalo by sa, že náboj sa dostaví na jednu stranu platne a elektrón spadne kolmo na platňu, priamo na náboj. Zamyslime sa, čo je to za častica, ktorá je zodpovedná za indukovaný náboj. Musí mať opačný náboj ako $e^-$, teda $e^+$. Kladný náboj môže byť buď protón alebo diera. Diera nepripadá do úvahy, pretože vzniká iba v polovodičoch, a my máme kovovú platňu. Môže to byť teda iba protón. Protón sa musí pohybovať iba po povrchu platne, pretože platňa je vodič a vzduch je dielektrikum. Predpokladajme, že $\alpha \to 0$. Protón má oveľa väčšiu hmotnosť, teda sa pri svojom pohybe prakticky nepohne, zatiaľčo elektrón prejde oveľa väčšiu dráhu. Takže v skutočnosti, aj keď sa protón pohne napravo aj keď sa pohne naľavo, elektrón spadne prakticky do vrcholu.

Postup *Mgr. Zoltána Micse* môžme použiť iba vtedy, ak $|Q| \gg |e|$. V tom prípade máme zaručenú skutočnosť, že náboj sa nám rozdelí približne rovnomerne po celej platni, a budeme môcť predpokladať spojité rozloženie náboja. Bez tohoto predpokladu totiž metóda „obrazných" nábojov nefunguje. Veľmi bude taktiež záležať na pomere $\mu_n = m_c/Q$, kde $m_c$ je celková hmotnosť častíc, ktoré tvoria náboj $Q$. Ak $\mu_n \ll \mu_p$, potom sa bude náboj správať spôsobom, aký som práve opísal. V opačnom prípade (ak $\mu_n \gg \mu_p$) sa protóny stihnú rozmiestniť po platni oveľa rýchlejšie ako sa náboj $Q$ znateľne pohne.

**Pozn. red.:** Určitě se nám bude poloha elektronu a protonu během jejich pohybu měnit, a tedy se budou pohybovat po zakřivené trajektorii. Pokusili byste se určit, jak tato trajektorie vypadá? Autor správně postřehl, že pro $Q \gg e$ se nám budou náboje tvářit, že jsou rozloženy spojitě. Kde je asi hranice, kde se nám ještě spojitě tváří a kde už ne?

Pokuste se taky ještě dotáhnout do konce teorii *Mgr. Zoltána Micse* o rozložení virtuálních nábojů.

**Pozn. red.:** Velice oceňujeme skutečnost, že autor citoval práci jiného řešitele, a abychom motivovali i další řešitele, dostane za tuto skutečnost mimořádnou prémii.

*Bzučo*

## Téma 3 – Gramatiky

V poslední sérii jsem měl radost, že se konečně někdo pokusil řešit gramatiky trošku více, ale bohužel to nemohu s chválou příliš přehnat, protože ti 3 řešitelé řešili pouze striktně zadané příklady. Sice se objevila asi 2 mírná zobecnění, která velmi velmi chválím, nicméně nám stále chybí pokusy o to, zkusit si zadání modifikovat, případně úplně překopat. A podle úrovně řešení bych si dovolil tvrdit, že toho schopni jste! Tak to zkuste napravit, nenechte se svazovat zadáním, popusťte uzdu fantazii a představivosti a řešte, pište – nejen exaktní řešení, ale i nápady a postřehy. Úlohy zde nejsou od toho, abyste je vyřešili, zahodili a více neviděli, ale abyste si s tématem zkusili prostřednictvím zadaných příkladů pohrát a napsali nám, na co jste přišli, případně nepřišli, o co jste se pokoušeli. My vaše názory otiskneme a můžete se těšit na reakce ostatních řešitelů – diskuse jsou vítány.

Teď už k věci. Úlohy 1–7 jste řešili povětšinou velmi dobře – u dvou řešitelů se ukázalo, že jim ještě jedna drobnost není stále jasná – ukážeme níže. O úlohu 8 se pokusili také dva, nicméně si uvedené řešení příliš nezkontrolovali, protože bylo zjevně chybné – není se také ani čemu divit, tato úloha totiž řešení nemá, o čemž by nás mohl někdo z řešitelů v příštím čísle přesvědčit. Úlohy 9–12 pak byly malinko náročnější, ale daly se (alespoň některé) zobecnit, což někteří z vás udělali a povíme si o tom níže.

Ještě poznámka k bodování, všichni 3 řešitelé (*Mgr. Jiří Klimeš, Bc. Karel Martišek, Jiří Novák*) měli některé chybičky a naopak, některá zajímavá řešení, takže to nakonec vyšlo, že dostali všichni stejný počet bodů – 10. Nejedná se o maximální možný bodový zisk (ten stejně není definován), ale o rozumné ohodnocení jejich snahy a výsledků.

Takže k jednotlivým úlohám:

1. $G = (N, T, P, A)$, $N = \{A\}$, $T = \{a\}$, $P = \{A \to e, A \to aA\}$

   Všichni jste měli stejné řešení. Všimněte si možné obměny pravidla $A \to aA$ za $A \to Aa$. Řešení se pak liší tím, jestli používají levou nebo pravou rekurzi – to byla poznámka pro programátory.

   Na takto jednoduchém příkladu bych chtěl demonstrovat možné přejmenování standardních písmen, protože jsem si u složitějších příkladů všiml, že to některým řešitelům dělá problémy:

   Gramatika $Q = (Y, Z, W, F)$, $Y = \{F\}$, $Z = \{x\}$, $W = \{F \to e, F \to Fx\}$.

   Tato modifikace generuje slova složená z písmen $x$ (malá písmena) libovolné délky, tedy i prázdné délky (díky pravidlu $F \to e$). Předchozí značení je mnemotechnické a tak trošku „standardní".

   Dále si povšimněte, že pokud bychom v prvém řešení vynechali pravidlo $A \to e$, tak by gramatika negenerovala NIC! To si někteří stále plně neuvědomují. Kdybychom totiž měli pouze pravidlo $A \to aA$, tak by gramatika pracovala takto: $A$, $aA$, $aaA$, $aaaA$, $aaaaA$,... a toho neterminálu $A$ bychom se tudíž nikdy nezbavili.†

   Rovněž ještě poznamenejme, že pokud bychom napsali $P = \{S \to e, S \to aS\}$, museli bychom rovněž změnit počáteční neterminál v gramatice (tj. čtvrté písmenko v $G = (N, T, P, A)$) z $A$ na $X$.

2. $G = (N, T, P, A)$, $N = \{A\}$, $T = \{a\}$, $P = \{A \to e, A \to aaA\}$

3. $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A\}$, $T = \{a\}$, $P = \{S \to aA, A \to aaA, A \to e\}$ – řešení podle *Bc. K. Martiška*.

   Zde se objevily první chybičky: jeden řešitel přidal ještě pravidlo $S \to e$, které nám ale vygeneruje prázdné slovo ($a^0$), a to není podle zadání $a^{2n+1}$.

   Druhý řešitel ještě navíc vynechal $A \to e$ (tj. $P = \{S \to e, S \to aA, A \to aaA\}$), což způsobí, že nám gramatika generuje pouze prázdné slovo. Kdyby totiž chtěla použít pravidlo $S \to aA$, dostala by do slova neterminál $A$, kterého se ale bohužel bez pravidla $A \to e$ nezbavíme.

   Podobné drobnosti se vyskytovaly i u zbylých příkladů – nebudeme na ně již upozorňovat.

   *Mgr. J. Klimeš* provedl jednoduché zobecnění. Zadání: $a^{xn+y}$, kde $x, y \in \aleph$ – stačí pozměnit $P = \{S \to a^y A, A \to a^x A, A \to e\}$.

† Poznámka: To, že gramatika nějak „pracuje", ještě neznamená, že ta slova generuje, protože jak si jistě vzpomínáte, gramatika generuje pouze slova z terminálů – tedy malých písmenek! Je-li v „rádoby-vygenerovaném" slově nějaký neterminál, slovo není gramatikou generováno!

