M&M číslo 5 ročník 4

Ahojte řešitelé!

Konečně vyšlo poslední číslo předchozího ročníku, na které jste tak dlouho čekali! Nám nezbývá než se co nejupřímněji omluvit za toto trestuhodné nedopatření. Zavinil jsem to hlavně já, protože jsem ke konci zkouškového období měl akutní nedostatek času a během prázdnin se nevyskytoval doma. Doufám, že kvůli tomu nezanevřete na celý časopis a budete do něj dopisovat i během dalších ročníků...

Časový stres se podepsal i na opožděném vydání tohoto čísla. Některé z dodaných článků mají velký rozsah a nebylo by dostatečně efektivní je všechny opisovat. Prosíme proto o prominutí, že na některých místech je uveden na tyto články pouhý odkaz.

Na konci čísla se nalézají dvě výsledkové listiny – jedna obvyklá pro 5. sérii a jedna shrnující celoroční práci dopisovatelů.

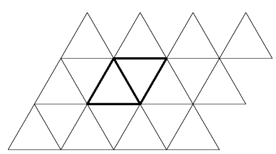
Přejeme vám krásný nový školní rok a doufáme, že jste si užili prázdnin jaksepatří.

za redakci Robert Špalek

Téma 3 – Dláždění

Mgr. Lenka Zdeborová: oprava poznámky redakce

V časopise je uváděn protipříklad – dláždění z trojúhelníkových dlaždiček, které mělo mít základní síť složenou z šestiúhelníků. Tato chybná úvaha vychází z omylu, že základní dlaždicí je trojúhelník. Podle definice „*... základní dlaždici lze posunout tak, aby splývala postupně s každou svou sousední dlaždicí ...*“ není trojúhelník základní dlaždice. Za tuto můžeme ztotožnit spojení 2 sousedních trojúhelníkových dlaždiček:



Základní síť nemůže tedy být z 6-úhelníků, neboť to nedovoluje definice. Uvedený protipříklad tedy bude zařazet do hierarchie takto:

1. Základní dlaždice je rovnoběžník
2. Základní síť je čtyřúhelník, skupina I
3. Čtyřúhelníky jsou rovnostranné, I_8

Poznámka. *Redakce se samozřejmě omlouvá za špatnou interpretaci tvrzení. Trojúhelníkové dláždění je výše uvedeným způsobem skutečně korektně popsáno.*

Prof. Pavol Habuda: Analýza dláždění

Autor napsal vyčerpávající článek, který však bohužel z časových důvodů nebudeme přetiskovat.

Téma 5 – Pokus R. P. Feynmana

Doc. Jan Mysliveček:

Tento celkem 6 stran čítající článek vytištěný v TEXu bohužel **nebyl** dodán na disketě, takže by bylo velice náročné jej celý přepsat. Proto tímto prosím autora, aby alespoň do dalšího ročníku dodal jeho zdrojový kód, článek pak samozřejmě velice rádi přetiskneme.

Prof. Pavol Habuda: Segnerovo koleso

Tento příspěvek opět není z časových důvodů přetiskován.

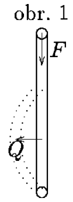
Téma 6 – Totální destrukce

Bc. Michal Tarana:

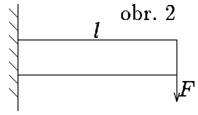
Autor rozdělil svůj příspěvek na několik článků:

1. Pružný vzpěr

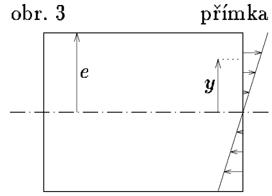
obr. 1



obr. 2



obr. 3



Mějme svislou tyč, upevněnou do kloubů, která je dolů tlačena silou o velikosti F. Tlakem ze strany Q (viz obr. 1) se sice vychýlí, ale po jeho odstranění se opět vrátí do původní polohy. Až když F dosáhne tzv. vzpěrnou hodnotu a značné K (???, *pozn. redakce*), tyč se už po malém vybočení tlakem Q nenarovná, zůstane ohnutá. Když F vzroste nad K, vybočí tyč sama a už se nenarovná. Až po určité F je tedy prohnutí nulové, po překročení K přejde stabilní rovnováha ve vratkou. Ohybová vzpěrná síla je

$$K = \frac{\pi^2 EJ}{L^2},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J moment setrvačnosti průřezu, L délka tyče. Napětí při K je

$$\sigma_K = \frac{K}{S} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 S} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

kde S je plocha průřezu, $\lambda = L\sqrt{\frac{S}{J}}$ tzv. štíhlost.

Literatura: *J.Krutina:* Přehled technické mechaniky

2. Pevnost v ohybu

Zaujal mě článek *Tomáše Svatoně* o ohýbání tyče. Protože autor neuvedl literaturu, ze které čerpal, ani bližší popis použitých vztahů, dovolil bych si ho doplnit.

Mějme nosník podle obr. 2, který je upevněný jedním koncem ve stěně. Na druhém konci ve vzdálenosti $l = 1\,\mathrm{m}$ visí zátěž $m = 20\,\mathrm{kg}$. Horní vlákna nosníku jsou namáhána v tahu, dolní v tlaku. Protože tah i tlak jsou kolmé na průřez, je ohybové napětí σ. Dále vzniká i smykové napětí τ, protože vlákna budou mít tendenci posouvat se proti sobě. Uprostřed mezi tahem a tlakem je místo bez napětí, tato místa leží na tzv. neutrální ose. V praxi bude přibližně platit, že napětí bude lineárně závislé na vzdálenosti od neutrální osy.

