M&M Číslo 3 Ročník VI

Milí řešitelé,

dostává se vám do rukou zbrusu nové číslo časopisu M&M. Přinášíme vám pokračování zajímavých témat, nějaké ty rekreační úlohy a především informace o soustředění!

Tradiční soustředění M&Mse bude konat ve dnech 19.-25. března 2000 na Studenově v Krkonoších. Studenov se nachází asi 4 km od Rokytnice nad Jizerou. Další podrobnosti najdete v pozvánce. Program soustředění bude sestávat z přednášek, lyžování, her a dalších aktivit. Na soustředění budeme vybírat účastnický poplatek, který nepřesáhne 500,- Kč. Pokud máte zájem zúčastnit se soustředění pošlete nám do 5. března vyplněnou přihlášku. za redakci Matouš

Téma 1 – Elektron

Mgr. Zoltan Mics:

Autor nám poslal do redakcie doplnky k riešeniu z minulého čísla časopisu.

Dôkaz existencie virtuálnych nábojov

Majme uzemnenú, nekonečnú platňu a náboj Q, ktorý je od nej vzdialený d. Pôsobením náboja sa na platni vytvorí indukovaný náboj. Potenciál na platni musí zostať nulový, pretože platňa je uzemnená. Vypočítajme preto potenciál ϕ na platni v bode R, ktorý je vo vzdialenosti r od kolmého priemetu Q na platňu. Potenciál získame z pôsobenia Q a pôsobenia indukovaných nábojov platne ϕ_t. Môžeme preto písať:

$$\phi = 0 = \phi_t + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{\sqrt{d^2+r^2}} \quad \Longrightarrow \quad \phi_t = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

Vidíme, že rozloženie nábojov a potenciál na platni akoby vznikol pre pôsobenie virtuálneho náboja $-Q$, ktorý je na opačnej strane platne vo vzdialenosti d. Preto aj náboje na platni pôsobia na Q tak, akoby v skutočnosti pôsobil virtuálny náboj, teda silou:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{4d^2}$$

Pozn. redakce: To, že si za platňou můžeme představit virtuální náboj $-Q$ je možné odvodit i ze skutečnosti, že siločáry na platňe jsou kolmé k její povrchu (Kdyby nebyli, tak by se vektor elektrické intenzity, který je zodpovědný za siločáry, dal rozložit na složku kolmou k platni a na složku s ní rovnoběžnou. Jenže rovnoběžná složka by svým silovým působením uvedla do pohybu náboje na platni tak, aby zaujali polohu, kdy se už hýbat nebudou, tedy když už bude složka vektoru elektrické intenzity rovnoběžná s povrchem platne nulová. To by ale znamenalo, že výsledný vektor bude kolmý na povrch, tedy nastane stav který jsme popsali.) Siločáry elektrického pole s nábojem $-Q$ ve vzdálenosti $2d$ vypadají stejně. Proto múžeme říct, že pole je generováno nábojmi Q a $-Q$.

Autor dále upozorňuje na nepřesnost vztahu pro výpočet doby pádu v minulém čísle, vzorec (6). Vztah byl počítán za předpokladu, že zrychlení je konstantní, ale ze vztahu (3) v minulém čísle plyne, že síla působící na elektron se mění, a tedy se mění i zrychlení. Pro čas pádu odvodil :

$$v = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2Ce^2}{m_e} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_0}\right)} \quad \Longrightarrow \quad t = \int_0^{d_0} \sqrt{\frac{m_e}{2Ce^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_0}\right)}}$$

kde r je vzdálenost elektronu od vrcholu desek. Tento integrál neumí autor spočítat, pomůže mu někdo?

Pozn.: Podle nás není třeba integrovat. Síla, kterou působí desky na elektron, klesá s $1/r^2$. Ještě jedna síla se tak chová – gravitační síla. Pokuste se odvodit tedy čas, za který padne těleso ze vzdálenosti d na jiné těleso (je vhodné uvažovat Keplerove zákony). *Bzučo & Štěpka*

Téma 4 – Čajové lístky

Veľa riešiteľov písalo, že vykonali experimenty, ale nikto tieto experimenty neopísal. Poprosíme teda autorov, aby posielali svoje popisy experimento naďalej, pokiaľ možno podrobnejšie.

Jan Rychmberk Klusoň, Hanss Novotný, Mgr. Zoltán Mics, Jiří Klimeš:

Autoři zjistili při svých experimentech, že skutečně pří roztočení sklenice nebo zamíchání šálku čaje se lístečky hromadí u okraje, a při bržďění se kumulují ke středu.

Mgr. Zoltán Mics:

Autor dokazuje, že když se bude čaj otáčet v nádobě uhlovou rychlostí ω, bude mít povrch tvar rotačního paraboloidu:

$$h - h_{stred} = \rho\frac{\omega^2}{2g}r^2$$

Jelikož objem vody se zachovává, musí hladina při okraji stoupnout, a ve středu poklesnout.[&] Tedy při zastavení rotace musí nutně nastat tok vody od krajů ke středu, protože při krajích bude nastávat pokles hladiny a ve středu se bude naopak hladina zvedat. Tento tok spůsobí posun lístečků ke středu.[$]

Hanss Novotný:

Autor provedl experiment pod vodou, kdy nebyl v nádobě vzduch. Roztočil sklenici, a pak jí obrátil vzhůru dnem. Pozoroval, jak čajové lístky padají prostředkem sklenice ke dnu. Teoreticky to odvozuje skutečností, že uvnitř sklenice dochází k proudění. Lístky jsou strhávany díky vnitřímu tření, které se projevují především v okolí dna.

Jiří Klimeš:

Autor provedl experiment, podle kterého lístečky klesali ke dnu při stěnách a pak se shromažďovali ve středu. Lístečky ve středu stoupali nahoru, potom dolů až klesli na dno.[%]

Bzučo & Štěpka

[&] Pozn. redakce: Celá věc se komplikuje skutečností, že vztah platí jenom když je rotace ustálená, nepůsobí v soustavě třecí síly. Při zastavení rotace sklenice se voda setrvačností bude točit dále, ale bude na ní působit viskózní síla. Potom už nebude mít povrch var paraboloidu.

[$] Podle redakce není tento efekt dostečně silný, aby spůsobil posun lístečků. Skuste si to spočítat pomocí energií, jakou práci vykoná odsředivá síla a jakou energii může proti ní být uvolněna ze změny výšky hladiny. Nebo se mýlime?

[%] Pozn. redakce: Jak vidíte, různí autoři dospěli k různým pozorováním. Jaký je váš názor na experiment? Popište přeesně, s jakou aparaturou jste měřili.

Téma 5 – Hodiny

Bod (i)(a)

V zadání jsme se ptali, kdy (tzn. v kolik hodin, minut, sekund) budou koncové body tří stejně dlouhých hodinových ručiček tvořit vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

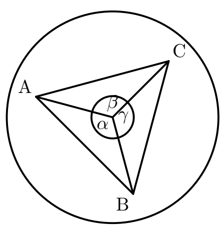
Měli jsme přitom na mysli zkoumat chování hodin, na nichž se všechny tři ručičky pohybují plynule, konstantními úhlovými rychlostmi, nikoliv „skokem“. Mnozí z vás si úlohu zjednodušili předpokladem, že hodinová i minutová ručička se pohybují „skokem“, tj. hodinová se pohne jednou za hodinu a minutová jednou za minutu. Tento předpoklad je dost silný. Jednak jsem v životě neviděl takové hodiny, které by sice měly vteřinovou ručičku, ale hodinovou ručičkou ještě v 11:55 ukazovaly na jedenáctku. A jednak úlohu opravdu hodně zjednodušil: dvakrát za hodinu jste nechali dojít minutovou ručičku do dvou žádoucích konstelací, a pak jste si počkali, až do třetího vrcholu docestuje ručička vteřinová. Za dvanáct hodin tedy došlo ke vzniku rovnostranného trojúhelníku celkem 24×. A ještě něco: když si spočítáte, kolikrát bude svírat hodinová ručička s minutovou úhel 120° nebo 240° na hodinách s plynulým otáčením ručiček, zjistíte, že pouze 22×! Předpoklad skákajících ručiček tedy navíc zkreslil (ne nezajímavým způsobem) výsledek.

Zajímavější než předchozí případ by bylo zkoumat hodiny, u nichž se hodinová i minutová ručička pohybují plynule, avšak „po skocích“ se otáčí ručička vteřinová. Přesně tak jdou hodinky, které mám teď na ruce. Zkuste se nad tím zamyslet!

A nyní se již zahloubejme do článku Jana Beneše, který problém řešil pro hodiny s plynulým chodem všech ručiček.

Vzorové řešení Jana Beneše:

Nejdříve si nakresleme malý obrázek:



Pokud jsou všechny ručičky stejně dlouhé, je trojúhelník ABC rovnostranný, právě když platí

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = \frac{2}{3}\pi.$$

Řekněme, že hodinová ručička je na obrázku ta, jejíž vrchol jsme označili A. Potom minutová ručička může být:

(1) ta, jejíž vrchol jsme označili jako B,
(2) nebo ta, jejíž vrchol jsme označili jako C.

