M&M Číslo 5 ročník V

Ahojte řešitelé,

Konečně s k vám dostává se zpožděním poslední číslo loňského ročníku časopisu M&M. Obsahuje kromě řešení zadaných úloh také finální výsledkovou listinu letošního jubilejního ročníku. Doufáme, že jste se svými výsledky spokojeni a že nám projevíte svou přízeň svými hodnotnými příspěvky i v dalších ročnících. *Vaše redakce*

Téma 8 – Teorie čísel

Doc. Michal Tarana: Číselné rozklady

Autor ve svém krátkém příspěvku tvrdí (a jednoduše to i dokázal), že pro partitní funkci $p(n)$ platí:

$$\forall n \in \aleph : p(n) \geq n.$$

Má někdo lepší odhad?

Doc. Michal Tarana: Problém dělitelů

Nejprve zkoumejme funkci $d(n)$. Nechť je dáno $n \in \aleph$ a jeho rozklad v součin prvočinitelů je

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \aleph$.

Potom

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1),$$

neboť v každém děliteli čísla n může mít p_i celkem 0 až α_i výskytů a prvky vybíráme nezávisle na sobě.

Důsledkem předchozího pozorování je:

- n prvočíslo $\quad\Rightarrow\quad d(n) = 2$,
- $n = a \cdot b$, $\quad a, b$ prvočísla $\quad\Rightarrow\quad d(n) = 4$,
- $n \in \aleph, \sqrt{n} \in \aleph \quad\Rightarrow\quad \alpha_i$ je sudé $\forall i \quad\Rightarrow\quad d(n)$ je liché,
- $n \in \aleph, \sqrt{n} \notin \aleph \quad\Rightarrow\quad d(n)$ je sudé.

Matouš

Úloha 12 – Trpaslíci

Úloha byla bohužel zadána tak, že umožňovala snadné řešení pomocí počítače nebo programovatelné kalkulačky (takto smýšlející lidé byli pak hodnoceni především podle toho, jestli u řešení uvedli příslušný program). Nebyl by ovšem problém v zadání přidat nějakou vysokou mocninu, na kterou by už počítač nestačil. Pak by jedním z možných řešení bylo náseldující.

Máme vlastně posloupnost a_n, rekurentně zadanou vztahy

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n},$$
$$a_0 = 1.$$

Teď umocníme rekurentní formuli na druhou, čímž dostaneme

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2. \tag{1}$$

Sečtením rovnic (1) pro n od 0 do 99 dostaneme (většina členů na pravé a na levé straně se navzájem vyruší)

$$a_{100}^2 = a_0^2 + 2 \cdot 100 + \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{a_n^2} > 200, \tag{2}$$

odkud okamžitě plyne

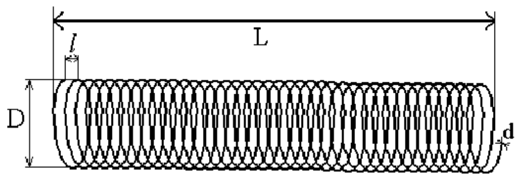
$$a_{100} > 14.$$

Správná odpověď tedy je: trpaslíci dostanou číslo větší než 14. Tomáš

Úloha 13 – Žiarovka

Riešenie: Tak toto bol opäť jeden z tých ťažších príkladov. Jeho riešenie urobím exaktne, ako aj numerickou simuláciou.

Teoretické riešenie



Budem predpokladať, že žiarovka sa ochladzuje iba žiarením, a zanedbám ohrievanie plynu v žiarovke. Inak, toto ohrievanie je dosť zaujímavé, plyn okolo vlákna sa prudko zohrieva a vplyvom *Archimedovho zákona* stúpa nahor. Skúste si zažať na pár minút žiarovku a potom rukou porovnajte teploty na vrchole žiarovky a pri jej koreni. Stačí niekoko sekúnd a tepelný rozdiel je zreteľný. Ohrievanie podporuje najmä tvar vlákna, ktoré nie je rovné, ale ako sami viete skrútené, a najmä bifibrálne. Sú to vlastne dve vlákna z technických dôvodov obtočené okolo seba.

Vlákno žiarovky vyzerá ako cievka, pozrime sa teda najprv, akú má asi indukčnosť v porovnaní s odporom.

Aproximujme vlákno dlhou cievkou. Pre jej indukčnosť platí: $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{L}$. Hľadáme indukčnosť rádovo, takže takúto aproximáciu si môžeme dovoliť.

Teraz niečo k parametrom vlákna, ktoré som skúmal ja:

$$\begin{aligned} d &= 0.18\,\mathrm{mm},\\ D &= 0.7\,\mathrm{mm},\\ L &= 28\,\mathrm{mm},\\ l \approx 2.5d &= 0.45\,\mathrm{mm}. \end{aligned}$$

Upravujme ešte vzťah pre indukčnosť tak, aby sme tam mali iba známe hodnoty:

$$N = \frac{L}{l} \Longrightarrow L = \frac{\pi\mu_0 N^2 D^2}{4L} = \frac{\pi\mu_0 D^2 L}{4l^2} = 7\cdot 10^{-7}.$$

Odtiaľ pre induktanciu $X_L = \omega L = 2\cdot 10^{-4}\Omega$.

Odpor vlákna si vyjadríme zo vzorca $P = \frac{U^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{U^2}{P} = 650\Omega$ pre 75-wattovú žiarovku.

Vidíme, že odpor žiarovky je oveľa väčší ako induktancia, a teda induktanciu možno zanedbať. Niežeby som to musel počítať, ale len tak ju zanedbať bez výpočtu sa nerobí. Proste keď robíme zanedbanie, treba sa uistiť, že je možné daný efekt zanedbať. A teraz hor sa do výpočtov.

