M&M číslo 2 ročník IV

Milí řešitelé,

tak jsme vydali 2. sérii. Nenajdete v ní výsledky soutěže o logo našeho semináře. Ty budou vyhodnoceny v některé z příštích sérií. Do té doby můžete posílat další náměty.

Důrazně vás upozorňujeme na změnu adresy semináře. Novou adresu najdete na poslední straně pod výsledkovou listinou.

Zimní soustředění možná proběhne, možná ne. Záleží to na vašem zájmu. Předpokládaná cena za týdenní pobyt v Jizerských horách je asi 800,- Kč. Chaloupku je potřeba zaplnit celou, takže tam musí jet asi 25 lidí včetně organizátorů. V každém případě nám napište okamžitě, zda byste tuto cenu byli ochotni zaplatit, a také nám sdělte co nejrychlejší spojení na vás (nejlépe telefon nebo e-mail).

Rádi bychom vás upozornili na změnu množiny opravovatelů semináře. Množina byla sjednocena s podmnožinou množiny loňských řešitelů o prvcích *Prof. Tomáš Brauner*, *Dr. Aleš Přívětivý* a *Bc. Ivana Čapková*.

Jistě by vás zajímal také výklad záhadných symbolů ve výsledkové listině. $\sum_{-1}$ je součet všech bodů řešitele za všechny ročníky, po které řeší seminář, kromě poslední série. Podle tohoto součtu se určují tituly – každý je v časopise oslovován titulem, který doposud získal, a součet bodů pro tituly se mění až po vydání časopisu. $\sum_0$ je obyčejný součet za tuto sérii a konečně $\sum_1$ je součet všech bodů za tento ročník. Podle tohoto součtu je také tříděna výsledková listina.

vaši opravovatelé

Téma 1 – Neukončená čísla

V celém článku označujeme neukončená čísla $A = \ldots a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$.

Karel Kyrian, Luboš Dostál, Doc. Pavol Habuda: Kritérium existence inverzního čísla

Je zřejmé, že pokud cifra na řádu jednotek $a_0 \in \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$, tedy $2|a_0$ nebo $5|a_0$, pak inverzní číslo nemůže existovat. Po násobení libovolným číslem bude v desítkové soustavě cifra jednotek vždy násobkem 2 nebo 5, protože cifra jednotek výsledku je dána vztahem $c_0 = a_0 b_0 \bmod 10$. Nemůže tedy nikdy vyjít jednička.

V dalším článku popisujícím algoritmus výpočtu inverzního čísla dokážeme, že pro ostatní čísla inverzní číslo vždy existuje.

Karel Kyrian, Luboš Dostál, Doc. Pavol Habuda: Výpočet inverzního čísla

Nechť A, B jsou násobená čísla a $C = 1$ je výsledek násobení. Chceme pro zadané A vypočítat B tak, aby $AB = C = 1$.

Cifra na n. řádě je dána vztahem $c_n = (\sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i} + z_n) \bmod 10$, kde z_n je přenos do n. řádu. Přenos do řádu jednotek $z_0 = 0$. Ve vyšších řádech je $z_{n+1} = (\sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i} + z_n)$ div 10. Vztah pro výslednou cifru můžeme upravit na tvar $c_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{n-i} + a_0 b_n + z_n\right) \bmod 10$.

Tento tvar má jednu výhodu: při výpočtu n. cifry výsledku je použito cifer $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ a cifry b_n. To znamená, že cifru b_n můžeme přehodit na druhou stranu a vztah řešit jako rovnici. Nejprve vypočítáme cifru b_0, pak jejím dosazením cifru b_1, pak dosazením cifer b_0, b_1 získáme cifru b_2 atd…Ukažme, že za předpokladu uvedeném v předchozím článku má rovnice vždy řešení.

$$\begin{aligned} c_n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{n-i} + a_0 b_n + z_n\right) \bmod 10 \\ 0 &\equiv \sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{n-i} + a_0 b_n + z_n - c_n \pmod{10} \\ a_0 b_n &\equiv c_n - \sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{n-i} - z_n \pmod{10} \\ b_n &\equiv a_0^{-1}\left(c_n - \sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{n-i} - z_n\right) \pmod{10} \end{aligned}$$

Dostali jsme jednoznačný vztah pro b_n za předpokladu, že existuje inverzní prvek vzhledem k násobení číslem a_0 modulo 10. Jak si asi každý zkusil, tento inverzní prvek skutečně pro vhodná a_0 existuje, neboť $1 \cdot 1 \equiv 1$, $3 \cdot 7 \equiv 1$, $9 \cdot 9 \equiv 1$. Po každém výpočtu cifry spočítáme i odpovídající přenos a můžeme pokračovat.

Upravíme ještě vztah pro požadované číslo $C = 1$, tedy $c_0 = 1$, $c_i = 0$ pro $i \geq 1$.

$$\begin{aligned} & b_0 = \left(a_0^{-1} c_0 - z_0\right) \operatorname{div} 10 = \mathrm{a}_0^{-1} \\ n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad & b_n = \left(-a_0^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{n-i} + z_n\right)\right) \operatorname{div} 10 \end{aligned}$$

Luboš Dostál: Výpočet inverzního čísla pro čísla přirozená

Pro přirozená čísla existuje jistý vztah mezi dělením v oboru racionálních čísel a dělením v našem oboru.