Úhlová rychlost hodinové ručičky je $\omega_h = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{h}^{-1}$. Úhlová rychlost minutové ručičky je $\omega_m = 2\pi\,\mathrm{h}^{-1}$. Úhlová rychlost vteřinové ručičky je $\omega_s = 120\pi\,\mathrm{h}^{-1}$.

Pro zjištění, kdy budou vrcholy ručiček tvořit rovnostranný trojúhelník, jsem zvolil následující metodu: nejprve přesně spočítám, kdy bude úhel mezi hodinovou a minutovou ručičkou $\frac{2}{3}\pi$ (varianta 1) nebo $\frac{4}{3}\pi$ (varianta 2) v záporném směru otáčení, a potom ověřím, zda v tu dobu bude vteřinová ručička na požadovaném místě.

Varianta 1

Nejdříve vypočítáme, kdy bude úhel mezi hodinovou a minutovou ručičkou právě $\frac{2}{3}\pi$. Celý časový interval $\langle 0\,\mathrm{h}\,0\,\mathrm{min}\,0\,\mathrm{s}; 12\,\mathrm{h}\,0\,\mathrm{min}\,0\,\mathrm{s})$[1] rozdělíme na 12 hodinových úseků.

Musí platit následující rovnice:

$$\omega_h x \cdot 1\,\mathrm{h} + \omega_h t + \frac{2}{3}\pi = \omega_m t, \tag{1}$$

kde t je čas od začátku celé hodiny (tj. od okamžiku, kdy minutová ručička naposledy ukazovala na dvanáctku), tzn. $0\,\mathrm{h} \leq t < 1\,\mathrm{h}$.

Jak známo, každou celou hodinu se hodinová ručička posune právě o $\omega_h \cdot 1\mathrm{h} = \frac{\pi}{6}$, člen $\omega_h x \cdot 1\,\mathrm{h}$ v rovnici (1) udává posun hodinové ručičky za x celých hodin. x je celé číslo, a vzhledem k tomu, že studujeme časový interval dlouhý 12 hodin, má smysl uvažovat pouze $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$.

Dosazením hodnot úhlových rychlostí do (1) a úpravou získáme čas t:

$$t = \frac{x+4}{11}\,\mathrm{h}. \tag{2}$$

Polohu φ_h hodinové ručičky (tj. úhel od pozice, v níž ukazuje na dvanáctku) můžeme charakterizovat takto:

$$\varphi_h = \omega_h \cdot t + \omega_h \cdot x \cdot 1\,\mathrm{h} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{x+4}{11} + \frac{\pi}{6} \cdot x = \pi \cdot \frac{6x+2}{33}. \tag{3}$$

Dostali jsme tedy (ve vztahu 2) čas, kdy je minutová ručička posunuta o $\frac{2}{3}\pi$ od hodinové. Zbývá zjistit, jestli se pro nějaké x dostane do požadované polohy také ručička vteřinová. Chceme, aby pro polohu φ_s vteřinové ručičky platilo

$$\varphi_s - \varphi_h = \frac{4}{3}\pi. \tag{4}$$

[1] Pro přehlednost budeme psát $0\,\mathrm{h}\,0\,\mathrm{min}\,0\,\mathrm{s}$ místo $24\,\mathrm{h}\,0\,\mathrm{min}\,0\,\mathrm{s}$.

To lze zapsat rovnicí:

$$\omega_h \cdot t + \omega_h \cdot x \cdot 1\,\mathrm{h} + \frac{4}{3}\pi = \omega_s \cdot t - 2\pi \cdot p, \tag{5}$$

kde p je celé číslo. Chceme totiž zjistit, zda za čas t opíše vteřinová ručička celočíselný počet otáček, a potom ještě úhel φ_s. Číslo p udává tento celočíselný počet otáček.

Ze vztahu (5) dostaneme dosazením a úpravami:

$$p = \frac{708x + 2788}{132}. \tag{6}$$

Nyní zkoumáme pro $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$, zda p je celé číslo. Prozkoumáním všech možností však zjistíme, že pro žádné celé x od 0 do 11 není číslo p celé. V řeči hodin to znamená, že vteřinová ručička se do požadované polohy nedostane.

Varianta 2

Pořadí ručiček bude následující: nejdříve bude hodinová, s ní bude svírat úhel $\frac{2}{3}\pi$ vteřinová a $\frac{4}{3}\pi$ minutová (obojí v záporném směru). Pořadí minutové a vteřinové ručičky bude tedy oproti předchozí variantě opačné.

Bude platit:

$$\varphi_h + \frac{4}{3}\pi = \varphi_m, \tag{7}$$

a proto bude oproti první variantě jiný i čas t, za který se dostanou hodinová a minutová ručička do požadované vzájemné polohy. Pro tento čas platí:

$$\omega_h t + \omega_h x \cdot 1\,\mathrm{h} + \frac{4}{3}\pi = \omega_m t \tag{8}$$

(obdoba rovnice (1) ve variantě 1). Dosazením známých hodnot a úpravou dostaneme ze vztahu (8) hledaný čas t:

$$t = \frac{x + 8}{11}\,\mathrm{h}. \tag{9}$$

Dále bychom chtěli, aby pro vztah mezi polohou hodinové a vteřinové ručičky platila rovnice

$$\omega_h t + \omega_h x \cdot 1\,\mathrm{h} + \frac{2}{3}\pi = \omega_s t - 2\pi p. \tag{10}$$

Odtud plyne po dosazení a úpravě

$$p = \frac{708x + 5708}{132}. \tag{11}$$

Jestliže prověříme všechna $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$, zjistíme, že ani v této variantě neexistuje jediné x z této množiny, pro něž by bylo číslo p celé.

Shrnutí výsledků obou variant

V obou variantách jsme dospěli k závěru, že pokud jsou konce hodinové a minutové ručičky v některých dvou vrcholech rovnostranného trojúhelníku, nemůže být konec vteřinové ručičky ve vrcholu třetím. **Budou-li tedy všechny tři ručičky stejně dlouhé, nebudou jejich vrcholy nikdy tvořit rovnostranný trojúhelník!**

Poznámka

Jan Beneš uvádí ještě alternativní postup, který stvrzuje předchozí výsledky.

Stejně jako v prvním postupu vyjádříme čas, kdy spolu budou hodinová a minutová ručička svírat požadovaný úhel. Dále však budeme vyjadřovat vztah minutové a vteřinové ručičky. Výhoda tohoto postupu: každou hodinu startují minutová a vteřinová ručička ze stejného místa.

K variantě 1

V první variantě máme čas $t = \frac{x+4}{11}$ h. Chceme, aby mezi polohami minutové a vteřinové ručičky platil vztah $\varphi_m + \frac{2}{3}\pi = \varphi_s$, odtud $\omega_m t + \frac{2}{3}\pi = \omega_s t - 2\pi p$. Z toho plyne $p = \frac{354x+1394}{66}$, kde $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$. Skutečně pro žádné x z této množiny není p celé číslo.

K variantě 2

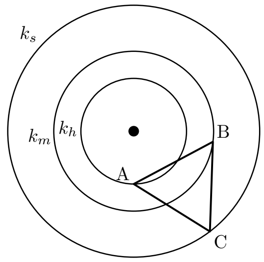
Ve druhé variantě vyšel čas $t = \frac{x+8}{11}$ h. Má platit $\varphi_s + \frac{2}{3}\pi = \varphi_m$, po dosazení získáme $\omega_s t - 2\pi p + \frac{2}{3}\pi = \omega_m t \;\Rightarrow\; 120\pi\frac{x+8}{11} - 2\pi p + \frac{2}{3}\pi = 2\pi\frac{x+8}{11} \;\Rightarrow\; p = \frac{354x+2854}{66}$. Také zde není p celým číslem pro $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$.

Bod (i)(b)

Hledání rovnostranných trojúhelníků pro ručičky různých délek jste se poněkud zalekli: věřte nebo nevěřte, nikdo nám nenapsal nic, co by stálo za řeč. Řešení úlohy zatím nezná dokonce ani autor zadání. To však neznamená, že je to problém příliš těžký. Obvykle totiž dost záleží na tom, jestli se dokážeme na úlohu podívat ze správného úhlu. Několik různých pohledů na úlohu se vám nyní pokusím nastínit – třeba po přečtení následujících odstavců někoho z vás napadne, jak úlohu vyřešit anebo jak se alespoň přiblížit o další krůček k řešení.

Pohled 1

Představte si, že ručičky mají délku h (hodinová), m (minutová) a s (vteřinová). Předpokládejme, že h, m, s jsou vzájemně různá kladná čísla. Koncové vrcholy ručiček nechme nakreslit tři soustředné kružnice k_h, k_m, k_s (viz obr. 2).



Strany našeho trojúhelníku spojují dvojice bodů AB, BC, CA, přičemž $A \in k_h, B \in k_m, C \in k_s$. Kdybychom uměli zkonstruovat pro daná čísla h, m, s trojúhelník ABC, dokázali bychom již určit úhly, které mají mezi sebou svírat jednotlivé ručičky. Pak bychom mohli úlohu řešit analogicky jako (i)(a).