Predpokladajme, že teplo, ktoré sa uvoľní na vlákne ako na odpore sa spotrebuje jednak na zvýšenie teploty vlákna, a jednak sa vyžiari ako svetlo a IR žiarenie. Zrejme bude amplitúda teplotných výkyvov malá oproti samotnej teplote, a tak považujme všetky materiálové konštanty vlákna za naozaj konštanty. Je známe, že tieto „skorokonštanty“ (ρ merný odpor, c tepelná kapacita,...) závisia od teploty. Pozrite sa napr. v nejakých lepších tabukách, ako závisí napr. hustota alebo tepelná kapacita vody od teploty. Tieto závislosti môžete nájsť napr. vo Valouchových Matematicko-fyzikálnych tabulkách.

Predpokladajme, že prúd sa nám mení s časom periodicky, že platí:

$$I = I_0 \cdot \cos \omega t. \tag{1}$$

Pre Jouleovo teplo platí:

$$\mathrm{d}Q_J = RI^2 \mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\mathrm{d}t = P\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Ako som už napísal, toto teplo sa spotrebuje na ohrev vlákna a časť sa vyžiari.

$$P = S\sigma T^4 + mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Teda ak skombinujeme rovnice (1), (2) a (3), dostávame:

$$RI_0^2 \cos^2 \omega t = S\sigma T^4 + mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Teraz treba dosadiť do tejto rovnice všetko, čo poznáme. Zrejme $R = \frac{U^2}{P} = \sigma\frac{A}{S}$.

Plocha S sa rovná $S = \frac{\pi d^2}{4}$, treba nám spočítať dĺžku roztiahnutého vlákna. Ak je polomer špirály D, a vzdialenosť dvoch vlákien od seba l, tak dĺžka jedného „závitu“ je $a = \sqrt{(\pi D)^2 + l^2}$. Keďže celá špirála je dlhá L, tak má $N = \frac{L}{l}$ závitov, a celková dĺžka vlákna je:

$$A = Na = \frac{L\sqrt{(\pi D)^2 + l^2}}{l}. \tag{5}$$

No a teraz to opäť treba skombinovať. Treba dosadiť plochu S a dĺžku A do odporu R, a všetko do rovnice (4).

$$\rho\frac{4L\sqrt{(\pi D)^2 + l^2}}{\pi d^2 l} I_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{\pi d\sqrt{(\pi D)^2 + l^2}}{l}\sigma T^4 + \frac{\pi d^2}{4}\frac{L\sqrt{(\pi D)^2 + l^2}}{l} Hc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}.$$

Táto rovnica po zjednodušení vyzerá nasledovne:

$$\frac{4\sigma}{\pi d^2} I_0^2 \cos^2 \omega t = \pi d \sigma T^4 + \frac{\pi d^2}{4} H c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}, \tag{6}$$

kde H je hustota volfrámu, z ktorého sa žiarovky vyrábajú. Tak toto je komplikovaný vzorec, radšej zostaneme tam, kde si nevyjadrujeme tepelnú kapacitu vlákna, povrch ani merný odpor.

Rovnica (4) je diferenciálna rovnica, k riešeniu ktorej sa dostaneme. Najprv si ale spočítajme priemernú teplotu volfrámového vlákna. Na to treba spočítať strednú hodnotu výrazu $\cos^2 \omega t$. V skutočnosti je to pomerne jednoduché. Teda ako pre koho.

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \omega t} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \omega t \,\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\omega t)\mathrm{d}t}{4\pi} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\omega t \,\mathrm{d}t}{4\pi} = \frac{1}{2} + \left[\frac{\sin 2\omega t}{8\pi\omega}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Teraz si môžeme zo vzťahu (6) vyjadriť priemernú teplotu vlákna. Predpokladajme, že neexistujú žiadne výkyvy teploty, takže člen, ktorý započítava kapacitu položme rovný nule. Keď naviac dosadíme priemernú hodnotu $\cos^2 \omega t$, dostávame

$$T_0^4 = \frac{2\rho I_0^2}{\pi^2 d^3 \sigma} = \frac{U^2 L}{R\sigma\pi d L\sqrt{(\pi D)^2 + l^2}} \Longrightarrow T = 2000\,\mathrm{K}\,. \tag{7}$$

Položme si $T = T_0 + \Delta T$, a teda $T^4 = T_0^4 + 4T_0^3\Delta T + 6T_0^2\Delta T^2 + 4T_0\Delta T^3 + \Delta T^4$. Ak predpokladáme, že $T_0 \gg \Delta T$, tak členy ΔT^2 a vyšších rádov možno zanedbať, a môžeme písať: $T^4 = T_0^4 + 4T_0^3\Delta T$.

Rovnica (6) potom vyzerá nasledovne:

$$\frac{4\sigma}{\pi d^2} I_0^2 \cos^2 \omega t = \pi d \sigma T_0^4 + 4\pi d\sigma T_0^3 \Delta T + \frac{\pi d^2}{4} H c \frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t}.$$

Po dosadení do tejto rovnice z (7) a vzťah pre dvojnásobný uhol, a pokrátime, čo sa dá, dostávame:

$$\frac{2\sigma}{\pi d^2} I_0^2 \cos 2\omega t = 4\pi d\sigma T_0^3 \Delta T + \frac{\pi d^2}{4} H c \frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

Skúste si to upravovať a uvidíte že to tak je. *P. Šanda* aj *Mgr. J. Chaloupka* tvrdili, že sa takáto diferenciálna rovnica rieši *Runge-Kuttovou metódou*. Neviem, ako sa môj postup volá, možno je to ten istý.[1]

Máme teda rovnicu

$$\frac{d\Delta T}{\mathrm{d}t} + B \cdot \Delta T = F \cos 2\omega t. \tag{10}$$

[1] Pozn. redakce. *Runge-Kuttova* metoda je velice dobře propracovaná metoda k numerickému řešení soustav diferenciálních rovnic.