Nejprve najděme cifru $b_0 = a_0^{-1}$, opět musí být cifra a_0 vhodná. Pak zjistíme podíl v oboru racionálních čísel $d = b_0/A$, který nám vytvoří periodické racionální číslo $d = 0,\overline{bcd\ldots hij}$. Tvrdím, že pak neukončené číslo $B = A^{-1} = \overline{bcd\ldots hij}\,b_0$. Tento postup vyhovuje pro všechna přirozená čísla kromě trojky, pro kterou platí $3^{-1} = \overline{6}7$. Důkaz:

$$\begin{aligned} (\overline{bcd\ldots hij}\,b_0)a &= (\overline{bcd\ldots hij}\,0 + b_0)a = \\ &= \overline{9}\,C\,0 + D\,1 = \overline{0}\,1 = 1, \\ \text{protože } 1 = da &= 0,\overline{bcd\ldots hij}\,a = (0,bcd\ldots hij + 0,000\ldots000\,\overline{bcd\ldots hij})a \\ &= [D-1],999\ldots99C + 0,000\ldots00D = D, \end{aligned}$$

což prý plyne z postupu.

Karel Kyrian, Luboš Dostál: Hledání kořene rovnice $x^2 = x$

Nechť $C^2 = C$. Vytvořme soustavu rovnic pro jednotlivé cifry, která bude mít vhodný tvar, tj. bude ji možno řešit od jednotkových cifer výše postupně. Označme si podobně jako v předchozích článcích z_n přenos do n. řádu.

$$
\begin{aligned}
c_0 &= c_0^2 \bmod 10, \\
n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad c_n &= \left(\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} + z_n \right) \bmod 10 = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} + 2c_0 c_n + z_n \right) \bmod 10 \\
0 &\equiv \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} + c_n(2c_0 - 1) + z_n \pmod{10} \\
c_n(1 - 2c_0) &\equiv \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} + z_n \pmod{10} \\
c_n &= \left((1 - 2c_0)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} + z_n \right) \right) \bmod 10
\end{aligned}
$$

Vidíme, že každá další cifra je jednoznačně definována, pokud existuje inverzní prvek k číslu $1 - 2c_0$. Pokud by k němu inv. prvek neexistoval, už by nebylo řešení jednoznačné, přesto by ale eventuálně mohlo existovat, kdyby byla pravá strana rovnice nulová nebo násobek $1 - 2c_0$. Vyřešme ale raději nejprve rovnici $c_0 = c_0^2 \bmod 10$. Jediná řešení jsou $\{0, 1, 5, 6\}$. Čísla $1 - 2c_0 \bmod 10$ jsou po řadě $1, 9, 1, 9$, jejich inverzní prvky jsou rovněž $1, 9, 1, 9$.

Vidíme, že se diskuzemi nemusíme vůbec zabývat, neboť každé zvolení c_0 vede k jednoznačnému řešení. Tabulka řešení je následující:

c_0	C
0	0
1	1
5	...23230896109004106619977392256259918212890625
6	...76769103890995893380022607743740081787109376

Luboš Dostál: Bádání nad vlastnostmi nekončených čísel

Pro bádání nad touto strukturou potřebujeme dokázat, že je to komutativní okruh, tj. že jeho aritmetické operace splňují jisté podmínky. Konkrétně je to u *sčítání* komutativita $a+b = b+a$, asociativita $a+(b+c) = (a+b)+c$, existence neutrálního 0 a inverzního $-a$ prvku a u *násobení* komutativita $ab = ba$, asociativita $a(bc) = (ab)c$ a existence neutrálního prvku 1. Dále musíme dokázat distributivitu těchto operací $(a + b)c = ac + bc$.

Dalším úkolem je ověřit, zda je tento okruh tělesem, tj. zda v něm existuje pro každé nenulové číslo prvek inverzní a^{-1}, nebo alespoň oborem integrity, což znamená, že pokud je součin 2 čísel nulový, musí být aspoň jedno z čísel nulové, čili $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$.

Pro operaci sčítání není potřeba se podrobněji rozepisovat. Zapíšeme-li si vztah pro n. cifru výsledku, ověříme ihned, že je komutativní i asociativní, stejně jako okamžitě rozeznáme existenci neutrálního a inverzního prvku.

Podobně je možno ověřit vztahy i pro násobení. Vztah pro n. cifru výsledku je $c_i = (\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} + z_i) \bmod 10$, kde z_n je opět přenos do n. řádu $z_0 = 0$, $n \geq 0 \Rightarrow z_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ div 10. Je zřejmé, že operace je komutativní. U asociativity to již tak zřejmé není, také to autor ani neuvedl. Distributivní zákon zůstal rovněž nepovšimnut.

Velmi důležité je tvrzení, že okruh NENÍ ani oborem integrity. Z výše uvedených článků vyplývá existence netriviálního řešení rovnice $x^2 = x$, tedy $\exists x : x \neq 0, x \neq 1, x(x-1) = 0$, což znamená, že existují dvě nenulová čísla $x, x-1$, jejichž součin je nula. To nám naprosto rozboří obvyklou metodiku řešení rovnic, např. kvadratických, které obvykle upravíme na součinový tvar a předpokládáme, že alespoň jeden součinitel musí být nulový.

Mezi netriviálními řešeními x_1, x_2 rovnice $x^2 = x$ existuje jistý vztah. Zavedeme-li si do rovnice substituci $x = 1 - y$, dostáváme

$$\begin{aligned}(1-y)^2 &= 1-y\\ 1-2y+y^2 &= 1-y\\ y^2 &= y,\end{aligned}$$

z čehož plyne, že pokud je x řešením rovnice, pak i $1-x$ je řešením rovnice. Netriviální řešení jsou právě dvě, tedy $x_1 + x_2 = 1$.

Pokud umíme v našem oboru odmocňovat čísla, je možné řešit i rovnici $x^2 = ax$. Zavedeme-li si substituci $x = az$, dostáváme $a^2z^2 = a^2z$, tedy $z^2 = z$, kterou už umíme vyřešit.

Lineární rovnice $ax + b = 0$ se řeší vztahem $x = a^{-1}(-b)$, pokud a^{-1} existuje. Otázka je, nalezneme-li tímto postupem opravdu všechna řešení.

