M&M Číslo 2 Ročník VI

Ahojky řešitelé,

konečně jste se dočkali! Druhé číslo vašeho oblíbeného časopisu právě vychází. Doufáme, že jste se svými výsledky spokojeni a že nám svou přízeň prokážete posláním dalších svých řešení, na která už nyní dychtivě čekáme.

Vaše snaha bude pozásluze odměněna účastí na zimním soustředění. Již nyní je známo, že se bude konat od 19. do 25. března 2000 na horské chatě ve Studenově u Rokytnice nad Jizerou. Chata leží asi 100 m od horního konce lyžařského vleku. Dostanete tam najíst a napít, dokonce budete mít k dispozici i vlastní postel. Rozmyslete si včas, zda na soustředění budete chtít jet, a dejte nám to vzápětí vědět. V případě nadměrného zájmu totiž budeme nuceni vybrat asi 20 nejlepších řešitelů – takže máte důvod se snažit. Na soustředění budeme vybírat účastnický poplatek ve výši přibližně 500 Kč. Omluvenku do školy vám samozřejmě napíšeme.

Nezbývá než popřát vám hodně štěstí při řešení témat a odpočinkových úloh. Řešte a pište, máte-li zájem o soustředění. Užijte si ve zdraví a spokojenosti vánoce a konec roku.

Za redakci Ř

Téma 1 – Elektron

Miro Urbánek:

Autor uvažuje, že elektron je přitahován oběma deskami stejně. Elektron bude proto přitahován do vrcholu, přičemž se tak stane za čas $t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$, kde a je zrychlení. Autor dále prováděl úpravy tohoto vztahu, ale udělal numerickou chybu, a proto nedošel ke správnému výsledku.

Dále se zabýval otázkou, co se stane v limitním případě $\alpha = 0$. Došel k závěru, že náboj se pohybovat nebude. V praxi to však bude vypadat poněkud jinak, protože náboj se vychýlí vpravo nebo vlevo působením různých rušivých sil. Síla, kterou je přitahován k jedné z desek, bude větší než síla od druhé z desek a elektron spadne na desku, ke které se pohnul.

Zoltán Mics:

Náboj indukuje na jedné z desek takové rozložení hustoty náboje, jako kdyby v poloze osové souměrnosti bodu, ve kterém se nachází náboj, podle desky byl opačný náboj.

Pozn. red. *Uměli byste zdůvodnit, proč je tomu tak?*

Podívejme se nejprve na polohy těchto „obrazných" nábojů. Samozřejmě všechny se nacházejí na kružnici se středem v průsečnici desek† a poloměrem d. Dále můžeme zjistit, že jsou symetrické podle osy úhlu α. Jednoduchým výpočtem můžeme zjistit, že když vytvoříme obrazy jenom v jednom směru (např. vpravo), tak sousední obrazy svírají vždy úhel α. Tedy počet obrazných nábojů je $\frac{360^\circ}{\alpha} - 1$.

Pozn. red. *když např. $\frac{360^\circ}{\alpha}$ je iracionální, pak obrazů je nekonečně mnoho a celý postup selhává – zřejmě tento postup není zcela korektní. Je nutné mít $\frac{360^\circ}{\alpha}$ sudé celé číslo.*

Teď vypočteme sílu, která působí na elektron. Obrazy vytvořme jen v jednom směru a počítejme s průmětem síly do přímky e^-S (kolmé komponenty se kvůli symetrii navzájem odečtou a dají nulu). Výslednici potom dostaneme tak, že výsledek vynásobíme dvěma. Druhá strana působí na elektron stejnou silou. Protože známe všechny úhly O_nSe^-, kde O_n je jeden z obrazů, můžeme vypočítat vzdálenost a sílu:

$$F_n = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{ke^2}{2d^2(1-\cos n\alpha)} \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{n\alpha}{2}\right) \cdot (-1)^n. \tag{1}$$

Součtem všech sil dostáváme:

$$F = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\frac{z}{2}} \frac{(-1)^n ke^2}{2d^2(1-\cos n\alpha)} \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{n\alpha}{2}\right) = \frac{ke^2}{d^2} \sum_{n=1}^{z/2} \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{n\alpha}{2}\right)}{1-\cos n\alpha} \cdot (-1)^n, \tag{2}$$

$$F = \frac{ke^2}{d^2} \cdot C. \tag{3}$$

Pozn. red. *Domníváme se, že opět bude problém spočítat celkovou sumu, když α bude iracionální; navíc si myslíme, že autor udělal chybu v úpravách — jste stejného názoru?*

Čas pádu kuličky do vrcholu:

Tvar síly je podobný gravitační síle. Podle toho si definujme kinetickou i potenciální energii, jejich součet je konstanta. Můžeme tedy psát:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{C \cdot Q^2}{d} = -\frac{C \cdot Q^2}{d_0}, \tag{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{2CQ^2}{m_e}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0}\right)}. \tag{5}$$

† Pozn. red.: autor řešil dvourozměrný problém

Čas pádu je potom:

$$T = \sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2d}{\left(\frac{CQ^2}{{d_0}^2 m_e}\right)}} = \frac{d_0}{Q} \cdot \sqrt{\frac{2dm_e}{C}}. \tag{6}$$

Co ještě zbývá udělat? Např. třeba zdůvodnit, proč můžeme počítat s existencí „virtuálních“ nábojů. Dále se pokusit spočíst konstantu C pro některé úhly, např. 180°, nebo 90°. Navíc stále není spočtena síla pro většinu úhlů. Jak bude vypadat graf závislosti času pádu na úhlu α?