Riešením príslušnej diferenciálnej rovnice je exponenciála, ktorá sa rýchlo utlmí, takže stačí nájsť partikulárne riešenie rovnice s pravou stranou.[2] To hadám v tvare: $\Delta T = \Delta T_{\mathrm{MAX}} \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$. Dosadením do (10) dostávame:

$$2\omega\Delta T_{\mathrm{MAX}} \cdot (\sin 2\omega t \cdot \cos\varphi + \cos 2\omega t \cdot \sin\varphi) - Bt + F(\cos 2\omega t \cdot \cos\varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin\varphi) = 0. \quad (11)$$

Porovnaním koeficientov u $\sin 2\omega t$ a $\cos 2\omega t$ dostávame:

$$\Delta T_{\mathrm{MAX}}(-2\cos\varphi - B\sin\varphi) = 0, \quad (12)$$
$$\Delta T_{\mathrm{MAX}}(-2\sin\varphi + B\cos\varphi) = F. \quad (13)$$

Z prvej rovnice dostávame:

$$\tan\varphi = \frac{-2\omega}{B} = \frac{-\omega Hcd}{8\sigma T_0^3}. \quad (14)$$

Umocnením oboch rovníc na druhú a sčítaním dostávame:

$$\Delta T_{\mathrm{MAX}} = \frac{F}{\sqrt{4\omega^2 + B^2}} = \frac{8\sigma I_0^2}{\pi^2 d^3\sqrt{(2\omega Hcd)^2 + (16\sigma T_0^3)^2}}. \quad (15)$$

Vidíme, že s rastúcou frekvenciou amplitúda teploty klesá. Výsledok (15) sa dá ďalej zjednodušiť. Ak je frekvencia dostatone vysoká (pre nízke frekvencie aj tak nemožno použiť uvedený postup), tak zanedbáme pod odmocninou zvyškový člen a dostávame:

$$\Delta T_{\mathrm{MAX}} = \frac{4\sigma I_0^2}{(\pi d^2)^2\omega Hc} = \frac{U^2 l^2}{2\sigma L\omega Hc(\pi^2 D^2 + l^2)}.$$

Toto možno považovať za finálny vzorec amplitúdy teploty. Skúsme teraz spočítať jej veľkosť.

Položme

$$\rho = 5 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m},$$
$$c = 150\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}},$$
$$H = 19300\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$

Po dosadení vychádza 400 K.

Pre mňa je to trošku moc. Pozrime sa, kde je chyba. Pozrime sa na vzorec $R = \frac{U^2}{P} = \sigma\frac{A}{S}$. Teda dosaďme doňho.

$$\frac{U^2}{P} = 650\Omega,$$
$$\rho\frac{A}{S} = \rho\frac{4L\sqrt{(\pi D)^2 + l^2}}{\pi d^2 l} = 0.3\Omega.$$

[2] Tá exponenciála nám vlastne popisuje nábeh z izbovej teploty na teplotu vlákna. Ak by sme nechali vláknom pretekať jednosmerný prúd $I_0 \cdot \overline{\cos^2\omega t}$, tak by bol výkon na vlákne práve P a teplota by bola konštantná, T_0, ku ktorej sa blíži naša exponenciála.

Toto je dosť veľký rozdiel na to, aby sa dal zanedbať. Niečo je spôsobené zmenou tepelnej kapacity a merného odporu, a niečo asi aj tým, že žiarovka síce vyžaruje 75 W, ale príkon je vyšší. A odhadovať účinnosť si netrúfam. Poďme preto ešte raz riešiť úlohu, ale do rovnice (9) dosadíme iné veličiny, namiesto merného odporu a rozmerov dosadíme priamo 650Ω.

$$\frac{U^2}{R}\cos 2\omega t + \left(\frac{U^2}{R} - S\sigma T_0^4\right) = 4S\sigma T_0^3\Delta T + mc\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{U^2}{mcR}\cos 2\omega t = \frac{4S\sigma T_0^3}{mc}\Delta T + \frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t}. \tag{16}$$

Výraz v zátvorke je rovný nule, pretože všetko teplo uvoľnené na vlákne sa vyžiari ako žiarenie. V dlhších časových škálach možno zanedbať efekt tepelnej kapacity vlákna. Teraz si vyjadrime hmotnosť:

$$m = HV = H\frac{\pi d^2 L\sqrt{(\pi D)^2 + l^2}}{4l} = 0.067\,\mathrm{g}\,.$$

Podľa priameho merania je hmotnosť 0.029 g. To znamená, že aj rozmery by potrebovali byť namerané trošku lepšie.

Použime rovnaký postup ako predtým:

$$\tan\varphi = \frac{-\omega c H d}{8\sigma T_0^3} = 12 \Longrightarrow \varphi = -85°,$$
$$\Delta T_{\mathrm{MAX}} = \frac{U^2}{2\omega mcR} = 25\,\mathrm{K}\,.$$

Vidíme, že výsledok je o rád menší. Skutočná amplitúda sa podľa mňa bude pohybovať niekde medzi. Závisí to aj od parametrov žiarovky.

Urobiť solídnu analýzu, prečo vyšli dva tak rozdielne výsledky je nad moje sily, a presahovalo by to aj rámec tohto riešenia.