Druhá odmocnina může existovat pouze z čísel, které končí na $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Pokud bude existovat jedna odmocnina, musí existovat alespoň dvě, neboť $x^2 = a \Rightarrow (-x)^2 = a$. Dalším tématem vašeho bádání může být algoritmus výpočtu nějaké odmocniny.

Luboš Dostál: Interpretace některých neukončených čísel

Čísla tvaru $\overline{999}a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ je možno interpretovat jako záporná celá čísla, čísla tvaru $\overline{000}a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ jsou samozřejmě obvyklá čísla přirozená.

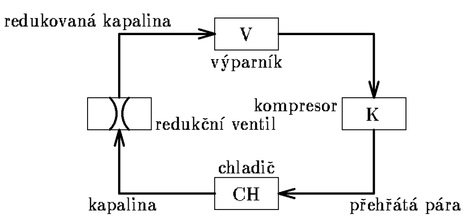
Periodická čísla $\overline{p_kp_{k-1}\ldots p_2p_1p_0}a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0$ je možno chápat jako čísla racionální p/q. Uměli byste najít k danému periodickému číslu jemu příslušející zlomek?

Ostatní čísla jsou obecně *iracionální*, zatím neznáme jejich význam.

Téma 2 – Lednička

Dr. Jan Holeček: Kompresorová lednička

Kompresorovou ledničku tvoří 3 hlavní části: kompresor, chladič a výparník (viz obr. 1). Kompresor nasává sytou páru chladiva a vykonáním práce ji stlačí z tlaku p_1 na p_2. Tím se vytvoří pára přehřátá. Ta se v chladiči ochladí předáním tepla do okolí na teplotu varu a zkondenzuje na sytou kapalinu (při tlaku p_2). V redukčním ventilu dojde k adiabatickému snížení tlaku na p_1, čímž se kapalina ochladí. Ve výparníku přijme chladivo teplo od chlazeného objektu. Tím dojde k odpaření chladiva. Vzniklá pára je nasávána zpět kompresorem.



Doc. Pavol Habuda: Kompresorová chladnička

Ve svém článku chci doplnit popis kolegy Dr. Jana Holečka. Vypařování látky ve výparníku odpovídá v $T-S$ diagramu (teplota-entropie) stupeň $4-1$ (viz obr. 2). Páry z výparníku nasává kompresor, který je stlačí na tlak p_2, odpovídající teplotě kondenzace T_2. Tato komprese nechť je adiabatická. Z kompresoru postupují stlačené páry do kondenzátoru, kde za stálého tlaku p_2 kondenzují $(2-3)$. V regulačním ventilu se tlak p_2 sníží na tlak výparníku p_1.

Účinnost tohoto procesu můžeme odhadnout na základě zjednodušeného grafu (obr. 2). Převeďme si tento graf do $p-V$ diagramu (obr. 3). Pro účinnost podle Carnotova vztahu platí

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \tag{TII.1}$$

Výhodnější je zavést tzv. *chladící účinnost* $\varepsilon = \eta^{-1}$.

Zkusme si teď odvodit vztah pro příkon ledničky. Práce vykonaná během jednoho cyklu je

$$W = Q_1 - Q_2.$$

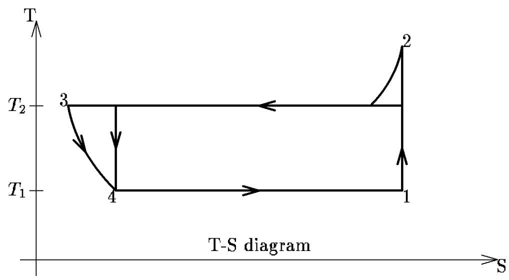
Víme, že platí

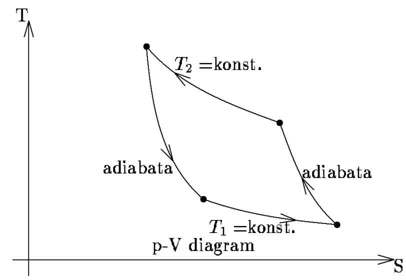
$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Q_1 - Q_2}{\Delta t} = \frac{Q_1}{\Delta t}\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) = \frac{Q_1}{\Delta t}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right) = \frac{-Q_1 T_2}{\varepsilon \Delta t T_1}. \tag{TII.2}$$

Odtud

$$|P| = \frac{Q_1 T_2}{\varepsilon \Delta t T_1} = P_{PROSTR} \cdot \frac{T_2}{\varepsilon T_1}, \tag{TII.3}$$

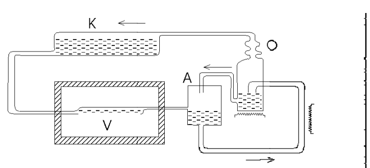
kde P_{PROSTR} je výkon prostředí.





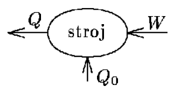
Mgr. Jarmila Mulačová: Princip absorpční ledničky

U těchto ledniček chybí kompresor, jeho funkce je nahrazena pohlcováním chladiva v absorbéru a jeho vypuzováním ve vypuzováku absorpční kapalinou za různých teplot (viz obr. 4). Kapalné chladivo stéká z kondenzátoru K do výparníku V a odpařováním chladí komoru, v níž je výparník umístěn. Pára chladiva (obvykle čpavku), vystupujícího z výparníku, je v absorbéru A pohlcována vodou, přičemž se uvolňuje teplo, které soustava odevzdá svému okolí, např. okolnímu vzduchu. Voda obohacená čpavkem proudí ve směru šipky do vypuzováku P, ohřívaného topným tělesem. Při vyšší teplotě se část čpavku z vody vypudí a ochuzená voda se vrací do absorbéru. Vodu udržuje v pohybu topné těleso (ohřevem svislé trubky se část čpavku vypudí; voda obsahující bublinky čpavku pak má menší hustotu než voda bez bublinek a díky tomu cirkuluje). Vypuzený čpavek proudí přes odlučovač vody O zpět do kondenzátoru, kde znovu zkapalní.