Pokud se vám zdá konstrukce trojúhelníku v této obecnosti moc složitá, můžete zkusit zvláštní případ, kdy jsou některé dvě ručičky stejně dlouhé.

Dále by bylo dobré stanovit nějaké podmínky, které musejí splňovat čísla h, m, s, aby požadovaný trojúhelník vůbec existoval.

Pohled 2

Opět máme ručičky o délkách h (hodinová), m (minutová) a s (vteřinová), kde h, m, s jsou vzájemně různá kladná čísla. Koncové vrcholy hodinové a minutové ručičky nechme nakreslit soustředné kružnice k_h, k_m. Koncový vrchol hodinové ručičky označíme H. Koncový vrchol minutové ručičky označíme M. Hodinovou ručičku zastavíme – nechť ukazuje pořád nahoru. Minutovou ručičku necháme jednou oběhnout kolem ciferníku (bod M tedy necháme pohybovat po kružnici k_m). Ke každé poloze bodu M chceme najít bod V tak, aby HMV byl rovnostranný trojúhelník. Je zřejmé, že délka strany trojúhelníku se bude s pohybem bodu M po kružnici měnit. Bod V se bude pohybovat po nějaké křivce ψ_V. Necháme-li vteřinovou ručičku opsat kružnici k_s, potom každý průsečík křivky ψ_V s kružnicí k_s bude vrcholem V' nějakého rovnostranného trojúhelníka $H'M'V'$, kde H' je poloha konce hodinové ručičky, M' poloha konce minutové ručičky, V' poloha konce vteřinové ručičky. Pak už stačí jen ověřit, jestli tyto konstelace ručiček mohou nastat (to samozřejmě bude záležet na volbě h, m, s).

Pokud se vám povede v nějakých souřadnicích vyjádřit, jak vypadá křivka ψ_V, máte vyhráno. Pokud se vám to nepovede, můžete do příštího čísla poslat alespoň narýsovaný obrázek křivky ψ_V pro nějaká (vámi zvolená) čísla h, m, s.

Pohled 3

Je dáno h, m, s jako v předchozím. Bod S buď střed hodin. Představte si rovnostranný trojúhelník ABC, kde BÚNO[2] A je konec hodinové, B konec minutové a C konec vteřinové ručičky. Čarováním s kosinovými a podobnými větami se vám možná povede vypočítat $|\angle ASB|$, $|\angle BSC|$ a $|\angle CSA|$. Kdyby se vám to podařilo, mohli byste dál pokračovat analogicky jako v (i)(a).

Bod (ii)

Ptali jsme se, kolikrát za 12 hodin se všechny tři ručičky vyskytnou ve výseči velikosti α a jak dlouho v tomto stavu setrvají. Naše zadání si lze vyložit dvěma různými způsoby, přičemž obě varianty jsou zajímavé:

(a) Jak dlouho setrvají ručičky v nějaké jedné pevně (byť libovolně) zvolené výseči velikosti α (pozor – i v takové se mohou během dvanácti hodin objevit víckrát než jednou)?

(b) Kolikrát za 12 hodin dojde k takové situaci, že lze všechny tři ručičky schovat za kruhovou výseč velikosti α, vystřiženou z papíru a přiloženou středovým vrcholem ke středu hodin?

Speciální případ $\alpha = 0°$

Také zde jste používali hodiny, u nichž se hodinová ručička pohne $1\times$ za hodinu a minutová $1\times$ za minutu. Karel Martišek použil hodiny, u nichž minutová ručička poskočila $1\times$ za minutu a hodinová $5\times$ za hodinu o minutový dílek. Pro tyto druhy hodin jste snadno nahlédli, že v časovém intervalu $\langle 0\,\mathrm{h}\,0\,\mathrm{min}\,0\,\mathrm{s}; 12\,\mathrm{h}\,0\,\mathrm{min}\,0\,\mathrm{s})$ dojde k právě dvanácti překryvům všech tří ručiček.

Co když však bude pohyb ručiček plynulý? Kolikrát za 12 hodin se všechny tři ručičky budou překrývat? (Nápověda: když si to dobře rozmyslíte, je tato úloha jednoduchou modifikací úlohy (i)(a) a jde pro ni s výhodou použít symbolika Jana Beneše, jehož článek jsme v tomto čísle citovali.)

Poznámka: při plynulém pohybu ručiček se minutová překryje s hodinovou právě $11\times$ za 12 hodin, nikoliv $12\times$, jak by se snad dalo čekat. Schválně si zkuste točit ručičkami budíku.

[2] Bez újmy na obecnosti.

Obecný případ ($\alpha > 0°$)

Jan Rychmberk Klusoň: Pravděpodobnostní řešení varianty (a)

Uvažujme hodiny s plynulým chodem všech ručiček. Ve výseči velikosti α (libovolně pevně zvolené) se hodinová ručička za 12 hodin vyskytne jednou, minutová 12× a vteřinová 720×. Všechny tři současně se zde vyskytnou tolikrát, kolikrát se zde vyskytne vteřinová ručička, když se zde nacházejí zbylé dvě. Pravděpodobnost, že hodinová ručička bude v dané výseči, je $\frac{\alpha}{360}$ (α je v úhlových stupních). Pravděpodobnost, že v této výseči bude minutová ručička, je také $\frac{\alpha}{360}$. Tedy k současnému výskytu všech tří ručiček v dané výseči dojde $\left(720 \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot \frac{\alpha}{360}\right)$-krát celkem po dobu $\left(\frac{\alpha}{360} \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot 12\right)$ hodin za 12 hodin.

Náš komentář: řešit úlohu pomocí pravděpodobností považujeme za pěkný nápad. Dokonce toto řešení po zralé úvaze považujeme za jedno z nejlepších. Nemůžeme si však odpustit několik poznámek:

(1) Pro autora je výseč velikosti α interval úhlů z jedné strany uzavřený a z druhé strany otevřený. Jinak by totiž např. pro $\alpha = 30°$ obsahovala výseč zvolená od dvanáctky (včetně) do jedničky (včetně) ne 5 (jak předpovídá autor), nýbrž 7 výskytů (okolo časů 00:00:00, 00:01:00, 00:02:00, 00:03:00, 00:04:00, 00:05:00, 01:00:00). Tato podmínka na otevřenost z jedné strany a uzavřenost ze strany druhé je pozoruhodná. Zdá se však, že při této definici výseče by mohly autorovy výsledky platit. Nebo snad někdo najde příklad, pro který neplatí? Za takový příklad (pro α větší než $\sqrt{180}$ a celočíselné) nebudeme body šetřit!

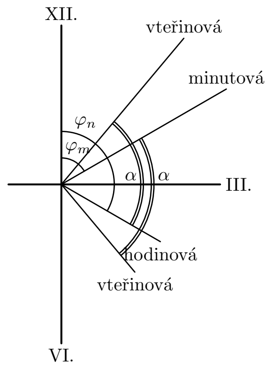
(2) Problém nastane pro malé úhly ($\alpha < \sqrt{180}$). Pak totiž vyjde počet výskytů neceločíselně (přičemž **počet** by měl být vždy celé číslo).

(3) Stejný problém nastane pro neceločíselné α.

(4) Vzorec kolegy Klusoně zjevně neplatí pro $\alpha = 360°$. Pak totiž tento vzorec udává 720 výskytů, což je nesmysl. I Tomáš Brauner ví, že v této „výseči“ jsou ručičky jen jednou, zato však provždy.

Jiří Klimeš: Řešení varianty (b) pro hodiny se skákajícími ručičkami

Mějme hodiny, na kterých se hodinová ručička pohne $1\times$ za hodinu a minutová $1\times$ za minutu. Vteřinová ručička urazí za 1 s úhel o velikosti $6°$; úhel velikosti α urazí za dobu $\frac{\alpha}{6}$ s, kde α je vyjádřena v úhlových stupních. Nechť φ_h je úhel hodinové ručičky (ve směru pohybu ručiček) od pozice, v níž ukazovala na dvanáctku. Podobně φ_m budiž úhel, který urazila minutová ručička od chvíle, kdy naposledy ukazovala na dvanáctku (viz obr. 3).



Pokud $|\varphi_h - \varphi_m| \leq \alpha$,[3] potom budou všechny tři ručičky ve výseči velikosti α od okamžiku, kdy vteřinová ručička dojde do vzdálenosti α od ručičky, která je ve směru otáčení ručiček dál (na obrázku hodinová). Ručičky budou ve výseči velikosti α do okamžiku, kdy vteřinové ručička předběhne ručičku, která je ve směru otáčení ručiček pozadu (na obrázku minutová), o úhel větší než α.[4] V době, kdy budou všechny ručičky ve výseči velikosti α, projde vteřinová ručička výseč velikosti $2\alpha - |\varphi_h - \varphi_m|$. To bude vteřinové ručičce trvat $\frac{2\alpha - |\varphi_h - \varphi_m|}{6}$ s.

Ve výseči velikosti α se ručičky vyskytnou každou minutu, pro kterou platí $|\varphi_h - \varphi_m| \leq \alpha$.[5] Ve výseči pak ručičky setrvají po dobu $\frac{2\alpha - |\varphi_h - \varphi_m|}{6}$ s.