Záver. Vidíme, že teoretický prístup nám dáva veľmi odlišné hodnoty, ak zoberieme rôzne vstupné parametre. Myslím, že som jednoznačne ukázal, že teplota vlákna sa s časom mení, ale presné určenie veľkosti tejto zmeny si vyžaduje precízne merania rôznych hodnôt. Mohol som napríklad zmerať priamo odpor žiarovky, keď svietila. Tým by som dostal presnejší vstupný odpor. Treba ale jednoznačne poukázať na fakt, že merný odpor ρ silne závisí od teploty. Ako som už uviedol, vplyvov na výsledok je veľa. Správna hodnota by sa mala pohybovať okolo 2800° C. Výsledok bol zrejme ovplyvnený nepresným meraním rozmerov. Napríklad, $l \approx 2.5d$ … ak by bolo $l \approx 3.5d$, potom vychádza správny výsledok. l som vzhadom na nemožnosť merania tejto vzdialenosti iba odhadoval. Ak berieme za teplotu vlákna 3100 K, a nie 2000 K, potom $\Delta T_{\mathrm{MAX}} = 27\,\mathrm{K}\cdot\frac{3100\,\mathrm{K}}{2000\,\mathrm{K}} = 40\,\mathrm{K}$.

Tento výsledok by som bral ako finálny, s konštatovaním, že chyby $\delta\Delta T_{\mathrm{MAX}}$ môžu dosahovať vysoké hodnoty, ale výpočet bol vzhľadom na presnosť meraných velíin iba orientačný.

Intenzita sa nám mení priamo úmerne s výkonom, a teda $I \approx T^4$.

Potom

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I} = 2\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 2\frac{T_{\max}^4 - T_{\min}^4}{T_{\max}^4 + T_{\min}^4} \approx$$
$$\approx 2\frac{T_0^4 + 4T_0^3\Delta T + 6T_0^2\Delta T^2 + 4T_0\Delta T^3}{T_0^4 + T_0^4} = 8\frac{\Delta T}{T} = 10\%.$$

Amplitúda zmien intenzity je samozrejme polovičná, teda 5%.

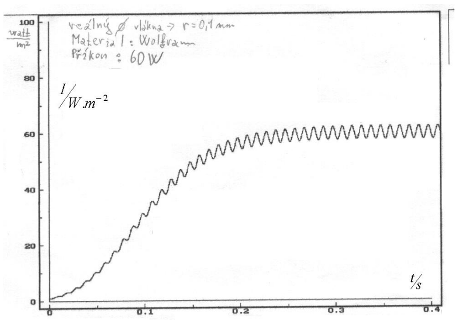
Všimnite si, že prvý výraz po dosadení nedáva správny výsledok. V našom prípade to však nie je tým, žeby vzorec bol chybný, ale tým, že nepoznáme presne konštanty materiálu a rozmery vlákna.

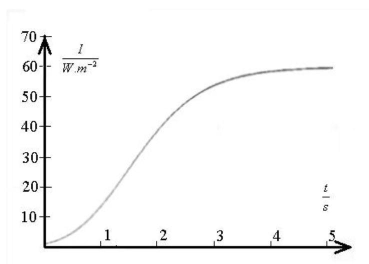
Riešenie numerickou integráciou

Aj ja som chcel riešiť tento problém numerickou simuláciou. Do rovnice (16) som si dosadil číselné parametre a skusil počítať v Pascale. Graf bol síce pekný, ale nevedel som ho uložiť. Tak som vzal na pomoc Matematicu v blahej nádeji, že mi pomôže. Ona síce dokáže numericky riešiť diferenciálne rovnice, ale spadlo niečo v kerneli, a nedokázala spočítať ani 1+1. Tak som to zabalil a dal príležitosť prezentovať sa vám. Moja rovnica vyzerala nasledovne:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t} + 33\Delta T = 17100\cos 314t.$$

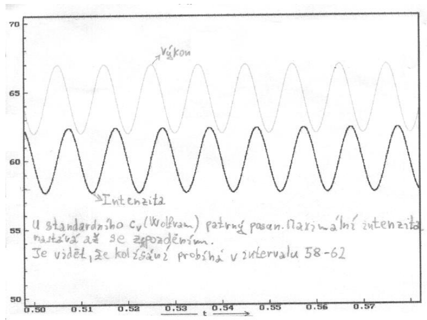
Ale teraz už k vašim riešeniam. Numerickou metódou riešili tento problém dvaja: *P. Šanda* a *Mgr. J. Chaloupka*. Obaja si počínali veľmi dobre a dospeli k v podstate správnym výsledkom.



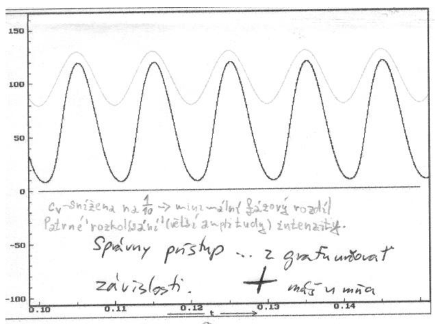


Graf zobrazuje „rozbiehanie“ sa teploty vlákna po tom, ako sme zapli spínač. Je vidno zreteľný nábeh na exponenciálu, ktorá sa blíži k asymptote, a vidíme, že zostáva iba sinusová zložka.

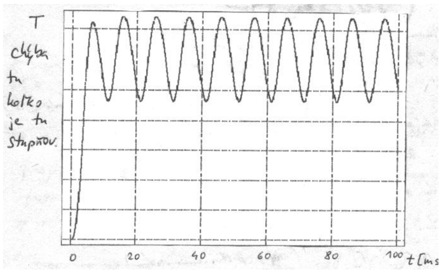
Napravo vidíme, pre zmenu ako sa rozsvecuje žiarovka s priemerom vlákna $r = 1\,\mathrm{mm}$. Zvlnenie krivky nie je vôbec viditené. Samotné rozsvietenie trvá asi 3 sekundy. Pritom výsledná intenzita zostáva rovnaká, to je zrejme Pavlov zámer.