Tomáš Nečas: Princip tepelného čerpadla

Tepelným čerpadlem rozumíme stroj, který dodanou práci použije k přečerpání tepla z chladnějšího tělesa na teplejší. Základní schéma tepelného čerpadla viz na obr. 5. Teplo Q_0, odebrané chladnějšímu tělesu při teplotě T_0 odvádí stroj spolu s dodanou prací ve formě tepla Q do prostředí o teplotě T.



Vzhledem k tomu, že jde o vratný děj ($\Delta S = 0$,) budeme moci nahradit ve vztahu pro účinnost teplo Q teplotou T. Účinnost zařízení je poměr získaného, resp. odebraného tepla a práce, kterou musíme dodat. Pro ledničku tak dostaneme:

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{W} = \frac{Q_0}{Q - Q_0} = \frac{T_0}{T - T_0}. \qquad (TII.4)$$

Nyní uvažujme tepelné čerpadlo, kterým topíme:

$$\varepsilon = \frac{Q}{W} = \frac{Q}{Q - Q_0} = \frac{T}{T - T_0}. \qquad (TII.5)$$

Pokud tuto účinnost srovnáme např. s elektrickým přímotopem, vidíme, že účinnost může být větší. Účinnost přímotopu je:

$$\varepsilon = \frac{Q}{W}. \qquad (TII.6)$$

V ideálním případě $Q = W$ je $\varepsilon = 100\%$.

Tomáš Nečas: Peltierova chladnička

Toto zařízení se využívá především v elektronice. Funguje asi takto: v termoelektrickém generátoru se vnějším tepelným výkonem udržuje jeden spoj na teplotě vyšší než druhý. Tím vzniká elektrický proud, který odevzdává výkon spotřebiči. Nahradíme-li spotřebič zdrojem stejnosměrného proudu, zvětšuje se rozdíl teplot mezi oběma spoji.

Doc. Pavol Habuda: Můj masokombinát

Představme si velký masokombinát, který může odebírat příkon několik set kW. Jestliže např. $P \approx$ 200kW, pak pro výkon chladničky P_2 platí

$$P_2 = P\varepsilon = 1{,}2\mathrm{MW}, \qquad (TII.7)$$

uvážíme-li teploty $T_1 = -18°\mathrm{C}, T_2 = 35°\mathrm{C}$.

Dá se dokázat, že ztrátový výkon na potrubí je zanedbatelný v porovnání s výkonem teplé vody (podrobný výpočet k nahlédnutí u autora).

Teplá voda se přivádí do radiátorů. Odhadněme celkový objemový průtok všemi radiátory:

$$Q_v = \frac{V}{t} = \frac{m}{\varrho t}, \qquad (TII.8)$$

kde m je hmotnost vody, která proteče za čas t. Při teplotním rozdílu ΔT platí pro teplo odevzdané vodou $Pt = mc_v\Delta T$, odkud dosadíme za m do vztahu TII.8 a dostaneme

$$Q_v = \frac{P}{c_v \Delta T \varrho} \approx 20\,\mathrm{l}. \qquad (TII.9)$$

To by znamenalo vytápět asi 200 radiátory. Předpokládáme-li, že byt má 5 radiátorů, můžeme vytápět 40 bytů, což je možná osmiposchoďový panelák.

Téma 3 – Rovinné dláždění

Nejprve bych se chtěl všem (i potencionálním) řešitelům velice omluvit za vágní formulaci zadání. Tato způsobila naprostou nejasnost jeho výkladu, následně neporozumnění, v důsledku čehož se na téma každý řešitel díval z úhlu vlastního pohledu.

Do redakce přišlo 5 článků, z nichž asi 3 stojí za publikování. Vzhledem k jejich nedotaženosti ale hlavně jejich různorodosti nechci plýtvat drahocenným místem a nebudu je celé i s náčrtky přetiskovat. Poznamenám sem pouze několik zajímavých postřehů, nápadů a rad.

Doufám, že se po jejich přečtení pokusíte systematicky rozdělit všechna dláždění do několika skupin znovu.

redaktor Robert Špalek: kritéria dělení dláždění

Vezměme si libovolné **shodné** zobrazení roviny na sebe sama. Takovým zobrazením může být libovolné složení posunutí, zrcadlení a rotace. Budeme zkoumat, kdy se tímto zobrazením zobrazí dláždění přesně na sebe. Množinu všech shodných zobrazení, které zobrazí dláždění na sebe, nazvěme *grupou dláždění* G.

Je zřejmé, že pokud obě zobrazení $a, b \in G$, pak musí také zobrazení $a \circ b \in G$, protože po zobrazení roviny zobrazením a získáme to samé dláždění, to pak po zobrazení zobrazením b se promítne zase samo na sebe, takže i jejich složení $a \circ b$ promítne dláždění samo na sebe. Dále víme, že identické zobrazení e vždy zobrazí dláždění na sebe, protože zobrazí na sebe všechny body roviny. Také víme, že k libovolnému zobrazení a roviny existuje inverzní zobrazení a^{-1}, které je také shodné. Díky těmto základním poznatkům můžeme systém všech zobrazení dláždění na sebe považovat za grupu.