Dále tvrdíme, že náboj Q se bude sice pohybovat po přímce směrem k vrcholu, ale elektron se tam pohybovat nemusí, elektron může také padnout na jednu z desek. Pokuste se zdůvodnit, proč nepadne do vrcholu, ale vybere si jednu desku. Není porušen princip symetrie? *Bzučo & Štěpka*

Téma 2 – Sportka

Jan Beneš: O náhodě a pravděpodobnosti

Pozn. *Článek je v původním znění.*

$$\binom{n}{k} = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

Jestliže budeme chtít zjistit, kolik tiketů budeme muset vsadit, abychom určitě uhodli alespoň tři vylosovaná čísla, potom si nejprve budeme muset spočítat, kolika způsoby lze ze 49 čísel vylosovat 6 z nich. Jedná se o kombinaci 6. třídy ze 49 prvků, tedy kdybychom chtěli získat výhru v prvním pořadí s naprostou jistotou, museli bychom vsadit 13983816 sázenek. Jen pro představu: vyplňování sázenek by nám trvalo přibližně 230 000 hodin, tj. asi 80 let, jestliže bychom sázenky vyplňovali každý den[1].

Nyní se zamysleme nad pravděpodobností výhry v prvém pořadí. Pro náš případ můžeme použít klasickou definici pravděpodobnosti tak, jak ji vyslovil francouzský matematik *Pierre Simon Laplace (1749-1827)* v poněkud přesnějším znění:

Def. *Pravděpodobnost $Pr(A)$ náhodného jevu A je*

$$Pr(A) = \frac{a}{n},$$

kde a je počet všech příznivých případů jevu A a n je počet všech možných případů jevu A, přičemž předpokládáme, že všechny jevy jsou stejně možné.

Uvědomíme-li si, že ze všech šestic vyhrává jen jedna z nich, a my sázíme právě jednu sázenku, potom pravděpodobnost výhry v prvním pořadí je rovna

$$P(6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0.0000000715.$$

[1] pozn. redakce: Autor počítá s vyplňováním jedné sázenky za jednu minutu.

Nyní se zabývejme pravděpodobností výhry v dalších pořadích. Uvědomíme-li si, že například k výhře ve třetím pořadí musíme uhodnout 5 čísel ze 6 vylosovaných čísel, což představuje

$$\binom{k}{k-1} = \binom{6}{5}$$

možností, a jedno ze zbývajících $n - k = 49 - 6 = 43$ čísel, což představuje

$$\binom{n-k}{1} = \binom{43}{1}$$

možností, pak pravděpodobnost výhry ve třetím pořadí[2] můžeme vypočítat postupem

$$P(5) = P(k-1) = \frac{\binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = 0.000018.$$

Jestliže nám stačí uhodnout právě tři čísla ze šesti vylosovaných, potom pravděpodobnost vypočítáme analogickým způsobem:

$$P(3) = P(k-3) = \frac{\binom{k}{k-3}\binom{n-k}{3}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765.$$

Nyní nám zbývá zodpovědět otázku, kolik tiketů budeme potřebovat. K tomu použijeme přímou úměrnost[3]. Jestliže podáme 1 tiket, potom pravděpodobnost uhodnutí alespoň 3 čísel je rovna P(3). Ptáme se, kolik tiketů musíme podat, aby pravděpodobnost byla 1, tedy šlo o jistý jev.

$$x(3) = \frac{1}{P(3)} = \frac{\binom{49}{6}}{\binom{6}{3}\binom{43}{3}} = 56.66.$$

Budeme muset podat 57 tiketů[4].

Nyní uvažujme o obecném případu: Losuje se k čísel z n a naším úkolem je určit počet tiketů T, jestliže chceme mít jistotu, že uhodneme právě p čísel. Samozřejmě platí $p < k < n$.

$$x(p) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{k}{p}\binom{n-k}{k-p}}.$$

Samozřejmě budeme zaokrouhlovat na nejbližší vyšší číslo.

---

[2] pozn. redakce: Jedná se o pravděpodobnost uhodnutí právě pěti čísel , tedy není započítán případ uhodnutí všech šesti čísel.

[3] pozn. redakce: Přímou úměrnost nelze použít, protože nejde o disjunktní jevy, tj. trojice, které pokryjeme několika sázenkami, se mohou překrývat. Od tohoto místa se tedy výsledky odchylují od skutečnosti.

[4] pozn. redakce: Což tedy není pravda.

Jiří Klimeš, Jiří Novák: Řešení pomocí trojic

Pozn. *Článek je upraven redakcí.*

Všech možných trojic vylosovaných čísel je $\binom{49}{3}$. Ze šesti čísel na jednom tiketu vznikne $\binom{6}{3}$ trojic. Pokud čísla na tiketech tvoří všech $\binom{49}{3}$ trojic, pak je stoprocentní pravděpodobnost výhry pátých cen. Pokud vynecháme $\binom{6}{3} - 1$ trojic, je jistá alespoň jedna pátá cena. Čísla na tiketech musí vytvořit alespoň $\binom{49}{3} - \binom{6}{3} + 1$ trojic. Počet tiketů zjistíme tedy jako podíl počtu trojic a počtu trojic pokrytých jedním tiketem.