4. $G = (N, T, P_{1,2}, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, $P_1 = \{S \to AB, A \to aA, B \to bB, A \to e, B \to e\}$ – řešení podle *Bc. K. Martiška*,

   $P_2 = \{S \to e, S \to aS, S \to Sb\}$ – řešení podle *Mgr. J. Klimeše, J. Nováka.*

   Zde si povšimněte, že varianta pravidel $P_1$ funguje tak, že se $S$-ko převleče za $A$ a $B$, které každé generuje libovolně dlouhé slovo z $a$-ček nebo $b$-ček. Varianta $P_2$ funguje tak, že písmenko $S$ vlevo od sebe odhazuje $a$-čka ($S \to aS$), vpravo $b$-čka ($S \to Sb$), a pak zmizí ($S \to e$).

   Do budoucna vítám jakékoliv zajímavé obměny řešení úloh a jejich případná vysvětlení.

5. $G = (N_{1,2}, T, P_{1,2}, S)$, $T = \{a, b, c\}$, $N_1 = \{S, A, B, C\}$, $P_1 = \{S \to ABC, A \to aA, B \to bB, C \to cC, A \to e, B \to e, C \to e\}$ – řešení podle *Mgr. J. Klimše, Bc. K. Martiška.*

   $N_2 = \{S, X\}$, $P_2 = \{S \to aS, S \to Sc, S \to X, X \to bX, X \to e\}$ – řešení podle *Jiřího Nováka.*

   Úloha je zobecněním předchozího příkladu. Přičemž varianta $1, 2$ odpovídá po řadě zobecněním varianty $P_1, P_2$.

6. $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, X\}$, $T = \{a, b, c\}$, $P = \{S \to aSc, S \to X, X \to bX, X \to e\}$

   Zde lze vysvětlit chování $S$-ka tak, že dokud se mu chce, rozhazuje kolem sebe **naráz** písmenka $a, c$ ($S \to aSc$) a až ho to přestane bavit, převleče se za $X$ ($S \to X$), které vygeneruje několik $b$-ček ($X \to bX$), a pak zmizí ($X \to e$). Jak jeden řešitel poznamenal, byl toto příklad, který mu dal nejvíce zabrat.

7. $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, X\}$, $T = \{a, b, c\}$, $P = \{S \to aSc, S \to X, X \to bXc, X \to e\}$

   Analogie předešlého. Zajímavé je si povšimnout, že $c$-čka, které nám vyhodí $S$-ko a $X$-ko, se slijí, a proto dají dohromady počet vyhozených $a$-ček a $b$-ček dohromady.

8. Jak jsem již poznamenal, tato úloha řešení nemá. To lze ukázat jak formálně, tak i pohádkově. Já vám vysvětlení prozrazovat nebudu, protože očekávám, že se o něj někdo pokusí příště.

   Jeden řešitel se pokusil: $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b, c, d\}$, $P = \{A \to AB, A \to aAb, B \to cBd, A \to e, B \to e\}$. Což je bohužel pouhé zobecnění předešlých úloh (6) a (7) – generuje: $a^k b^k c^l d^l$.

9. Tady bohužel neuspěl nikdo, 2 pokusy selhaly.

   (a) $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \to e, A \to bA, B \to bB, C \to bC, S \to AaBaCaS\}$

   Toto řešení jednak zcela zbytečně používá neterminály $A, B, C$ (jsou totiž totožné), tedy redukujme na $P = \{S \to e, B \to bB, S \to BaBaBaS\}$. Což má tu drobnou nevýhodu, že až se někdy $S$-ko rozhodne skončit ($S \to e$), tak na konci vygenerovaného slova bude vždy písmenko $a$ (díky $S \to BaBaBaS$). Navrhuji tedy ještě úpravu $P = \{S \to e, B \to bB, S \to BaBaBaBS\}$ a teď je úloha již vyřešena.

   (b) $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \to AB, A \to aaaA, B \to bB, A \to e, B \to e\}$

   Co dělá tato gramatika? $A$-čko generuje $a^{3n}$ a $B$-čko $b^m$, tedy dohromady $a^{3n}b^m$, což sice jsou slova, kde je počet písmenek $a$ dělitelný třemi, nicméně to nejsou zdaleka všechna taková slova.

12. $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \to aSa, S \to bSb, S \to a, S \to b, S \to e\}$

   Zde si $S$-ko může vybrat, jakým způsobem skončí ($a$, $b$, nic).

10. a 11. Úlohu (10) se podařila *Mgr. J. Klimešovi* elegantně zobecnit, a to i spolu s úlohou (11). Pánové *Bc. K. Martišek* a *J. Novák* řešili úlohu (10) trošku rozdílně (viz níže) a úloha (11) u obou obsahovala drobné nedostatky.

10. Řešení podle *Bc. K. Martiška*: $G = (N, T, P, A)$, $N = \{A, B, C, D, E\}$, $T = \{0, 1, 2\}$,

$$\begin{aligned} P = \{ & A \to e,\ A \to 0A,\ B \to 0D,\ C \to 0B,\ D \to 0E,\ E \to 0C, \\ & A \to 1B,\ B \to 1E,\ C \to 1C,\ D \to 1A,\ E \to 1D, \\ & A \to 2C,\ B \to 2A,\ C \to 2D,\ D \to 2B,\ E \to 2E \} \end{aligned}$$

Toto řešení je obdobou vzorového z předchozího příspěvku k tomuto tématu. Povšimněte si, jak je „tabulka“ pravidel systematická – toho si povšiml také *Mgr. J. Klimeš* (viz dále).

10. Řešení podle *J. Nováka*: $G = (N, T, P, A)$, $N = \{A, B, C, D, E\}$, $T = \{0, 1, 2\}$,

$$\begin{aligned} P = \{ & A \to e,\ A \to A0,\ A \to B2,\ A \to D1, \\ & B \to A1,\ B \to C0,\ B \to D2, \\ & C \to A2,\ C \to C1,\ C \to E0, \\ & D \to B0,\ D \to C2,\ D \to E1, \\ & E \to B1,\ E \to D0,\ E \to E2 \} \end{aligned}$$

Toto řešení je postaveno na stejném principu zbytkových tříd jako předešlé z minulého čísla. Autor řešení k němu poznamenal:

$A, B, C, D, E$ jsou zbytkové třídy čísel ($A = 0, B = 1, C = 2, D = 3, E = 4$). Pokud přidáme na konec některého z čísel číslice 0,1,2, číslo se zařadí do jiné skupiny podle tabulky:

| původní třída | přidávaná číslice | výsledná třída | pravidlo |
|---|---|---|---|
| A | 0 | A | $A \to A0$ |
| | 1 | B | $B \to A1$ |
| | 2 | C | $C \to A2$ |
| B | 0/1/2 | D/E/A | atd... |

10. a 11. Řešení podle *Mgr. J. Klimeše*

Základní varianta se shoduje s řešením *Bc. K. Martiška*. Řešitel si dále povšiml, že nahrazením pravidla $A \to e$ pravidlem $B \to e$ ($C \to e, \ldots$ – podle toho, který chceme zbytek) získáme čísla se zbytkem $B = 1$ ($C = 2, \ldots$).

Triviálně pak vyřešil úlohu (11) a obě úlohy zobecnil takto – citujeme:

Obecně můžeme postup $P$ zjistit tak, že si napíšeme do jednoho sloupce neterminály $A, B, C, \ldots$, pod sebou jich bude vždy tolik, kolik členů (terminálů) má soustava – př. dvojková – vždy dva neterminály pod sebou. Do dalšího sloupce napíšeme terminály tak, aby se opakovaly skupiny od nejmenšího k největšímu v řadě po jedné: $0, 1, 2, \ldots, 0, 1, 2, \ldots$. Skupině stejných neterminálů jsou tedy přiřazeny všechny terminály. Do posledního sloupce napíšeme neterminály od nejmenšího k největšímu, budou se v takovýchto skupinách opakovat. Mezi 1. a 2. sloupec dáme znak „$\to$“ a postup je hotov.

**Př.:**

$N = \{A, B, C, D, E, F\}$ ... kolik je neterminálů, takové násobky hledáme
$T = \{0, 1, 2, 3\}$ ... počet terminálů udává soustavu

| 1. 2. 3. | 1. 2. 3. | 1. 2. 3. |
|---|---|---|
| $A \to 0\ A$ | $C \to 0\ C$ | $E \to 0\ E$ |
| $A \to 1\ B$ | $C \to 1\ D$ | $E \to 1\ F$ |
| $A \to 2\ C$ | $C \to 2\ E$ | $E \to 2\ A$ |
| $A \to 3\ D$ | $C \to 3\ F$ | $E \to 3\ B$ |
| $B \to 0\ E$ | $D \to 0\ A$ | $F \to 0\ C$ |
| $B \to 1\ F$ | $D \to 1\ B$ | $F \to 1\ D$ |
| $B \to 2\ A$ | $D \to 2\ C$ | $F \to 2\ E$ |
| $B \to 3\ B$ | $D \to 3\ D$ | $F \to 3\ F$ |

Podle zbytkové třídy určíme zbytek, který chceme (pokud nějaký chceme): $A = 0, B = 1, C = 2, D = 3, \ldots$ po dělení šesti ve čtyřkové soustavě.