Teď se pokusím odvodit ohybovou rovnici za těchto omezení:

(a) Původně rovný příčný řez nosníkem zůstane rovný i po ohybu.
(b) Prodloužení jsou úměrná napětí.
(c) Pevnost v tahu a tlaku je stejná.
(d) Vnitřní síly na myšleném příčném řezu dávají dvojici sil, jejíž moment je roven ohybovému momentu M_o.
(e) Průřez je souměrný podle osy x, ležící v rovině ohybového momentu M_o.
(f) Smyk τ zanedbáváme.

Na ploše $\mathrm{d}S$ ve vzdálenosti y od osy (obr. 3) působí napětí σ. Podmínkou rovnováhy je, že součet všech napětí na ploše průřezu je nulový.

$$\int_S \sigma\,\mathrm{d}S = 0 \tag{1}$$

Totéž platí pro momenty sil:

$$\int_S y\sigma\,\mathrm{d}S = M_o \tag{2}$$

Ve vzdálenosti e je napětí $\sigma = \sigma_e \frac{y}{e}$. Dosazením do (1) a (2) dostaneme

$$\int_S \sigma_e \frac{y}{e}\,\mathrm{d}S = \frac{\sigma_e}{e}\int_S y\,\mathrm{d}S = 0 \Longrightarrow \int_S y\,\mathrm{d}S = 0.$$

$$\frac{\sigma_e}{e}\int_S y^2\,dS = M_o \tag{3}$$

Víme, že $\int_S y^2\,\mathrm{d}S$ je moment setrvačnosti. Pak (3) přejde do tvaru

$$M_o = \frac{\sigma_e}{e} J = \sigma_e W,$$

kde $W = \frac{J}{e}$ je tzv. moment odporu. Napětí na krajních vláknech nesmí překročit mez ohybu σ_{mez}. Odtud dostaneme ohybovou rovnici

$$M_o \leq W\sigma_{mez}.$$

Z toho vidíme, že *Tomáš Svatoň* vlastně spočítal max. sílu, kterou můžeme působit na tyč s daným profilem, aby se trvale nedeformovala.

Literatura: *J.Krutina:* Přehled technické mechaniky

3. Triboluminiscence

Triboluminiscence je jev, který můžeme pozorovat např. při drcení krystalů suchého cukru ve tmě, kdy budeme pozorovat jasné světelné záblesky. Obecně lze říci zhruba toto: konáním mechanické práce při drcení jsme krystalu dodali určitou excitační energii, která způsobila přechod valenčních elektronů na vyšší energetické hladiny (viditelný obor spektra odpovídá přibl. energiím 1.3 až 3.1 eV). V excitovaném stavu vydrží elektron asi 10^{-3} s, potom tuto energii vyzáří formou fotonu.

Při drcení krystalu částečně „stlačíme“ některé molekuly, čímž se jejich atomy navzájem přiblíží. Tím se zvětší jejich vzájemná potenciální energie. Po překročení meze pevnosti krystalu tento praskne, čímž se uvolní „tlak“ na molekuly, atomy se opět vzdálí a tím získají energii. Tím se excitují a tuto energii pak mohou vyzářit ve formě světla. Další látkou s podobnými vlastnostmi je např. $UO_2(NO_3) \cdot 6H_2O$.

4. Smykové dislokace

Uvažujme kov, který má jednoduchou kubickou krystalickou strukturu. Takové kovy jsou obecně velmi měkké, protože se dají lehce navzájem posouvat jednotlivé vrstvy krystalu. Vzájemným posunem vrstev atomů může dojít k poruše krystalové mříže, tzv. smykové dislokaci. Tato dislokace se může volně pohybovat v krystalu, protože se přesunuje pohybem jednotlivých atomů a na posun jednoho atomu stačí vykonat malou práci. Ale při setkání dvou dislokací se tyto mohou zaseknout a zastavit. Tím vzniká pevnost nedokonalých krystalů. Malá koncentrace příměsi v železe dislokace znehybní a železo je pevné. Čistá měď je měkká. Když ji ohneme, vznikne mnoho dislokací, které navzájem interferují. Tím měď zpevní. Jiné dislokace hrají roli např. při růstu krystalů.

Prof. Pavol Habuda: Den pro šakala?

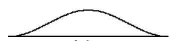
Rád bych polemizoval s kolegou *Bc. Taranom* o jeho příspěvku. Myslím si, že použitá literatura nebyla velmi spolehlivá. Když střela opustí hlaveň, její chrakteristiky (hybnost, energie) jsou prakticky stejné ve vzdálenosti 1 m i 10 m. Neexistuje žádný rozumný argument, proč by se kulka chovala rozdílně při rozstřelení hlavy (jestliže samozřejmě uvažujeme shodné lebky, což může být problém). Experiment jsem bohužel pro nedostatek pokusných vzorků nevykonal, takže to s jistotou tvrdit nemohu.

Je zajímavé, že doma vyrobená kuš má větší průraznost než malorážka. Porovnával jsem jejich účinky z hlediska hloubky zaboření do smrkového dřeva – tu střela vyhrála, ale kuš rozbila 8 mm tlusté sklo, zatímco malorážka (kdybyste ji viděli, věděli byste, proč se jí říká „sebevrah“) ne. Experimentoval jsem i se vzduchovkou, ale diabolka obyčejný zavařeninový pohár neprostřelila – diabolka se odrazila a zůstala z ní jen placka.

Když si prohlížíte sklo, které je naprasknuté, protože do něj někdo hodil kámen, vidíte zřetelné dlouhé čáry, které jsou povětšinou koncentrické (Chladniho obrazce?). Kámen sklo rozvibroval a to v místech interference naprasklo. Ovšem střela, která sklo prostřelí, nechá za sebou jen malou dírku (šoková destrukce – takto se mi například podařilo vyrobit prudkým trhnutím z litinové tyčky tyčku, která byla 7× delší a nebyla vůbec poškozená), a koncentrické paprsky jsou doplněné koncentrickými kružnicemi. Střela nejenže rozvibrovala sklo, ale protože také velmi rychle rotuje, v místě vletu působila na sklo vrutem („kroutila“ některé vrstvy), což by mohlo vysvětlovat jejich vznik.

