M&M číslo 1 ročník VI

Milí kolegové !

Právě se vám dostalo do rukou první číslo šestého ročníku naší soutěže M&M. Pokud se s M&M setkáváte poprvé, pak si pozorně přečtěte následující řádky, na nichž se vám ve stručnosti pokusíme M&M představit.

- M&M je matematicko-fyzikální soutěž, ve které si můžete prověřit svoje odborné znalosti, ale také projevit vlastní tvůrčí schopnosti a vynalézavost při řešení různých problémů. Pokud jste středoškoláci a matematika nebo fyzika vás poznamenala natolik, že se stala vaším koníčkem, máte tedy nyní jedinečnou šanci, jak vyplnit svůj volný čas bádáním nad problematikou vám blízkou a snad i vyhrát letošní ročník soutěže.
- M&M patří do rodiny takzvaných korespondenčních seminářů, kterých v České republice a na Slovensku existuje více než 10. Řekněme tedy, v čem se náš seminář od této „konkurence“ liší.

(1) M&M je současně také vědecký časopis. Většina seminářů nabízí k řešení pouze jednoznačně zadané příklady. My každoročně otvíráme několik témat, ke kterým může kdokoli zaslat libovolný příspěvek (samozřejmě se vztahem k dané problematice). Navíc nabízíme řešitelům možnost vymyslet a navrhnout svoje vlastní téma, se kterým by se chtěli na stránkách časopisu setkávat. Podmínkou je, že téma se musí týkat matematiky nebo fyziky a musí být zajímavé. Návrhy témat posuzuje naše redakční rada, která vybraná témata uveřejní.

(2) M&M se snaží hledat souvislosti mezi matematikou a fyzikou a občas i informatikou, nikoli však násilně. Ostatní korespondenční semináře jsou specializované buď na matematiku, nebo na fyziku. My nechceme mezi těmito obory lidského smýšlení stavět umělé hranice. Fyzika matematiku potřebuje a mnohý matematický problém zase pochopíme na názorném fyzikálním příkladě.

(3) Úlohy v M&M jsou rozloženy v širokém spektru složitosti. Každý si zde může vybrat, co ho baví a na co stačí – to platí o úlohách i o tématech. Z článků, které nám napíšete, se na naše stránky dostanou ty nejlepší a nejzajímavější.

- Jak M&M probíhá?

M&M se může zúčastnit každý středoškolák, který má dostatek chuti a času. Pokud se rozhodnete M&M řešit, budeme vám na vaši adresu časopis zasílat (samozřejmě zdarma). V časopise naleznete vždy zadání tří tzv. „rekreačních úloh“ a občas zadání nových témat. „Rekreační úlohy“ jsou příklady, které jdou obvyklé i v jiných seminářích – jsou jasně zadané a žádáme jejich jasné řešení. Vhodné jsou zvlášť pro dobu, kdy se rekreujete. Někdy mají podobu hádanek, jindy fyzikálních úvah apod. O tématech jsme již hovořili. Podaří-li se vám vyřešit nějakou z úloh anebo zaujme-li vás některé z témat, můžete nám svá řešení a postřehy zaslat na adresu semináře, která je uvedena na konci tohoto letáku.

Řešení úloh posílejte do termínu, který pro každou sérii stanovíme. Pozdní odeslání řešení rekreačních úloh tolerujeme jen výjimečně. Rozhodující je přitom datum na poštovním razítku. Na řešení každé série budete mít asi měsíc času. My vaše řešení vyhodnotíme a okomentujeme, nejlepší články k tématům otiskneme přímo v časopise. S novým číslem časopisu (ve kterém najdete též autorská řešení úloh) pak dostanete zpátky svá okomentovaná řešení i vědecké příspěvky. Ročně hodláme vydat asi 5 čísel časopisu.