11. Konkrétní řešení podle *Mgr. J. Klimeše* tedy vypadá:
$G = (N, T, P, A), N = \{A, B, C, D\}, T = \{0, 1, 2\}, P = \{D \to e, A \to 0A, A \to 1B, A \to 2C, B \to 0D, B \to 1A, B \to 2B, C \to 0C, C \to 1D, C \to 2A, D \to 0B, D \to 1C, D \to 2D\}$

**Pozn. redakce:** Můžete se pokusit obdobně zobecnit řešení úlohy (10) od *J. Nováka.*

Další zadání a motivace:

(1) Ze vztahů příkladů (1) $\to$ (4) $\to$ (5) se pokuste odvodit další věci. Například mějme dvě gramatiky G1 a G2, které mají disjunktní množinu neterminálů. Zkuste obecně navrhnout, jak bude vypadat gramatika G, která bude

- (a) konkatenací (*konkatenace = zřetězení = spojení*) slov gramatik G1 a G2 (tj. přilepí slova G2 za slova G1),
- (b) iterací slov gramatiky G1 (tj. za sebou spojený libovolný počet libovolných slov – včetně prázdného slova),
- (c) generovat slova G1 nebo G2 (tj. sjednocení slov G1 a G2),
- (d) G1 průnik G2 (tj. slova, která jsou generována jak gramatikou G1, tak G2)
- (e) atp...

(2) Až dosud jsme řešili takzvané bezkontextové gramatiky. Zkuste se zamyslet nad kontextovými. Kontextová gramatika je téměř stejná jako bezkontextová, jen její pravidla mohou být složitější – na levé straně od šipky „$\to$“ nemusí být právě jeden neterminál, ale „kolem“ tohoto neterminálu může být navíc libovolný počet terminálů a neterminálů. Např.: $P = \{S \to AaaaC, Aa \to aA, AC \to e\}$.

Tato gramatika pracuje takto: $S \to_1 AaaaC \to_2 aAaaC \to_2 aaAaC \to_2 aaaAC \to_3 aaa$. Upozorňuji, že pravidlo $aa \to b$ **není pravidlem**, protože na levé straně není ani jeden neterminál! S těmito gramatikami si můžete hrát dle libosti. Všimněte si, že $A$-čko z příkladu „přejíždí všechna $a$-čka" a na konci narazí na $C$-čko, které ho zničí. Cestou $A$-čko může dělat cokoliv (třeba dvojnásobit).

**Př.:** $P = \{S \to BGZ, G \to Ga, BG \to X, Xa \to aaX, XZ \to e\}$. $S \to BGZ$, $G$-čko pravidlem $(G \to Ga)$ vygeneruje slovo $Gaaaaa$ (lib.počet $a$-ček), pak se převleče společně s $B$-čkem za $X$ a $X$-ko zdvojnásobí počet $a$-ček, a pak se zničí spolu se $Z$-kem.

**Př.:** $P = \{S \to GZ, G \to Ga, G \to X, Xa \to aaX, XZ \to e\}$. Totéž, ale zapsáno jednodušeji.

(3) Náměty na příklady pro kontextové gramatiky

(i) $a^{n^2}$,
(ii) $a^{2^n}$,
(iii) dvě slova nad abecedou $\{a, b\}$ zapsaná za sebou (abbaabba),
(iv) $a^k b^l c^k d^l$ – tady už to jde,
(v) $a^{j+k} b^j c^k d^{j+k}$,
(vi) $a^{n!}$,
(vii) $a^k b^l c^{k \cdot l}$,
(viii) pravdivý výraz součtu (nejjednodušší je to v binární soustavě) – tedy:

$$100 + 1101 = 10001,$$

(ix) $a^{n^k}$,
(x) $a^p$, kde $p$ jsou prvočísla – to už je opravdu chuťovka, za správné řešení dáme 20 bodů.

*Ziki*

## Téma 4 – Čajové lístky

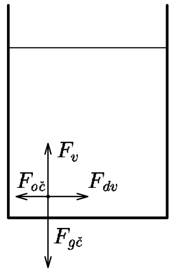
*Kristýna Forrová, Mgr. Tomáš Svatoň*:

**Pozn. redakce:** Oba autoři vypracovali velmi zajímavý referát. Redakce hodnotí velmi pozitivně skutečnost, že pracovali společně, a vypracovali společně i referát (i když tuto skutečnost zapomněli uvést).

Za klidu působí na čajový lístek tíhová a gravitační síla a taky síly zdánlivé (odstředivá a dostředivá síla). Formálně jsou si obě rovnice velice podobné.

$$\left.\begin{aligned} F_{g\check{c}} &= m_{\check{c}} g \quad \ldots \text{ tíhová síla čajového lístku} \\ F_v &= m_v g \quad \ldots \text{ vztlaková síla} \end{aligned}\right\} \quad \text{Archimédův zákon} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{o\check{c}} &= m_{\check{c}} v^2 / r \quad \ldots \text{ odstředivá síla čajového lístku} \\ F_d v &= m_v v^2 / r \quad \ldots \text{ dostředivá síla vody} \end{aligned}\right\} \quad \text{podobnost s Arch. zákonem} \tag{2}$$



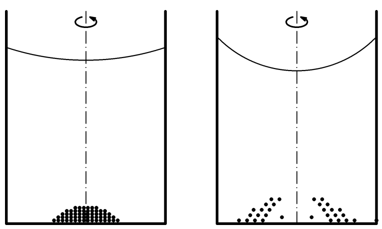

Veličiny mají následující význam:

$m_č$ ... hmotnost čajového lístku
$m_v$ ... hmotnost vody vytlačené čajovým lístkem
$v$ ... obvodová rychlost na poloměru $r$
$r$ ... poloměr otáčení
$g$ ... tíhové zrychlení

Jestliže $m_č < m_v$, lístek plave na vodě a měl by být po zamíchání na vnějším poloměru skleničky. Jestliže $m_č > m_v$, lístek je na dně a měl by být po zamíchání ve středu skleničky.

## Praktický pokus

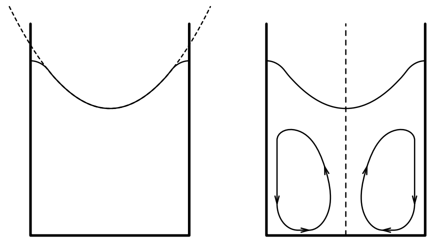
U prvního obrázku mícháme pomalu a lístky se drží u středu, když však začneme míchat prudce, lístky se začnou dostávat ke středu a u krajů se neudrží. Pokud není dno ideálně rovné, pak jsou tlačeny čajové lístky do středu *nebo taky mimo střed* i když právě čaj nemícháme.



Všiml jsem si následujících skutečností:

- U kraje skleničky má kapalina nulovou rychlost. Pravděpodobně je to vlivem tření kapaliny o skleničku.
- Hladina má tvar, jak je naznačeno na obrázku. To vyplývá také z prvního bodu, protože ideálním tvarem hladiny by měla být parabola, jak ukázal *Mgr. Zoltán Mics*. Protože ale

dochází ke tření, a tedy ke snížení úhlové rychlosti u okraje sklenice, zákonitě musí hladina u okraje poklesnout vůči ideálnímu stavu.

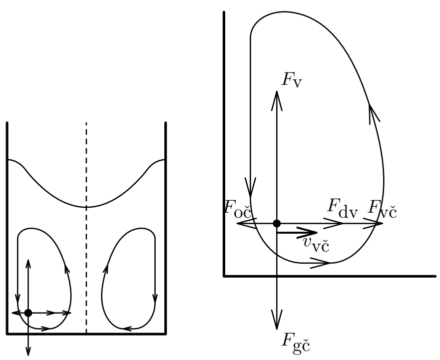


## Úvaha

- Na vnějším poloměru skleničky má kapalina nulovou rychlost. To znamená, že na ni nepůsobí odstředivá síla.
- Na nulovém poloměru skleničky nemůže mít kapalina jakoukoliv rychlost – nepůsobí na ni odstředivá síla $F_O = mv^2/r = m\omega^2 r$.
- Na vnějším poloměru je ale hladina vyšší než ve středu skleničky. Předpokládám, že kapalina je tak z okraje skleničky vytlačována do jejího středu a vzniká tak proudění kolmé na otáčení (**Pozn. red.:** A co takhle Coriolisova síla?).