Výsledek je vždy nutné zaokrouhlit nahoru, v tomto případě na 921[5].

Na toto téma reagovalo velmi málo čtenářů. Příspěvky se většinou zabývaly odhadem počtu potřebných tiketů, ale neukazovaly algoritmus vyplnění tiketů. A bez popisu toho, jak tikety vyplnit, je těžké říci, zda odhad je správný či ne. Proto toto téma necháváme otevřené pro vaše příspěvky i do dalších sérií.

Miro Urbánek: Jiný způsob

Pozn. *Článek je v původním znění.*

Při sportce se losuje 6 čísel. Na výhru potřebujeme 3 čísla ze 6. Počet možností, které na jeden tiket můžeme uhádnout, je 20. Když však budeme zaškrtávat více tiketů, mohou nastat možnosti, které jsme už zaškrtali. Abychom se zbavili těchto nadbytečných zaškrtání, při zaškrtávání dalšího tiketu jedno z předchozích čísel ubereme a přidáme jedno nové. Takto si pomocí 49 tiketů zajistíme $\binom{6}{3} + 48\binom{5}{2}$ trojic.

Celkový počet tiketů je tedy[6]

$$49\frac{\binom{49}{3}}{\binom{6}{3} + 48\binom{5}{2}}.$$

[5] pozn. redakce: *Jiří Klimeš* ve svém příspěvku upozorňuje, že zde také není zaručeno, že všechny možné trojice budou pokryty oněmi 921 tikety. V praxi prý bude počet tiketů o trochu vyšší.

[6] Pozn. redakce: Autor bohužel neuvedl postup, jak přejít od oněch 49 tiketů k celkovému počtu.

Tomáš Vyskočil: Ještě jiný způsob

Pozn. *Původní znění.*

Všech možných tiketů je $\binom{49}{6}$. Při jednom tahu vyhrává $\binom{6}{3}$ různých trojic třetí pořadí. Proto když vsadíme $\binom{49}{6} - \binom{6}{3} + 1$ různých tiketů, máme zaručenu výhru[7]. *Aleš*

Téma 3 – Gramatiky

Vzorové řešení. Začneme od nejjednodušších.

(c) $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S\}$, $T = \{a, b, c\}$, $P = \{S \to aSa, S \to bSb, S \to cSc, S \to e\}$.

Poznámka. Často jste zapomínali magické $S \to e$ (bez toho gramatika **nefunguje**), zdůvodňovat toto řešení není třeba – alespoň doufám, že je to všem jasné.

(d) $G = (N, T, P, A)$, $N = \{A, B, C\}$, $T = \{0, 1\}$, $P = \{A \to e, A \to 0A, A \to 1B, B \to 0C, B \to 1A, C \to 0B, C \to 1C\}$.

Poznámka. Tento příklad vyřešil jediný člověk a ten ho bohužel nezdůvodnil, takže to zůstalo na mně:

- význam neterminálů A, B, C je zbytek po dělení třemi – tzv. zbytková třída ($A = 0$, $B = 1, C = 2$),
- nyní se ptáme, co se stane, když máme číslo dělitelné třemi (tj. zbytek po dělení je 0, tzn. neterminál A) zapsané ve dvojkové soustavě a „přijde" nám cifra 0?

  Kdo tomu moc nerozumí, nechť si laskavě představí analogicky desítkovou soustavu, tam by to znamenalo, že na konec čísla dělitelného třemi chcete přilepit cifru 0 – tj. číslo budiž x, a přilepení nuly na konec je: $10x + 0$ (tedy zbytek po dělení třemi je opět 0 – vycházíme totiž z toho, že zbytek po dělení třemi čísla x je 0); přilepení jedničky za x je: $10x + 1$ (tedy zbytek po dělení třemi je 1).
- převedeno do dvojkové soustavy: když za A přilepím 0, zůstanu v A: totiž x buď číslo dělitelné třemi (protože začínáme v A), vynásobíme ho 2 (jsme ve dvojkové a ne v desítkové soustavě) a k výsledku přičteme 0 (za číslo lepíme 0).

  Pro méně chápavé ještě zdůvodníme třeba $C \to 0B$: Jsme v C. To znamená, že máme číslo dělitelné třemi se zbytkem 2 (tj. $x = 3k + 2$). Za toto číslo lepíme 0 a ptáme se: jaký bude výsledný zbytek po dělení 3, je-li číslo zapsáno ve dvojkové soustavě? Tedy jaký je zbytek $2x + 0$ (to je zápis „přilepení" 0 za x)?

  Tak si to rozepíšeme: $2x + 0 = 2x = 2(3k + 2) = 6k + 4 = 3(2k + 1) + 1$, tedy zbytek po dělení třemi bude 1, tedy B a proto je tam to B v $C \to 0B$.