Prof. Pavol Habuda: Drcení cukru – „dóm"

Položte si kostku cukru na podlahu a postupně zvětšujte tlak na ni. V určitém okamžiku křupne a rozpadne se (intermolekulární síly už neudrželi kostku pohromadě). Když však zdvihnete předmět, který tlačil na cukr, občas se na něm objeví „dóm". Existence „dómu" je sama o sobě velmi zvláštní. Zdá se, jako by to byl nerozdcený cukr. Jenže jeho meze pevnosti je o dva až tři řády menší než σ_p kostky cukru. Pokoušel jsem se jeho σ_p změřit, ale nepodařilo se mi to. Když postupně zvětšujete sílu, kterou tlačíte na „dóm", on nám jakoby teče, chová se jako velmi viskózní kapalina (med). Rozpad kostky cukru provází křupnutí, rozpad „dómu" ne.



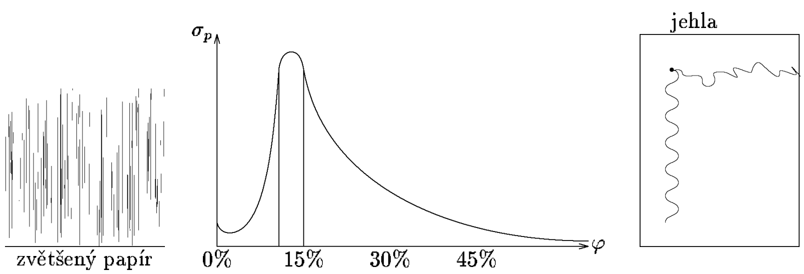
dóm

Vysvětlení. U kostky cukru jsou síly soudržnosti molekulového původu a domnívám se, že u dómu jsou to síly původu mechanického. Zřejmě prudkým rozpadem kostky cukru byl vyvinut velký tlak ($p = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, p je hybnost) na rozdrcené vrstvy. Zatímco ale okrajové vrstvy mohly uniknout doboku, střed zůstal pod stálým tlakem. Tento tlak stlačil cukr natolik, že původní kostku cukru – vlastně cukr krystal – rozdrtil na cukr moučku a tlakem slisoval – vrazil jednotlivá zrnka do sebe. Zatímco původní cukr měl zrnka velikosti řádově desetin mm, dóm obsahoval krystalky asi o řád menší. Tato zrnka drží pohromadě jen tlakem, který byl na ně vyvinut. Argument, že drží pohromadě jen díky nepravidelnostem povrchu, neobstojí, protože dóm držel na použité lakované desce pevně. Během mých pokusů byla pravděpodobnost vzniku dómu asi 60% a svou úlohu hrál možná i fakt, že tlak vyvíjený na původní kostku cukru byl vždy jen o několik desetin procenta větší než σ_p cukru.

Prof. Pavol Habuda: Papír

- Proč papír, když ho necháte blízko ohně, zkřehne a třepí se?

  Odpověď: Soudržnost papíru je podmíněná existencí vodíkových vazeb, které spojují jednotlivé vlákna celulózy. Když papír ohříváme, voda se vypařuje a tedy zanikají vodíkové vazby. Na základě svých výzkumů, které jsem prováděl loni pro TMF, zobrazuji závislost σ_p na vlhkosti papíru. Udivující je, že minimum $\sigma_p = \frac{m_{\text{vody}}}{m_{\text{papíru}}+m_{\text{vody}}}$ nenastává pro $\varphi = 0$, nýbrž pri $\varphi \approx 2$–3%. Normální papír má vlhkost v oblasti, kde je σ_p maximální.



- Zkuste si napnout mikrotenový obal z magnetofonové kazety. Když do něj píchnete jehlu a prudce zatáhnete, po několika pokusech najdete směr, ve kterém se obal netrhá, ale ve kterém za sebou jehla vytváří čáru podobnou sinusovce. Napadly mě dva efekty, které toto mohou způsobovat.

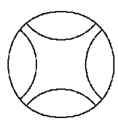
1. Směr, ve kterém jev nastává, je stejný jako směr potisku. To by mohlo poukazovat na to, že se tu uplatňuje neizotropnost materiálu. Např. papír je také neizotropní materiál. Zkuste ho trhat podélně a příčně (kancelářská A4). V podélném směru se trhá hladce, v příčném ne. Je to způsobené právě dlouhými vlákny celulózy, jak jsem uvedl v minulém ročníku M&M. Obal byl zřejmě válcovaný, což způsobilo jeho neizotropnost, vlákna polymeru se uspořádaly.
2. Nějakým způsobem se tu uplatnily i kmity. Předchozí odstavec nevysvětluje, proč se vytvářejí sinusovky a ne přímé čáry. Když zatáhneme jehlu směrem dolů, nikdy to nebude přesně rovnoběžně se směrem vláken. Je celkem možné, že vlákna nejsou rovnoběžné a dlouhé od jednoho okraje k druhému. V tom případě, že se jehla vychýlí na jednu stranu, začne příčně kmitat a protože ji vlákna nepustí, nepřetrhne je. Pak by vznikla křivka, která se sinusovce podobá.

Prof. Pavol Habuda: Rezonance poháru

V literatuře se často uvádí, že pohár je možno rozbít zvukem hudebního nástroje či zpíváním tónu. Podařilo se mi najít v *Matematicko-fyzikálních rozhledech 2. číslo ročníku 1947/48* článek popisující velmi jednoduchý experiment, který se dá vykonat i ve školní laboratoři.