## Zpět k našemu čajovému problému

Existuje-li proudění tak, jak předpokládame, pak na čajový lístek působí síly podle vzorečků (1) a (2), a navíc ještě odporová síla $F_{v\check{c}} \sim \frac{1}{2} c S \varrho v_{v\check{c}}^2$, kde $F_{v\check{c}}$ je odporová síla působící na lísteček, která vzniká v důsledku různých rychlostí lístečku a vody, která ho obtéká, a $v_{v\check{c}}$ je vzájemná rychlost lístečku a vody. Tento odpor je pravděpodobně tak velký, že se lístečky čaje vždy usazují uprostřed skleničky.




**Pozn. red.:** Postup, který zvolili *Mgr. Tomáš Svatoň* a *Kristýna Forrová*, je velice přínosný. Velice oceňujeme, že se zaměřili hlavně na popis situace, která se ve sklenici odehrává. Před každým pokusem fyzikálně interpretovat experiment je nutno tento provést, jinak se vystavujeme riziku, že teorie a experiment se budou navzájem vylučovat. Avšak i jim při pozorování uniklo několik drobností, které jsou v problému důležité. Proto vám radíme: *experimentovat, experimentovat* a zase *experimentovat*.

Stále není jasné, jak vůbec proudí kapalina v sklenici. Pokuste se proto pozorně dívat, co se děje při spomalování rotace kapaliny. Budou se stejně jako lístečky chovat i jiné předměty, např. jemný písek? A jak bude vypadat povrch hladiny, jestliže jej po zamíchání posypeme pudrem, nebo kousky korku? *Bzučo*

## Téma 5 – Hodiny

### Bod (iii)

*Bc. Ondřej Plašil*: Pohyb mouchy po spirále

Moucha se pohybuje po dráze tvaru Archimédovy spirály. *Definice Archimédovy spirály*: Archimédovou spirálou nazýváme křivku vytvořenou rovnoměrným pohybem bodu po průvodiči, který se otáčí rovnoměrně kolem pólu. *Rovnice Archimédovy spirály v polárních souřadnicích*: pro vzdálenost $r$ pohybujícího se bodu od počátku platí

$$r = \frac{r_0}{2\pi} \cdot \varphi,$$

kde $r_0$ je vzdálenost pohybujícího se bodu od počátku po jedné otáčce a $\varphi$ je úhel, o který se otočil průvodič od počátku pohybu.

### Bod (v)

*Bc. Ondřej Plašil*: Určování přesného času

Jak dlouho trvá cesta od jedněch hodin k druhým, mě moc nezajímá. Dojdu k jedněm hodinám, podle nich si seřídím hodinky - tak si uchovám čas na těchto hodinách,[1] pak dojdu ke druhým hodinám, uplyne mezitím nějaký čas, ale ten uplyne na všech hodinách, tak ho nemusím započítávat. U druhých hodin si seřídím hodinky podle vzorce:

$$t = \frac{t_1 + t_2 \cdot \frac{m}{n}}{1 + \frac{m}{n}},$$

kde $t_1$ je čas na prvních hodinách (a taky čas na hodinkách, které mám na ruce), $m$ udává, o kolik časových jednotek jsou tyto hodiny napřed, $t_2$ je čas na hodinách, které mám před sebou, $n$ udává, o kolik časových jednotek jsou tyto hodiny zpožděny.

[1] Pozn. redakce: pouze za předpokladu, že moje hodinky se po seřízení nezačnou ani zpožďovat, ani předbíhat.

Pravděpodobnost určení přesného času jsem odhadl na

$$\frac{1}{((t_2+n)-(t_1-m))\cdot 60}.$$

Počítám přitom s tím, že nejmenší dílek je 1 s.

**Komentář redakce:** Vzorec pro seřízení hodin se nám líbí, pouze nám chybí hlubší zdůvodnění, proč je toto seřízení nejlepší. Ve většině případů totiž při rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti existuje více možností, jak si hodinky seřídit (dejme tomu s přesností na sekundy), přičemž každá z možností dává stejnou pravděpodobnost na získání přesného času. Kolega *Bc. Plašil* tuto skutečnost de facto použil při svém výpočtu pravděpodobnosti (redakce považuje tento výpočet za správný).

### Náměty

Pestrá škála námětů k bádání byla uveřejněna minule. Pokud vám nestačí, zkuste si vymyslet vlastní zadání. Můžete zkoumat třeba hodiny o více než třech ručičkách, s různými úhlovými rychlostmi otáčení, s různými směry otáčení. Také se můžete pokusit určit, jak vypadá skutečný pohyb ručiček na větších hodinách, kde má ručička nezanedbatelnou hmotnost. *Matouš*

## Téma 6 – Herní strategie

*Bc. Ondřej Plašil*: Odebírání 2, 3, 5 sirek

Při odebírání 2, 3, 5 sirek jsou vyhrané pozice právě ty, ve kterých je počet sirek na hromádce roven $\{7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6\}$, kde $k$ je celé kladné číslo. Prohrané pozice jsou všechny ostatní $\{7k, 7k+1\}$, protože se při $k=0$ nedá odebrat už žádná sirka.

Vítězná strategie:

(a) vyhraná pozice tvaru $\{7k+2, 7k+3\}$: sebereme 2 sirky a převedeme to na prohranou pozici,
(b) vyhraná pozice tvaru $\{7k+3, 7k+4\}$: sebereme 3 sirky a převedeme to na prohranou pozici,
(c) vyhraná pozice tvaru $\{7k+5, 7k+6\}$: sebereme 5 sirek a převedeme to na prohranou pozici.

Protihráč odebere 2, 3 nebo 5 sirek a tím to převede do mnou vyhrané pozice.

*Bc. Ondřej Plašil*: Odebírání ze dvou hromádek

Navrhuji toto zadání: Odebírá se ze dvou hromádek. Může se odebrat z každé hromádky jedna sirka, nebo odebrat z jedné hromádky jednu sirku a druhou nechat beze změny, nebo obráceně. Prohrává hráč, který už nemůže odebrat žádnou hromádku.

Vyhrané pozice jsou ty, ve kterých je na aspoň jedné hromádce lichý počet sirek. V prohraných pozicích je na obou hromádkách sudý počet sirek. Vítězná strategie: odebíráme zápalky tak, aby po nás zbyl na obou hromádkách sudý počet sirek. Když zbude 0 sirek, tak protihráč prohrál, protihráč odebere taky nějakou sirku/sirky a zbude po něm lichý počet sirek aspoň na jedné z hromádek, který my vzápětí převedeme na sudý počet.

*Bc. Ondřej Plašil*: Odebírání mocnin 3

Na jedné hromádce je $N$ sirek. Odebírá se libovolný počet zápalek, který je mocninou 3 $(1, 3, 9, 27, \ldots)$. Zvítězí hráč, který odebere poslední sirku.

Vyhrané pozice jsou s lichým počtem sirek. Prohrané pozice jsou se sudým počtem sirek. Vítězná strategie: všechny mocniny dvou jsou lichá čísla, každým tahem se tedy odebere lichý počet zápalek. Počet sirek na hromádce proto každým tahem mění paritu bez ohledu na to, jak hráč táhl. Vyhrává hráč, který začínal s lichým počtem zápalek. Vůbec nezáleží na tom, jak kdo táhne. *Robert*

## Úloha 10 – Top secret

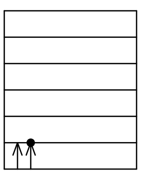
Do zadání se nám vloudila jedna nepřesnost. Neřekli jsme, máme-li k dispozici stíhačky na obou kontinentech. Pokud ano, tak je úloha o něco jednodušší, takže jsme za tuto variantu dali o bod méně. Kdo vyřešil obě varianty, dostal body navíc. Mnoho řešitelů nás také upozornilo, že ze zadání není zřejmé, že každá stíhačka má kapacitu nádrže na právě jednu polovinu cesty, že přetankování ve vzduchu trvá nulovou dobu a že stíhačka vrátivší se na kontinent může okamžitě vzlétnout zpět s plnou nádrží. Odpověď na všechny tyto otázky je ano.