Pokud bychom dovolili libovolná dláždění, např. i aperiodická, pak by tato grupa mohla být jednoprvková (obsahovala by pouze identické zobrazení). My ale požadujeme, aby dláždění bylo periodické, tzn. aby existovaly nejméně 2 různé směry, ve kterých se bude dláždění opakovat. Za těchto předpokladů víme, že do grupy G patří vždy nejméně všechny celé násobky 2 základních posunutí v_1, v_2 a jejich kombinace (což je vlastně taková nekonečná mřížka).

Zajistili jsme si tedy, aby grupa G byla aspoň trochu zajímavá.

Za nejjednodušší dláždění tedy považujeme takové, které má pouze triviální symetrii – opakování po určitých intervalech. Dláždění mohou být ale mnohem bohatší, např. je můžeme beze změny zrcadlit či rotovat o 60, 90, 120 nebo 180 stupňů.

Příklady. *Čtvercová síť se např. od obdélníkové liší tím, že ji lze rotovat ještě o 90 stupňů. Kosočtverce se od kosodélníků liší tím, že je lze zrcadlit.*

Rozdělme nyní dláždění do několika typů podle struktury jejich grupy symetrií G, podle toho, která dláždění se dají jak rotovat, posouvat, zrcadlit atd…

Lenka Zdeborová: Rozdělení dláždění v rovině

Kostičky můžeme rozdělit do základních skupin:

1. kostička má 6 sousedů, v 1 bodě se stýkají 3,
2. kostičká má 4 sousedy, v 1 bodě se stýkají 4.

Dále je můžeme rozdělit podle počtu os symetrie na

1. kosodélníky – žádná osa
2. kosočtverce – 2 osy
3. obdélníky – 4 osy
4. čtverce – 3 osy

Autorka doplnila několik náčrtků a dospěla k existenci 14 skupin dláždění.

Doc. Pavol Habuda: Rozdělení dláždění v rovině

Jediné pravidelné n-úhelníky, kterými lze vyplnit rovinu, jsou trojúhelník, čtverec a šestiúhelník. Z této skupiny musíme vycházet při klasifikaci skupin dláždění.

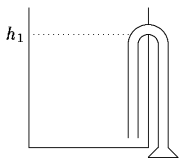
Po krátké diskuzi o vlastnostech rotace v rovině dospěl autor, že středová souměrnost se při rotaci nemění, kdežto osová ano. Dále dokázal, že libovolným trojúhelníkem lze beze zbytku vyplnit rovina. Prvním kritériem je podle autora počet stran souměrnosti.

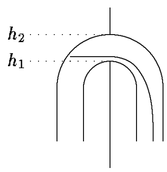
Druhým kritérie různosti 2 dláždění může být počet kostiček setkávajících se v každém rohu. Třetím kritériem by mohl být počet sousedů jednotlivých kostiček.

Užitím těchto pravidel autor dospěl k celkovému výsledku 11 skupin dláždění.

Úloha 1 – Zahradní sprcha

Zařízení bude fungovat na principu spojených násob. Voda bude přitékat po dobu 10 minut, pak dosáhne hladina výšky h_1, voda začne trubicí odtékat z rozdílu tlaků, u dna nádoby je tlak $p_1 = p_a + p_n$ a u ústí trubice pouze p_a. Proto vznikne podtlak a postupně vyteče celý obsah nádoby (k tomu je třeba, aby přítok byl menší než odtok), jinak by stále voda přitékala a nikdy by neodtekla všechna.





Dále je třeba uvažovat, zda tento model bude fungovat pro různé průměry trubice. Pokud se zaměříme na okamžik, kdy voda dosáhne výšky h_1, voda stále přitéká a odtéká vždy takové množství, které přesáhne h_1. Voda odtéká rychleji než přitéká a tedy nikdy nedosáhne h_2.

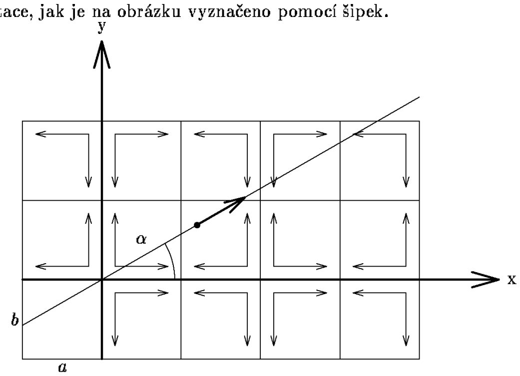
Navrhovaný model tedy nebude fungovat pro libovolný průměr trubice, trubice musí být dostatečně tenká, aby díky kapilaritě voda přilnula i k hornímu okraji trubice.

Další diskuze k tomuto příkladu můžete zasílat jako články do časopisu. Pokuste se spočítat, jak tenká musí trubice být a zda voda tak tenkou trubici *nezalepí*.

Úloha 2 – Kulečník

Jako autorské řešení si dovolíme čtenářské obci předložit skvělé řešení Petra Zimy. Myslíme si, že k němu není co dodat.

Označme strany stolu a, b. Zvolme kartézský systém souřadnic s počátkem v jednom rohu stolu tak, aby každá z os x, y byla rovnoběžná s nějakou hranou stolu (viz obrázek). Stůl zobrazme v osové symetrii podle jeho mantinelů. S takto vzniklými stoly proveďme totéž atd., až zaplníme celou rovinu stoly. Stoly mají oproti původnímu stolu 4 různé druhy orientace, jak je na obrázku vyznačeno pomocí šipek.



Formálně to znamená, že pro libovolné dva body $A = [x_1, y_1], B = [x_2, y_2]$ platí $A = B$, právě když

$$(\exists m, n \in \mathbf{Z})\,(x_2 = \pm x_1 + 2ma \quad \& \quad y_2 = \pm y_1 + 2nb). \tag{II.2.1}$$

Mantinely mají rovnice $x = ma$ a $y = nb$; $m, n \in \mathbf{Z}$. Osová souměrnost podle mantinelu je tedy v naší rovině identitou.