- M&M je, jak jsme již v úvodu zmínili, soutěží. Za každé řešení úlohy nebo příspěvek k tématu obdržíte několik bodů, jejichž množství bude určeno mírou správnosti vašeho řešení, originalitou a nápaditostí článku a brilantností vašich úvah… Správná řešení rekreačních úloh bývá zvykem hodnotit asi 5 body, přesný počet bodů budeme uvádět v zadání jednotlivých úloh. Dobré články k tématům se cení třeba i na 15b. Dodejme, že nerozlišujeme bodování podle ročníku studia, jak to mnohé semináře činí. Volné pojetí témat totiž umožňuje zvítězit i nejmladším řešitelům, jsou-li dost aktivní. Na základě počtu bodů přiřazených jednotlivým řešitelům posléze sestavíme pořadí, které budeme průběžně otiskovat na poslední straně časopisu. V závěrečné sérii provedeme celkové vyhodnocení a odměníme vítěze zatím neznámými, ale jistě hodnotnými cenami.

  Hovoříme-li o hodnocení, neopomeňme zdůraznit jednu zvláštnost, kterou má pouze M&M. Po překročení určitých bodových limitů totiž získáte pro účely semináře titul, kterým jsou vás povinni ostatní účastníci oslovovat. Příslušné bodové limity jsou: 10b (bakalář), 20b (magistr), 50b (doktor), 100b (docent), 200b (profesor), 500b (akademik). Do limitu potřebného pro dosažení titulu se započítávají i body získané v předchozích ročnících semináře.

- Konference M&M

  Pro nejlepší řešitele organizujeme každoročně alespoň jednu konferenci. Letos budou dokonce konference dvě. V zimě se můžete těšit na oslavu příchodu roku 2000 – první konference totiž proběhne začátkem ledna na Studenově (to je v Krkonoších kousek od Harrachova). Druhá konference se bude konat pravděpodobně v červnu. Účastníky budeme vybírat podle průběžného pořadí. Počítejte s tím, že na zimní konferenci si budete muset připlatit zhruba 500 Kč.

  Konference jsou dobrou příležitostí k seznámení s lidmi podobného smýšlení, pro mnohaleté řešitele pak vhodným místem, kde lze potkat staré známé. Na podobných akcích se pak vedou vědecké polemiky, můžete zde vyslechnout nebo též sami přednést řadu přednášek. Konference jsou pořádány v přírodě a jejich program není pouze odborný (provozují se tam rozmanité hry a podobně). Všichni, kdo na podobné akci někdy byli, mi dají za pravdu, že nelitovali.

- Pokud jste vydrželi číst až sem a M&M vás zaujalo natolik, že jste se rozhodli je řešit, pak pro vás máme ještě pár drobných rad a podmínek soutěže:

  (1) K řešení první série prosím přiložte lístek se jménem, ročníkem, adresou školy a vaší adresou pro korespondenci.

  (2) Každou úlohu (téma) pište na zvláštní papír (různé úlohy obvykle opravují různí lidé). Každý papír označte svým jménem a číslem úlohy, popřípadě číslem listu. K náležitostem vědeckého článku patří jeho název a jméno autora. Nenazvete-li článek, vymyslíme pro něj v případě otištění název sami. Redakce si vyhrazuje právo článek pro lepší srozumitelnost zestručnit nebo upravit, vždy však jen do té míry, aby nebyl změněn jeho smysl.

  (3) Nemusíte posílat řešení všech úloh a témat. Vyberte si, co vás nejvíce zajímá. Ohodnotíme i náznaky řešení (samozřejmě, vděčnější budeme za řešení úplná).

(4) Nepište jenom výsledky, ale podrobně nám vysvětlete postup, jak jste k nim došli. Pokud nám pošlete pouze výsledek (byť správný), na mnoho bodů se netěšte.

(5) Pište prosím čitelně. Nad nečitelnými řešeními pak strávíme zbytečně mnoho času. Navíc je nemůžeme objektivně ohodnotit.