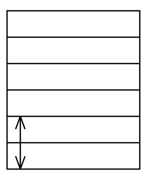
Šifru přes kontinent dopravit lze v obou případech (podle toho, zda máme či nemáme k dispozici stíhačky i na druhém kontinentě). Vyřešme obě varianty:

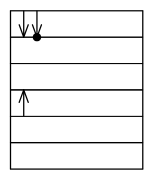
*Tomáš Vyskočil*: Řešení pro stíhačky na obou kontinentech

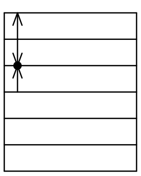
Rozdělme si cestu na 6 stejných úseků. Každá stíhačka uletí s plnou nádrží přes 3 takové úseky. K demonstraci řešení nakreslím více grafů: každý graf odpovídá jednomu časovému úseku (doba, kterou potřebuje stíhačka pro přelet přes jeden úsek trasy) a jsou v něm zakresleny polohy a směry letů všech stíhaček. Z obrázků je zřejmé, kdo komu natankuje kolik paliva – stíhačka, která se zbavuje paliva, je označena puntíkem.

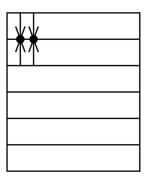
Zde popisuji řešení používající 5 různých stíhaček, které celkem $6\times$ vystartují.

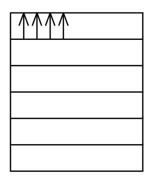

startujeme s šifrou


doplníme nádrž


vyletíme naproti

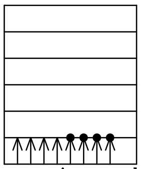

zachráníme před pádem


zachrání nás oba dva

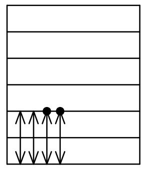

šťastně dorazíme

*Tomáš Vyskočil*: Řešení pro stíhačky vylétávající z jednoho kontinentu

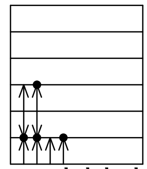
Pro řešení této úlohy jsem potřeboval 8 různých stíhaček, které celkem 14× vystartovaly.



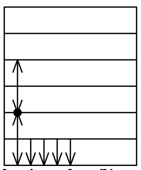
startujeme s doprovodem a doplníme nádrže



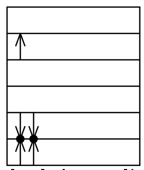
opět doplníme nádrže



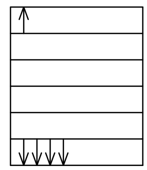
naposled doplníme nádrže, mezitím zachraňujeme první 2 stíhačky



letíme k cíli, zachraňujeme 1 stíhačku nad mořem, vracíme se s 5 stíhačkami



doplníme palivo vracejícím se stíhačkám



všichni šťastně přistáli

**Pozn. redakce:** *Tomáš Vyskočil* použil zdaleka nejpřehlednější znázornění letu stíhaček. Popisy, náčrtky a grafy ostatních jsem musel občas složitě luštit. Domnívám se, že tento styl zápisu bude jasný i vám. *Robert*

## Úloha 11 – Šach-mat!

(a) Šachovnici $8 \times 8$ bez 2 protilehlých rohů dominovými kostičkami vyskládat samozřejmě nemůžeme.

Důvod je jednoduchý: Každá dominová kostička obsahuje při libovolném umístění jedno bílé a jedno černé pole. Šachovnice má buď 32 bílých a 30 černých polí, nebo naopak. Vždy budou 2 černá, resp. 2 bílá pole přebývat.

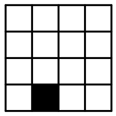
(b) Omlouváme se za velmi nepřesné zadání, které tentokrát obsahovalo 1 chybu a 1 nepřesnost:

(1) Čtvercová síť rozměru $4 \times 4$ není šachovnice, nýbrž je složena ze samých bílých políček kromě jednoho černého. Toto pole není umístěno v rohu, ale na pozici $[2, 1]$.

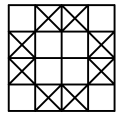
(2) Mluvili-li jsme o úhlopříčných linkách, měli jsme na mysli libovolnou úhlopříčku, nikoliv pouze 2 hlavní diagonály.

Kvůli těmto chybám řešil prakticky každý jinou úlohu, z čehož jsme vycházeli i při bodování. Každý dostal počet bodů příslušný obtížnosti úlohy, kterou si zvolil, a kvalitě jejího vyřešení.

Pojďme vyřešit úlohu, kterou jsme měli na mysli:



zadaná „šachovnice“



zakreslený invariant

Správná odpověď je, že není možné přebarvit šachovnici na bílou libovolným počtem tahů. Abychom to dokázali, vytvořme *invariant*. *Invariant* je taková veličina, která se provedením libovolného tahu nezmění, tedy je invariantní vůči daným tahům. Pokud ukážeme, že počáteční a cílová pozice mají různou hodnotu této veličiny, nalezli jsme i důkaz, že není možné tyto pozice na sebe převést.

Invariantem je v tomto příkladě parita (sudost/lichost) počtu černých polí ve zakřížkovaných bodech. Podíváme-li se na obrázek, vidíme, že libovolná vodorovná či svislá linka, dokonce i libovolná úhlopříčka protíná danou množinu polí v právě 0 nebo 2 polích. To znamená, že provedením inverze se počet černých polí buď nezmění nebo se změní o 2 – tedy jeho parita se nikdy nezmění.

V počáteční pozici je jedno pole černé, v cílové není žádné pole černé. Parita je různá, není tedy možné tyto 2 pozice na sebe převést. **q.e.d.** *Ája & Robert*

## Úloha 12 – Zmes

*Bc. Václav Cviček*:

Předpokládám, že dva deskové kondenzátory o permitivitách $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, plochách $S_1, S_2$, které jsou v poměru $n_1 : n_2$ a tloušťce $h$, mají stejnou kapacitu jako kondenzátor vyplněný směsí dielektrik. Tyto kondenzátory jsou zapojeny vedle sebe.

**Pozn. red.:** Zdůvodnit tento fakt bychom mohli nasledovně: Elektrické pole uvnitř deskového kondenzátoru můžeme považovat za homogenní. Jestliže vložíme kousek dielektrika do takovéhoto pole, tak se nebude pohybovat. Ať tedy umístíme zrníčko pudru kdekoliv uvnitř kondenzátoru, zůstane stát na místě. Tím, jak jím pohybujeme, neměníme elektrické pole. Jenže jenom toto elektrické pole může donést na desky kondenzátoru informaci, že se změnila kapacita, a tedy že musí nějak reagovat. Kondenzátor marně čeká, že se něco bude dít, nic se neděje. Jestliže tedy posuneme jedno zrníčko pudru někde jinde, nezmění se kapacita kondenzátoru. Můžeme tedy přeuspořádat uvnitř zrníčka libovolným spůsobem a nic se nestane.

