M&M Číslo 3 ročník V

Ahojte řešitelé,

tak tu máme další sérii. Konečně vychází v menším zpoždění, než je obvyklé. Nadále platí zadání pro 3. číslo s termínem odeslání 1. března, takže můžete začít posílat své další příspěvky.

Na počátku ledna proběhlo na Studenově zimní soustředění. V důsledku nedopatření při rozesílání pozvánek přijelo méně účastníků, než jsme očekávali. Přesto se soustředění vydařilo skvěle. Letní soustředění plánujeme doprostřed června – konečně mimo prázdniny. Můžete si začít rozmýšlet, zda byste měli o účast zájem. Pokud ano, rezervujte si svůj čas v této době, kterou ještě upřesníme.

za redakci Robert

Téma 4 – Diferenční analýza

Mgr. Tomáš Svatoň: Ten, kdo umí derivovat, nemusí se deprimovat.

Jsme rádi, že na toto téma reagovalo tolik členů naší akademické obce. Protože se většina vašich příspěvků tématicky a obsahově překrývá, jsou takovéto příspěvky otištěny pouze v jedné verzi se seznamem autorů, kteří se tématem daného příspěvku zabývali. Většina článků je převzata od *Doc. Zdeňka Dvořáka* a *Doc. Jana Myslivečka*.

Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ budeme značit $[a_i]_i$, přičemž budeme vynechávat index u závorky v případech, kdy je zřejmé, která proměnná je indexem. Reálná čísla budeme značit velkými písmeny, s výjimkou indexů a členů posloupností. Dále budeme používat tuto symboliku:

- posloupnost posunutá doleva o jeden člen: $\overline{a} = \overline{[a_i]_i} = [a_{i+1}]_i$
- konstantní posloupnost reálných čísel: $\dot{N} = [N]_i$
- diferenční posloupnost: $a_i' = a_{i+1} - a_i$
- podíl posloupností: $\frac{a}{b} = [\frac{a_i}{b_i}]_i$

Bc. Pavel Augustinský, Doc. Zdeněk Dvořák, Dr. David Holec, Alexandr Kára, Doc. Jan Mysliveček, Jan Novotný, Dr. Michal Tarana: Základní vlastnosti diference

Věta 1. *Diference konstantní posloupnosti:*

$$(\dot{C})' = \dot{0}.$$

Důkaz.

$$(\dot{C})' = [C]_i' = [C - C]_i = [0]_i = \dot{0}.$$

Věta 2. *Diference mocninné posloupnoupnosti:*

$$[i^n]_i' = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} i^j\right]_i .$$

Důkaz.

$$[i^n]'_i = [(i+1)^n - i^n] = \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^j - i^n\right] = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} i^j\right].$$

Důsledek.

$$[i]'_i = 1.$$

Věta 3. *Linearita diference:*

$$(Ka + Lb)' = Ka' + Lb'.$$

Důkaz.

$$(Ka+Lb)' = [Ka_i + Lb_i]'_i = [Ka_{i+1} + Lb_{i+1} - Ka_i - Lb_i] = K[a_{i+1} - a_i]_i + L[b_{i+1} - bi]_i = Ka' + Lb'.$$

Speciálně.

- $K = 1, L = 1 : (a+b)' = a' + b'$
- $K = 1, L = -1 : (a-b)' = a' - b'$
- $K = C, L = 0 : (Ca)' = Ca'$
- $K = -1, L = 0 : (-a)' = -a'$

Věta 4. *Diference součinu:*

$$(ab)' = a'\overline{b} + ab' = a'b + \overline{a}b'.$$

Důkaz. *(pouze pro 1. rovnost, druhá plyne ze symetrie):*

$$(ab)' = [a_{i+1}b_{i+1} - a_i b_i]_i = [b_{i+1}(a_{i+1} - a_i) + a_i(b_{i+1} - b_i] = a'\overline{b} + ab'.$$

Vzhledem k $b + b' = \overline{b}$ je $(ab)' = ab' + a'b + a'b'$.

Věta 5. *Diference podílu:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - b'a}{b\overline{b}}.$$

Důkaz.

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \left[\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} - \frac{a_i}{b_i}\right] = \left[\frac{a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1}}{b_{i+1}b_i}\right] = \left[\frac{(a_{i+1} - a_i)b_i - a_i(b_{i+1} - b_i)}{b_{i+1}b_i}\right] = \frac{a'b - b'a}{b\overline{b}}.$$

Věta 6. *Monotónost posloupností:*

$$((\forall i)(\forall j) j > i \Leftrightarrow a_j > a_i) \Leftrightarrow ((\forall i) a'_i > 0)$$
$$((\forall i)(\forall j) j > i \Leftrightarrow a_j \geq a_i) \Leftrightarrow ((\forall i) a'_i \geq 0)$$
$$((\forall i)(\forall j) j > i \Leftrightarrow a_j < a_i) \Leftrightarrow ((\forall i) a'_i < 0)$$
$$((\forall i)(\forall j) j > i \Leftrightarrow a_j \leq a_i) \Leftrightarrow ((\forall i) a'_i \leq 0)$$