[7] Pozn. redakce: Zde je postup vyplňování a jeho správnost nasnadě, ale celkový počet tiketů je velmi velkorysý.

(a) $G = (\mathrm{N}, \mathrm{T}, \mathrm{P}, \mathrm{Vyraz})$,
$N = \{\mathrm{D}, \mathrm{Cislo}, \mathrm{Nenulove}, \mathrm{Operace}, \mathrm{Vyraz}\}$,
$T = \{0, 1, \ldots, 9, +, -, \cdot, /, (,)\}$,
$P = \{$

D → e,	nejprve si vytvoříme čísla – spousta z vás zapomněla, že 0007 není číslo
D → 0D,	D má význam posloupnosti (i prázdné) cifer 0–9
D → 1D,	
D → 2D,	
⋮	
D → 8D,	
D → 9D,	
Nenulove → 1D,	Nenulove má význam nenulového čísla
Nenulove → 2D,	
⋮	
Nenulove → 9D,	
Cislo → 0,	Cislo má význam přirozeného čísla, tedy i s nulou
Cislo → Nenulove,	
Operace → +,	Operace má význam +,-,* (/ bude zvlášť, abychom nedělili nulou)
Operace → −,	
Operace → ·,	
Vyraz → Cislo,	zde alespoň částečně zachytíme, abychom nedělili nulou
Vyraz → (Vyraz),	

Vyraz → Vyraz Operace Vyraz,
Vyraz → Vyraz/Nenulove,
Vyraz → Vyraz/(Vyraz).
}

Poznámka. Zkuste se nad uvedeným řešením zamyslet a srovnat ho s vaším, případně opravit nebo vylepšit. Můžete se pokusit odstranit třeba i: $7/(1-1)$ nebo $1-((2))\ldots$

Pokračování v tématu

Můžete zkusit řešit libovolné příklady a variace, předkládám zde některé náměty:

1. a^n (tj. n a-ček za sebou),
2. a^{2n} (tj. sudý počet a-ček),
3. a^{2n+1} (tj. lichý počet a-ček),
4. $a^n b^m$ (tj. několik a-ček a pak několik b-ček, třeba: e, aaa, bbb, aab, aaaaabbb),
5. $a^i b^j c^k$,
6. $a^n b^m c^n$,
7. $a^n b^m c^{n+m}$,
8. $a^n b^m c^n d^m$,
9. slova nad abecedou $\{a, b\}$ taková, která mají počet a-ček dělitelný třemi,
10. čísla ve trojkové soustavě dělitelná 5,
11. čísla ve trojkové soustavě, která mají po dělení 4 zbytek 3,
12. palindromy nad abecedou $\{a, b\}$ (tj. slova, která se čtou stejně popředu i pozpátku).

Poznámka. Pokud vám to půjde, můžete se těšit na bezkontextové gramatiky (a s těmi se dají dělat daleko zajímavější věci). *Ziki*

Úloha 1 – Dve guľôčky

Tenhle příklad vám měl ukázat, že někdy příklady, jaké najdete v školské sbírce, jsou řešené velice zjednodušeně a špatně.

Řešení podle sbírky:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varkappa\left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)^2}{r^2} \Longrightarrow R = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\rho^2\varkappa\varepsilon_0}} \tag{1}$$

Tenhle výsledek je ale **špatný!**

Proč? Protože gravitační síla má působiště ve středu kuliček, ale elektrická síla, kterou se odpuzují elektrony, ne! Elektrony vlivem odpudivé síly zaujmou místa na protějších koncích koulí. Vevnitř koule se mohou totiž volně pohybovat, koule není elektricky nabitá. Elektrony zůstanou na povrchu, podobně jako zůstávají na povrchu balónku, když ho třeme. Elektrony při povrchu odpuzují elektrony vázané kolem jader, čímž vzniká lokální zhuštění kladného náboje, a ten přitahuje elektrony.

Tento fakt podstatně mění řešení.

Platí tedy :

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,(r+2R)^2} = \frac{\varkappa\left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)^2}{r^2} \tag{2}$$

$$\frac{9e^2}{64\pi^3\rho^2\varkappa\varepsilon_0} = R^6\left(1+\frac{2R}{r}\right)^2 = R^6\varphi^2 \tag{3}$$

Vidíme, že na vyřešení tohoto příkladu nám nestačí jedna rovnice. R je funkcí vzdálenosti r. Všimněme si ale pravé strany rovnice (3). Víme, že r může být v intervalu $(2R, \infty)$. Když $r = 2R$, potom $\frac{2R}{r} = 1$, když $r \to \infty$, potom $\frac{2R}{r} \to 0$. $(1 + \frac{2R}{r})$ je hyperbola s asymptotou přímce $x = 1$, může tedy mít hodnoty v intervalu $(1, 2)$.