Koule se pohybuje buď po přímce, nebo se při odrazu její trajektorie osově zobrazí podle mantinelu. V naší rovině tedy můžeme trajektorii chápat jako přímku určenou rovnicí

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k, \tag{II.2.2}$$

kde $k = \tan\alpha$; α je směrnice této přímky a $[x_0, y_0]$ je počáteční poloha koule.

Aby se koule pohybovala po téže úsečce dvakrát, musí projít jedním jejím bodem podruhé stejným nebo opačným směrem, než jakým šla prvně (tato podmínka je nutná i postačující). V naší rovině tedy musí ležet na dané přímce dva body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ splňující

$$(\exists m, n \in \mathbf{Z})(x_2 = x_1 + 2ma \quad \& \quad y_2 = y_1 + 2nb) \tag{II.2.3}$$

nebo

$$(\exists m, n \in \mathbf{Z})(x_2 = -x_1 + 2ma \quad \& \quad y_2 = -y_1 + 2nb). \tag{II.2.4}$$

Obě podmínky rozeberme podrobněji:

(II.2.3) $(\exists [x_1, y_1] \neq [x_2, y_2])(y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \quad \& \quad (\exists m, n \in \mathbf{Z}) x_2 = x_1 + 2ma \quad \& \quad y_2 = y_1 + 2nb)$ je zřejmě ekvivalentní s podmínkou

$$k = \frac{ma}{nb}.$$

Tato podmínka triviálně platí i pro $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, kde není $\tan\alpha$ definováno. Tedy máme pro libovolný bod $[x_1, y_1]$ podmínku ekvivalentní s (II.2.3):

$$(\exists n \in \mathbf{Q}) k = n \cdot \frac{a}{b}.$$

(II.2.4) $(\exists [x_1, y_1], [x_2, y_2]) y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \quad \& \quad (\exists m, n \in \mathbf{Z})(x_2 = -x_1 + 2ma \quad \& \quad y_2 = -y_1 + 2nb)$ je ekvivalentní podmínce

$[ma, nb]$ leží na trajektorii koule,

neboť

$$[ma, nb] = \frac{[x_1, y_1] + [x_2, y_2]}{2}$$

a tento bod zjevně leží na přímce určené body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$. Tedy podmínka (II.2.4) je ekvivalentní tomu, že koule jednou přijde přesně do rohu stolu a odrazí se zpět.

Diskutujme fyzikální význam splnění podmínek (II.2.3) a (II.2.4).

(i) Pokud platí (II.2.3), dostane se koule po určité době do téhož pohybového stavu. Každou úsečkou své trajektorie tudíž projde nekonečněkrát.

(ii) Pokud platí (II.2.4), dostane se koule někdy do rohu, tam se odrazí do směru, ze kterého přišla, a vrací se po všech úsečkách, které už proběhla. Jestliže zároveň neplatí (II.2.3), tak se už nikdy nedostane na jinou úsečku podruhé.

Závěr. *Mohou nastat tři různé situace:*

(1) $\tan\alpha$ je racionální násobek $\frac{a}{b}$ (nebo $\pm\infty$). Potom koule projde každou úsečku své trajektorie nekonečněkrát.

(2) Pokud nenastal případ (1) a koule se po určité době dostane přesně do rohu, pak všechny úsečky prošlé před okamžikem odrazu v rohu projde právě dvakrát. Všechny ostatní úsečky své trajektorie projde právě jednou.

(3) Pokud nenastal ani případ (1), ani (2), pak neexistuje úsečka, po níž by se koule pohybovala vícekrát než jednou.

Úloha 3 – Šneček provazochodec

Označme $l_0 = 1\,\mathrm{m}$ délku lana v čase $t = 0$, $v_Š = 1\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$ rychlost šnečka vzhledem k lanu, $v_B = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ rychlost vzdalování bodu B od bodu A a $x(t)$ vzdálenost šnečka od bodu A v čase t. Protože se lano natahuje rovnoměrně, je jeho délka v čase t rovna $l(t) = l_0 + v_B t$. Okamžitá rychlost šnečka vzhledem k bodu A se skládá ze dvou složek - z rychlosti $v_Š$ a rychlosti $v_B \cdot \frac{x(t)}{l(t)}$, což je rychlost vzdalování bodu lana, ve kterém se šnek nachází, v důsledku natahování lana. Pro celkovou rychlost šneka vzhledem k bodu A tak platí

$$\frac{dx}{dt} = v_Š + v_B \frac{x(t)}{l(t)}. \tag{1}$$

Zavedeme-li jako novou proměnnou část lana, kterou již šneček urazil, $y(t) = \frac{x(t)}{l(t)}$, dostaneme

$$y'(t) = \frac{x'(t)l(t) - x(t)l'(t)}{l^2(t)} = \frac{x'l - v_B x}{l^2}$$

Odtud dosazením do (1) dostaneme

$$ly' = v_Š. \tag{2}$$

Ke stejné rovnici můžeme dojít touto úvahou: je-li y část lana, kterou již šnek urazil, je y' přírůstek této části, způsobený vlastní šnekovou rychlostí v_B (kdyby $v_B = 0$, zůstával by při natahování pořád ve stejné části lana, takže by bylo $y = konst.$). Odtud už plyne rovnice (2), kterou můžeme snadno zintegrovat:

$$y = v_Š \int \frac{dt}{l} = v_Š \int \frac{dt}{l_0 + v_B t} = \frac{v_Š}{v_B} \ln(l_0 + v_B t) + konst.$$

Dosazením okrajových podmínek $t = 0, y = 0$ a $y = 1$, když šnek doleze do bodu B, máme

$$1 = \frac{v_Š}{v_B}[\ln(l_0 + v_B t) - \ln l_0] = \frac{v_Š}{v_B}\ln(1 + \frac{v_B t}{l_0})$$

$$t = \frac{l_0}{v_B}(e^{v_B/v_Š} - 1)$$

Pro dané hodnoty vychází $t = (e^{1000} - 1)$s, tj. asi 6.10^{426} let.