Důkaz. *(pro 1. tvrzení, ostatní je obdobné):*

„$\Rightarrow$“:

$$i+1>i \Rightarrow a_{i+1}>a_i \Rightarrow a'_i = a_{i+1}-a_i>0.$$

„$\Leftarrow$“:

$$((\forall i)a'_i>0 \Rightarrow a_{i+1}>a_i) \Rightarrow a_i<a_{i+1}<\dots<a_{j-1}<a_j.$$

Důsledek. *(dle 2), 4:*

$$a' = \dot{0} \Leftrightarrow a = \dot{C}.$$

Doc. Zdeněk Dvořák: Obdoba *l'Hospitalova pravidla* (*Stolzova věta*)

Omlouváme se za špatnou formulaci obdoby *l'Hospitalova pravidla*. Tiskařský šotek zavinil vypadnutí podstatné části věty „Nechť $\lim b=\infty$ **a b je až na konečný počet členů rostoucí.**“ To, že předpoklad rostoucí posloupnosti b je oprávněný, je vidět v následujícím příkladě, kde b je oscilující posloupností.

Příklad 1. *Posloupnosti a, b:*

a_i : $a_i=\frac{i+1}{2}$.
b_i : i sudé: $b_i=\frac{i+4}{2}$.
i liché: $b_i=\frac{i+1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} b=\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b}=1$$

a'_i : $a_i=\frac{1}{2}$.
b'_i : i sudé: $b_i=-1$.
i liché: $b_i=2$.

$$\lim_{i\to\infty, i \text{ sudé}} b_i=-\frac{1}{2}$$
$$\lim_{i\to\infty, i \text{ liché}} b_i=\frac{1}{4}.$$

Tedy limita $\frac{a'}{b'}$ neexistuje, a tudíž věta bez předpokladu rostoucí posloupnosti b neplatí.

Věta 7. *Stolzova věta:*[1] *Nechť* $\lim b = \infty$ *a* b *je až na konečný počet členů rostoucí. Pak existuje-li* $\lim_{n\to\infty} \frac{a'}{b'} = K$ *(vlastní nebo nevlastní) a* $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{b} = L$, *je* $K = L$.

Lemma. *Je-li*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$$

a d_i *je až na konečný počet členů kladný a existuje-li (vlastní či nevlastní)*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = A$$

a

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n} = B,$$

je $A = B$.

Důkaz. *Provedeme sporem. Nechť* $A < B$ *(opačný případ vyšetříme stejně, položením* $c_n = -c$*). Pak existují* $A < \alpha < \beta < B$. *Vzhledem k podmínkám existuje* q_0 *tak, že pro* $n > q_0$ *je* d_n *kladné, a* q_1 *tak, že pro* $n > q_1$ *je* $\frac{c_n}{d_n} \le \alpha$. *Položíme* $q = \max(q_0, q_1)$. *Pak je pro* $n > q$ $c_n \le \alpha d_n$. *Také je*

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{c_1 + \cdots + c_q}{d_1 + \cdots + d_n} + \frac{c_{q+1} + \cdots + c_n}{d_1 + \cdots + d_n} \le \\ &\le \frac{c_1 + \cdots + c_q}{d_1 + \cdots + d_n} + \alpha \frac{d_{q+1} + \cdots + d_n}{d_1 + \cdots + d_n} = \\ &= \frac{c_1 + \cdots + c_q}{d_1 + \cdots + d_n} + \alpha \left(1 - \frac{d_1 + \cdots + d_q}{d_1 + \cdots + d_n}\right) \end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu je limita pravé strany α, *a jelikož* $\beta > \alpha$, *musí existovat* n_0 *takové, že tato pravá strana je pro* $n > n_0$ *menší než* β, *tedy i* $b_n < \beta$, *což je ovšem spor, neboť vzhledem k* $\lim b_n = B$ *má existovat* n_1 *tak, že pro* $n > n_1$ *je* $b_n > \beta$.

Důkaz věty 7. *Platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + a_1}{(b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + b_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a'_{n-1} + a'_{n-2} + \cdots + a_1}{b'_{n-1} + b'_{n-2} + \cdots + b_1}.$$

Podle lemmatu je limita tohoto výrazu rovna $\lim \frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}$, z čehož již snadno plyne dokazované tvrzení.

---

[1] V této větě použijeme rozšířené množiny reálných čísel o $\{+\infty, -\infty\}$ tak, jak je popsáno v knize *V. Jarník: Diferenciální počet II*

Bc. Pavel Augustinský, Doc. Zdeněk Dvořák, Alexandr Kára, Doc. Jan Mysliveček, Dr. Michal Tarana: Základní vlastnosti primární posloupnosti

Vzhledem k tomu, že primární posloupnost není určena jednoznačně, znamená $\int a = x$, že $\left(\int a\right) + - x = \dot{C}$ pro nějaké C.