Kapacita takové soustavy je potom:

$$C = C_1 + C_2 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon\frac{S_1 + S_2}{h} = \varepsilon_1\frac{S_1}{h} + \varepsilon_2\frac{S_2}{h} = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{h}. \tag{1}$$

Jelikož $n_1, n_2$ jsou objemové koncentrace pudrů, tak musí platit $n_1 + n_2 = 1$. Tedy:

$$S = S_1 + S_2, \frac{S_1}{S_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon\frac{S}{d} = \varepsilon_1\frac{n_1 S}{d\,(n_1 + n_2)} + \varepsilon_2\frac{n_2 S}{d\,(n_1 + n_2)}$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2}{n_1 + n_2} = \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2. \tag{2}$$

*Mgr. Zoltán Mics*:

Ak nejakú látku položíme do homogénneho elektrického poľa s intenzitou $\vec{E}_e$, látka sa polarizuje, a dá vzniknúť poľu $\vec{E}_i$ opačnej intenzity. Výsledná intenzita v látke bude $\vec{E}_e - \vec{E}_i$. Relatívna permitivita je definovaná ako

$$\varepsilon_r = \frac{\vec{E}_e}{\vec{E}_e - \vec{E}_i}.$$

Ak zmiešame oba prášky, budú sa polarizovať ako keby boli zvlášť. Pre výsledné indukované pole bude platiť $(n_1 + n_2)\,\vec{E}_i = n_1\vec{E}_{i1} + n_2\vec{E}_{i2}$. Pre zmiešaný prášok taktiež platí:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{\vec{E}_e - \frac{n_1\vec{E}_{i1}+n_2\vec{E}_{i2}}{n_1+n_2}}{\vec{E}_e} = \frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot\frac{E_e - E_{i1}}{E_e} + \frac{n_2}{n_1+n_2}\cdot\frac{E_i - E_{i2}}{E_e} = \left(\frac{n_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{n_2}{\varepsilon_{r2}}\right)\cdot\frac{1}{n_1+n_2}, \tag{3}$$

kde sme v treťom výraze prestali písať vektory, pretože výsledok sa nezmeni. Ak rovnicu (3) vydelíme $\varepsilon_0$, dostávame:

$$\frac{n_1+n_2}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{n_1}{\varepsilon_1} + \frac{n_2}{\varepsilon_2}. \tag{4}$$

**Pozn. red.**: Vidíme, že dvěma různymi postupy prišli oba autoři ke dvěma zcela odlišným řešením. Vzorce (2) a (4) se totiž nerovnají. Napište nám, které řešení je správné, a můžete se těšit na několik bodů. Ze zřejmého důvodu nezapočítáme oběma autorům za tuto úlohu žádne body v této sérii, ale až v další. Ještě víc bodů dostanete, když nám správnou odpověď taky zdůvodníte a ve špatné najděte na chybu. *Bzučo & Štěpka*

## Úloha 13 – V podstatě je všechno relativní

Zadání úlohy zmátlo většinu z vás, úloha byla opravdu těžká. Je škoda, že jste se nepokusili aspoň o náznak řešení.

*Mgr. Jiří Klimeš*:

Výkon $P$ gravitačních vln vyzářený systémem o momentu hybnosti $I$ je

$$P = \frac{13\kappa I^2\omega^6}{2c^5}, \tag{0}$$

kde $\kappa$ je gravitační konstanta, $\omega$ úhlová rychlost systému a $c$ rychlost světla.

Vyzářená gravitační energie je rovna $E = Pt$. (Výkon $P$ je definován jako energie $E$ za jednotku času $t$.) Třecí síla pak je $F = \frac{E}{s} = \frac{Pt}{s}$, kde $s$ je dráha tělesa. Předpokládejme, že obě tělesa mají stejnou hmotnost $m$ a obíhají ve stejné vzdálenosti $r$ od těžiště soustavy úhlovou rychlostí $\omega$. Pro sílu dostáváme z (0) $F = \frac{13\kappa I^2\omega^6 t}{2c^5 s}$. Dráha $s$ je jednoduše dána $s = \varphi r = \omega t r$, a tedy

$$F = \frac{13\kappa I^2\omega^5}{2c^5 r}. \tag{1}$$

Moment setrvačnosti soustavy $I$ máme v našem přiblížení $I = 2mr^2$, snadno dosadíme do (1):

$$F = \frac{26\kappa\omega^5 m^2 r^3}{c^5}. \tag{2}$$

Pro jednodušší interpretaci zavedeme vzdálenost těles $d = 2r$ a máme:

$$F = \frac{13\kappa\omega^5 m^2 d^3}{4c^5}. \tag{3}$$

Odporová síla roste s třetí mocninou vzdálenosti těles. Ze vzorce (3) je vidět, že odporová síla nezávisí na čase. Aby bylo něco dobře měřitelné, nesmí to mít hodnotu blížící se nule. Nejvýraznější závislost je na úhlové rychlosti, ovšem dosáhnout velké úhlové rychlosti není jednoduché. Jednodušší je představit si těžká tělesa dál od sebe, to je ovšem zase malá úhlová rychlost.

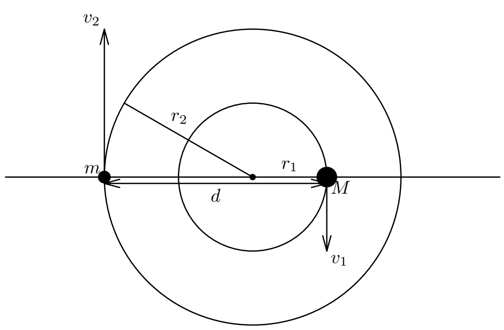
## Vzorové řešení

Podívejme se na to, jak kolem sebe obíhají dvě tělesa vzdálená $d$ po kruhových drahách. Ve vztahu (1) bychom rádi spočítali moment setrvačnosti soustavy dvou těles obíhajících kolem sebe ve vzdálenosti $d$. Gravitační síly jsou stejné, a protože soustava je v rovnováze, musí být stejné i síly odstředivé.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\kappa Mm}{d^2} &= M\omega^2 r_1 \\ \frac{\kappa Mm}{d^2} &= m\omega^2 r_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Mr_1 = mr_2. \tag{4}$$

Vzdálenost obou těles označme jako $d$. Jistě platí $r_1 + r_2 = d$. Považujme soustavu za dva hmotné body. Moment setrvačnosti je pak

$$I = Mr_1^2 + mr_2^2 = \frac{Mm}{M+m} d^2. \tag{5}$$




Ještě si vyjádříme, jak závisí $\omega$ na ostatních parametrech. Z rovnice (4) si snadno vyjádříme $r_1$ , $r_2$, a po dosazení do levé části (4) dostaneme

$$r_1 = \frac{md}{M+m}, \quad r_2 = \frac{Md}{M+m} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa\,(M+m)}{d^3}}. \tag{6}$$

Vidíme, že $\omega$ závisí pouze na vzdálenosti $d$ a hmotnostech složek soustavy. Podívejme se, jak bude záviset naše „třecí síla" na hmotnostech a vzdálenosti obou těles.

$$F_{Mm} = \frac{13\kappa}{2c^5} \cdot \underbrace{\left(\frac{Mm}{M+m}\right)^2 d^4}_{I^2} \cdot \underbrace{\frac{\kappa^2 (M+m)^2 \sqrt{\kappa (M+m)}}{d^7 \sqrt{d}}}_{\omega^5} \cdot \underbrace{\frac{M+m}{\mu_{(m;M)} d}}_{1/r},$$

$$F_{Mm} = \frac{13\kappa^3 M^2 m^2 (M+m)}{2c^5 d^4 \mu_{(m;M)}} \cdot \sqrt{\frac{\kappa (M+m)}{d}}, \tag{7}$$

kde $\mu_{(m;M)}$ je funkce, dávající pro sílu působící na těleso $M$ hodnotu $m$ a naopak. Vztah (7) nám ale nic neříká o tom, jaká třecí síla působí na těleso, pomocí něho se dá odvodit vztah (7.1), který nám dává součet třecích sil, působících na soustavu

$$F_{Mm} = \frac{13\kappa^3 Mm (M+m)^2}{2c^5 d^4} \cdot \sqrt{\frac{\kappa (M+m)}{d}}. \tag{7.1}$$

Proč nemůžeme spočítat, jaká je „třecí síla" působící na každé těleso? Protože i výkon jsme dostali ne pro jedno těleso, ale pro celou soustavu. Vztah (0) byl odvozen pro pozorovatele v nekonečnu, který pozoruje jenom výkon celé soustavy, a ne jejích složek.* Pojďme si ale spočítat, jaké výkony budou mít jednotlivá tělesa soustavy.