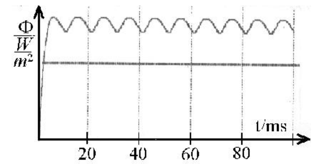


Na tomto obrázku detailne vidíme, ako sa mení teplota s časom. Je to zväčšená časť predchádzajúceho obrázku. Z grafu možno odhadnúť zmeny intenzity na 4%. Rovnako som sa pokúšal zmerať fázový posun, ten mi vychádzal 81–90%. Oba tieto výsledky približne sedia s mojími, teoreticky odvodenými. Je škoda, že tieto výpočty neurobil sám Pavol, jeho výsledky by boli iste presnejšie.



Keď sa znížila tepelná kapacita na 1/10, je viditene sa zväčšila amplitúda, intenzity, od 10 do $120\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Sinusovka, ktorá je vykreslená slabšie, je graf výkonu v závislosti od času. Vidíme, že fázový posun je minimálny. Podľa teórie je priamo úmerný tepelnej kapacite, a teda mal poklesnúť na približne 45°. Z grafu vychádza hodnota asi 25°, čo je menej ako teoreticky vypočítaná hodnota.





Tu vidíme výsledky práce *Mgr. J. Chaloupky*. Podľa neho amplitúda svetelného toku dosahuje 7.5%. Amplitúda teploty je vyššia ako by mala byť, dosahuje viac ako 1000° C, ak som si správne interpretoval jeho graf úplne vľavo, pretože mu tam chýbala mierka. Bzučo

Úloha 14 – Dráti

Predstavme si takúto situáciu. Zoberme dva drôty a „nacpime“ ich do seba tak, ako je to ukázané na obrázku v zadaní. Keby sa nám to podarilo (nehovoriac o tom že to principiálne nejde), mali by sme medzi drôtmi oblasť s dvojnásobnou hustotou, ktorou by nepretekal prúd. Ono sa totiž prúdy navzájom vyrušia, pretože tečú opačne. Keď teraz vyberieme v mieste, kde netečie prúd, našu fiktívnu látku, zrejme sa nič nestane.

Najprv si zoberme prípad, keď máme jeden valcový drôt s polomerom R, ktorým tečie prúd I. Pre tento tenký drôt platí, že magn. pole vo vzdialenosti r je dané vzťahom:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}. \tag{1}$$

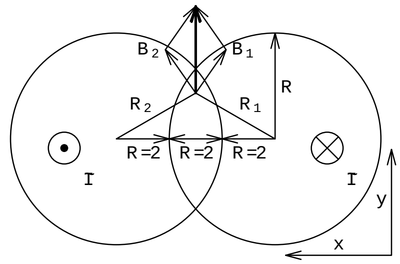
Nech má vodič polomer R, a preteká ním celkový prúd I. Zrejme cez každú ľubovoľne malú plôšku kolmú na smer prúdu preteká rovnaký prúd, ak tieto plôšky sú rovnaké. Zaveďme výraz $j = \frac{I}{S}$, kde j sa nazýva prúdová hustota. Vezmime si teraz z celého vodiča iba časť, ktorá má tiež tvar valca, a je koncentrická. Prúd pretekajúci týmto valcom bude

$$I_1 = jS_1 = I\frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \tag{2}$$

Ak chceme zistiť, ako závisí magnetické pole od polomeru, dosaďme (2) do (1), čím dostávame:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}. \tag{3}$$

Vidíme, že B nám závisí od vzdialenosti od osi priamo úmerne. Pri výpočte B vo vodiči sme na niečo zabudli. Nazapočítali sme príspevok od zvyšnej časti vodiča. Podľa Maxwella platí pravidlo, podľa ktorého keď zoberieme plochu S, ktorou preteká prúd I, tak výsledné magn. pole dané týmto prúdom je $\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$, kde B nám putuje po krivke, ktorá túto plochu ohraničuje. Keďže my sme už všetok prúd „spotrebovali“ na výpočet B podľa (3), tak potom $\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ všade. To značí, že vonkajšie časti už neprispejú k magn. poľu.



Magnetické pole v dutine bude dané súčtom magnetických polí oboch vodičov. Ak máme určiť B ako funkciu x, y, musíme ju nutne rozložiť na zložky. Keďže $\vec{B}$ je kolmý na $\vec{r}$, tak potom pre zložky $\vec{B}_x, \vec{B}_y$ platí:

$$\vec{B}_x = -B\frac{y}{r} = -\frac{\mu_0 I_y}{2\pi R^2},$$
$$\vec{B}_y = B\frac{x}{r} = \frac{\mu_0 I_x}{2\pi R^2}.$$

V každom prípade budú zrejme ypsilonové zložky y_1, y_2 rovnaké, a preto $|\vec{B}_{x_1}| = |\vec{B}_{x_2}|$. Tieto dva vektory sú ale opačne orientované, pretože podľa *Ampérovho zákona* platí

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_l \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Sami si to pomocou pravidla pravej ruky skúste na obrázku, že píšem pravdu. Toto pravidlo vychádza práve z Ampérovho zákona. Teda

$$\vec{B}_x = \vec{0}.$$

Tým istým pravidlom si môžeme overiť, že zložky $\vec{B}_y$ sa sčítajú. Tí, ktorým to nevychádza, možno robia chybu v tom, že prúd tečie vo vodičoch opačne.