Věta 8.

$$\int a' = \left(\int a\right)' = a.$$

Důkaz.

$$\int a' = \int [a_{i+1} - a_i]_i = [C - a_1 + a_i]_i = a + (C \mathbin{\dot{-}} a_1)$$

$$\left(\int a\right)' = [C + a_1 + \cdots + a_{i-1}]'_i = [C + a_1 + \cdots + a_i - (C + a_1 + \cdots + a_{i-1})]_i = a.$$

Z věty 8 a dokázaných vět v sekci „Základní vlastnosti diference“ snadno plynou následující věty:

Věta 9. *Linearita:*

$$\int (Ka + Lb) = K \int a + L \int b$$

s obdobnými důsledky pro speciální volby K, L.

Věta 10. *Pravidlo per partes:*

$$\int ab = b \int a - \int \left(b' \overline{\int a}\right).$$

Důkaz věty 10 obržíme z věty o diferenci součinu.

Bc. Pavel Augustinský, Doc. Zdeněk Dvořák, Doc. Jan Mysliveček: Řešení diferenčních rovnic

Věta 11. *Diferenční rovnice $a' = c$ má řešení $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i + K$, kde K je konstanta.*

Důkaz. *viz věta 8.*

Důsledek. *Speciálně pro konstantní posloupnost $c = \dot{C}$:*

$$a_n = (n-1)\dot{C} + K$$

Je vidět, že se jedná o aritmetickou posloupnost s diferencí $\dot{C}$.

Věta 12. *Diferenční rovnice $a' = ca$ má řešení $a_n = K \prod_{i=1}^{n-1} (1 + c_i)$, kde K je konstanta.*

Důkaz. *Přepišme rovnici $a' = ca$ do indexového zápisu*

$$a_{i+1} - a_i = c_i a_i$$

$$a_{i+1} = a_i(1 + c_i)$$

$$a_n = K \prod_{i=1}^{n-1} (1 + c_i)$$

Důsledek. *Pro konstantní posloupnost* $c = \dot{C}$:

$$a_n = K(\dot{C} + 1)^{n-1}.$$

Je vidět, že se jedná o geometrickou posloupnost s kvocientem $\dot{C} + 1$.

Věta 13. *Řešení lineární diferenční rovnice* $a' + pa + q = 0$. *Zavedeme substituci* $a = uv$, *kde* $v_i \neq 0$ *pro každé* i. *Pak rovnice přejde na tvar*

$$u'\overline{v} + uv' + puv + q = 0$$
$$u'\overline{v} + u(v' + pv) + q = 0$$

Zkusíme nalézt v *tak, aby platilo* $v' + pv = 0$. *Z věty 12 vidíme, že*

$$v_n = C\prod_{i=1}^{n-1}(1 - c_i).$$

Jestliže $c_i \neq 1$ *pro každé* i, *můžeme (s podmínkou* $C \neq 0$*) pokračovat dále. V případě, že* $c_i = 1$, *pak rovnice má tvar* $a_i' + a_i + q_i = 0$, *což je* $a_{i+1} = -q_i$. *Nyní máme tedy posloupnost* v *tak, že* $v' + pv = 0$, *a můžeme pokračovat řešení zjednodušené rovnice* $u'\overline{v} + q = 0$, *kde* $\overline{v_n} = C\prod_{i=1}^{n}(1 - c_i)$.

$$u'\overline{v} + q = 0$$
$$u = -\int \frac{q}{\overline{v}}$$

Čímž získáme všechna řešení ve tvaru $a = uv$. *Aleš*

Téma 5 – Spřátelená čísla

Doc. Jan Mysliveček:

Na úvod bych uvedl několik pravidel, která se hodí pro výpočet $S(n)$. Vyjádříme-li si číslo n ve tvaru

$$n = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $q_1, q_2, \dots, q_k$ přirozená čísla větší než 1. Potom lze $S(n)$ vyjádřit ve tvaru

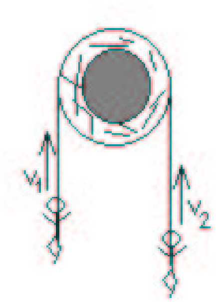
$$S(n) = \frac{p_1^{q_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{q_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{q_k+1} - 1}{p_k - 1} - p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k}.$$

Tento vztah dokážeme snadno indukcí přes k.