Jak je vidět z tvaru výsledného vzorce, šnek doleze do bodu B dokonce pro libovolnou volbu parametrů $l_0, v_B, v_Š$. Většina z vás správně odhadla, že se jednalo přece jenom o určitou abstrakci (typu "je dán šnek a ten leze, ať se děje, co se děje"), protože tak dlouhou dobu ještě určitě žádný šnek bez přestávky nelezl (zkuste si to a uvidíte, jak dlouho vydržíte).

Komentář k řešením: na uvedený způsob přišlo nemnoho řešitelů. Většina správných řešení využívala rovnici (1) a hledala obecnou závislost $x(t)$, což vedlo na poněkud složitější výpočty, než řešení rovnice (2). Těžší situaci měli ti, kteří ještě neumějí integrovat. Úloha se dá řešit i pomocí posloupností, ale je to pak pracnější a nedá se tak dopracovat k přesnému výsledku. I přesto takto dostali někteří řešitelé celkem slušný odhad.

Zadání nových témat

Poněvadž vašimy příspěvky ještě zdaleka nebyla vyčerpána všechna minule zadaná témata, ponecháváme vám je k řešení i nadále. Dále vám přidáme jedno nové 'hravé' téma.

Téma 4. *Dělení lupu*

Jistě byste vymysleli způsob, jakým se mohou dva nepoctiví lupiči rozdělit spravedlivě o lup. Pomiňme způsoby založené na důvěře ve spravedlnost hodnověrné osoby a nechme je, ať si lup rozdělí sami bez cizí pomoci. Jedním z možných postupů je tento:

1. lupič rozdělí lup na dvě části, které považuje za stejně cenné,
2. lupič si pak jednu z nich vybere.

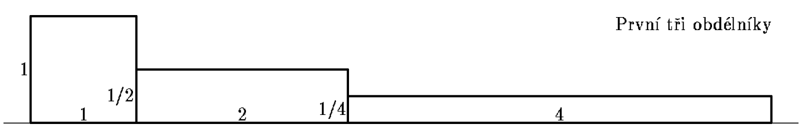
Je zřejmé, že bez ohledu na jejich poctivost si každý z nich může vhodným postupem zajistit alespoň polovinu uloupeného majetku.

Zobecněte tento postup na N lupičů. Tento postup musí zajistit, aby byl libovolný lupič schopen získat alespoň $1/N$ majetku, bez ohledu na jeho pořadí, či dokonce případný pokus o podvod ze strany ostatních lupičů.

Zadání rekreačních úloh

Úloha č.4. *Barvení obrazce*

V rovině ja vyznačen následující obrazec:



Je složen z nekonečného počtu obdélníků o obsahu 1. Každý obdélník je dvakrát delší, ale i dvakrát užší než obdélník předchozí. Tvary obdélníků tedy jsou $1 \times \frac{1}{1}$, $2 \times \frac{1}{2}$, $4 \times \frac{1}{4}$, $\ldots$, $2^n \times \frac{1}{2^n}$, $\ldots$

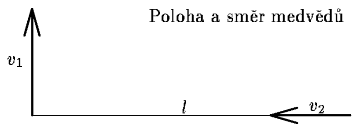
Celkový obsah obrazce je $1 \cdot \frac{1}{1} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$. Není jej tedy možno celý natřít barvou.

Vyrotujme nyní obrazec podle vyznačené osy. Stane se z něj těleso složené z elementární válečků. Objemválečku je $\pi r^2 d$. Celkový objem tělesa je $\pi \left(1 \cdot \frac{1}{1^2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \pi \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 2\pi$. Těleso je tedy možné zaplnit jistým malým konečným množstvím barvy.

Jak je možné, že těleso barvou bez problémů zaplníme, kdežto na obarvení jeho pouhé podmnožiny nám nestačí libovolné množství barvy?

Úloha č.5. *Medvěd honí medvědici*

Na koncích úsečky délky l se nalézají medvěd a medvědice. Medvědice utíká kolmo k úsečce rychlostí v_1, medvěd běží v každém okamžiku přesně za ní rychlostí v_2. Jaké je zrychlení medvěda ve směru kolmém k úsečce v daném časovém okamžiku?



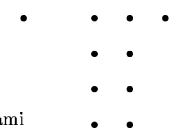
Poloha a směr medvědů

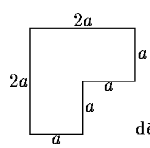
Úlohy č.6. *Odpočinkové úlohy*

Následující úlohy jsou lehčí než obvykle, proto je jich víc. Celkem je za ně možno získat 10 bodů. Jsou seřazeny podle obtížnosti a každá z nich je ohodnocena o bod lépe než úloha předchozí.