Karel Martišek: Řešení varianty (b) pro hodiny se skoky po minutových dílcích

Při řešení počítám s tím, že se ručičky nepohybují plynule, ale že „přeskakují“ po minutových dílcích. Nejprve budu uvažovat pouze minutovou a hodinovou ručičku. Řešení nezávisí na tom, zda ručičky startují pohromadě, nebo zda je každá jinde; proces popíšu pro případ, kdy startují samostatně. Minutová dohoní hodinovou tak, že s ní bude svírat úhel $\frac{\alpha}{2}$, pak se s ní překryje, a potom se od

---

[3] Situací, ve které je mezi hodinovou a minutovou ručičkou vzdálenost $\leq \alpha$, avšak výseč obsahuje dvanáctku, se autor nezabýval.

[4] Autor mlčky předpokládá, že se ani hodinová, ani minutová ručička v průběhu „pochodu“ vteřinové ručičky nepohnou. To však nemusí být vždy splněno. Při přechodu vteřinové ručičky přes dvanáctku se pohne minutová ručička o jeden minutový dílek. Celkem dvanáctkrát za 12 hodin se však pohne i ručička hodinová, a to je potom daleko větší rumrejch!

[5] Totéž jako v poznámce 3.

ní vzdálí na úhel $\frac{\alpha}{2}$, a „pojede“ dál. Ručičky se sice překryjí v mém modelu 12×, avšak překrytí v 11:59 je velice blízko k překrytí ve 12:00, resp. 00:00 (v modelu s plynulým pohybem ručiček tato dvě překrytí splynou). Proto pro $\alpha \geq 6°$ proběhne tento cyklus 11×. Teď ještě vteřinová ručička: jelikož jednomu vteřinovému dílu odpovídá 6°, a vteřinová ručička se do výseče velikosti α dostane 1× za minutu, pak pro $\alpha = 6°$ budou ve výseči všechny ručičky pouze 1×, pro $\alpha = 12°$ dvakrát atd. Za 12 hodin se všechny tři ručičky vyskytnou ve výseči velikosti α celkem $\frac{11}{6}\alpha$-krát.

Má-li výseč velikost 6°, setrvají ručičky ve výseči po dobu 2 s (1 s v jedné a 1 s v druhé okrajové poloze). Ručičky setrvají ve výseči velikosti α celkem $\frac{1}{3}\alpha$ s.

Náš komentář:

(1) Co když α není dělitelné šesti? Pak počet výskytů vychází neceločíselně!

(2) Pokud nebude α celé číslo, v naprosté většině případů nebude ani počet výskytů celočíselný.

(3) Problém je také v tom, že autor nedefinoval, co pro něho znamená výseč velikosti α – pojem si lze totiž vyložit více způsoby (interval otevřený, uzavřený, nebo z jedné strany otevřený).

(4) Pro $\alpha = 30°$ se v každém cyklu vyskytnou ručičky ve výseči přibližně 10×. To by znamenalo asi 110 výskytů. Citovaný vzorec však dává pouze 55 výskytů.

Další náměty k bodu (ii):

(1) Zkuste najít všechny „mouchy“ předchozích řešení.

(2) Pokud ovládáte aspoť trochu programování v jakémkoli jazyce, můžete se pokusit napsat program, který by na vstupu dostal číslo α a vracel výsledek úlohy (a) a/nebo výsledek úlohy (b).

(3) Zkuste úlohy (a), (b) řešit pro plynulý chod všech ručiček a pro $\alpha > 0$ libovolné, tzn. např. i neceločíselné.

Bod (iii)

Moucha

V zadání jsme chtěli popsat trajektorii mouchy, která leze rovnoměrně po ručičce hodin. Obvykle jste psali, že touto trajektorií jest spirála. Spirál však chodí po světě mnoho. Dokonce i těch Archimédových spirál je někonečně mnoho - v závislosti na rychlosti otáčení hodinové ručičky a rychlosti posuvného pohybu mouchy po ručičce. Do příštího čísla pro vás mám tedy tyto náměty:

A. Rychlost pohybu mouchy po ručičce budiž v_m. Úhlová rychlost otáčení ručičky nechť je ω_r a ručička nechť se pohybuje plynule bez skoků. Jaká bude rovnice spirály, po které se moucha bude pohybovat? Popište tuto spirálu jednak v kartézských a jednak v polárních souřadnicích. Pokud si vzpomenete ještě na nějaké jiné pěkné souřadnice, můžete křivku popsat také v nich.

B. Zvolte si rychlost mouchy v_m a za ω_r vezměte úhlovou rychlost vteřinové ručičky. Narýsujte trajektorii mouchy pro tyto parametry.

C. Uvažte, co by se stalo, kdyby se ručička pohybovala „se skokem“, tj. např. vteřinová ručička by se hnula právě jednou za sekundu (v nekonečně krátkém čase by přeskočila o jeden dílek zvící $6°$). Zkuste narýsovat trajektorii mouchy, která leze po takové vteřinové ručičce, která se hýbe skokem. Rychlost mouchy v_m zvolte stejnou jako v (B). Nejlepší bude, pokud obrázek nakreslíte do obrázku křivky z úlohy (B).

D. Uvažme nekonečně dlouhou ručičku. Moucha vyrazí v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ od středu hodin rovnoměrným pohybem po ručičce. Pohyb ručičky je plynulý, bez skoku, se stálou úhlovou rychlostí ω_r. Když bude moucha dost daleko od středu hodin, bude její rychlost (z pohledu pozorovatele stojícího před kostelem) větší než rychlost světla. To odporuje teorii relativity. Jak se s tím vyrovnáte a jak popíšete (nejlépe rovnicemi) pohyb mouchy s přihlédnutím k teorii relativity?

E. Osa hodin o je kolmá k rovině hodin. Ve vzdálenosti $10\,\mathrm{m}$ od středu hodin stojí na ose o Tomáš Brauner, který nemá rád mouchy. Těsně vedle Tomáše stojí těžkotonážní dělo, které je nabito. V jakém směru má Tomáš vystřelit v čase t, aby trefil mouchu, která se začala pohybovat od středu hodin po vteřinové ručičce v čase 0? Na střelu nepůsobí gravitační pole.

Bod (iv)

Experimentální úloha

Zde je namístě citovat výsledky měření několika věhlasných experimentátorů:

- **Karel Martišek:** „Mě i po provedení experimentu zajímá, jak by se měl změnit chod hodin. Vzal jsem budík, který nepatří zrovna mezi nejmodernější a který je stoprocentně na pružinu. Zavěsil jsem ho, nechal jsem ho kývat a kývat a kývat, ale stejně šel pořád úplně přesně.“
- **Peter Murárik** nám lakonicky a bez dalšího zdůvodnění sdělil: „Hodiny budú meškať.“
- **Hanss Novotný** nám napsal: „Vzal jsem si hodinky, jak bylo řečeno, a nechal jsem jimi kývat $\frac{1}{4}$ hodiny. Občas jsem kyvadlu pomohl. Kývání nebylo pravidelné. Kmity se měnily, neboť jsem neměl synchronní kyvadlo. **Výsledek:** Časová změna nebyla pozorována. Možná, že nastala, ale přesnost hodin byla i před pokusem špatná. Dále to mohlo ovlivnit i kmitání, které bylo zapříčiněno mnou. Také doba $\frac{1}{4}$ hodiny je krátká (možná, že se navíc ještě občas úplně zastavily). **Závěr:** Celý pokus nestojí za regulérní obodování, proto byste mi udělali velikou radost do nového roku, roku magického, plného očekávání, a dali mi alespoň jeden neregulérní bod, a tím abych se mohl zúčastnit dalšího soustředění. O zábavu se postarám (přinejmenším o tu svoji).“
- **Bzučovy pokyny k dalšímu experimentování:** Vezměte vrtačku, navrtejte na ni špalek, na který přivažte za řetízek hodiny (budík). Stiskem spínače na vrtačce to roztočte. Pak se pokuste pozorovat, jak se mění přesnost hodinek. Ministr zdravotnictví vám doporučuje se před experimentem důkladně zakopat.

Bod (v)

Dvoje dědovské hodiny

Jan Rychmberk Klusoň: Seřizování hodin

(a) Na svých hodinkách nastavím čas, který je aritmetickým průměrem času na kostele a času na MNV.

(b) Protože je maximální odchylka na MNV poloviční (pouze 5 minut), jsou tyto hodiny dvakrát přesnější. Započítám je tedy do aritmetického průměru dvakrát.

(c) Při tvoření průměrných časů budou přesnější hodiny započítány do průměru tolikrát, kolikrát jsou přesnější než druhé hodiny.

Protože jdou hodiny s přesností na minuty, je pravděpodobnost, že budeme mít na hodinkách správný čas (na minuty) rovna $\frac{1}{k}$, kde k je počet minut, který se vejde do vzájemné odchylky dědovských hodin. Například pro odchylku 9 minut je tato pravděpodobnost rovna $\frac{1}{9}$.