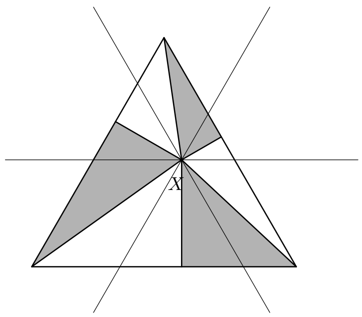
Jestliže rovnici (3) napíšeme ve tvaru

$$R = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\rho^2\varkappa\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\varphi}} = \frac{A}{\sqrt[3]{\varphi}}, \tag{4}$$

tak vidíme, že R může dosahovat hodnoty $\left(A, \frac{A}{\sqrt[3]{2}}\right)$, tedy $R = (3.45 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}$m. Za hustotu ρ jsem bral hustotu železa $\rho = 7800\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. Ejhle, někdy i rovnice o dvou neznámých má (téměř) jednoznačné řešení. R kolísá v našem případě jenom o 13%, přičemž kuličky mohou být libovolně daleko.

Bzučo & Štěpka

Úloha 2 – Trojúhelník

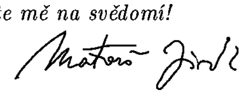


Správné řešení je zřejmé z obrázku. Bodem X vedeme rovnoběžky s jednotlivými stranami trojúhelníku. Trojúhelník tím rozdělíme na 6 částí. Zbytek důkazu je zřejmý.

S vašimi řešeními jsem příliš spokojen nebyl, jak ostatně dokládá následující báseň.

Hody hody doprovody,
kdo dostane 4 body ?
Málokdo: spousta řešení
byla tak zcela mimo mísu,
že vzav si brýle na čtení,
zíral jsem jako na tenisu,
jak po půlstraně v boji tuhém
úporně vzniká důkaz kruhem . . .

Důkaz se točí dokolečka
jak plný soudek, jako bečka.
V zoufalství pěnivý ten lék
zvolil jsem si za společníka
při čtení strašných těch myšlenek
– než jsem je hodil do nočníka.
Důkazy kruhem! Blesky! Hromy!
Lidičky, máte mě na svědomí!



Úloha 3 – Eliptický kulečník

Na obvodu elipsy náhodně zvolíme bod $[x_1, y_1]$ a spojíme ho s oběma ohnisky o souřadnicích $[-e, 0]$ a $[e, 0]$ (předpokládáme počátek souřadnicové soustavy uprostřed elipsy). Pak tedy směrové vektory těchto dvou úseček jsou $(x_1 - e, y_1)$ a $(x_1 + e, y_1)$. Rovnice tečny k elipse v bodě $[x_1, y_1]$ má tvar $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$, a vektor normály k elipse je v tom případě $\left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2}\right)$.

Pro úhel mezi dvěma vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ obecně platí:

$$\alpha = \arccos \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

V našem případě položíme rovny velikosti úhlů mezi normálou k elipse a oběma úsečkami spojujícími bod $[x_1, y_1]$ s ohnisky:

$$\arccos \frac{\frac{x_1}{a^2}(x_1 - e) + \frac{y_1^2}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\left((x_1 - e)^2 + y_1^2\right)}} = \arccos \frac{\frac{x_1}{a^2}(x_1 + e) + \frac{y_1^2}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\left((x_1 + e)^2 + y_1^2\right)}}.$$

Jelikož je arccos funkce sudá, lze psát

$$\left| \frac{\frac{x_1}{a^2}(x_1 - e) + \frac{y_1^2}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\left((x_1 - e)^2 + y_1^2\right)}} \right| = \left| \frac{\frac{x_1}{a^2}(x_1 + e) + \frac{y_1^2}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\left((x_1 + e)^2 + y_1^2\right)}} \right|,$$

a tedy

$$\left(\frac{\frac{x_1}{a^2}(x_1 - e) + \frac{y_1^2}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\left((x_1 - e)^2 + y_1^2\right)}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{x_1}{a^2}(x_1 + e) + \frac{y_1^2}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\left((x_1 + e)^2 + y_1^2\right)}} \right)^2.$$

Zlomky po roznásobení převedeme na jednu stranu, převedeme na společného jmenovatele a čitatele položíme rovna 0. Tedy

$$\frac{y_1^2}{b^2} 4x_1 e - \frac{x_1^2 y_1^2}{a^4} 4x_1 e + \frac{x_1 y_1^2}{a^2 b^2} 4(x_1^2 - e^2)^2 e - \frac{x_1 y_1^4}{a^2 b^2} 4e = 0.$$

Po krácení a dosazení $a^2 = b^2 + e^2$ dostaneme rovnici elipsy

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Pozn. To byl matematický postup. Teď ještě něco k jeho obhajobě: Někteří z vás psali, že danou vlastnost dokážeme pomocí věty někde vyčtené, která přímo říká, že tečna k elipse půlí vnější úhel mezi spojnicemi bodů dotyků s ohnisky. Bohužel nepochopili, že právě tuto větu mají dokázat.

Jiní zase zadefinovali elipsu, pak zákon lomu, a pak jim zpětně vyšlo, že to je elipsa, čímž vlastně dokázali jen to, že ve svých výpočtech neudělali chybu.