- Deset bodů podle obrázku můžeme spojit třemi přímkami po čtyřech bodech. Změnte polohu dvou bodů, aby se 10 bodů mohlo spojit pěti přímkami po čtyřech bodech.
- Při opravě hodin na věži se hodinář zmýlil a nasadil hodinovou ručičku na osu minutové a minutovou na osu hodinové. Nařídil hodiny na 6 hodin, tj. velkou ručičku nařídil na 12 a malou na 6 a spustil je. Kdy budou hodiny poprvé ukazovat na okamžik správný čas?
- Rozdělte obrazec na obrázku na 10 shodných dílů.
- Číslo končí cifrou 2. Přesuneme-li dvojku z pravého konce na levý, číslo se zdvojnasobí. Určete nejmenší takové číslo, případně všechna taková čísla, obecně.

propojení bodu čarami





dělení obrazce

Cis.	Jmeno	Trida	$\sum_{-1}$	t1	t2	t3	r1	r2	r3	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc. Pavol Habuda	3.B,?	145	2	5	4	4	3	5	23	23
2.	Dr. Jan Holeček	3.A,GKJB	56		3	1	3	3	5	15	15
3.	Karel Kyrian	3.A,GBudě	0	3	2			4	5	14	14
4.–5.	Tomáš Nečas	3.B,GKJB	0		4		3		5	12	12
	Lenka Zdeborová	3.A,GPlzeň	0			3	4		5	12	12
6.–8.	Martin Wokoun	3.A,GKJB	0				3	3	5	11	11
	Dr. David Holec	3.A,GKJB	61				3	3	5	11	11
	Dr. Ondřej Přibyla	3.A,GKJB	70				3	3	5	11	11
9.–11.	Luboš Dostál	septima,GStříb	0	5					5	10	10
	Petr Zima	4.A,GKlad	0					5	5	10	10
	Dr. Jan Mysliveček	3.A,GKJB	90				3	2	5	10	10
12.–13.	Zdeněk Dvořák	VI.A,GNové	0				3	5	1	9	9
	Antonín Lejsek	5B/6,GKoje	0					4	5	9	9
14.–16.	Jiří Chaloupka	kvinta,GŽidlo	0				3		5	8	8
	Václav Kučera	3.A,GSmích	0					3	5	8	8
	Dr. Václav Račanský	3.A,GKJB	79		2		3	3		8	8
17.	Lenka Kučerová	septima,GJičín	0				2		5	7	7
18.–19.	Vladislav Válek	?,?	0		3		3			6	6
	Mgr. Štěpánka Kučková	4.E,GArab	48		1		3	1	1	6	6
20.–25.	Robert Vácha	3.A,GJihl	0				1	1	3	5	5
	Jiří Vábek	kvinta,GŽďár	0			0	1		4	5	5
	Alena Kovárová	3.A,GBlava	0				2	2	1	5	5
	Karel Honzl	3.,GPodb	0						5	5	5
	Juraj Fedor	4.,GBystr	0				4		1	5	5
	Peter Hunana	4.,GBystr	0				2	2	1	5	5
26.–32.	Miroslav Černý	3.,GKutn	0		1			2	1	4	4
	Pavel Moravec	3.A,GKJB	0				4		0	4	4
	Lucie Petráčková	4.L,GStraš	0				3	1	0	4	4
	Andrea Svinková	?,GUhHr	0				3		1	4	4
	Martin Netolický	3.B,GMedl	0		2	1	1			4	4
	Mgr. Jarmila Mulačová	4.,GMlBol	25		2			2		4	4
	Svatava Stehlíková	sexta,GHust	0					4		4	4
33.–35.	Braňo Bača	?,?	0				3			3	3
	Pavel Augustinský	V.B,GHavíř	0				3			3	3
	Jan Prokleška	oktáva B,GZlín	0						3	3	3

Řešení rekreačních úloh, jakož i témat posílejte do vánoc (tj. aby nám to došlo dříve, než odjedeme na prázdniny), tedy do **20.prosince.1997**. Důrazně vás také upozorňujeme na změnu adresy semináře. Nová adresa je:

Robert Špalek B1506, VŠK 17. listopadu, Pátkova 3, 182 00 Praha Holešovice

Zimní soustředění

S velkou pravděpodobností během druhé poloviny ledna proběhne zimní soustředění. Mělo by se konat v Janově nad Nisou. V blízkosti chaloupky se nachází lyžařský vlek, okolní krajina je vhodná i na běžky. Kdo nemá lyže, může jet také, budeme pořádat i pěší túry a různé hry v přírodě.

Vzhledem k úsporným opatřením v Jednotě českých matematiků a fyziků se nám nepodařilo zajistit dostatek finančních prostředků na pokrytí všech nákladů. Proto musíme zimní soustředění oproti předchozímu výrazně zdražit. Přesto je cena za týden na horách stále výrazně levnější než na ostatních zájezdech. Maximální cena soustředění by měla činit 800,- Kč za 7 dní a zahrnovala by ubytování a stravu.

Abychom mohli včas objednat chaloupku, prosíme, ozvěte se co nejdříve, zda byste měli za těchto podmínek zájem se zúčastnit.

Pokud znáte nějakého kamaráda, kterého by bavilo také se účastnit matematicko-fyzikálního soustředění, připište ho na přihlášku. Pokud budou k dispozici volná místa, mohl by jet také. Vzhledem k tomu, že se soustředění koná v době školního vyučování, napíšeme každému, kdo o to požádá, omluvenku do školy.

Je naprosto nutné, aby byla naplněna kapacita chaloupky, v opačném případě nebude možné soustředění uskutečnit. Proto se během nejbližších dnů ozvěte na jedno z následujících kontaktních míst:

1. e-mail: `robert@atrey.karlin.mff.cuni.cz`,
2. telefon na kolej: 02/8551041 linka 166 – Robert,
3. jako POSLEDNÍ možnost mobilní telefon: 0602/435889.

Kromě toho nám do uzávěrky dalšího čísla pošlete vyplněnou přihlášku. Týka se to samozřejmě i neřešitelů semináře.

Přihláška na zimní soustředění v Janově nad Nisou

Jméno a příjmení:
Adresa:
Telefon:
e-mail:
které lyže beru s sebou:
sjezdovky běžky snowboard sáňky pekáč jiné…

Chcete-li s sebou vzít i nějaký hudební nástroj, připravit si pro ostatní nějakou přednášku, nebo se jinak podílet na aktivitách soustředění, napište to dolů do volného místa.

Podpis