Dále jsem se zabýval problémem, jak nalézt dokonalá čísla. Uvažoval jsem číslo pouze se dvěma prvočísly: dvojkou a vhodným jiným. Navíc jsem uvažoval dvojku s koeficientem $q_1 = k$ tak, aby bylo $2^{k+1} - 1 = p$ prvočíslo. Potom nastane, že $\dfrac{p^2 - 1}{p - 1} = 2^{k+1}$. Výsledek je tedy původní číslo n, protože jsem dostal $S(n) = 2n - n = n$. Dokázat, že platí $\frac{p^2-1}{p-1} = 2^{k+1}$, není nijak obtížné. Stačí uvážit, že $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$ a že $p = 2^{k+1} - 1$. Protože existuje nekonečně prvočísel (myslím si[2]) ve tvaru $p = 2^{k+1} - 1$, existuje také nekonečně dokonalých čísel. To také částečně odpovídá na otázku počtu cyklů. Těch je také nekonečně mnoho pro každé k. Stačí uvažovat $a_1, a_2, \ldots, a_k$ rovné dokonalému číslu. *Ziki*

Úloha 4 – Matoušova opice

Rozhodli sme sa uvažovať všeobecne prípad, keď obe opice sa rozbehnú po lane rôznymi rýchlosťami. Teda aby to bolo trošku zložitejšie. Snáď to nebude až tak vadiť.



Zrejme platí zákon zachovania hybnosti. Tým, že sa opica začne pohybovať, tak zmení svoju hybnosť. Táto hybnosť sa prenesie na lano, a teda na druhú opicu. Predpokladajme, že lano má nulovú hmotnosť. Potom platí $\Delta p = m_1 \Delta v = m_1 v_1$ pre opicu s rýchlosťou v_1 a $\Delta p' = m_2 v_2$ pre opicu s rýchlosťou v_2. Teda výsledná hybnosť oboch opíc na lane bude $\Delta p - \Delta p' = m_1 v_1 - m_2 v_2$. To značí, že lano (a s ním aj opice) sa hýbe rýchlosťou $v_{\mathrm{kon}} = \frac{\Delta p_{\mathrm{celk}}}{\sum m} = \frac{\Delta p - \Delta p'}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ smerom k rýchlejšej opici.

Teda rýchlejšia opica ide rýchlosťou

$$v_1 - v_{\mathrm{kon}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2). \tag{1}$$

Rovnako pre pomalšiu opicu platí

$$v_2 + v_{\mathrm{kon}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2). \tag{2}$$

[2] Pozn. redakce: tato prvočísla se nazývají *Mersenova*. Úloha o jejich nekonečném počtu je myslím zatím otevřený problém.

Tieto rýchlosti sú rýchlosti vzhľadom na kladku. Predpokladajme, že na začiatku boli obe opice vo výškach h_1 a h_2. Opica 1 prejde celú dráhu za čas

$$\frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{h_1}{v_1+v_2}. \tag{3}$$

Druhá opica príde ku kladke za čas

$$\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{h_2}{v_1+v_2}. \tag{4}$$

Teraz stačí porovnať tieto časy. Pomalšia opica príde teda o $\Delta t = t_2 - t_1$. Ale to si už musíte dosadiť sami. Teraz sa položme $h_1 = h_2$, a tiež $m_1 = m_2$ (inak by sa pri zanedbaní trenia stalo, že opice by sa nehýbali a lano by zacalo zrýchlovat). Dosadením zistíte, že sa obe došplhajú za rovnaký čas.

A teraz sa pozrime na to, ako sa to bude asi správať v skutočnosti. Pre jednoduchosť predpokladajme, že výšky aj hmotnosti sú rovnaké. Ak uvážime trenie, tak trecia sila bude vždy pôsobiť proti pohybu lana, teda rýchlosť lana bude menšia ako bez trenia. To ale znamená, že rýchlejšia opica došplhá skôr. Ak má kladka nenulový moment zotrvačnosti, tak časť energie, ktoré opice konajú, sa zmení v rotačný pohyb. To za predpokladu, ak na začiatku bola uhlová rýchlosť kladky nulová. Kedže kladku treba ešte roztáčať, tak povraz sa bude pomalšie „rozbiehať“, a opäť bude hore skôr rýchlejšia opica. Pre rozličné hmotnosti a výšky sa začnú vzorce nehorázne komplikovať, a je dost tažké sa v nich orientovať. Dokial to naozaj netreba, tak to nepočítajte, alebo keď už, tak pomocou nejakých numerických metód (modelovanie na počítači apod.). V úpravách sa môžete iba ak tak pomýliť. A kludne sa môže zanedbať rozdiel grav. zrýchlení… Ešte snáď by sa dalo uvažovať o tom, že lano má určitú hmotnosť. Opäť sa nám hybnosť rozloží aj do lana, lano dosiahne rovnomernú rýchlosť až po určitom čase, a rýchlejšia opica bude prvá hore. *Štěpka a Bzučo*

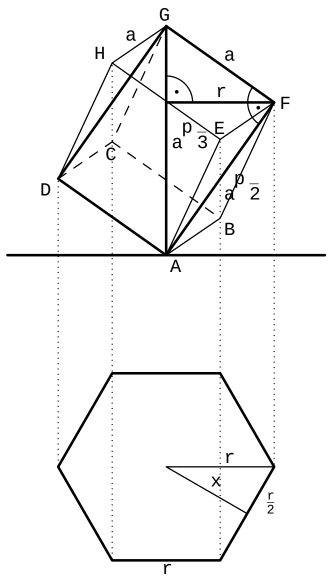
Úloha 5 – Strč krychli skrz krychli

Jako obvykle nastal při řešení úlohy problém: zadání bylo nepřesně formulováno. Kvůli tomu jsou správné obě odpovědi Ano i Ne. Kdo se nad tím zamyslel a prodiskutoval obě varianty, dostal plný počet bodů. Ten, kdo zdůvodnil pouze jednu z variant, byl také náležitě ohodnocen.