Nyní se tedy pokusím obhájit svůj postup: Nejdřív zadefinuju bod, ten se může nacházet kdekoli. Potom vedu tímto bodem přímku (jakoukoli, protože koeficinty a a b nikde určeny nejsou). Potom zadám podmínku zákona odrazu (stejné úhly mezi již zmíněnou přímkou a úsečkami spojujícími tento bod se dvěma jinými, o nichž vím jen to, že leží na ose x stejně daleko od počátku) a dostanu rovnici křivky, pro kterou toto platí – má 3 parametry: a, b a e. Elipsa má parametry pouze dva, takže musím jeden z nich eliminovat, a to rovnicí (platnou pro elipsu) $e^2 = a^2 - b^2$. Jako výsledek mi vyjde rovnice elipsy pro dva parametry tak, jak ji známe. *Ivana*

Mgr. Pavel Augustinský:

Jestliže platí rovnost úhlů $\alpha = \beta$ (zákon odrazu), platí i $\sin\alpha = \sin\beta$, což lze napsat jako

$$\frac{|A_1F_1|}{|PF_1|} = \frac{|A_2F_2|}{|PF_2|}.$$

Jestliže bod P má souřadnice $[x_0, y_0]$, pak tečna elipsy v tomto bodě má rovnici

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

Vzdálenost bodu $A[x_A, y_A]$ od přímky $ax + bx + c = 0$ je obecně

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Konkrétně budeme uvažovat vzdálenost bodů A_1, A_2 od tečny k elipse. Nyní si poměr

$$\frac{|A_1F_1|}{|PF_1|} = \frac{|A_2F_2|}{|PF_2|}$$

přepíšeme jako

$$\frac{\left|-\frac{x_0e}{a^2} - 1\right| / \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{(x_0 + e)^2 + y_0^2}} = \frac{\left|\frac{x_0e}{a^2} - 1\right| / \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{(x_0 - e)^2 + y_0^2}}.$$

Po úpravách tedy

$$\frac{2x_0e/a^2}{2x_0e} = \frac{-2x_0e/a^2}{-2x_0e}.$$

Výrazy jsou identické, čímž jsme dokázali, že tečna k elipse půlí vnější úhel obou průvodičů daného bodu na obvodu elipsy.

Jiné řešení:

Dokážeme požadovanou vlastnost elipsy pouze geometrickými prostředky. Zvolme na elipse libovolný bod X a veďme jím přímku t, která půlí vnější úhel spojnice bodu X s ohnisky elipsy. Máme tedy dokázat, že přímka t je tečnou elipsy, tj. že s ní má společný jediný bod, a to právě bod X.

Sestrojme obraz F_2' ohniska F_2 v osové souměrnosti podle přímky t (kreslete si obrázek!). Zřejmě X leží na přímce F_1F_2' a pro libovolný bod Y na přímce t platí

$$|F_2Y| = |F_2'Y|.$$

Nechť takový bod Y, různý od X, leží také na elipse (pro spor). Potom podle definice elipsy je

$$|F_1Y| + |F_2Y| = |F_1X| + |F_2X| = |F_1X| + |F_2'X| = |F_1F_2'|.$$

Zároveň ale podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$|F_1Y| + |F_2Y| = |F_1Y| + |F_2'Y| > |F_1F_2'|,$$

což je spor a požadované tvrzení je dokázáno. *Tomáš*

Úloha 4 – Odpor vzduchu

Jestliže vyhodíme např. kámen směrem vzhůru, působí proti pohybu odporová síla a síla gravitační. Kámen musí vždycky konat práci proti odporové síle. Uvažujme místo vzdálené h od vrcholu. Zřejmě platí:

$$\frac{1}{2}mv_\uparrow^2 = \frac{1}{2}mv_\downarrow^2 - W_{odp.}, \tag{1}$$

kde $W_{odp.}$ je práce konaná odporovými silami. Tato práce je záporná, ve skutečnosti práci koná kámen, který rozráží vzduch. Rovnici (1) si upravíme na tvar

$$\frac{-2W_{odp.}}{m} = v_\uparrow^2 - v_\downarrow^2 \Longrightarrow v_\uparrow^2 > v_\downarrow^2. \tag{2}$$

Tenhle vztah platí pro libovolnou výšku h, tedy pro libovolnou výšku h platí, že rychlost směrem nahoru je větší než rychlost směrem dolů. Průměrná rychlost směrem nahoru je tedy určitě větší než průměrná rychlost směrem dolů. Platí tedy:

$$H = \overline{v_\uparrow} \cdot t_\uparrow = \overline{v_\downarrow} \cdot t_\downarrow \Longrightarrow \frac{\overline{v_\uparrow}}{\overline{v_\downarrow}} = \frac{t_\downarrow}{t_\uparrow} > 1, \tag{3}$$

kde $\overline{v_\uparrow}$, $\overline{v_\downarrow}$ jsou průměrné rychlosti. Tedy kámen letící směrem vzhůru dosáhne nejvššího bodu za kratší čas, než za jaký spadne z nejvyššího bodu dolů. Zajímavé je, že tento výsledek nezávisí na tvaru odporové síly, čili vztah pro odporovou sílu může být jakýkoli. Jedinou podmínkou je, aby odporová síla nekonala práci (např. aby nefoukal vítr kolmo vzhůru). *Bzučo & Štěpka*

Opakování zadání témat 2. série:

4. Čajové lístky

   Jestliže si doma vaříváte bylinkový čaj, určitě jste si všimli jedné zajímavé věci. Když zamícháte šálek s čajem lžičkou, čajové lístky usazené na dně se začnou hromadit ve středu. Zřejmě hustota těchto lístečků je větší než hustota vody (jinak by lístečky plavaly na hladině). Odstředivá síla by je měla posouvat ke krajům. Experimentálně prozkoumejte a kvalitativně vysvětlete tento jev (tj. vysvětelete proč tomu tak je).