Na tónový generátor a zesilovač připojme reproduktor a vytvořme zvukovod, který nám bude generovat rovinnou vlnu dopadající na pohár. Když budeme postupně zvyšovat frekvenci TG, v určitém okamžiku se vytvoří na dně poháru *Chladniho obrazce*. Pokud je intenzita zvuku dostatečná, pohár se rozbije. Pokud do poháru nalejeme vodu, v místech kmiten se vymršťují drobné kapičky vody do výšky.

Frekvence a intenzita potřebná na rozbití pohára závisí hlavně na tvaru a tloušťce poháru a na druhu skla. Při pokusech bylo zjištěno, že vlastní frekvence poháru je vždy menší než budící frekvence. Pohár praskne i tehdy, je-li naplněn vodou, ale to vyžaduje větší intenzitu.



Chladniho obrazec

Téma 7 – Grafy

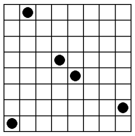
Dr. Zdeněk Dvořák: Počet stromů na n vrcholech, Ověření izomorfismů

Bc. Michal Tarana: Grafy a kombinatorika

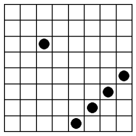
Redakce se opět omlouvá za nepřetiskování článků z časových důvodů. Pro zájemce doporučujeme velmi knihu autorů *Matouška a Nešetřila*: Kapitoly z diskrétní matematiky.

Téma 8 – Šachovnice

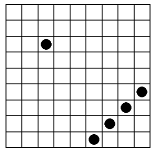
obr. 1



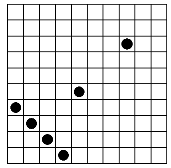
obr. 2



obr. 3



obr. 4

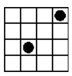


Bc. Vladislav Válek nalezl řešení pro šachovnici 8×8 (viz obr. 1). Dále nalezl pokusně minimální počet dam potřebných pro pokrytí šachovnice $n \times n$ pro $n = 1, 2, \ldots, 9$. Pro tato n uvádí počty dam $1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5$. Odtud usoudil, že počet dam d bude menší než n (rozměr šachovnice) a s rostoucím n se bude poměr $\frac{d}{n}$ zmenšovat.

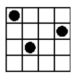
Tomáš Svatoň nalezl jiné řešení pro šachovnici 8×8 (viz obr. 2). Dále nalezl řešení pro šachovnice 9×9, 10×10 (viz obr. 3,4). Domnívá se, že obecně bude platit pro minimální počet dam potřebný k pokrytí šachovnice $p = \frac{n}{2} + 1$ pro n sudé, pro n liché bude počet stejný jako pro $n - 1$.

Pozn. redakce. *Tento vztah zřejmě není správný, stačí vzít případy $n = 2, 3, 4$, kdy stačí po řadě $1, 1, 2$ dámy.*

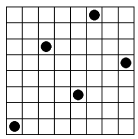
obr. 5



obr. 6



obr. 7



Komentář. *Zajímavější by bylo hledat minimální počet dam takový, aby dámy pokrývaly celou šachovnici, aby se ale zároveň navzájem neohrožovaly. Tento případ se může lišit od situace zkoumané Bc. Válkem a Svatoněm. To lze nahlédnout např. pro $n = 4$, kdy jsou třeba dvě (event. ohrožující se) dámy, resp. tři dámy, které se nesmějí ohrožovat (viz obr. 5,6). Úlohu pro $n = 8$ lze opět řešit s pěti dámami, viz obr. 7.*

Prof. Pavol Habuda se pokusil zkoumat umísťování všech druhů figur. Nejzajímavější výsledky vyzkoumal u králů a pěšáků:

Král: Pro tabulky 1×1, 2×2 a 3×3 stačí jeden král. Pro 4×4 jsou potřeba už 4 králové. Problém se zde redukuje na pokrytí roviny čtverci 3×3. Protože na pokrytí osy x potřebujeme $\lceil \frac{x}{3} \rceil$ úseček délky 3 a na osu y potřebujeme $\lceil \frac{y}{3} \rceil$ úseček délky 3, tak na pokrytí šachovnice $n \times n$ nám určitě postačí $\lceil \frac{n}{3} \rceil^2$ čtverců 3×3, což pro $n \to \infty$ odpovídá $\frac{n^2}{9}$.

Pěšák: Vynechejme pro jednoduchost při braní pravidlo *en passant*. Na ohrožení poslední řady je třeba umístit do předposlední řady $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pěšáků (na střídačku systémem $01100110 \ldots 0110$). Induktivně do každé předchozí řady musíme umístit dalších $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pěšáků. Na ohrožení celé šachovnice potřebujeme tedy $(n-1)\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pěšáků.

Úloha 8 – Kondenzátor, II.

Prof. Pavol Habuda:

Podle doplněného zadání z minulého čísla má platit (zákon zachování energie)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{Q^2}{2C_2}.$$

Kdyby bylo $C_1 = C_2$, dospěli bychom k fyzikálně nepřijatelnému výsledku. Proto se domnívám, že $C_1 \neq C_2$.

Na počátku mějme jen dvě desky. Kdyby tvořily kondenzátor, který není žádným způsoben spojený, tak by se přitahovaly, až by spadly na sebe. Proto musí být kondenzátor spojený nějakým dielektrickým drátem. Desky se přitahují silou $F = \frac{Q^2}{2S\varepsilon}$, přičemž předpokládáme platnost vztahu $C = \frac{S\varepsilon}{d}$.

Nechť nyní vletí elektron do kondenzátoru někde ve středu desek. Elektron bude přitahovaný ke kladné desce silou $\vec{F}_1$, od záporné bude odpuzovaný silou $\vec{F}_2$. Když se elektron přesune blíž ke kladné desce, tak se situace změní. Zřejmě (*mně to zřejmé není, pozn. opravovatele*) $F = F_1 + F_2$; $F_1 \neq F_2$, tj. desky se budou víc přitahovat. Díky Hookovu zákonu se drát prodlouží, desky se k sobě malinko přiblíží a tím se zmenší potenciální energie kondenzátoru. Rozdíl energií se částečně změní na teplo v drátu, zbytek je energie dodaná elektronu.