Nepřesnost byla ve formulaci tvaru díry. Zadání šlo pochopit tak, že se díra musí vyvrtat, tudíž musí mít válcový tvar, ale také tak, že nám jde o „vyražení“ díry libovolného tvaru.

Bc. Jitka Poláčková: Strč prst skrz krk, totiž strč krychli skrz krychli :-)

Otvor lze vyvrtat, jestliže lze do šestiúhelníku, který je kolmým průmětem krychle do roviny kolmé k jedné tělesové úhlopříčce, vyvrtat kruhový otvor – kterým by krychle prošla – tak, aby se nedotýkal hran šestiúhelníka (jinak by se krychle rozpadla).



Tento 6-úhelník je samozřejmě pravidelný. Vypočítáme r (poloměr kružnice 6-úhelníku opsané, ale i hrana 6-úhelníka):

$$\Delta AFG: \; S = \frac{1}{2} \cdot ra\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot a^2\sqrt{2} \qquad \Longrightarrow \; r = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vypočítáme x (poloměr kružnice 6-úhelníku vepsané):

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot a^2 &= x^2 + \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2}{3} \\ x^2 &= \frac{a^2}{2} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \; x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Průměr kružnice vepsané tomuto 6-úhelníku je roven stěnové úhlopříčce krychle, otvor tedy vyvrtat nelze, neboť by musel mít průměr právě oněch $a\sqrt{2}$ a krychle by se rozpadla.

Otvor by však šel vyříznout. Vepíšeme-li do 6-úhelníku čtverec, jeho strana je větší než a. Z obrázku plyne:

$$\text{(1)} \qquad b = 2a\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot q\cos 30^\circ,$$

$$\text{(2)} \qquad b = a\sqrt{\frac{2}{3}} + 2(1-q)a\sqrt{\frac{2}{3}}\sin 30^\circ,$$

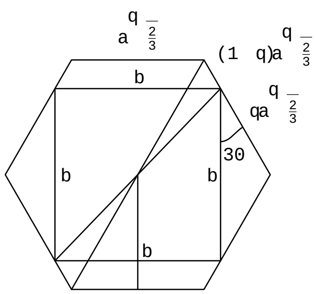
$$\text{(1)} \qquad b = 2qa\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = qa\sqrt{2} \implies q = \frac{b}{a\sqrt{2}},$$

$$\text{(2)} \qquad b = a\sqrt{\frac{2}{3}}(1+1-q) = a\sqrt{\frac{2}{3}}(2-q) =$$

$$= 2a\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{b\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}} \implies$$

$$b\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$b = \frac{2a\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \doteq 1.035a.$$



Tedy $b > a$, takže lze vyříznout takový otvor, aby se krychle nerozpadla, ale stejně velká jí prošla.

Robert

Úloha 6 – Lymyta

Tento příklad jde řešit jednoduše a pochopitelně pomocí integrálního počtu nebo složitě, ale pouze pomocí operací se sumami. Ukažme si obě řešení.

Dr. Antonín Lejsek: Odhad pomocí integrace

Pro určení limity si udělám horní a dolní odhad funkce $f(n) = 1^k + 3^k + 5^k + \ldots + (2n-1)^k$. Pro horní odhad si zvolím funkci $f_1(x) = (2x-1)^k$. Horní odhad sumy je pak

$$\int f_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2x-1)^{k+1}}{2(k+1)}.$$

Vzhledem k tomu, že každý člen posloupnosti $1^k + 3^k + \ldots + (2n-1)^k$ je větší než člen předchozí, lze pro dolní odhad použít funkci $f_2(x) = (2x-3)^k$. Počáteční $(-1)^k$ nehraje v limitě roli. Dolní odhad je pak

$$\int f_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2x-3)^{k+1}}{2(k+1)}.$$

Dosadíme odhady do limity:

- Horní odhad:

$$L(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)^{k+1}}{(k+1)x^{k+1}\cdot 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{k+1}x^{k+1}}{2(k+1)x^{k+1}} = \frac{2^k}{k+1}.$$

  Druhá úprava vyplývá z toho, že $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m} = 0$ pro $m > n$.

- Dolní odhad:

$$L(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{k+1}}{(k+1)x^{k+1}\cdot 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{k+1}x^{k+1}}{2(k+1)x^{k+1}} = \frac{2^k}{k+1}.$$

Oba odhady jsou stejné, proto $L(k) = \frac{2^k}{k+1}$. Po dosazení $k = 4$ snadno určíme $L(4) = \frac{16}{5}$.