(6) Svá řešení nám můžete posílat na papíře (ať už v rukopise nebo vytištěná počítačem), na disketě (preferujeme zdrojový text pro sázecí systém TEX nebo čistý ASCII-text) nebo přes Internet e-mailem na adresu

`tbra7047@milada.troja.mff.cuni.cz`

(7) Dodržujte termíny odesílání rekreačních úloh. Příspěvky k tématům můžete posílat po celý rok.

(8) Ve svých příspěvcích můžete reagovat na články svých kolegů. Budete-li používat výsledků práce někoho jiného, doporučujeme vám použité výsledky napsat formou citace.

(9) M&M můžete začít řešit kdykoli v průběhu roku.

- Na závěr několik slov o historii M&M. Coby korespondenční seminář pro Středočeský kraj bylo M&M založeno již na sklonku roku 1994. Zakladateli byli Martin Vyšohlíd a Martin Čížek – oba studenti MFF UK. Současnými organizátory jsou další studenti Matematicko-fyzikální fakulty.

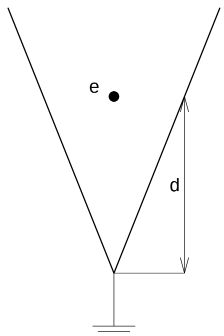
A ještě jedna prosba na úplný závěr. Máte-li možnost tento leták jakkoli rozšířit na střední školy nebo třeba mezi své kamarády, o kterých víte, že se matematikou nebo fyzikou zabývají, pak vás prosíme, abyste tak učinili. Za každého prokazatelně získaného řešitele dostanete na soustředění tatranku.

Toť vše, přejeme vám hodně štěstí a zábavy při práci. Na vaše příspěvky se těší *Tomáš Brauner, Ivana Čapková, Pavol Bzučo Habuda, Ája Jančaříková, Matouš Jirák, Aleš Přívětivý, Robert Špalek a Karel Zikmund.*

Zadání témat:

1. Elektrón (10b)

   Medzi dve polonekonečné vodivé, uzemnené platne, ktoré zvierajú uhol α, vložíme elektrón (všeobecne náboj Q). Určite, za aký čas spadne tento náboj položený do stredu medzi platne na jednu z nich. Pre jednoduchosť môžete uvažovať, že $a \to 0$ alebo $a \to \pi/2$. Za všeobecný prípad bude viac bodov.



2. Sportka (12b)

   Určitě všichni znáte hru sportka. Losuje se šest ze čtyřicetidevíti čísel a vylosovaná čísla se do osudí nevrací, takže se vylosovaná čísla nemohou opakovat. Na tuto hru se sází tak, že si na tiketu zaškrtáte šest čísel. Pokud uhodnete alespoň tři z vylosovaných, vyhráváte. Pokud uhodnete čtyři vyhráváte větší sumu atd… Vaším úkolem je zjistit nejmenší počet tiketů, které byste museli vsadit, a vhodně popsat, jak by takové tikety vypadali, aby jste měli jistotu, že alespoň na jednom tiketu uhodnete tři vylosovaná čísla. Není důležité nalézt nejlepší řešení, ale alespoň se k tomu číslu přiblížit. Uvědomte si, že stačí rozhodně méně než $\binom{49}{3}$. Dále můžete přemýšlet, jak by to vypadalo obecně, tj. pro jiná čísla než 49 a 6.

3. Gramatiky (5b)

   V tomto tématu se budeme zabývat gramatikami. Začneme tedy definicemi:

   Abeceda je libovolná neprázdná konečná množina. Prvky této množiny nazývejme symboly. Příkladem abecedy je například tzv. česká abeceda $A = \{a, \text{á}, b, c, \check{c}, d, \ldots\}$. Jiným příkladem může být abeceda číslic $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ale za symboly můžeme brát i shluky písmen např. abeceda slov $C = \{\mathbf{doma}, \mathbf{kůň}, \mathbf{pít}, \mathbf{voda}, \mathbf{seno}, \mathbf{žrát}\}$, tyto shluky pak uvažujeme dohromady a nedělíme je menší části.