Mgr. Lenka Zdeborová:

Zákon zachování energie samozřejmě platí, háček je v tom, že poté, co elektron proletí kondenzátorem a dostane se do nekonečna, bude mít opět energii $\frac{1}{2}mv_0^2$, a ne $\frac{1}{2}mv_1^2$ ($v_1 > v_0$). Intenzita el. pole vně kondenzátoru totiž není nulová. Když elektron vyletí z kondenzátoru, je blíže ke kladné desce než k záporné. Kladná deska ho bude brzdit, a proto bude mít elektron v nekonečnu opět rychlost v_0.

Shrnutí. *podstata toho, proč není porušen žádný zákon, je v tom, že vně kondenzátoru není nulová intenzita el. pole a kondenzátor na elektron nepůsobí jen když prolétá mezi jeho deskami. Tedy hlavně je nesprávný předpoklad, že složka rychlosti ve směru $\vec{v}_0$ je konstantní. To neplatí, protože elektron není pořád stejně daleko od obou desek.*

Pozn. redakce. *Podle mne víc vystihuje podstatu věci řešení navržené Mgr. Lenkou Zdeborovou. Nepotřebuje totiž zavádět nějaké dodatečné předpoklady u uspořádání soustavy. Podle řešení Prof. Pavla Habudy by výsledná rychlost elektronu mohla záviset na tom, z jakého materiálu je „drát“ vyroben, a to je určitě zvláštní. Na druhé straně to, že pole kondenzátoru je i vně kondenzátoru nenulové, je zcela přirozené, ve standardních výpočtech se používá pouze určité přiblížení.*

Malý teoretický dodatek. *Určité typy silových polí mají tu vlastnost, že když obejdeme nějakou uzavřenou křivku, tak celková práce vykonaná silami pole je nulová; pro zasvěcence*

$$\oint \vec{F}_{\mathrm{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$

Snadno pak lze dokázat, že práce, kterou vykonají síly pole při posunutí po nějaké křivce, nezávisí na tvaru této křivky, ale jen na jejím počátečním a koncovém bodu.

Taková pole se nazývají konzervativní, nebo taky potenciálová (to proto, že v nich lze zavést potenciál). Je to např. gravitační pole či pole elektrické (nepohybující se hmoty, resp. náboje). Příkladem nekonzervativních sil jsou např. síly tření – působí totiž vždy proti směru pohybu, a proto i při obejití po uzavřené křivce vykonají kladnou práci. V našem případě je pole kondenzátoru konzervativní, a tedy (přibližně, protože elektron a kondenzátor se ovlivňují navzájem) práce vykonaná na elektronu nezávisí na cestě, po které elektron prošel, ale jen na jeho počáteční a koncové poloze. Je tedy stejná (tj. nulová), jako kdyby elektron kondenzátorem vůbec neproletěl a prošel mimo něj.

Úloha 9.3 – Věčný věkový problém

V minulém časopise jsme vytiskli 2 řešení s rozdílnými výsledky. Je zřejmě, že alespoň jedno z nich je špatně. Přišly nám 2 příspěvky, které zdůvodňují, proč je vzorové řešení opsané z knížky *Zábavná matematika* špatné.

Mgr. Lenka Zdeborova, Mgr. Antonín Lejsek:

1. První krok řešení je pořádku. Věk druhého je v tomto okamžiku x, prvního $2x$, rozdíl věků je x.
2. Autor píše, že věk prvního bude tvořit $\frac{9}{4}$ počtu let, kterého by druhý dosáhl v okamžiku uvedeném pod bodem 1. Toto číslo je naprosto nesprávné, neplyne nijak ze zadání úlohy.
   Ve skutečnosti věk prvního bude tvořit $\frac{9}{16}$ dvanáctinásobného věku prvního v okamžiku 1: $\frac{9}{16} \cdot 12 \cdot 2x = \frac{27}{2}x$. Věk druhého je o x menší, tedy $\frac{25}{2}x$.
3. Nynější počet let prvního je $\frac{15}{16}$ počtu let druhého v okamžiku uvedeném v bodu 2, tj. $\frac{15}{16} \cdot \frac{25}{2} = \frac{375}{32}x$. Věk druhého je o x menší, tj. $\frac{343}{32}x$.
   Dohromady je jim 86 let, tzn. $343x + 375x = 32 \cdot 86$, $x = \frac{1376}{359}$.
   Prvnímu je tedy nyní $\frac{375}{32}x = 44\frac{329}{359}$ let a druhému $\frac{343}{32}x = 41\frac{30}{359}$ let.

Tento výsledek souhlasí s výsledkem *Dr. Štěpánky Kučkové* a většiny ostatních.

Úloha 10 – Rtuťová kapka

Prof. Pavol Habuda, Bc. Michal Tarana:

Tlak je na celé stykové plošce s podložkou konstantní, takže kapka působí na podložku silou

$$F = p \cdot S = \left(h\rho g + \frac{2\sigma}{R}\right) \cdot \pi r^2. \tag{1}$$

Tato síla je způsobená dvěma složkami. Jednak silou tíhovou, jednak silou povrchového napětí.

$$F = mg + F_\sigma = mg + 2\pi r\sigma \sin\gamma, \tag{2}$$

kde γ je stykový úhel mezi povrchem kapky a podložkou. Spojením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$\left(h + \frac{2\sigma}{R\rho g}\right)\pi r^2 - \frac{2\pi r\sigma \sin\gamma}{\rho g} = V$$

$$V = \pi r^2\left[h + \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{R} - \frac{\sin\gamma}{r}\right)\right] \tag{3}$$