Doc. Zdeněk Dvořák: Odvození pomocí sum

Lemma.

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^k = P_k(n),$$

kde P_k je polynom stupně právě $k+1$ a koeficient u n^{k+1} je $\frac{2^k}{k+1}$.

Důkaz (indukcí).

1. Pro $k = 0$ tvrzení platí, neboť $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$, což je polynom stupně 1 a $\frac{2^0}{1} = 1$.
2. Nechť tvrzení platí pro všechna čísla menší než k. Pak užitím binomické věty dostáváme:

$$\begin{array}{lllll}
(1+2)^{k+1} & = 1^{k+1} & +\binom{k+1}{1}1^k 2^1 & +\cdots+\binom{k+1}{k}1^1 2^k & +2^{k+1} \\
(3+2)^{k+1} & = 3^{k+1} & +\binom{k+1}{1}3^k 2^1 & +\cdots+\binom{k+1}{k}3^1 2^k & +2^{k+1} \\
\vdots & & & & \\
([2n-1]+2)^{k+1} & = [2n-1]^{k+1} & +\binom{k+1}{1}[2n-1]^k 2^1 & +\cdots+\binom{k+1}{k}[2n-1]^1 2^k & +2^{k+1}
\end{array}$$

   Povšimneme-li si, že 1.číslo v 1.sloupci je rovno 2.číslu v 2.sloupci, 2.číslo v 1.sloupci 3.číslu v 2.sloupci,…, a využijeme-li indukčního předpokladu, můžeme součet těchto rovností zapsat jako

$$(2n+1)^{k+1} = 1 + 2(k+1)P_k(n) + 2^2\binom{k+1}{2}P_{k-1}(n) + \ldots + 2^k\binom{k+1}{k}P_1(n) + 2^{k+1}P_0(n).$$

   Na obou stranách rovnosti by před zkrácením vystupoval v součtu ještě výraz $3^{k+1} + 5^{k+1} + {} + 7^{k+1} + \ldots + (2n-1)^{k+1} = \sum_{i=2}^{n}(2i-1)^{k+1}$. Tato čísla z 1. a 2. sloupce tabulky se navzájem vykrátí.

   Převedeme-li kýžený výraz na druhou stranu, odvodíme

$$2(k+1)P_k(n) = (2n+1)^{k+1} - \sum_{i=2}^{k+1} 2^i\binom{k+1}{i}P_{k+1-i}(n) - 1.$$

Polynom na pravé straně je podle indukčního předpokladu stupně $k+1$ a koeficient u n^{k+1} má 2^{k+1}, z čehož plyne dokazované tvrzení.

Podle lemmatu je

$$L(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^k}{k+1} n^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^k}{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^{i-k-1} \right) = \frac{2^k}{k+1},$$

tedy speciálně $L(4) = \frac{16}{5}$. *Ája*

Úloha 7 – Rychleji než světlo

Jan Houštěk: (upraveno a doplněno osvětlujícími poznámkami)

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že pozorovaný objekt je v počátku a pozorovatel v bodě $[R, 0]$. Složky rychlosti objektu jsou pak $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\cos\varphi$ a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\varphi$ (*pozn. pro neznalé diferenciálního počtu:* $\mathrm{d}x$ *představuje malou změnu veličiny* x*; pokud by vám to mělo činit potíže, představte si prostě* Δx). Objekt, který je v čase t vzdálen od pozorovatele r, zaznamená pozorovatel v čase $t' = t + \frac{r}{c}$ (signál se pohybuje rychlostí světla). Pozorovaná tečná rychlost je pak $v_t = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}$ (*pozn.: rychlost, kterou naměříme, tedy není skutečná rychlost objektu, ale je dána tím, za jak dlouho k nám dojde světlo od objektu, vyslané jím z různých míst*). Vyjádříme $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t + \frac{1}{c}\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}x = -v\cos\varphi \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = v\sin\varphi\ \mathrm{d}t$. Po dosazení dostáváme:

$$v_t = \frac{v\sin\varphi}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}.$$

Pozn. *toto je výsledek, který jsem po vás chtěl, zbytek už je jen diskuse tohoto vztahu.*

Označíme-li $\beta = \frac{v}{c}$, $\beta_t = \frac{v_t}{c}$, pak

$$\beta_t = \frac{\beta\sin\varphi}{1 - \beta\cos\varphi}. \tag{1}$$

Pozn. *jestliže se k nám objekt přibližuje, tj.* $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right)$, *pak světlo, které objekt vyšle v pozdějším čase, musí urazit kratší dráhu, než světlo vyslané dříve. Výsledkem je zdánlivé zvětšení rychlosti objektu, jak názorně ukazuje vzorec (1).*