   Slovem nad abecedou X nazývejme konečnou posloupnost symbolů z„abecedy X. Množinu všech slov konečné délky nad abecedou X označme X^*. Uvědomme si, že X^* obsahuje i prázdné slovo, tj. slovo tvořené prázdnou posloupností symbolů. Toto slovo budeme značit e. Slovy nad abecedou A jsou například slova e, abba, bbbba, čekat, atd… Slovy nad abecedou B jsou všechna konečná přirozená čísla a prázdné slovo – 0, 34567, 21, 007, atd… Slovy nad abecedou C jsou např. „kůň pít voda“, „voda pít seno“, „seno seno doma pít“ atd…

Přepisovací pravidlo je uspořádaná dvojice (a, v) zpravidla psaná ve tvaru $a \to v$, kde a i v jsou slova nějaké abecedy. Přepisovací pravidlo můžeme aplikovat na slova. Obsahuje-li v sobě slovo s podslovo a, tedy $s = xaz$, výsledkem aplikace přepisovacího pravidla $a \to v$ na slovo s je slovo xvz. Přepisovací pravidlo tedy ve slovech nahrazuje podslovo a slovem v. Uvědomme si, že v případě, že se ve slově s vyskytuje vícekrát podslovo a, není jednoznačné, které podslovo se nahradí. Přepisovací pravidlo tedy není funkce, ale zobrazení. Pár příkladů: Uvažujme slova abecedou A a přepisovací pravidlo $á \to a$. Výsledkem trojnásobné aplikace tohoto pravidla na slovo „propánájána" bude slovo „propanajana". Pro slovo nad abecedou C „kůň žrát seno doma" použitím přepisovacího pravidla „žrát seno"→„žrát seno pít voda" bude výsledek „kůň žrát seno pít voda doma". Fakt, že se slovo a přepíše konečným počtem použití pravidel z dané množiny a vznikne slovo b, značíme $a \vdash b$.

Bezkontextová gramatika je uspořádaná čtveřice $G = (N, T, P, S)$, kde

- N je abeceda obsahující neterminální symboly,
- T je abeceda obsahující terminální symboly,
- P je množina přepisovacích pravidel tvaru $a \to b$, kde $a \in N$ a $b \in (N \cup T)^*$, tj. a je neterminální symbol a b je slovo nad sjednocením množin N a T,
- S je počáteční symbol z množiny neterminálních symbolů.

Konečná posloupnost slov nad abecedou $N \cup T$ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ je **generující posloupností** slova a_n, jestliže $a_0 = S$ a pro každé $1 \leq i \leq n$ existuje přepisovací pravidlo z P, že a_{i-1} se přepíše pomocí onoho pravidla na a_i. Gramatika **generuje slovo** s, pokud pro něj existuje generující posloupnost. Množina všech slov generovaných gramatikou obsahujících pouze terminální symboly G se nazývá **jazyk gramatiky** G.

Příklad.

- $G = (N, T, P, S)$,
- $N = \{\text{SOUVĚTÍ}, \text{VĚTA}, \text{PODMĚT}, \text{PŘÍSUDEK}, \text{CO}\}$,
- $T = \{\text{petr}, \text{tomáš}, \text{pije}, \text{mlíko}, \text{a}, \text{pivo}\}$,
- $P = \{$

  SOUVĚTÍ→VĚTA,
  SOUVĚTÍ→VĚTA a SOUVĚTÍ,
  VĚTA→PODMĚT PŘÍSUDEK CO,
  PODMĚT→tomáš,
  PODMĚT→petr,
  PŘÍSUDEK→pije,
  CO→pivo,
  CO→mlíko

  $\}$,
- $S = \text{SOUVĚTÍ}$.