Spočtěme teď stykový úhel γ:

1. Pro $r \gg h$ platí podle Ilkovičovy Fyziky, str. 273

   $$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1 - \cos\gamma)},$$

   odkud

   $$\sin\gamma = \frac{h^2\rho g}{2\sigma}\sqrt{\frac{4\sigma}{h^2\rho g} - 1} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow V = \frac{2\sigma\pi r^2}{R\rho g} + \pi r^2 h\left(1 - \frac{h}{r}\sqrt{\frac{4\sigma}{h^2\rho g} - 1}\right) \tag{4.1}$$

2. Pro $h \gg r$ je $2R \approx h$, tedy

   $$V = \pi r^2\left(h - \frac{2\sigma \sin\gamma}{\rho g r}\right) \tag{4.2}$$

Obecně úhel γ zřejmě závisí na hodnotách h, r, R; přesněji γ je konstantní, závislé jsou na sobě parametry h, r, R. Samotné γ značně závisí na kvalitě povrchu.

Pozn. *Oba autoři poslali téměř stejné řešení, včetně několika detailů. Vzhledem k tomu, že jsou ze stejné školy, je pravděpodobné, že na řešení pracovali společně. Udělené body jim tedy byly spravedlivě rozděleny napůl.*

Úloha 11 – Vrtulník

Na vrtulník působí gravitační síla $F = mg$. Pokud ho chceme udržet ve vzduchu, musíme tuto sílu nějak kompenzovat, tj. vytvořit sílu opačného směru a stejné velikosti. Nechť hlavní vrtule tlačí pod sebe vzduch a vzduch prošedší vrtulí, tak z původní nulové rychlosti (je bezvětří) získá rychlost v. Tedy změna hybnosti prošedšího vzduchu je $\mathrm{d}p = v\mathrm{d}m$, kde $\mathrm{d}m$ je hmotnost prošlého vzduchu za elementární časový okamžik $\mathrm{d}t$. Je-li S plocha vrtule a ρ hustota vzduchu, můžeme $\mathrm{d}m$ vyjádřit jako $\mathrm{d}m = \rho S v \mathrm{d}t$. Sílu, která způsobuje tuto změnu hybnosti, můžeme určit ze vztahu

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S v^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho S v^2. \tag{1}$$

Touto silou působí hlavní vrtule na vzduch a vzduch podle zákona akce a reakce působí na vrtuli silou opačnou. Položíme-li tuto sílu rovnou síle přitažlivé

$$\rho S v^2 = mg, \tag{2}$$

můžeme určit, jakou rychlost musí vrtule vzduchu udělovat, aby se vrtulník udržel ve vzduchu. Tedy $v = \sqrt{\frac{mg}{\rho S}}$. Nyní určíme výkon motoru podle vztahu $P = Fv$. F je síla, kterou motor působí na vzduch a která je podle předpokladu (2) rovna síle gravitační, a v je rychlost udělovaná vzduchu. Výkon motoru pak v závislosti na parametrech vrtulníku vychazí

$$P = \sqrt{\frac{m^3 g^3}{\rho S}}. \tag{3}$$

Pokud se změní velikost vrtulníku na polovinu, pak hmotnost se zmenší na osminu a velikost vrtule na čtvrtinu. Odpovídající změna výkonu bude podle (3)

$$P_{1/2} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{8}m)^3 g^3}{\rho(\frac{1}{4}S)}} = \frac{\sqrt{2}}{16}P.$$

Výkon polovičního vrtulníku tedy klesne na $\frac{\sqrt{2}}{16}$ výkonu normálního vrtulníku.

Úloha 12 – Odpočinkové úlohy

1. *Šachovnice*

   Jezdec nemůže obeskákat celou šachovnici. Dokážeme to jednoduchou úvahou:

   i. Na šachovnici 8×8 je 32 bílých a 32 černých políček. Odebereme-li jedno (např. černé), zbyde nám pouze 31 černých polí.
   ii. Jezdec začíná na protějším rohu, tzn. také na černém poli.
   iii. Jezdec se libovolným skokem (2 pole dopředu a 1 pole doboku) přenese na pole opačné barvy. Takže posloupnost políček bude nutně: ČBČBČBČB…
   iv. Jezdec má za úkol obeskákat celou šachovnici, tj. provést 62 skoků. Posloupnost políček tedy bude tvaru ČBČB…ČBČBČ, tzn. černých polí navštíví o jedno více než bílých.
   v. To není možné, neboť bílých polí je více než černých.

Poznámka. *Tato metoda nám samozřejmě nedokazuje, že jezdec nemůže obeskákat šachovnici začínaje na bílém poli.*

2. *Nekonečný zlomek*

$$X = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \frac{1}{2+4+6+8} + \dots$$

Při řešení tohoto příkladu je nutno použít několika matematických triků, které se vám určitě budou někdy hodit.

i. Upravíme si jmenovatele zlomků podle známého vzorečku pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$2+4+6+\ldots+2n = 2(1+2+3+\ldots+n) = 2\frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1).$$

ii. Zlomek $\frac{1}{n(n+1)}$ rozepíšeme na parciální zlomky. Pro ty, co tuto metodu neznají, podotýkám, že se dá dokázat, že existují konstanty A, B takové, že $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$. Konkrétní hodnoty konstant zjistíme dosazením.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \\ 1 &= A(n+1)+Bn \\ 1 &= n(A+B)+A \end{aligned}$$

Tato rovnice může být pro každé n splněna pouze tehdy, pokud $A = 1, B = -1$. Jak snadno ověříme, platí rovnost $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

iii. Nyní spárujeme sousední členy částečného součtu řady

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

iv. Takže pro každé konečné n je částečný součet prvních n členů řady roven $X = 1 - \frac{1}{n+1}$. Zajímáme-li se o to, kolik je součet celé řady, tedy, co se děje se součtem, pokud $x \to \infty$, tak je zřejmé, že zlomek $\frac{1}{n+1}$ bude mít limitu 0.

v. Součet celé řady je tedy $X = 1$.