Komentář redakce:

Bohužel postrádáme zdůvodnění, proč zrovna tento postup povede k největší přesnosti našich hodinek. S autorovým tvrzením o pravděpodobnosti se neztotožňujeme a myslíme si, že je špatně. (Bude-li se kostel předbíhat max. o 10 minut a MNV zpožďovat max o 10 minut, dále bude-li na kostele např. 10:10 a na MNV 9:50, pak je zřejmé, že přesný čas je 10:00, což víme s pravděpodobností 1, nikoliv $\frac{1}{20}$, jak bychom dostali dle autorova návodu.)

Jana Krátka: Ako čo najpresnejšie určiť čas v Dědově

Člověk si prohlédne čas na kostele, přičemž si určí rozmezí,[6] ve kterém se správný čas určitě nachází. Za 10 minut dorazí k MNV, opět si určí rozmezí správného času, potom rozmezí správného času z kostelních hodin zvýší o 10 minut (připočítá tak dobu cesty), a z daných dvou rozmezí si udělá průnik. Ze dvou krajních časů tohoto průniku pak vypočte aritmetický průměr.

Příklad:

$$\begin{array}{rcl} & \text{10 min} & \\ \text{správný čas 16:30} & \longleftrightarrow & \text{16:40} \\ \text{kostel 16:38} & & \text{MNV 16:33} \\ & +\text{10 min} & \\ \text{rozmezí}_{\text{kostel}}\ \text{16:28–16:37} & \longrightarrow & \text{rozmezí}_{\text{MNV}}\ \text{16:34–16:43} \\ & & \text{rozmezí}_{\text{kostel}}\ \text{16:38–16:47} \\ & & \text{průnik rozmezí je 16:38–16:43} \end{array}$$

Průnik rozmezí (intervalů) je interval $\langle 16:38; 16:43\rangle$. Aritmetický průměr z krajních mezí je $\frac{16:43+16:38}{2} = 16:40:30$. Člověk si tedy nařídí čas $16:40:30$.

Komentář redakce:

Ani z tohoto článku není patrné, proč si tímto postupem zajistíme přesný čas s největší pravděpodobností. Navíc nejsme spokojeni s tím, že autorka pracuje s časem s přesností celých minut, aby si vzápětí seřídila hodinky s přesností 30 vteřin.

Kdo se pokoušel nějakým způsobem se s touto úlohou utkat, narazil na pojem pravděpodobnosti. Všichni asi víte, že pravděpodobnost náhodného jevu se dá vypočítat jako podíl počtu příznivých výsledků a počtu všech možných výsledků. Výsledky však musejí být tzv. elementární jevy, které jsou všechny stejně možné, tzn. kterýkoli z nich může nastat „se stejnou pravděpodobností“. Máme-li množinu jevů, které jsou takto stejně možné, říkáme, že jde o rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti. Rozdělení mohou být i jiná (trojúhelníkové, exponenciální, normální…). Rozdělení

[6] Pod pojmem rozmezí rozumíme časový interval.

pravděpodobnosti pro zpožďování a předbíhání dědovských hodin jsme v zadání zákeřně neuvedli. Autoři předchozích dvou příspěvků víceméně intuitivně počítali s rozdělením rovnoměrným, tzn. pro každý čas od 0 do 10 minut je stejně pravděpodobné, že je zpožděním hodin na MNV.

Udělali byste mi (a Bzučovi jistě také) velkou radost, kdybyste si zvolili nějaké rozdělení pravděpodobnosti (můžete začít u toho rovnoměrného, to je nejjednodušší) a zkusili úlohu pro toto rozdělení pečlivě a správně vyřešit. Máte přitom minimálně dvě možnosti: buď předpokládat, že na obou dědovských hodinách lze odečítat údaje s libovolnou přesností, anebo uvážit, že oboje hodiny jdou s přesností např. na celé minuty. Časové intervaly se vám pak podle toho rozpadnou buď na nekonečně mnoho časových údajů, nebo na minutové dílky. Co myslíte, jaká bude v prvním případě pravděpodobnost, že si seřídíte hodinky úplně přesně?

Závěrem

V předchozím mnohostránkovém textu jsme vám nabídli spoustu (skoro dvacet) námětů a nápadů. Budeme rádi, když některé z těchto úloh vyřešíte. A budeme ještě radši, když se vám podaří vymyslet (a třeba i vyřešit) nějaký vlastní pěkný hodinový problém. Obojí patřičně bodově ohodnotíme. A aby se vám příjemně řešilo, dodáváme špetku kultury. *Matouš*

DĚDOVSKÉ HODINY

(příběh přeukrutný, jenž však nemůže být podepřen
skutečností, neb v Dědově není kostel)

V Dědově oznámil Obecní úřad
obecním rozhlasem dodávku kuřat.
Poctivá dechovka nese se krajem:
na počest dodávky polku vám hrajem.
Dědovem nesly se bujaré tóny,
na místním kostele zvonily zvony.
Pan farář za provaz tahal tak tuze,
že se pak navečer podobal duze.

Přemítal později pan farář u píva,
proč ten čas v Dědově tak dovně uplývá;
přemýšlel pan farář v hospůdce stinné,
proč ten čas v Dědově tak divně plyne,
až došel k závěru: vinny jsou hodiny!
Po této myšlence došlo i na činy.
Když táhlo k desáté, rozhod se kanovník,
na faru do sklepa skočil si pro žebřík;
přistavil žebřík ke kostelní fasádě,
hodiny seřídí, úspěch je nasnadě.

Když už byl ve výši kostelní báně,
opilým dechem si zahříval dlaně.
Když už se dotýkal posledních příček,
vyletěl z cibule splašený sýček.
Pan farář ukrutně ptáka se ulekl,
nohou se ze šprišle žebříku sesmekl.
Užuž to cítil: jsou skončeni dnové!
Vtom se však chytil ručky hodinové!
Ručička od hodin není však stvořena
k nesení tlustého kněžského břemena,
a tak se, dříve než desátá odbila,
ručička s farářem do hlubin zřítila.

Dědov je dědina, Dědov je vesnice:
zdroj zdejší obživy je černá ornice,
šohaji nosí tu barevné kroje

a v každé ulici je trocha hnoje.
Největší hromada se ovšem tulí
k průčelí obecní kapituly.

Po této vsuvce už nikomu není
zatěžko odhadnout budoucí dění.
Svatý Jan zálibně sledoval z mostu,
jak padá pan farář do kompostu.
A když se vyhrabal na povrch stohu,
děkoval za spásu, modle se k Bohu.

Dědov je vesnice, Dědov je dědina,
Dědovem nese se prazvláštní novina:
lidé prý viděli nebeské anděly,
jak toho faráře z oblohy snášeli.
Někteří ovšem se k názoru kloní,
že to v tom nebi dost podivně voní.

Ptali jsme se pana faráře u piva,
proč ten čas v Dědově tak divně uplývá.
Odvětil pan farář nad bílou pěnou pivní,
čas že je v Dědově už dlouho relativní.

A pak dodal se záchvěvem skryté pýchy v hlasu:
„Od včerejška v Dědově je dilatace času!“

Zikiho dobrodružství

(Výpravná tragédie o mnoha dějstvích a jediném aktérovi,)

J. V. Sládek

V smradu uvnitř černé sluje
tančí Ziki v pruhovaném triku
v naději, že z hlíny vyčaruje
kontextovou gramatiku.

Pozdě v noci při zatmění
substance už barvu mění.
Strašný puch je skoro všude:
už to bude, už to bude!

Dobře Ziki, dobře činí,
už to voní po jeskyni.
Už to vře a už to syčí:
gramatika brzy vzklíčí.

Gramatika zrodila se!
Už tu stojí v plné kráse.
Oblak puchu dosud halí
její něžné terminály.
Zápach onen dosud hromský
nesnesl by ani Chomski.

Chomski možná, ne však Ziki.
Ten toužebně očekává,
až se z nitra gramatiky
začne linout zpěv a sláva.

Avšak děj vzal jiný spád,
jen se pojďte podívat:
uprostřed té sazné sluje
– můj ty J. V. Plevo! –
gramatika generuje,
že je Ziki střevo.

Ziki popad kladivo,
bude horor naživo
(patrně se ovšem zpozdí,
neboť to vzal rovnou do zdi,
avšak vstává, vpřed se vrhá,
gramatika zdrhá, zdrhá...)

Při sudičkách! Radegaste!
Útěkem svou duši spaste!
Gramatika chvatně prchá.
Kampak asi, kampak, mrcha?
Tajné dveře otevírá,
před ní zeje černá díra.

Ještě spěšně prohodila,
že má chybu v kódu,

než za sebou zaklopila
víko od záchodu.

Ziki zdrcen shlíží z výše,
kam ta hrozná mrcha spadla.
Nepokořen ve své pýše
dotekl se splachovadla.

Ortel ukrutný se plní,
zbyly jenom vzduté vlny,
na nichž terminály pění...
To je konec vyprávění.

ČAJOVÉ LÍSTKY

(aneb zimní poetická báseň s varováním
před BzuČem)

Dlouhé zimní období
mnoho škody nadrobí.
Rýmu, chřipku, sníh a led
- co vám budu vyprávět.
Jeden zimní večer
u kamen jsem klečel,
čta si K. M. Čapka - Choda.
V konvici bublala voda
a já myslel na léto,
zlatožlutá paleto!