Jazyk této gramatiky generuje jednoduchá souvětí obsahující slova pouze z „naší velmi omezené množiny – např: „petr pije mlíko", „tomáš pije pivo a petr pije mlíko". Jednoduše řečeno, začneme s neterminálním symbolem S a ten přepíšeme podle nějakého pravidla. Ve vzniklém slovu přepíšeme všechny neterminály podle pravidel a tak pokračujeme dál tak dlouho, dokud nevznikne slovo složené jen z terminálů. To pak patří do jazyka generovaného gramatikou G. Pokud neterminál lze přepsat na více slov, můžeme si vybrat, na které chceme (viz. neterminál SOUVĚTÍ).

Příklad.

Jazyk obsahující všechna slova tvaru $0^n 1^n$ (n nul následovaných n jedničkami), generuje gramatika:

- $N = \{A\}$,
- $T = \{0, 1\}$,
- $P = \{A \to 0A1, A \to e\}$,
- $S = A$.

V„tomto čísle po Vás budeme chtít pouze, abyste pronikli do této terminologie a vyřešili pár lehkých příkladů, zajímavější příklady přijdou v příštím čísle:

(a) Napište gramatiku, která generuje všechny smysluplné matematické výrazy obsahující přirozená čísla, závorky a základní operace.

(b) Napište gramatiku, která generuje všechna binární čísla dělitelná třemi.

(c) Napište gramatiku, která generuje všechna slova nad abecedou $\{a, b, c\}$ mající sudou délku a jejichž druhá polovina je zrcadlově obrácená první polovina, např: abccba, aaaa, bbaaaabb, atd…

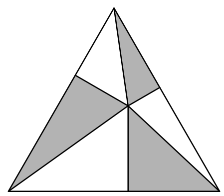
Zadání rekreačních úloh:

1. Dve guľôčky (5b)

   Predstavte si, že vo vesmíre sa nachádzajú iba dve malé kovové guľôčky. Na každú nanesieme jeden elektrón. Aký je polomer guľôčok, ak sú v rovnováhe, príťažlivá a odpudivá sila sa vyrovnali.

2. Trojúhelník (4b)

   Máme rovnostranný trojúhelník a uvnitř něj zvolíme libovolně bod. Tento bod spojíme se všemi vrcholy trojúhelníku a spustíme z něj kolmice na všechny jeho strany, čímž vznikne šest malých trojúhelníčků (viz obr.). Dokažte, že součet obsahů vyšrafovaných trojúhelníčků je roven polovině obsahu celého trojúhelníku.



3. Eliptický kulečník (6b)

   Představte si, že máte kulečníkový stůl tvaru elipsy. V jednom ohnisku elipsy je koule, kterou chcete trefit. Kam musíte postavit kouli, kterou se budete trefovat, abyste měli jistotu zásahu? Tření zanedbejte.

   Pro nechápavé: ukažte, že elipsa (definovaná standardně jako množina všech bodů, jejichž součet vzdáleností od pevně zvolených dvou bodů je konstanta) má tuto vlastnost: když vyšleme z jednoho ohniska kouli (světelný paprsek, zvuk), odrazí se ve shodě se zákonem odrazu do druhého ohniska.

4. Odpor vzduchu (5b)

   Představte si, že vezmete kámen a vyhodíte jej v tíhovém poli Země svisle vzhůru. Na kámen působí kromě tíhové síly také odpor vzduchu. My po vás chceme porovnat obecně dobu výstupu kamene do nejvyššího bodu jeho dráhy s dobou jeho pádu zpět (rovnají se, jedna doba je delší než druhá, nebo to závisí na tvaru odporové síly).

Uzávěrka 2. čísla M&M je **1. listopadu 1999.**

Adresa redakce je:

Tomáš Brauner, A1721
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha Holešovice