Sčítajme teda $\vec{B}_{y_1}, \vec{B}_{y_2}$.

$$\vec{B}_{y_1} + \vec{B}_{y_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}(x_1 + x_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\langle\text{vzdialenosť stredov}\rangle = \frac{3\mu_0 I}{4\pi R^2} = \vec{B}_y.$$

Vidíme, že v dutine je magnetické pole homogénne, a má iba ypsilonovú zložku. Inak, nič by sa nestalo, ak by bola permeabilita iná ako μ_0, ale muselo by platiť, že permeabilita vodičov a dutiny musia byť rovnaké. Vo výsledku by sa to prejavilo iba v tom, že namiesto μ_0 by sme všade dosadili μ.

Bzučo

Úloha 15 – Kulatý stůl

Řešení naší úlohy bude zahrnovat použití prostředků, které asi ještě neznáte. Budu se ale snažit vyložit všechno tak, aby znalosti potřebné pro čtení těchto řádků nepřesahovaly učivo střední školy (rozhodně tím ale nemyslím, že to bude čtení jednoduché).

Pro dané pevné místo u stolu označme 1 stav „obsazeno“ (tj. někdo na té židli sedí) a 2 stav „volno“. Libovolné rozesazení lidí kolem stolu pak můžeme popsat jako posloupnost jedniček a dvojek, délka posloupnosti je $n+1$ (n je počet židlí u stolu) a první a poslední člen jsou stejné (tím popíšeme skutečnost, že stůl je kulatý). Všechna možná (i ta, která jsou podle zadání nepřípustná) obsazení stolu jsou pak reprezentována všemi možnými posloupnostmi

$$p_1 p_2 \dots p_{n+1}, \tag{1}$$

kde $p_i \in \{1,2\}$, $p_1 = p_{n+1}$.

Vytvořme nyní součin

$$m_{p_1 p_2} m_{p_2 p_3} \dots m_{p_n p_{n+1}}, \tag{2}$$

kde $m_{11} = 0$ a $m_{12} = m_{21} = m_{22} = 1$.

Vidíme, že pro přípustné obsazení stolu, kde vedle sebe nemohou sedět dva lidé (neboť podle zadání musí být mezi každými dvěma aspoň jedno místo volné), se v posloupnosti (1) nikde nevyskytují dvě jedničky po sobě, tedy součin (2) je roven jedné. Naopak pro nepřípustné obsazení stolu vedle sebe někde sedí dva lidé, tedy aspoň jeden člen v (2) je nulový, tedy je i celý součin (2) nulový.

Tato symbolika nám dává možnost vyjádřit počet přípustných obsazení stolu jako součet výrazů typu (2), kde se sčítá přes všechny posloupnosti typu (1).

> Uděláme teď malou odbočku, která nám pomůže vyjádřit požadovanou sumu součinů (2) jednoduše, pomocí matic. Maticí nazýváme obdélníkovou tabulku čísel, říkáme, že je typu $m \times n$, jestliže má m řádků a n sloupců. Číslo, nacházející se v matici A v i-tém řádku a j-tém sloupci, značíme a_{ij}. Symbolicky to zapisujeme $A = (a_{ij})$. Sčítání matic a násobení konstantou definujeme nejjednodušším možným způsobem $cA = (ca_{ij})$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Složitější je násobení matic: chceme-li násobit matice A a B (v tomto pořadí), musí mít A stejně sloupců, jako má B řádků. Je-li A typu $m \times p$ a B typu $p \times n$, je jejich součin $C = AB$ typu $m \times n$ a definujeme $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$, tedy vlastně skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B. Všimněte si jedné důležité věci, totiž že násobení matic není komutativní (obecně neplatí $AB = BA$). Je ale asociativní, takže lze psát $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Abyste viděli vůbec souvislost s naší úlohou, stačí snad jen říct, že koeficienty m_{ij} můžeme přehledně zapsat do matice

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teď ještě potřebujeme nějak dostat ty součiny prvků m_{ij}. Z definice součinu matic vidíme, že ij-tý prvek součinu $C = AB$ dostaneme jako součet členů $a_{ik}b_{kj}$, a to přes všechny hodnoty indexu k. Jinak řečeno, sčítáme členy $a_{p_1p_2}b_{p_2p_3}$ přes všechny posloupnosti indexů $p_1p_2p_3$ s pevnými konci $p_1 = i$, $p_3 = j$. Dokažte si sami, že ij-tý prvek součinu n matic $AB\dots Z$ je dán součtem členů $a_{p_1p_2}b_{p_2p_3}c_{p_3p_4}\dots z_{p_np_{n+1}}$, kde se sčítá přes všechny možné posloupnosti $p_1p_2\dots p_{n+1}$ s pevnými konci $p_1 = i$, $p_{n+1} = j$.

Speciálně počítejme, jak vypadá n-tá mocnina naší matice M, tj. součin $M^n = M \cdot M \cdot \ldots \cdot M$, kde M se opakuje n-krát. Sečteme-li výrazy $m_{p_1p_2}m_{p_2p_3}\dots m_{p_np_{n+1}}$ přes všechny posloupnosti $p_1\dots p_{n+1}$ s pevnými konci $p_1 = i$, $p_{n+1} = j$, dostaneme $ij-$tý prvek matice M^n. My ale chceme součet přes všechny posloupnosti, jejichž konce jsou stejné (viz (1) a (2), vzpomínáte?), navíc nám je jedno, jestli bude $p_1 = 1$ nebo $p_1 = 2$. Je už nasnadě, že hledaný součet členů (2) dostaneme jako součet prvků 11 a 22 matice M^n (n je počet židlí kolem stolu).