Dobrý nápad v hlavě zraje:
uvařím si hrnek čaje.
Voda bublá, srdce křeje,
kdežpak myslet na závěje!

Čaj jsem zalil, vtom však kdos
do dveří mi strká nos.
Kdo to? Ejhle! Bzučo vchází,
okem po mém hrnku hází;
během několika chvil
hrnek s čajem zabavil.

Zdá se mi, že zrak mne šálí:
Bzučo míchá, bulvy valí,
míchá, míchá, čaj se vzdmul,
z hrníčku ven vylítnul!
Na stropě je mokrý kruh...
Bzučo, starý dobrodruh,
zbytky lístků lžičkou sbírá
- sper ho ďas! Oheň a síra! -
a potěšen pokusem
odchází pryč poklusem.

A tak mám dnes po čaji.
Vločky na zem slétají,
mráz si tužkou z ledu čárá,
od úst stoupá sytá pára,
v konvici už nevře voda
a já si čtu Čapka - Choda.

Téma 6 – Herní strategie

(i) Piškvorky

Tomuto zajímavému tématu se překvapivě věnovalo pramálo lidí.

Jan Rychmberk Klusoň: Piškvorky na malém herním plánu

Autor uvádí, že na plánu 3×3 neexistuje na 3 piškvorky vítězná strategie, pokud začínající hráč položí svoji piškvorku doprostřed, může maximálně remízovat. Analogicky na plánu 4×4 na 4 piškvorky. Tato tvrzení se snadno dokážou rozborem všech možností, v těchto případech triviálním.

Na plánu 4×4 lze snadno vyhrát na 3 piškvorky, pokud je položíme vedle sebe do prostředních 4 políček. Důkaz je opět snadný.

Pozn. redakce: Zkuste se zamyslet nad následující modifikací piškvorek: hraje se na libovolně velkém hracím plánu na 5 piškvorek, ale pouze ve vodorovném a svislém směru. Nalezněte pro začínajícího hráče remízovou strategii.

(ii) Odebírání číslic

Vaše řešení se povětšinou shodla na tom, že začínající hráč dokáže vždy zvítězit. Lišily se jak použité postupy, tak použitá symbolika. Uvedu zde jedno z mnoha možných řešení.

Jan Beneš: Vylučovací metoda

Nejprve vysvětleme základní strategii. Po rozehrání několika počátečních tahů určujeme svůj další tah (obvykle se jedná o 3 kolo) podle těchto kritérií:

- Pokud existuje číslo, které musíme vzít, abychom zabránili soupeři v dalším tahu zvítězit, vezmeme ho. Pokud by jich existovalo víc, prohráli jsme, ale to se nám nestane.
- V opačném případě vezmeme takové číslo, abychom mohli dosáhnout součtu 15 více způsoby. Pokud existuje, pak prohrál soupeř.

Abychom se dostali do výhodné pozice, že takové tahy budou vždy existovat, musíme rozehrát hru podle tohoto schématu:

1. V prvním tahu vezmeme vždy 8.
2. Podle tahu soupeře vybereme svůj tah takto:

soupeř	9	7	6	5, 4, 3, 2, 1
my	4	4	5	7

3. Soupeř nyní musí reagovat na můj tah „krádeží“ čísla, jinak okamžitě prohraje. V každém případě nám zbydou 2 možnosti, jak pokračovat, což nám opět zaručí vítězství.

Ukažme si na příkladě, jak bude probíhat partie. Vyplníme tabulku vynucených tahů a uvidíme, že soupeř nemá na vybranou. Analogická tabulka se dá vyplnit pro každý jiný počátek partie.

kolo	1.	2.	3.	4.
my	8	4	5	6/2
soupeř	7	3	2/6	prohrál

Soupeř musí ve druhém tahu nutně vzít 3, abych nevytvořil součet $8+4+3 = 15$. Já vytáhnu trumf – číslo 5, které nutí soupeře vzít 2 i 6, protože mi obě tato čísla otevřou cestu k výhře: $8+5+2 = 15$, $4 + 5 + 6 = 15$.

(iii) Odebírání sirek

Tento příklad byl velice jednoduchý, takže jej vyřešil skoro každý – taky za něj bylo nejméně bodů – až na bod (b), který je naopak docela obtížný a nerozřešil jej zatím nikdo.

(a) Pokud můžeme odebírat $1, 2, \ldots, k$ sirek, pak dokážeme na libovolný tah soupeře i odebrat $k + 1 - i$ sirek, což dává dohromady $k + 1$ sirek. Pozor, soupeř tohle dokáže taky. Prohráváme v případě, že na stole není sirka, pokud je tam $1, 2, \ldots, k$ sirek, tak naopak prohrává soupeř.

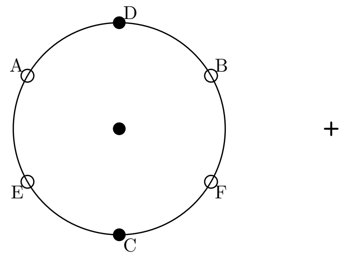
Z toho nutně plyne, že každý násobek $k+1$ je pro nás beznadějně ztracená pozice: ať odebereme cokoliv, soupeř to je schopen dorovnat a tak se dostaneme až do nuly. Pokud počet sirek není dělitelný $k + 1$, tak to na násobek zarovnáme my a provedeme ten samý trik soupeři.

(c) Zde jsou prohrané pozice násobky 3. Důležité je pouze to, že můžeme odebrat 1 nebo 2 sirky, zatímco násobek 3 nikoliv. Ať soupeř odebere jakoukoliv mocninu 2, nikdy nebude dělitelná 3. My vypočítáme zbytek po dělení 3 a opačný zbytek (1 nebo 2) odebereme.

(d) Žádnou další zajímavou variantu odebírání sirek jste bohužel nenavrhli.

Pozn. redakce: Zkuste se zamyslet nad následujícím problémem. Máme nějaký počet hromádek a na každé je nějaký počet sirek. V jednom tahu si hráč vybere libovolnou hromádku a odebere z ní libovolný počet sirek. Vyhrává ten, kdo odebere poslední sirku. Jaká je vítězná strategie? *Robert*

Úloha 5 – Modrý a rudý



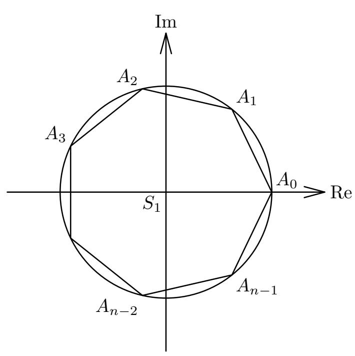
Uvažujme šest bodů ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku a střed jeho opsané kružnice. Máli střed šestiúhelníku např. modrou barvu, můžeme předpokládat, že všechny jeho vrcholy nejsou červené, jinak bychom měli jednobarevný rovnostranný trojúhelník. Nechť je dalším modrým bodem např. bod D.

Podobně nám vyjde, že vrcholy A, B (obr. 1) budou červené a nim příslušný vrchol rovnostranného trojúhelníku C bude modrý. Konečně musí být zbývající dva body červené.

Přidáme-li ale k uvedeným sedmi bodům další bod vidíme, že ať ho obarvíme jakkoli, dostaneme stejnobarevný rovnostranný trojúhelník. *Ája*

Úloha 6 – n-úhelník

Jiří Tománek:



Mějme pravidelný n-úhelník $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}$. Označme S součet druhých mocnin velikostí jeho úhlopříček vycházejících ze zvoleného bodu (vrcholu) A_0. Platí tedy

$$S = |A_0A_1|^2 + |A_0A_2|^2 + |A_0A_3|^2 + \ldots + |A_0A_{n-1}|^2. \tag{1}$$

Pravidelný n-úhelník $|A_0A_1A_2\dots A_{n-1}|$ umístíme v Gaussově rovině tak, aby vrcholy A_k byly obrazy čísel

$$w_k = R\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ a R je poloměr kružnice n-úhelníku opsané. Čísla w_k jsou kořeny binomické rovnice $w^n - R^n = 0$. Platí

$$|A_0A_k|^2 = |w_k - w_0|^2 = |w_k - R|^2 = (w_k - R)\overline{(w_k - R)} = (w_k - R)(\overline{w_k} - R). \qquad (2)$$

Jistě $w_0 = R$, tedy pro n-úhelník, ať už má lichý či sudý počet vrcholů, platí:

$$\overline{w_1} = w_{n-1}, \overline{w_2} = w_{n-2}, \dots, \overline{w_{n-2}} = w_2, \overline{w_{n-1}} = w_1.$$

To dosadíme do (2) a získáme:

$$S = (w_1 - R)(w_{n-1} - R) + (w_2 - R)(w_{n-2} - R) + \dots + (w_{n-1} - R)(w_1 - R). \qquad (3)$$

Také platí:

$$w_1w_{n-1} = w_2w_{n-2} = \dots = w_{n-1}w_1 = R^2.$$

Po úpravě rovnice (3) dostaneme:

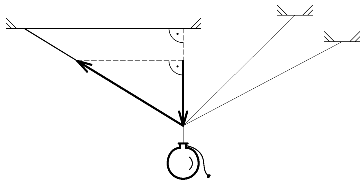
$$\begin{aligned} S &= 2(n-1)R^2 - (w_1R + w_{n-1}R + w_2R + w_{n-2}R + \dots + w_{n-1}R + w_1R = \\ &= 2(n-1)R^2 - 2R(w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1}). \end{aligned} \qquad (4)$$

Pro kořeny binomické rovnice $w^n - a = 0$ platí $w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = 0$. Protože $w_0 = R$, platí v našem případě $w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = -R$. Po dosazení do (4):

$$S = 2(n-1)R^2 - 2R(-R) = 2nR^2 - 2R^2 + 2R^2 = 2nR^2.$$

Tím je důkaz proveden.