Podle rovnice (4) platí:

$$v_1^2 = \frac{\kappa}{d} \cdot \frac{m^2}{M+m}, \quad v_2^2 = \frac{\kappa}{d} \cdot \frac{M^2}{M+m}, \qquad r_1 = \frac{md}{M+m}, \quad r_2 = \frac{Md}{M+m}. \tag{8}$$

---

* Kdybychom chtěli spočítat, jaké síly působí na jednotlivá tělesa, tak musíme zahrnout do modelu skutečnost, že gravitony, které vyzařuje systém, si z něj odnášejí nejen energii, ale také hybnost a moment hybnosti. Celý systém musí totiž zachovávat hybnost i moment hybnosti. Protože hybnost $\vec{p} = m.\vec{v}$ je kolmá na vektor $\vec{r}$, tak musí platit:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{2} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{\text{const}}. \qquad \Longrightarrow \qquad L = \sum_{i=1}^{2} r\,p = \sum_{i=1}^{2} m\,v\,r = \text{const.} \tag{$\diamond$}$$

Použijeme-li vzorce (6) a vzorec $v = \omega\, r$, pak se tento výraz dá upravit na tvar:

$$L = \omega d^2 \frac{Mm}{M+m} = \frac{Mm}{M+m} \sqrt{\frac{\kappa (M+m)}{d^3}} \cdot d^2 = Mm \sqrt{\frac{\kappa}{M+m}} \cdot \sqrt{d} = \text{const.} \cdot \sqrt{d}\,, \tag{$\diamond\diamond$}$$

který je zřejmě závislý na vzdálenosti $d$. Musíme tedy vzít v potaz i gravitony, abychom se vyhnuli nepříjemnostem spojeným s porušením zákona zachování momentu hybnosti $\vec{L}$. Protože ale nevíme, v jakém směru vyzařuje těleso gravitony, musíme se smířit s tím, že sílu $F$ nespočítáme pro jednotlivá tělesa.

Pro celkovou energii systému dostáváme s pomocí rovnic (8):

$$E = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{\kappa Mm}{d} = -\frac{\kappa Mm}{2d}. \tag{9}$$

Vidíme, že energie takovéhoto systému je záporná.

Ještě nám chybí výkon, který vyzařuje celá soustava do prostoru. Ten spočítáme velice jednoduše, do vzorce (0) dosadíme (5) a (6):

$$P = \frac{13}{2} \cdot \frac{\kappa^4}{c^5} \cdot \frac{M^2m^2\,(M+m)}{d^5}. \tag{10}$$

S pomocí vztahů (9) a (10) spočítejme práci, kterou vykoná „třecí síla" za čas $t$:

$$P\Delta t = -\Delta E = \frac{\kappa Mm}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{(d+\Delta d)}\right) = \frac{\kappa Mm}{2} \cdot \frac{\Delta d}{d^2} \tag{11}$$

$$\Delta d = P\frac{2d^2}{\kappa Mm} \cdot \Delta t = \frac{13\kappa^3 Mm\,(M+m)}{c^5 d^3} \cdot \Delta t. \tag{12}$$

Při úpravách jsme použili skutečnost, že $d \gg \Delta d$, a tedy $d + \Delta d \approx d \quad\Longrightarrow\quad d\,(d+\Delta d) \approx d^2$

Proveďme si řádové odhady výkonu $P$ a námi zavedené „třecí síly" $F$ pro některé konkrétní vesmírné systémy. Upozorňujeme, že i když se rovnice (7.1), (10) a (12) tváří, že jsou přesné, není tomu tak, jsou to jenom přibližné hodnoty.

Hmotnost Slunce značíme $M_\odot \equiv 2.10^{30}\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{AU} \equiv 150.10^6\,\mathrm{km}$ je tzv. astronomická jednotka, střední vzdálenost Země od Slunce.

| **Systém** | **M** | **m** | **Vzdálenost** | **Výkon** | **„Třecí síla"¶** | **$\Delta$a/rok$^\varpi$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Země vůči Slunci | $2.10^{30}$ kg | $6.10^{24}$ kg | 1 AU | 200 W | $4.10^{-2}$ N | $4.10^{-13}$ m |
| Merkur vůči Slunci | $2.10^{30}$ kg | $3{,}3.10^{23}$ kg | 0,39 AU | 70 W | $9.10^{-2}$ N | $3.10^{-13}$ m |
| Dvojhvězda $\beta$Lyrae$^\diamondsuit$ | $19{,}5M_\odot$ | $9{,}74M_\odot$ | 0,33 AU | $6.10^{21}$ W | $10^{12}$ N | $2.10^{-2}$ m |
| Pulsar $PSR$ 1913+16$^\spadesuit$ | $\approx 1{,}5M_\odot$ | $\approx 1{,}5M_\odot$ | 0,013 AU | $9.10^{23}$ W | $8.10^{13}$ N | 0,4 m$^\dagger$ |
| Dvě fiktivní černé díry$^\clubsuit$ | $5M_\odot$ | $5M_\odot$ | 50 km | $4.10^{49}$ W | $8.10^{36}$ N | $8.10^{14}$ m$^\ddagger$ |

I když dnes už téměř nikdo nepochybuje o existenci gravitačních vln, gravitační „třecí síla“ je pouhou smyšleninou, která vůbec nevysvětluje podstatu jevu ztráty energie binárního systému. Na jeho vysvětlení je potřeba velice silné teorie, obecné teorie relativity. Tento příklad byl zvolen tak, abyste si v rámci klasické Newtonovy fyziky pokusili udělat představu o řádových efektech takového jevu.

Ve výše uvedeném řešení závisí naše pochybná odporová síla na čase s první mocninou (to aby bylo učiněno zadost těm, kteří od nás požadují odpověď na všechny otázky v zadání).

Z tabulky vidíme, že gravitační vlny odnášejí nezanedbatelnou energii z velice kompaktních a rychle rotujících binárních systémů.

Vzhledem k řádovým odhadům, stejně jako s uvážením, že vzorec pro výkon $P$ je odvozen v linearizované teorii gravitace, jsou naše výsledky jenom přibližné. A pamatujte si! (tedy kdyby vás někdo přesvědčoval):

**Žádná gravitační třecí síla NEEXISTUJE!!!** *Štěpka, Tomáš, Halef & Bzučo*

---

¶ „Třecí síla“ působí na obě složky, nemůžeme ji oddělit a spočítat pro každou složku samostatně, viz poznámku po čarou*.

$\varpi$ Sloupec vyjadřuje zmenšování velké poloosy za jeden rok v důsledku vyzařování energie ve formě gravitačních vln.

♢ Jedná se o známou blízkou dvojhvězdu, kterou můžete v létě vidět i na vlastní oči.

♠ Tento pulsar se jmenuje Hulsův-Taylorův pulsar. Je to dvojitý pulsar objevený v roku 1974, u kterého se zjistilo mnoho relativistických efektů, např. stáčení perihelu o $4{,}26 \pm 0{,}04°$/rok. U Merkuru je to ubohých $41''$/století. Dále byla skutečně pozorována změna oběžné doby o $103\,\mu$s/rok. Za objev existence zkracování periody u tohoto pulsaru byla v roce 1994 udělena Nobelova cena.

♣ Tato soustava je pouze smyšlená.

† Jestliže spočítáme změnu velké poloosy ze zkracování oběžné doby podle ♠, vyjde nám kolem 5 m. To znamená, že nesrovnalosti mezi teorií a praxí jsou velké, ale svoji úlohu tady hraje i číselný faktor $\frac{13}{2}$, který nemusí být správný. Různé teorie dávají pro vzorec (0) různé výsledky, např. číselný faktor $\frac{13}{2}$ udávají jiní autoři jako $\frac{32}{5}$.

‡ Toto číslo znamená, že soustava zkracuje svoji velkou poloosu rychlostí téměř $1/10\,c$. V tomto případě je třeba brát toto číslo s rezervou, ale je jisté, že dvě černé díry takhle blízko sebe se na sebe téměř okamžitě zhroutí. Podle našeho výpočtu se tak stane za několik milisekund.

*Bc. Peter Čendula*:

Značně po termínu poslal řešení *Bc. Peter Čendula*, který odvodil pomocí integrálů přesnou závislost „třecí síly“ na čase.