Dostali jsme se k výrazu typu $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, pro danou matici A, n je zde řád matice A. Tento výraz se nazývá stopa matice (značí se $\mathrm{Tr}\, A$) a je velmi důležitý (i my jeho jednoduchost a eleganci oceníme, i když jen na velmi jednoduchém příkladě). Stopa matice má mnohé jednoduché vlastnosti, které dále využijeme. Abychom mohli efektivně počítat stopu libovolné mocniny nějaké matice (to je to, co chceme), musíme zavést ještě jeden (snad ještě důležitější) pojem, a to pojem vlastního čísla a vektoru matice. Máme-li čtvercovou matici (tj. takovou, že má stejně řádků jako sloupců) typu $n \times n$, můžeme ji zprava vynásobit maticí typu $n \times 1$, čímž dostaneme opět matici typu $n \times 1$. Takovou „sloupcovou“ matici nazýváme vektorem. Konečně nenulový vektor $\vec{v}$ nazveme vlastním vektorem matice A, když existuje číslo λ tak, že

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}. \tag{3}$$

Číslo λ pak nazveme vlastním číslem matice A.

Jak najít vlastní čísla dané matice? Omezíme se jen na matice typu 2×2, na vhodném místě pak upozorním, jak by se to dalo zobecnit. Rovnici (3) přepíšeme do tvaru $(A - \lambda J)\vec{v} = 0$, kde J značí jednotkovou matici (na diagonále má jedničky a všude jinde nuly, platí $AJ = JA = A$ pro libovolnou čtvercovou matici A). Pro zkrácení označme $A_\lambda = A - \lambda J$,

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Pak máme rovnici $A_\lambda\vec{v} = 0$, neboli $(a_\lambda)_{11}v_{11} + (a_\lambda)_{12}v_{21} = 0$, $(a_\lambda)_{21}v_{11} + (a_\lambda)_{22}v_{21} = 0$. Dokažte si, že této rovnici vyhovuje nějaký nenulový vektor $\vec{v}$, právě když je splněna podmínka

$$(a_\lambda)_{11}(a_\lambda)_{22} - (a_\lambda)_{12}(a_\lambda)_{21} = 0, \tag{4}$$

což obecně napíšeme jako $\det A_\lambda = 0$ a nazýváme to charakteristickou rovnicí matice A. Rovnici (4) rozepíšeme a dostaneme

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{5}$$

Obecně bychom dostali algebraickou rovnici řádu n (řád matice), odkud je vidět důležitý poznatek: každá matice řádu n má aspoň jedno a nejvýše n vlastních čísel (neboli vlastní čísla matice jsou kořeny její charakteristické rovnice).

Využijeme-li faktu, že součet kořenů kvadratické rovnice v normovaném tvaru je roven minus koeficientu u první mocniny neznámé, dostaneme ihned (podívejte se na (5)), že součet vlastních čísel naší matice řádu 2 je roven stopě této matice (tento veledůležitý fakt opět platí obecně, dokažte si).

Teď už máme připraveno vše potřebné, abychom mohli dořešit naši úlohu o kulatém stolu. Víme již, že počet rozesazení kolem tohoto stolu je roven stopě matice M^n, dále víme, že stopa této matice je rovna součtu jejích vlastních čísel. Ale vlastní čísla matice M^n můžeme snadno najít, známe-li vlastní čísla matice M. Vzpomeňme si na definici vlastního čísla: má být $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pro nějaký vektor $\vec{v}$. Indukcí snadno dokážeme, že pak platí též $M^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$, tedy vlastní čísla matice M^n jsou n-té mocniny vlastních čísel matice M.

Zbývá už to jen dopočítat. Dosadíme naši konkrétní matici M do rovnice (5), čímž dostaneme kvadratickou rovnici $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ s kořeny

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Číslo $(1+\sqrt{5})/2$ se nazývá zlatý řez a často se značí τ; všimněte si, že $\lambda_2 = -1/\tau$.

Výsledek tedy zní: hledaný počet rozesazení kolem stolu s n židlemi je

$$\tau^n + \frac{1}{(-\tau)^n}.$$

Hezké, že?

Tolik malá exkurze do tajů lineární algebry. Pokud jste všemu v tomto textu neporozuměli, nebuďte smutní. Půjdete-li studovat na MFF UK, dozvíte se o všech těchto věcech (a spoustě dalších) v prvním semestru. A pokud vás tento článek zaujal natolik, že byste se o těch zajímavých věcech chtěli dovědět něco víc, můžeme se o tom pobavit na soustředění.

Neodpustím si ještě jednu poznámku. Možná jste si všimli, že hledané počty rozesazení jsou vlastně Fibonacciho čísla. Nabízí se myšlenka najít řešení jednodušeji, a to pomocí rekurentní formule. To se mi nepodařilo, i když není vyloučeno, že to nějak rozumně jde. Zkuste nad tím popřemýšlet, bylo by to určitě zajímavé. V každém případě ale snad uznáte, že když se z řešení, které jsem vám zde předvedl, vynechají všechny vysvětlující pasáže, tak zbude velice jednoduchá myšlenka.

Úloha 16 – Pravděpodobnost

Prof. Zdeněk Dvořák:

Označme

- x_{11} pravděpodobnost, že testovaná osoba je nakažena a test je pozitivní,
- x_{10} pravděpodobnost, že testovaná osoba je nakažena a test je negativní,
- x_{01} pravděpodobnost, že testovaná osoba není nakažena a test je pozitivní,
- x_{00} pravděpodobnost, že testovaná osoba není nakažena a test je negativní.

Pak musí platit tyto rovnice:

$$\begin{aligned} x_{00} + x_{01} + x_{10} + x_{11} &= 1, \\ x_{11} + x_{10} &= 0.05, \\ \frac{x_{11}}{x_{11} + x_{10}} &= 0.99, \\ \frac{x_{00}}{x_{00} + x_{01}} &= 0.8. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{99}{2000} = 0.0495, \\ x_{10} &= \frac{1}{2000} = 0.0005, \\ x_{01} &= \frac{19}{100} = 0.19, \\ x_{00} &= \frac{19}{25} = 0.76. \end{aligned}$$

Šance, že jste nakažen virem HIV, je $\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{01}} \doteq 0.207$.