   Poznámka: Při zkoumání tohoto problému kráčíte po stopách Alberta Einsteina, který se svého času touto problematikou také zabýval.

   Experiment: Nám se při zkoumání osvědčila velice jednoduchá „aparatura“. Vemte si zavařovací sklenici a vylouhovaný sáček čaje. Zavařovací sklenici ponořte do větší nádoby naplněné vodou, tak aby v ní nebyl žádný vzduch. Sáček roztrhněte ve sklenici (pod vodou) a sklenici zavíčkujte (též pod vodou). Měli byste tedy mít sklenici bez vduchu! Se vzduchem se experiment chová jinak! Část zrníček by měla zůstat na dně a část by měla vyplavat pod víčko (a zde je právě důležité aby tam nebyl vůbec žádný vzduch). Sklenici stačí již jen roztočit a pozorovat.

5. Hodiny

   Určitě jste někdy viděli hodiny na věži. My rozhodně ano. Některé mají dokonce ručičky! A o těch s ručičkami bude teďka řeč. Naše hodiny mají i vteřinovou ručičku! A dokonce i někdy ukazují správný čas.

   (i) Kdy budou vrcholy ručiček tvořit rovnostranný trojúhelník? Uvažujte tyto případy:

      (a) všechny ručičky jsou stejně dlouhé,
      (b) ručičky mohou být různě dlouhé.

   (ii) Kolikrát za 12 hodin se všechny tři ručičky vyskytnou ve výseči velikosti α? A jak dlouho v tomto stavu setrvají? Jako rozcvičku si spočítejte, kolikrát se všechny tři ručičky vyskytnou ve výseči velikosti 0 (tj. kolikrát se překryjí).

   (iii) Všimli jsme si, že nám po ručičce leze moucha. Po jaké dráze se pohybuje, pokud leze po ručičce rovnoměrně?

   (iv) Experimentální úloha: Najděte doma hodiny, které mají uvnitř pružinu. Upevněte je na provázek a nechte je kývat. Jak se potom změní chod hodin? Budou se zpožďovat nebo předbíhat?

   Poznámka: Teoretické řešení je podle nás téměř nemožné.

   (v) V Dědově mají dokonce dvoje hodiny. Jedny na kostele a druhé na MNV. My je však nevidíme oboje naráz. Cesta od jedněch k druhým trvá (na vteřinu) přesně 10 minut. Tyto hodiny ale bohužel nemají vteřinovou ručičku a navíc jdou špatně. Víme, že se kostelní hodiny předbíhají, maximálně však o 10 minut. Na MNV se hodiny naopak zpožďují a to za

      (a) maximálně o 10 minut,
      (b) maximálně o 5 minut.

   Popište způsob, jak si v Dědově podle těchto dvou hodin nařídit vlastní hodinky co nejpřesněji. Zkuste také určit pravděpodobnost, že budete mít přesný čas.

(c) Řešte tuto úlohu obecně, kdy se hodiny rozchází s přesným časem o m, n minut ($m, n \in Z$).

6. Herní strategie

V tomto tématu se budeme zabývat hledáním způsobů, jak zvítězit v nějaké hře. Cílem je zjistit, zda může některý z hráčů pokaždé zvítězit (tj. protivník mu v tom nemůže nikterak zabránit). Pokud ano, nejděte způsob, jak má hráč hrát, aby vždy vyhrál. (Tomu se odborně říká nalezení vítězné strategie, případně neprohrávající strategie – tedy hráč určitě vyhraje nebo remizuje.)

(i) Piškvorky

Pokuste se najít vítěznou nebo alespoň neprohrávající strategii pro hru piškvorky. Hraje se na poli $n \times m$ a vítězí ten hráč, který bude mít v řádce, sloupci nebo diagonále p piškvorek. Na rozcvičku si zkuste najít strategii pro pole 3×3 a 4×4. Úlohu si samozřejmě můžete také navíc modifikovat (např. vyhrává ten, kdo má v řádce nebo sloupci p piškvorek – tj. zapomínáme na diagonálu, nebo můžete položit $n = m = p$ atd.).

(ii) Odebírání číslic

S přítelem hrajeme následující hru: máme sadu číslic 0 až 9 a na střídačku z ní odebíráme libovolnou cifru (vždy právě jednu!). Vyhrává ten, kdo má mezi svými číslicemi trojici, která dává součet 15. Úlohu si můžete modifikovat tak, že vypustíte číslici 0, anebo součet 15 může být tvořen libovolným počtem číslic.

(iii) Odebírání sirek (NIM)

S jiným přítelem hrajeme zase jinou hru:

(a) máme hromádku sirek. Z hromádky na střídačku odebíráme 1, 2 nebo 3 sirky. Prohrává ten, kdo nemůže vzít z hromádky žádnou sirku. Pokuste se úlohu zobecnit pro n sirek, s tím že můžete odebrat vždy $1, 2, \ldots, k$ sirek.