Z (1) snadno vyjádříme β jako funkci β_t a φ (viz obr. 1, resp. obr. 2 – závislost v polárních souřadnicích β a φ):

$$\beta = \frac{\beta_t}{\sin\varphi + \beta_t\cos\varphi} = \frac{\beta_t}{\sqrt{1+\beta_t^2}\sin(\varphi + \operatorname{arctg}\beta_t)}. \tag{2}$$

Protože je (jak se lze přesvědčit) β_t rostoucí v β, lze podmínku, aby pozorovaná rychlost byla větší než β_0, psát ve tvaru $\beta > \beta_0/(\sin\varphi + \beta_0\cos\varphi)$, speciálně pro rychlost světla ($\beta_0 = 1$) máme:

$$\beta > \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}.$$

Minimální rychlost β_{min}, pro kterou lze ještě pozorovat tečnou rychlost β_t, dostaneme zřejmě pro takové φ, pro které nabývá $\sin(\varphi + \operatorname{arctg}\beta_t)$ ve jmenovateli (2) maximální hodnoty 1, tedy $\varphi = \operatorname{arccotg}\beta_t$. Pak je $\beta_{min} = \beta_t/(\sqrt{1+\beta_t^2})$. Protože β_t je rostoucí v β, je zároveň β_t maximální tečná rychlost, kterou lze pozorovat objekt pohybující se rychlostí β_{min}, tedy, vyjádříme-li β_t (viz obr. 3):

$$\beta_{t,max} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3}$$

Je zajímavé, že pro $\beta \to 1$ roste $\beta_{t,max}$ nade všechny meze. lze tedy teoreticky pozorovat libovolně vysokou tečnou rychlost β_t.

Nyní uvažujme případ dvou těles, která se pohybují od sebe stejnou rychlostí β, jedno pod úhlem $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (jeho pozorovanou tečnou rychlost označme β_{t1}), druhé tedy pod úhlem $\pi - \varphi$ (tečná rychlost β_{t2}). Pro tyto rychlosti podle (1) platí:

$$\beta_{t1} = \frac{\beta \sin\varphi}{1 - \beta\cos\varphi}, \qquad \beta_{t2} = \frac{\beta \sin\varphi}{1 + \beta\cos\varphi}.$$

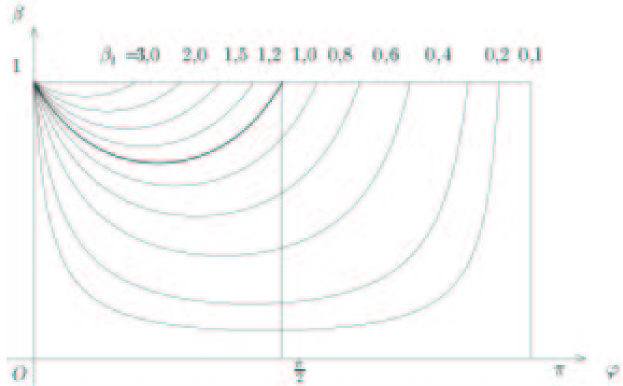
Snadno vyjádříme, že $\frac{1}{\beta_{t1}} + \frac{1}{\beta_{t2}} = \frac{2}{\beta\sin\varphi}$ a $\frac{1}{\beta_{t2}} - \frac{1}{\beta_{t1}} = \frac{2}{\operatorname{tg}\varphi}$. Odtud již dostáváme:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta_{t1}\beta_{t2}}{\beta_{t1} - \beta_{t2}} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4 + \left(\frac{1}{\beta_{t1}} - \frac{1}{\beta_{t2}}\right)^2}}{\frac{1}{\beta_{t1}} + \frac{1}{\beta_{t2}}}. \tag{4}$$

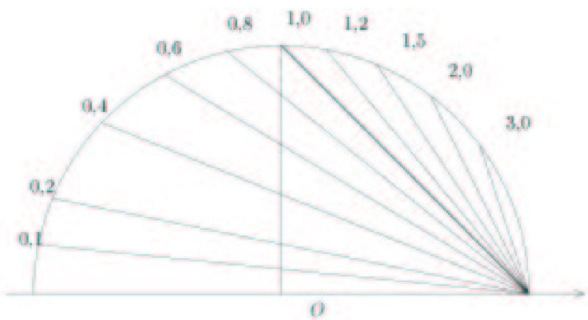
Že se nejedná jen o teoretickou hříčku, lze ukázat na měření z roku 1994 provedená na radiových vlnách emitovaných složeným zdrojem z naší Galaxie. Přijímač byl naladěn na široké pásmo radiových vln, jejichž vlnové délky jsou několik centimetrů. Dva objekty se pohybovaly od společného centra, které se předpokládalo pevné. Vzdálenost k centru byla stanovena na $R = 12{,}5$ kpc.