3. *Zlatý řez*

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Dohodněme se nejprve, že odmocniny ve výrazu budeme chápat ve smyslu definice, tj. $\sqrt{x} = y$ právě tehdy, když $y^2 = x$ a $y \geq 0$. Takže $\sqrt{x} \geq 0$.

Předpokládejme, že nekonečný aritmetický výraz je korektně definován (což vlastně není pravda, neboť standardní aritmetika pracuje pouze s konečnými výrazy) a má konečnou hodnotu x. Pokud má mít celý vzorec smysl, nesmí se jeho hodnota změnit po přidání další odmocniny (protože už tak nekonečná řada odmocnin se navenek nijak nezmění).

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} = \sqrt{1+x}$$

$$x = \sqrt{1+x}$$

$$x^2 = 1+x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Zápornou hodnotu můžeme vyloučit, takže $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, což je hodnota zlatého řezu.

Pokud bychom naopak brali všechny odmocniny jako záporné, tak by vyšlo řešení $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Lehce ověříme, že pokud k tomuto číslu přičteme jedničku, lze jej odmonit a dostaneme to samé x.

Zamyšlení. *Nabízí se otázka k zamyšlení, co by se stalo, kdybychom občas vzali odmocninu jako kladnou a občas jako zápornou. Pak by hodnota výrazu závisela silně na tom, jak odmocňujeme. Ale to se nemůže stát, protože:*

Jakmile se byť jen jednou rozhodneme pro kladnou odmocninu $\sqrt{x}$, pak $1+\sqrt{x} > 1$, takže $|\sqrt{1+\sqrt{x}}| > 1$. V dalším kroku už nemůžeme vzít odmocninu zápornou, neboť by nám (i po přičtení jedničky) vzniklo záporné číslo, které v reálném oboru nelze odmocnit. V každém dalším kroku už můžeme odmocňovat pouze v kladných číslech a po nekonečném počtu kroků se jedna záporná odmocnina na začátku „ztratí“.

Závěr. *Pokud všechny odmocniny bereme v záporném smyslu, pak* $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$*, pokud je jediná odmocnina kladná, pak* $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. *Trezor*

Každý problém se z počátku zdá těžký a tento jistě není vyjimkou. Proto zvolme klasický zbabělý postup – zabývejme se něčím podobným, ono to nějak dopadne.

Úloha. *Mějme* N *lidí, mezi nimiž každá* $(n-1)$*-tice nemá klíč od alespoň jednoho zámku, přesněji řečeno každá* $(n-1)$*-tice od jiného. Nechť* $n \geq 2$. *Kolik je potřeba zámků?*

Řešení. *Je potřeba* $\binom{N}{n-1}$ *zámků. Zdůvodnění je jednoduché: Má-li nemít každá* $(n-1)$*-tice klíč od jednoho (a to různého) zámku, musí být počet zámků rovný nebo větší než počet* $(n-1)$*-tic, to jest* $\binom{N}{n-1}$*. Najdeme-li nějaké takové rozdělení klíčů, bude to i maximální nutný* *počet. Takové rozdělení ale získáme, pokud si vypíšeme všechny $(n-1)$-tice a a v každé z nich „zakážeme“ všem jejím členům jeden zámek. Takže každému člověku přidělíme klíče od zámků, které nemá „zakázané“.*

Když jsme tak zdárně vyřešili tuto úlohu, zkusme se zamyslet, zda by se nám její řešení nehodilo na náš problém:

Uvažujeme stále případ $n \geq 2$. To, že každá $(n-1)$-tice nesmí mít klíč od alespoň jednoho zámku, je zřejmé (jinak by existovala $(n-1)$-tice, která by byla schopna otevřít trezor). Zbývá dokázat, že každé $(n-1)$-tici chybí jiný klíč. Proveďme to sporem. Pokud by dvěma $(n-1)$-ticím chyběl stejný klíč, existovala by n-tice, která nemá klíč od daného zámku, což je ale ve sporu s tím, že každá n-tice je schopna otevřít všechny zámky.

Takže počet zámků je

$$\binom{N}{n-1}. \tag{1}$$

Zbývá nám už pouze dopočítat počet klíčů. Kdyby měl každý ředitel klíč od každého zámku, byl by počet klíčů rovný počtu ředitelů krát počet zámků: $N\binom{N}{n-1}$. Každý člen každé $(n+ -1)$-tice má ale zakázaný jeden zámek, celkový počet zakázaných zámků je tedy roven počtu členů $(n-1)$-tice krát počet $(n-1)$-tic: $(n-1)\binom{N}{n-1}$. Celkový počet klíčů je tedy

$$N\binom{N}{n-1} - (n-1)\binom{N}{n-1} = (N-n+1)\binom{N}{n-1}. \tag{2}$$

Obsah klíčenky jednoho ředitele tedy čítá

$$\frac{N-n+1}{N}\binom{N}{n-1} \tag{3}$$

klíčů s emblémem nových a dokonalých Windo(w)s 98.

Ještě rozeberme případ $n = 1$: ten je triviální, stačí jeden zámek, od něhož má každý klíč. Vidíme také, že rovnice (1), (2) a (3) můžeme zobecnit i pro tento případ.