Úloha 7 – Tři vlákna



Z podobnosti trojúhelníků na obr. 1 určíme, jakou jsou před přetržením vlákna namáhána silou – před přetržením je situace symetrická, tíhová síla působící na závaží se tedy rozdělí rovnoměrně mezi vlákna:

$$F_1 = \frac{1}{3} F_G \frac{l}{h_1} = \frac{1}{3} mg \frac{l}{h_1},$$

kde h_1 je výška místa spojení všech tří vláken od stropu a g je tíhové zrychlení. Aby se slabší vlákno (patrně zmetek) přetrhlo, je třeba, aby byla splněna podmínka

$$\frac{1}{3} mg \frac{l}{h_1} = F_1 > F_{\max}^{\text{slabší}} = M_{\max}^{\text{slabší}} g,$$

kde m je hmotnost závaží, $F_{\max}^{\text{slabší}}$ je maximální síla, jakou může být vlákno napínáno, aby se nepřetrhlo, a $M_{\max}^{\text{slabší}}$ je nosnost vlákna v místních podmínkách (uvědomte si, že i když se nám ve výsledku hodnota g pokrátí, třeba na Venuši by pro stejné vlákno byla jiná hodnota $M_{\max}^{\text{slabší}}$).

Po přetržení bude postupně narůstat složka ve směru vláken gravitační síly i dostředivé síly*; ta navíc sama roste. Největší silou tedy budou vlákna namáhána v nejnižším bodě. S využitím známých vzorečků dosaneme pro sílu působící na závaží vztah

$$F = F_G + F_d = mg + m\frac{v^2}{h_2},$$

kde F_d je dostředivá síla, h_2 je výška místa spojení dvou vláken v nejnižším bodě od stropu, jinak také poloměr oblouku, po kterém se závaží pohybuje. Rychlost v určíme ze zákona zachování mechanické energie, to si ovšem můžeme dovolit jenom díky tomu, že zanedbáváme tření. Součet energie potenciální a kinetické v místě utržení (index 1 v označení veličin) zůstane zachován i v nejnižším bodě (index 2 v označení veličin):

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}.$$

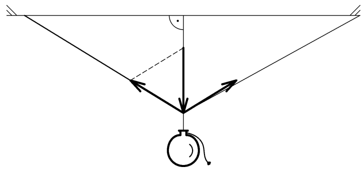
Nulovou hladinu potenciální energie zvolme v úrovni stropu.

$$-mgh_1 + 0 = -mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2$$
$$v^2 = 2g(h_2 - h_1).$$

* která nutí závaží pohybovat se po oblouku, místo rovnoměrně přímočaře

Po dosazení do rovnice pro sílu

$$F = mg\left(1 + \frac{2(h_2 - h_1)}{h_2}\right).$$



Z podobnosti trojúhelníků na obr. 2 určíme, jakou silou jsou vlákna namáhána v nejnižším bodě

$$F_2 = F\frac{l}{2h_2} = mg\left(1 + \frac{2(h_2 - h_1)}{h_2}\right)\frac{l}{2h_2}.$$

Aby se silnější vlakno nepřetrhlo, je třeba, aby byla splněna podmínka

$$F_2 \leq F_{\max}^{\text{silnější}} = M_{\max}^{\text{silnější}}g,$$

kde význam $F_{\max}^{\text{silnější}}$ a $M_{\max}^{\text{silnější}}$ je analogický jako pro slabší vlákno.

$$\frac{ml}{h_2^2}\left(\frac{3}{2}h_2 - h_1\right) < M_{\max}^{\text{silnější}}.$$

K určení h_1 a h_2 ze zadaných l a a je už potřeba pouze geometrická úvaha, nakonec vychází

$$h_1 = \sqrt{l^2 - \frac{1}{3}a^2}, \qquad h_2 = \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}a^2}.$$

Využijeme-li výhodného tvaru zadání, můžeme podmínky postavit takto: síla působící na tři vlákna před přetržením je větší než síla působící na dvě vlákna v nejnižším bodě, tj. (již po vykrácení g)

$$\frac{ml}{3\sqrt{l^2 - \frac{1}{3}a^2}} > \frac{ml}{l^2 - \frac{1}{4}a^2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}a^2} - \sqrt{l^2 - \frac{1}{3}a^2}\right).$$

Po mnoha a mnoha úpravách† dojdeme k rovnici (protože jsem prováděl umocňování obou stran rovnice, je nutné k tomu dodat, že vše platí pouze za předpokladu $a \in \langle 0, \sqrt{3}\cdot l)$).

$$2a^4 - 29l^2a^2 + 68l^4 < 0,$$

která je řešitelná pomocí substituce $q = a^2$ a má kořeny $\pm\frac{1}{2}\sqrt{(29 \pm 3\sqrt{33})}\cdot l$. Chování funkce mimo interval $\langle 0, \sqrt{3}\cdot l)$ nás však nezajímá. Protože je koeficient u nejvyšší mocniny kladný, bude nerovnost splněna pouze na intervalu $(\frac{1}{2}\sqrt{(29 - 3\sqrt{33})}\cdot l, \sqrt{3}\cdot l)$. Hmotnost potom musí být v intervalu

$$\left(\frac{3h_1M_{\max}}{l}, \frac{2h_2^2M_{\max}}{l\,(3h_2 - 2h_1)}\right),$$

kde $M_{\max}$ je společná hodnota maximální nosnosti. Z řešení předchozí rovnice je zřejmé, že první výraz je – pokud je a zvoleno tak, aby existovalo řešení – vždy menší než druhý. *Martin Krsek*

† nad kterými jsem strávil půl dne, než se mi podařilo zeliminovat překlepy v Maplu a chyby na papíře natolik, že vyšel stejný výsledek

Úloha 8 – Dutý válec

Dokud se válec nepohne, můžeme se na něj a na vodu dívat jako na jedno tuhé těleso. Podívejme se tedy, jaké síly na toto těleso působí.

Označme M hmotnost válce a m hmotnost vody uvnitř. Hybnou silou, která se bude snažit válcem posunout na nakloněné rovině, bude tíha $(M+m)\vec{g}$. Dále na soustavu působí normálová reakce podložky $\vec{N}$ a třecí síla $\vec{T}$ (a tlak okolního vzduchu – proč ho nemusíme dále započítávat?). Válec se začne pohybovat v okamžiku, kdy

$$(M+m)g\sin\alpha > T, \tag{1}$$

tj. bude narušena rovnováha sil ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou.

Velikost třecí síly může být maximálně $Mgf\cos\alpha$, kde f je koeficient tření mezi válcem a nakloněnou rovinou. Mezi vodou a nakloněnou rovinou totiž tření nepůsobí (nějakou tu viskozitu lze u vody spolehlivě zanedbat), a proto bereme jenom tu část normálové síly $\vec{N}$, odpovídající válci.

Minimální množství vody, které tedy musíme do válce nalít, aby se začal pohybovat, bude potom určeno rovnicí

$$(M+m_{min})\sin\alpha = Mf\cos\alpha,$$

odkud po úpravě dostaneme výsledek

$$m_{min} = M(f\operatorname{cotg}\alpha - 1), \tag{2}$$

kam ještě můžeme případně dosadit za hmotnost válce $M = \rho_V(R^2 - r^2)H$, kde ρ_V je hustota a H výška válce.

Zamyšlení se nad tím, jak (a jestli) by bylo potřeba tuto úvahu modifikovat, kdyby voda ve válci nezakrývala celé dno válce, necháme pilnému čtenáři.