Robert Špalek: Obecnější řešení.

Podmíněná pravděpodobnost je obvykle definována vztahem $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, neboli $P(A\cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Druhý vzorec platí vždy, i pro nulové pravděpodobnosti.

Tento vzorec ale můžeme vyjádřit i v opačném pořadí, tedy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$. Pokud porovnáme oba vzorce, dostaneme vztah

$$\begin{aligned} P(A) \cdot P(B|A) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ P(B|A) &= \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B). \end{aligned}$$

V našem případě stojíme o vyjádření

$$P(H^+|T^+) = \frac{P(H^+)}{P(T^+)} \cdot P(T^+|H^+).$$

V tomto vztahu bohužel nemáme vyčíslen jmenovatel $P(T^+)$, tedy pravděpodobnost, že test dopadne pozitivně. Musíme si pomoct dalším vztahem. Víme, že jevy H^+ a H^- jsou doplňkové, jejich sjednocení tvoří pravdivý jev. Takže můžeme rozepsat:

$$\begin{aligned} T^+ &= T^+ \cap \mathbf{True} = T^+ \cap (H^+ \cup H^-) = \\ &= (T^+ \cap H^+) \cup (T^+ \cap H^-). \end{aligned}$$

Výraz obsahuje sjednocení dvou vylučujících se jevů, takže

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+ \cap H^+) + P(T^+ \cap H^-), \\ P(T^+) &= P(T^+|H^+) \cdot P(H^+) + P(T^+|H^-) \cdot P(H^-), \\ P(T^+) &= P(T^+|H^+) \cdot P(H^+) + \bigl(1 - P(T^-|H^-)\bigr) \cdot \bigl(1 - P(H^+)\bigr), \\ P(T^+) &= 0.99 \cdot 0.05 + (1 - 0.8) \cdot (1 - 0.05), \\ P(T^+) &= 0.2395. \end{aligned}$$

Nyní snadno zjistíme, s jakou pravděpodobností jsme nakaženi:

$$\begin{aligned} P(H^+|T^+) &= \frac{0.05}{0.2395} \cdot 0.99, \\ P(H^+|T^+) &\doteq 0.207. \end{aligned}$$

Ája, Robert

Výsledková listina 5. čísla

			Témata			Úlohy						
Pořadí	**Jméno**	$\sum_{-1}$	**1**	**6**	**8**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Prof. Zdeněk Dvořák	205	5							3	8	134
2.	Prof. Jan Mysliveček	228									0	93
3.	Doc. Michal Tarana	105		5	4	3					12	75
4.	Mgr. Jiří Chaloupka	38				5	7				12	50
5.	Mgr. Stanislava Kucková	37				3				5	8	45
6.	Dr. Antonín Lejsek	90									0	44
7.	Mgr. Jitka Poláčková	30									0	30
8.	Dr. Lenka Zdeborová	90									0	28
9.–10.	Mgr. Pavel Moravec	44									0	24
	Mgr. Tomáš Svatoň	30				2					2	24
11.	Bc. Veronika Deckerová	19									0	19
12.–13.	Mgr. Pavel Augustinský	28									0	17
	Bc. Jan Novotný	13				2			2		4	17
14.	Dr. Robert Vácha	54									0	13
15.	Pavel Šanda	0					12				12	12
16.–18.	Bc. Robert Hanyš	10									0	10
	Doc. David Holec	106									0	10
	Marie Hanzlíková	9			1						1	10
19.	Mgr. Vladislav Válek	39									0	9
20.	Lada Oberreiterová	8									0	8
21.–22.	Jan Houštěk	7									0	7
	Martin Rosol	0				3	1		3		7	7
23.	Alexandr Kára	6									0	6
24.	Luboš Prchal	5									0	5
25.	Lenka Burešová	3									0	3

Výsledková listina V. ročníku

Jméno	Loni	Série 1	2	3	4	Letos	Celkem
Prof. Jan Mysliveček	135	35	33	25		93	228
Prof. Zdeněk Dvořák	79	41	33	52	8	134	213
Doc. Michal Tarana	42	13	23	27	12	75	117
Doc. David Holec	96		10			10	106
Dr. Lenka Zdeborová	62	15	13			28	90
Dr. Antonín Lejsek	46	17	11	16		44	90
Dr. Robert Vácha	41	13				13	54
Dr. Jiří Chaloupka	0	5	12	21	12	50	50
Mgr. Stanislava Kucková	0		13	24	8	45	45
Mgr. Pavel Moravec	20	10		14		24	44
Mgr. Vladislav Válek	30	9				9	39
Mgr. Tomáš Svatoň	8	13	6	3	2	24	32
Mgr. Jitka Poláčková	0	15	10	5		30	30
Mgr. Pavel Augustinský	11	5	12			17	28
Bc. Veronika Deckerová	0	10		9		19	19
Bc. Jan Novotný	0		13		4	17	17
Bc. Pavel Šanda	0				12	12	12
Bc. Marie Hanzlíková	0			9	1	10	10
Bc. Robert Hanyš	0	10				10	10
Lada Oberreiterová	0	8				8	8
Martin Rosol	0				7	7	7
Jan Houštěk	0		7			7	7
Alexandr Kára	0		6			6	6
Luboš Prchal	0			5		5	5
Lenka Burešová	0			3		3	3

Adresa redakce:
Tomáš Brauner, A1721
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha Holešovice