Podľa druhej impulzovej vety platí:

$$I(t)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -F_t \cdot d(t), \quad I(t) = m_r d^2. \tag{13}$$

$I(t)$ je moment zotrvačnosti v čase $t$, $d(t)$ vzdialenosť v tom istom čase vzhľadom na ťažisko. Zo vzťahu (6) dostaneme rovnice

$$d(t) = \left(\frac{\kappa\,(M+m)}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{F_t}{m_r d(t)} = -\frac{13}{2}\frac{\kappa}{c^5} m_r \omega^5 \cdot \left(\frac{\kappa\,(M+m)}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}} = -\psi\omega^{\frac{11}{3}} \tag{14}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega^{-\frac{11}{3}}\mathrm{d}\omega = -\int_0^t \psi.t \Longrightarrow \omega = \left(\frac{8}{3}\psi t + \omega_0^{-\frac{8}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}}, \tag{15}$$

kde $m_r$ je definovaná podľa (13), $\omega_0$ je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$. Trecia sila podľa rovnice (15) je potom závislá na čase nasledovne:

$$F_t = \frac{13}{2}\frac{I^2}{d}\left(\frac{8}{3}\psi t + \omega_0^{-\frac{8}{3}}\right)^{-\frac{15}{8}}. \tag{16}$$

# Zadání témat 5. série:

8. Interference

Ve škole už jste se určitě setkali s interferencí a ohybem světla. Oba tyto jevy mají původ ve vlnové povaze světla a korektně je popsat může být matematicky dost náročné. Z toho důvodu se také učebnice většinou omezují jen na standardní interferenci na tenké vrstvě či na dvojštěrbině a na ohyb na štěrbině. Naším cílem je, abyste si vyzkoušeli, že i tyto modelové případy nám pomohou vysvětlit mnoho efektů, se kterými se často setkáváme. Zkuste vymyslet co nejvíc příkladů, kde se (téměř) každodenně setkáváme s vlnovými jevy, a matematicky je popsat. Několik z nich vám napovíme.

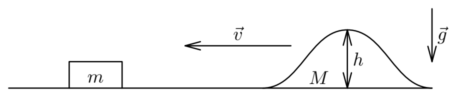
- Mýdlová bublina — když ji budete sledovat, uvidíte barevné proužky, které po chvilce shora postupně mizí. Vysvětlete tento jev a zkuste na základě pozorování odhadnout tloušťku bubliny.
- Jistě jste loni v srpnu sledovali zatmění Slunce a všimli jste si, že pod stromy je vidět spoustu světelných „srpečků“. Jeden kamarád tvrdil, že je to způsobeno ohybem světla na otvorech mezi listy stromu. Měl pravdu? Najděte nějaký přesvědčivý argument pro nebo proti.
- Dvojlom — jistě jste si už prohlíželi celuloidové pravítko nebo jiný předmět, který byl vyroben tažením, v polarizovaném světle. Pak jste viděli krásné barevné obrazce, které mají původ v interferenci řádného a mimořádného paprsku — každý podobný předmět je totiž nutně opticky anizotropní.
- Stáčení polarizační roviny např. v různých roztocích – interference původního a stočeného polarizovaného paprsku se používá v cukrovarnictví ke stanovení měrné stáčivosti roztoku, a tím i koncentrace cukru v roztoku obsaženého.
- … a spousta dalších.

# Zadání rekreačních úloh 5. série:

18. **Teče voda teče...**

    Sloupec vody vytékající z kohoutku se postupně zužuje. Spočítejte, jak se mění poloměr vytékající vody s výškou.

19. **Jedeme z kopce!**




    Po ideálně hladké rovině se pohybuje „kopeček“ rychlostí $v$ (viz obr. 1). Před ním se nachází malé tělísko. Jakou minimální rychlost musí mít „kopeček“ s hmotností $M$, aby se malé tělísko dostalo přes vrchol „kopečku“, jestliže hmotnost tělíska je $m$? Bude tato rychlost záviset na tvaru „kopečku“? Jestliže ano, jak? Předpokládejte, že třecí síla mezi tělískem a „kopečkem“ je nulová.

20. **Úloha pana Banacha**

    Na stole je rozložena obdélníková mapa a celá je překryta druhou mapou stejného území v pětkrát větším měřítku.

    (a) Předpokládejte navíc, že odpovídající si strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že vždy existuje takové místo v daném území, že jeho obraz na větší mapě leží přesně nad obrazem v mapě menší.

    (b) Dokažte, že předchozí tvrzení platí i bez podmínky rovnoběžnosti stěn.

21. **Rodinka**

    Rodina tvořená tatínkem, maminkou, jejich synem a dcerou chce projít tunelem. Tatínek projde tunelem za jednu minutu, maminka za dvě, syn za čtyři a dcera za pět minut. V tunelu je tma a svíčka, kterou má rodinka s sebou, vydrží hořet pouze 12 minut. Tunelem mohou procházet naráz nejvýše dva lidé a v žádném případě nesmí být nikdo v tunelu bez svíčky. Poradíte rodině, jak má projít tunelem?

| | | | | Témata | | | | | Úlohy | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Pořadí** | **Jméno** | **Škola** | $\sum_{-1}$ | **1** | **3** | **4** | **5** | **6** | **10** | **11.a** | **11.b** | **12** | **13** | $\sum_0$ | $\sum_1$ |
| 1. | Mgr. Jiří Klimeš | Jiráskovo G, 2.B | 38 | | 10 | | | | 5 | 0 | | | 4 | 19 | 57 |
| 2. | Mgr. Zoltán Mics | G maď. Šahy, 3. | 38 | | | | | | | 3 | 1 | ? | | 4 | 42 |
| 3. | Bc. Ondřej Plašil | G Chodov., sept. | 18 | | | | 7 | 5 | 5 | 3 | 1 | | | 21 | 39 |
| 4. | Bc. Karel Martišek | G Elgart., kvinta | 19 | | 10 | | | | 4 | 0 | 1 | | | 15 | 34 |
| 5. | Mgr. Jan Rychmberk Klusoň | G Jiráska, kvinta | 26 | | | | | | | | | | | 0 | 26 |
| 6.–8. | Mgr. Jan Beneš | Bisk. G, sexta B | 23 | | | | | | | | | | | 0 | 23 |
| | Bc. Václav Cviček | G P. Bezruče, 1. | 14 | | | | | | 5 | 3 | 1 | ? | | 9 | 23 |
| | Mgr. Jana Krátka | G Piešťany, 3. | 20 | | | | | | 2 | 1 | 0 | | | 3 | 23 |
| 9. | Bc. Peter Čendula | G M. Hodžu, 3.B | 16 | | | | | | | | | | 5 | 5 | 21 |
| 10.–12. | Jiří Novák | G Ledeč n. S., 4. | 6 | | 10 | | | | 4 | | | | | 14 | 20 |
| | Mgr. Pavel Augustinský | G Havířov, 4. | 48 | | | | | | | | | | | 0 | 20 |
| | Mgr. Miro Urbánek | GVOZA, 2.B | 20 | | | | | | | | | | | 0 | 20 |
| 13. | Bc. Jiří Tománek | G Hranice, 3. | 14 | | | | | | 5 | 0 | 0 | | | 5 | 19 |
| 14. | Dáša Eisenmannová | G Heyrov., 3.A | 9 | | | | | | 5 | | | | | 5 | 14 |
| 15. | Bc. Hanss Novotný | | 12 | | | | | | | | | | | 0 | 12 |
| 16.–17. | Peter Zelený | | 0 | 11 | | | | | | | | | | 11 | 11 |
| | Bc. Jan Chmelař | G Hranice, 1. | 11 | | | | | | | | | | | 0 | 11 |
| 18. | Bc. Martin Rosol | | 17 | | | | | | | | | | | 0 | 10 |
| 19.–21. | Bc. Majka Hanzlíková | | 19 | | | | | | | | | | | 0 | 9 |
| | Miroslav Frost | G Elgart., kvinta | 0 | | | | | | 7 | 1 | 1 | | | 9 | 9 |
| | Tomáš Vyskočil | | 2 | | | | | | 7 | | | | | 7 | 9 |
| 22.–24. | Peter Murárik | G Ĺ. Štúra, 2.G | 7 | | | | | | | | | | | 0 | 7 |
| | Mgr. Tomáš Svatoň | GJKT, 3.A | 32 | | | 7 | | | | | | | | 7 | 7 |
| | Kristýna Forrová | GJKT | 0 | | | 7 | | | | | | | | 7 | 7 |
| 25.–26. | Martin Troják | GVOZA, 4.B | 5 | | | | | | | | | | | 0 | 5 |
| | Klára Maturová | | 5 | | | | | | | | | | | 0 | 5 |
| 27. | Lenka Burešová | G Dopplera, 2. | 7 | | | | | | | | | | | 0 | 4 |
| 28. | ??? | | 0 | | | | | | 0 | 3 | 0 | | | 3 | 3 |
| 29. | Robert Meixner | G Slovan., V.A | 2 | | | | | | | | | | | 0 | 2 |
| 30. | Lada Oberreiterová | G Třebíč, 3.B | 9 | | | | | | | | | | | 0 | 1 |

Uzávěrka 5. čísla M&M: **10. května 2000**

Adresa redakce:

Tomáš Brauner, A1721
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha Holešovice