Pokud se někomu z vás nelíbí, kterak jsme uvažovali válec i s vodou jako jedno tuhé těleso a z normálové síly pak vzali jenom část, můžeme k výsledku (2) dospět i jinak. Uvažujme tedy válec i vodu odděleně a hledejme podmínku, aby se pohnul válec. Na válec působí tíha $M\vec{g}$, normálová reakce podložky $\vec{N}_V$, tření $\vec{T}$ a konečně voda tlakovou silou $\vec{P}$, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, neboť tlak vody (jakožto ideální tekutiny v našem modelu) působí vždy kolmo k povrchu. Na vodu působí tíha $m\vec{g}$, reakce podložky $\vec{N}_{H_2O}$ a reakce $-\vec{P}$ válce. Z podmínky rovnováhy vody ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou dostaneme, že (co do velikosti) $P = mg\sin\alpha$. Takže s válcem se bude snažit pohnout síla o velikosti $Mg\sin\alpha + P = (M+m)g\sin\alpha$. Tření už zde počítáme jenom ze síly $\vec{N}_V$, tudíž nám vyjde opět výsledek (2). *Tomáš*

Úloha 9 – Paradoxon

1. Dvě koule ve vesmíru

   Snažit se zachovávat veličinu $m_1v_1 + m_2v_2 = 2mv$ je samozřejmě nesmysl. Zařízení přitahující koule k sobě koná totiž práci, a tak velikost rychlosti koulí roste. Na soustavu složenou z obou koulí (a příslušného přístroje, který se však nachází na ose rotace, má tedy nulovou hybnost) ale nepůsobí žádná *vnější* síla. Proto se zachovává *vektor* hybnosti $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, tak je to. Zákon zachování hybnosti pro jednu samotnou kouli nemá ovšem smysl uvažovat už proto, že se pohybuje po zakřivené dráze a síla, která ji na této dráze udržuje, neustále mění její hybnost.

2. Deskový kondenzátor

   Voda se mezi desky kondenzátoru nasaje už díky kapilaritě, jak jste mnozí psali, to nám však nestačí. Chceme vědět, proč po přivedení náboje na desky voda vystoupí ještě výš. V běžných učebnicích a sbírkách příkladů pro střední školy lze nalézt následující vysvětlení:

   Když na desky přiložíme náboj Q, bude energie kondenzátoru rovna $Q^2/2C$, přičemž C je kapacita kondenzátoru. Odvození tohoto vztahu vychází z předpokladu, že mezi deskami je homogenní pole a vně kondenzátoru je elektrické pole nulové. Když se voda nasaje do kondenzátoru, zvětší tím jeho kapacitu (vzpomeňte si na známý vzoreček $C = S\varepsilon/d$), čímž se sníží energie kondenzátoru. Musí tedy existovat síla, která vtahuje vodu dovnitř a přitom koná práci — vykonaná práce je pak rovna úbytku energie kondenzátoru. Na druhou stranu je však známo, že molekuly vody (či jiného dielektrika) si lze představit jako malé dipóly a výsledná síla působící na dipól v homogenním poli je nulová, existuje tu jen jakýsi otáčivý moment. Problém tedy byl, odkud se bere ta síla.

   Nuže důvod je v tom, že pole kondenzátoru nemůže být homogenní. Existence homogenního pole jenom v nějaké omezené oblasti prostoru (přičemž jinde by bylo pole nulové) je totiž ve sporu s existencí potenciálu a ten pro elektrostatické pole existuje vždy. O dipólech je také známo, že v nehomogenním poli jsou vtahovány do míst s větší intenzitou pole, proto tedy je voda do kondenzátoru natažena (vtahující síla by měla být největší u okraje desek).

3. Žárovka

   Ve skutečnosti je tento problém velice jednoduchý. Když svítí žárovka baňkou vzhůru, tak vlákno velice rychle ohřívá okolitý plyn (buď je to inertní plyn nebo vzduch s velmi nízkym tlakem). Ten samozřejmě stoupá vzůru, a tedy ohřívá sklo na vrchole baňky. Když otočíme baňku, nic se nezmění, jenom plyn při stoupání ohřívá okolité nosné (skleňené) těleso vlákna. Takže nahoru přijde plyn už částečně ochlazený. Část tepla odvede pata žárovky. Navíc plyn neproudí nahoru tak rychle kvůli viskozitě (Jestli je vevnitř nízký tlak, tak pak tento efekt není velký, molekuly mají střední volnou dráhu tak velkou jako rozměry baňky. Tady se uplatní efekt, že vrch baňky vidíme pod velkým úhlem, přičemž kořen pod mnohem menším. Nevěříte? Podívejte se jak taková baňka vypadá.). Takže nezávisí na tlaku plynu vevnitř, kořen se bude ohřívat méňe než vrchol v obou případech.

Bzučo & Tomáš

Zadání témat 4. série:

7. Chronometr

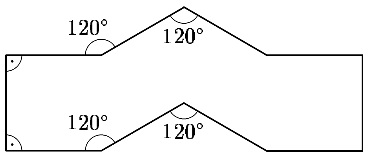
Máte k dispozici dvě zápalné šňůry, pomocí nichž máte odměřit časový interval 3/4 hodiny. Šňůry jsou každá jiná, nehoří rovnoměrně a jediné, co o nich víte, je, že po zapálení každá z nich hoří právě hodinu.

Dále se zkuste zamyslet, jaké jiné časy by šly pomocí těchto dvou (eventuelně více) šňůr odměřit, a to buď přesně, nebo s předem zadanou maximální chybou.

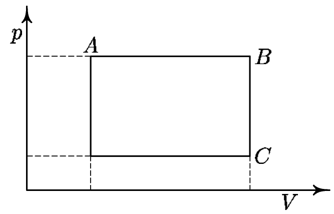
Zadání rekreačních úloh 4. série:

14. Umíte dělit?

Rozdělte obrazec na obr. 1 na sedm tvarově a obsahově stejných částí. Obrazec je symetrický podle svislé osy. Všechny hrany mají jednotkovou délku.



Obr. 1: Umíte dělit?



Obr. 2: Tepelný stroj

15. Tepelný stroj

Spočtěte účinnost a teplo, které je potřeba dodat 1 libře[†] kyslíku konajícího práci podle obr. 2. Cyklus je složen ze dvou izobarických a dvou izochorických dějů, přičemž platí $T_A = T_C = 500\,\mathrm{K}$, $T_B = 800\,\mathrm{K}$, $p_A = 500\,\mathrm{kPa}$.

16. Rychlejší než Porsche

Jakou maximální rychlostí může jet Trabant Combi po silnici z kopce? (Klesání dosahuje maximálně 15%.) Koeficient odporové síly odhadněte! Jestli nevíte, jak toto slavné auto vypadá, nebo kolik má koní, zeptejte se táty.

17. Móóóóc velká čísla

a. Určete všechna čísla, která jsou řešením rovnice $x^x = x!$

b. Zjistěte, zdali je číslo $2^{10} + 5^{12}$ prvočíslem.

c. Najděte všechna permutovatelná prvočísla menší než miliarda.

Permutovatelným prvočíslem je takové prvočíslo, že libovolná permutace jeho číslic je také prvočíslo. Jestliže je nedokážete najít, určete alespoň dolní a horní odhad jejich počtu. Jestliže použijete počítač, pošlete nám váš (co možná nejefektivnější) program na disketě nebo na papíře.

[†] O tom, jak je důležité správně převádět jednotky mezi anglosaským a metrickým systémem, jste se mohli přesvědčit při nedávném „přistání“ sondy Mars Climat Orbiter.

				Témata				Úlohy						
Pořadí	**Jméno**	**Škola**	$\sum_{-1}$	**1**	**4**	**5**	**6**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.–2.	Jiří Klimeš	Jiráskovo G, 2.B	7		3	10	8	4	1		5	0	31	38
	Mgr. Zoltán Mics	G maď. Šahy, 3.	21	7	3					4		3	17	38
3.	Jan Rychmberk Klusoň	G Jiráska, kvinta	3		2	10	5	3				3	23	26
4.	Jan Beneš	Bisk. G, sexta B	5			11	7						18	23
5.–7.	Mgr. Miro Urbánek	GVOZA, 2.B	20										0	20
	Mgr. Pavel Augustinský	G Havířov, 4.	39					4		5			9	20
	Jana Krátka	G Piešťany, 3.	7			6	4		1		2		13	20
8.	Karel Martišek	G Elgart., kvinta	5			7	7						14	19
9.	Bc. Ondřej Plašil	G Chodov., sept.	18										0	18
10.	Bc. Peter Čendula	G M. Hodžu, 3.B	16										0	16
11.–12.	Jiří Tománek	G Hranice, 3.	7						5			2	7	14
	Václav Cviček	G P. Bezruče, 1.	7					4				3	7	14
13.	Hanss Novotný		0		6	3	3						12	12
14.	Jan Chmelař	G Hranice, 1.	5					4			2		6	11
15.	Bc. Martin Rosol		11					4		2			6	10
16.–17.	Bc. Majka Hanzlíková		19										0	9
	Dáša Eisenmannová	G Heyrov., 3.A	4				2				3		5	9
18.	Peter Murárik	G Ľ. Štúra, 2.G	0			4	1					2	7	7
19.	Jiří Novák	G Ledeč n. S., 4.	6										0	6
20.–21.	Klára Maturová		5										0	5
	Martin Troják	GVOZA, 4.B	5										0	5
22.	Lenka Burešová	G Dopplera, 2.	3					4					4	4
23.–24.	Robert Meixner	G Slovan., V.A	2										0	2
	Tomáš Vyskočil		2										0	2
25.	Lada Oberreiterová	G Třebíč, 3.B	9										0	1
26.–27.	Mgr. Tomáš Svatoň	GJKT, 3.A	32										0	0
	Kristýna Forrová	GJKT	0										0	0

Uzávěrka 4. čísla M&M: **23. března 2000**

Adresa redakce:
Tomáš Brauner, A1721
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha Holešovice