(b) máme dvě hromádky sirek a můžeme z jedné z nich brát libovolný počet sirek, nebo z obou naráz stejný počet sirek. Vyhrává ten, kdo nemůže vzít žádnou sirku.

(c) máme jednu hromádku sirek. Odebíráme mocniny dvou (tj. $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$) a prohrává ten, kdo nemá co vzít.

(d) zkuste si hru (a) modifikovat buď pro více hromádek sirek nebo pro odebírání nikoliv 1–3 sirek, ale $2, 3, 5$ sirek. Případně zkuste libovolné jejich kombinace a další variace na toto téma.

Zadání rekreačních úloh 3. série:

10. Top secret (5b)

    Máme 2 kontinenty oddělené mořem. Potřebujeme předat balíček s tajnou šifrou, pričemž máme libovolně mnoho stíhaček. Každá stíhačka má palivo na 1/2 cesty. Můžou si předávat palivo během letu, ale nemůžou po cestě nikde přistát. Kolik potřebujeme nejméně stíhaček, aby alespoň 1 z nich doletěla na cizí kontinent s depeší a aby všechny stíhačky **všechny** někde v pořádku přistáli?

11. Šach-mat! (3b, 4b)

    Je možné vyskládat šachovnici rozměru 8×8 kostičkami 2×1, pokud jsou ořízlé 2 protilehlé rohy?

    Jde inverzemi (t.j. výměnou bílé farby za černou a naopak) podél libovolných vodorovných, svislých a uhlopříčných linek „vybílit“ šachovnice rozměru 4×4, která má jenom jedno rohové pole černé?

12. Zmes (6b)

    Zoberme dva veľmi jemné dielektrické púdre alebo prášky. Prvý nech má permitivitu ε_1, druhý ε_2. Aká bude výsledná permitivita, ak majú v zmesi v objemové koncentrácie n_1,n_2? Predpokladajte, že spomedzi dielektrík bol vytlačený všetok vzduch.

13. V podstatě je všechno relativní… (5b)

    Podle všeobecné teorie relativity platí, že jestliže dvě tělesa obíhají okolo společného těžiště s uhlovou rychlostí ω, potom výkon, kterým září na gravitačních vlnách, je roven $P = \frac{13}{2}\frac{\kappa}{c^5}I^2\omega^6$ (I je moment setrvačnosti soustavy vzhledem k těžišti). Pak ale musí ze systému vyzařovat gravitační energie. Má význam zavést něco jako *gravitační* třecí sílu, která je definována jako vyzářená energie na jednotku dráhy. Určete, jak takováhle třecí síla závisí na

    (a) čase,

    (b) vzdálenosti těles.

    Pokuste se navrhnout takový systém dvou těles, ve kterém by byl tento efekt měřitelný.

Pozn. *Body jsou pouze orientační, můžou se ještě mírně změnit.*

				Témata			Úlohy						
Pořadí	**Jméno**	**Škola**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**4**	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Zoltán Mics	G maď. Šahy, 3.	0	14			2			5		21	21
2.	Miro Urbánek	GVOZA, 2.B	0	6	3	3	3			5		20	20
3.	Ondřej Plašil	G Chodov., sept.	0	3		7	2	2		4		18	18
4.	Peter Čendula	G M. Hodžu, 3.B	0				2	4	6	4		16	16
5.	Mgr. Pavel Augustinský	G Havířov, 4.	28						6	5		11	11
6.	Bc. Majka Hanzlíková		10			4					5	9	9
7.–10.	Jiří Tománek	G Hranice, 3.	0				2		5			7	7
	Jiří Klimeš	Jiráskovo G, 2.B	0		5	2						7	7
	Václav Cviček	G P. Bezruče, 1.	0				2		5	0		7	7
	Jana Krátka	G Piešťany, 3.	0				2	0	0	5		7	7
11.	Jiří Novák	G Ledeč n. S., 4.	0		3	3						6	6
12.–16.	Klára Maturová		0								5	5	5
	Jan Chmelař	G Hranice, 1.	0		2				1	2		5	5
	Martin Troják	GVOZA, 4.B	0				5					5	5
	Jan Beneš	Bisk. G, sexta B	0		5							5	5
	Karel Martišek	G Elgart., kvinta	0			5		0				5	5
17.–18.	Martin Rosol		7			4						4	4
	Dáša Eisenmannová	G Heyrov., 3.A	0				2	0		2		4	4
19.	Jan Rychmberk Klusoň	G Jiráska, kvinta	0			1	2	0		0		3	3
20.–21.	Tomáš Vyskočil		0		2							2	2
	Robert Meixner	G Slovan., V.A	0				2	0	0	0		2	2
22.	Lada Oberreiterová	G Třebíč, 3.B	8			1						1	1
23.–26.	Mgr. Tomáš Svatoň	GJKT, 3.A	32					0				0	0
	Peter Murárik	G Ľ. Štúra, 2.G	0							0		0	0
	Lenka Burešová	G Dopplera, 2.	3									0	0
	Kristýna Forrová	GJKT	0					0				0	0

Uzávěrka 3. čísla M&M: **1. února 2000**

Adresa redakce:

Tomáš Brauner, A1721
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha Holešovice