Výsledková listina pro 5. číslo časopisu

				Témata						Rekreačky			Odpoč.12					
Pořadí	**Jméno**	**Škola**	$\sum_{-1}$	**3**	**5**	**6**	**7**	**8**	**R8**	**9**	**10**	**11**	**1**	**2**	**3**	**4**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Prof. Pavol Habuda	4.B,GVOZa	232	10	7	20		10	2		2	5	1	2	2		61	148
2.	Dr. Zdeněk Dvořák	VI.A,GNovéM	57				8					5	1	2	2	4	22	79
3.	Doc. Jan Mysliveček	3.A,GKJB	130		20									2	3		25	65
4.	Mgr. Lenka Zdeborová	3.A,GPlzeň	43	3					4	3			1	2	2	4	19	62
5.	Mgr. Antonín Lejsek	5B/6,GKoje	34							3				2	3	4	12	46
6.	Bc. Michal Tarana	1.C,GVOZa	17			12	6				2		1	1	3		25	42
7.	Mgr. Robert Vácha	3.A,GJihl	41														0	41
8.	Mgr. Petr Zima	4.A,GKlad	39														0	39
9.	Dr. Jan Holeček	3.A,GKJB	94														0	38
10.	Dr. David Holec	3.A,GKJB	93												3		3	35
11.	Bc. Vladislav Válek	GVset,sexta	19					3				5	1	1	1		11	30
12.	Mgr. Jiří Chaloupka	kvinta,GŽidlo	26														0	26
13.	Mgr. Martin Netolický	3.B,GMedl	20											2			2	22
14.–17.	Mgr. Jan Prokleška	oktáva B,GZlín	21														0	21
	Dr. Ondřej Přibyla	3.A,GKJB	91														0	21
	Mgr. Tomáš Nečas	3.B,GKJB	21														0	21
	Mgr. Karel Kyrian	3.A,GBudě	21														0	21
18.–19.	Mgr. Martin Wokoun	3.A,GKJB	20														0	20
	Mgr. Pavel Moravec	3.A,GKJB	20														0	20
20.	Dr. Štěpánka Kučková	4.E,GArab	66														0	18
21.	Bc. Václav Kučera	3.A,GSmích	17														0	17
22.	Bc. Svatava Stehlíková	sexta,GHust	14														0	14
23.	Bc. Jozef Gajdoš	4.A,SPŠS Žil	13														0	13
24.–25.	Bc. Pavel Augustinský	V.B,GHavíř	11														0	11
	Bc. Jiří Vábek	kvinta,GŽďár	11														0	11
26.	Bc. Luboš Dostál	septima,GStříb	10														0	10
27.	Lenka Kučerová	septima,GJičín	9														0	9
28.–29.	Tomáš Svatoň	1.,SPŠStav	4					4						0			4	8
	Dr. Václav Račanský	3.A,GKJB	87														0	8
30.	Kristína Kováčiková	4.,GNovéM	7														0	7
31.–34.	Peter Hunana	4.,GBystr	5														0	5
	Alena Kovárová	3.A,GBlava	5														0	5
	Karel Honzl	3.,GPodb	5														0	5
	Juraj Fedor	4.,GBystr	5														0	5
35.–38.	Lucie Petráčková	4.L,GStraš	4														0	4
	Miroslav Černý	3.,GKutn	4														0	4
	Andrea Svinková	?,GUhHr	4														0	4
	Mgr. Jarmila Mulačová	4.,GMlBol	29														0	4
39.	Braňo Bača	4.,GDubni	3														0	3
40.	Petr Nachtigall	?,?	0											2			2	2

Celoroční výsledková listina

celé jméno			dříve	č. série				letos	celkem
				1	2	3	4		
Prof.	Pavol	Habuda	145	23	30	34	61	148	293
Doc.	Jan	Mysliveček	90	10	14	16	25	65	155
Dr.	David	Holec	61	11	5	16	3	35	96
Dr.	Jan	Holeček	56	15	23			38	94
Dr.	Ondřej	Přibyla	70	11		10		21	91
Dr.	Václav	Račanský	79	8				8	87
Dr.	Zdeněk	Dvořák	0	9	23	25	22	79	79
Dr.	Štěpánka	Kučková	48	6		12		18	66
Dr.	Lenka	Zdeborová	0	12	13	18	19	62	62
Mgr.	Antonín	Lejsek	0	9	15	10	12	46	46
Mgr.	Michal	Tarana	0		5	12	25	42	42
Mgr.	Robert	Vácha	0	5	15	21		41	41
Mgr.	Petr	Zima	0	10	29			39	39
Mgr.	Vladislav	Válek	0	6		13	11	30	30
Mgr.	Jarmila	Mulačová	25	4				4	29
Mgr.	Jiří	Chaloupka	0	8	6	12		26	26
Mgr.	Martin	Netolický	0	4	11	5	2	22	22
Mgr.	Tomáš	Nečas	0	12	7	2		21	21
Mgr.	Karel	Kyrian	0	14	7			21	21
Mgr.	Jan	Prokleška	0	3	7	11		21	21
Mgr.	Martin	Wokoun	0	11		9		20	20
Mgr.	Pavel	Moravec	0	4		16		20	20
Bc.	Václav	Kučera	0	8	9			17	17
Bc.	Svatava	Stehlíková	0	4	7	3		14	14
Bc.	Josef	Gajdoš	0		13			13	13
Bc.	Pavel	Augustinský	0	3	8			11	11
Bc.	Jiří	Vábek	0	5	6			11	11
Bc.	Luboš	Dostál	0	10				10	10
	Lenka	Kučerová	0	7	2			9	9
	Tomáš	Svatoň	0		1	3	4	8	8
	Kristýna	Kováčiková	0			7		7	7
	Alena	Kovarová	0	5				5	5
	Juraj	Fedor	0	5				5	5
	Peter	Hunana	0	5				5	5
	Karel	Honzl	0	5				5	5
	Lucie	Petráčková	0	4				4	4
	Andrea	Svinková	0	4				4	4
	Miroslav	Černý	0	4				4	4
	Braňo	Bača	0	3				3	3
	Petr	Nachtigall	0				2	2	2