Úhlová rychlost objektů byla změřena na $7{,}9\,\mathrm{mas/den}$ a $17{,}3\,\mathrm{mas/den}$ (as – v astronomii používaná zkratka pro úhlovou vteřinu). Snadno dopočítáme, že zdánlivé rychlosti jsou $\beta_{t1} = 1{,}25$ a $\beta_{t2} = 0{,}57$. Užitím (4) dostaneme $\beta = 0{,}87$ a $\varphi = 64°$.

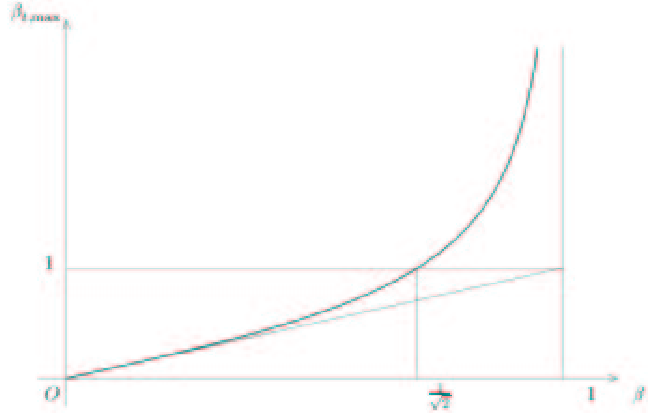
A perličku nakonec. Vzorec (1) lze velmi pěkně interpretovat graficky. Označme X koncový bod vektoru $\vec{v}$ rychlosti objektu. Dále na ose x vezměme bod $C[c, 0]$. Ještě označíme X' průsečík přímky CX s osou y. Pak je $v_t = |OX'|$. Je dobře vidět, že pro $v \ll c$ je přímka CX skoro rovnoběžná s osou x, v_t je pak y-ová složka $\vec{v}$.


β
1
$\beta_1 = 3{,}0$ 2,0 1,5 1,2 1,0 0,8 0,6 0,4 0,2 0,1
O
$\frac{\pi}{2}$
π
φ

Obr. 1


0,8 1,0 1,2
0,6 1,5
2,0
0,4
3,0
0,2
0,1
O

Obr. 2



Obr. 3

Komentář. *Jan Houštěk byl bohužel jediný, kdo tuto úlohu vyřešil. Většina z vás se snažila počítat úhlovou rychlost objektu po obloze za předpokladu, že během pozorování oběhne dostatečně velký úhel. Pak jste předpokládali, že astronom počítá úhlovou rychlost jako jakousi střední hodnotu – vezme celkový uražený úhel po obloze a vydělí jej celkovou pozorovací dobou. Složku rychlosti objektu kolmou ke spojnici se Zemí pak najde jako součin této úhlové rychlosti a vzdálenosti objektu na začátku pozorování (když už objekt oběhl dostatečně velký úhel, tak se jeho vzdálenost od Země mohla taky podstatně změnit). Žádaný výsledek tak sice skutečně vyšel, ale poněkud nesprávným způsobem. Při měřemí je totiž třeba brát vždy tak krátký časový interval, aby vypočtenou rychlost bylo možno považovat za okamžitou, nehledě na to, že vzhledem k velké vzdálenosti objektu by se astronom asi dost načekal, než by onen objekt po obloze oběhl tak velký úhel (viz. konkrétní úhlové rychlosti řádu mas/den).*

Tomáš

				Témata			Rekreačky					
Pořadí	**Jméno**	**Škola**	$\sum_{-1}$	**2**	**4**	**5**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc. Zdeněk Dvořák		120		24			1	5	3	33	74
2.	Doc. Jan Mysliveček		170		16	9	3		3	2	33	68
3.	Dr. Michal Tarana		55	3	8	7	5				23	36
4.–5.	Dr. Lenka Zdeborová		77				5	3	3	2	13	28
	Dr. Antonín Lejsek		63				5	2	4		11	28
6.	Bc. Jitka Poláčková		15					6	4		10	25
7.	Mgr. Tomáš Svatoň		21		2			4			6	19
8.–9.	Bc. Pavel Augustinský		16		12						12	17
	Jiří Chaloupka		5				5	3	3	1	12	17
10.–12.	Dr. Robert Vácha		54								0	13
	Stanislava Kucková		0				1	5	5	2	13	13
	Jan Novotný		0		4		5	4	0		13	13
13.–16.	Bc. Robert Hanyš		10								0	10
	Bc. Veronika Deckerová		10								0	10
	Dr. David Holec		96		4		1	0	5		10	10
	Mgr. Pavel Moravec		30								0	10
17.	Mgr. Vladislav Válek		39								0	9
18.	Lada Oberreiterová		8								0	8
19.	Jan Houštěk		0							7	7	7
20.	Alexandr Kára		0		6						6	6

Uzávěrka 4. čísla M&M:[3] **1. března 1999**

Adresa redakce:

Tomáš Brauner, A1721
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha Holešovice

[3] Zadání bylo vydáno spolu se zadáním 2. série, všichni byste ho měli mít u sebe, takže ho nebudeme znovu přetiskovat.