M&M číslo 1 ročník IV

Milí kolegové !

přestože do září ještě nějaký ten čas zbývá, již nyní si můžete přečíst první číslo čtvrtého ročníku naší soutěže M&M. Pokud se s M&M setkáváte poprvé, pak si pozorně přečtěte následující řádky, na nichž se ve stručnosti pokusíme M&M představit.

• M&M je matematicko-fyzikální soutěž, ve které si můžete prověřit svoje odborné znalosti, ale také projevit vlastní tvůrčí schopnosti při řešení různých problémů, které před vámi neřešil (asi) nikdo jiný. Pokud jste středoškoláci, a matematika nebo fyzika vás poznamenala natolik, že se stala vaším koníčkem, máte tedy nyní jedinečnou šanci, jak vyplnit svůj volný čas bádáním nad problematikou vám blízkou a snad i vyhrát letošní ročník soutěže.

• M&M patří do rodiny takzvaných korespondenčních seminářů, kterých je v České republice a na Slovensku několik (alespoň 10). Řekněme tedy, v čem se náš seminář od této "konkurence" odlišuje, co je pro něj charakteristické.

(1) M&M je současně také vědecký časopis. Většina seminářů nabízí k řešení pouze jednoznačně zadané příklady. My každoročně otvíráme několik témat, ke kterým může kdokoli zaslat libovolný příspěvek (samozřejmě k dané problematice). Také nabízíme řešitelům možnost vymyslet a navrhnout nám svoje vlastní téma, se kterým by se chtěli na stránkách časopisu setkávat. Podmínkou je, že téma se musí dotýkat matematiky nebo fyziky a musí být zajímavé. Návrhy témat posuzuje naše redakční rada, která vybraná témata uveřejní.

(2) M&M se snaží hledat souvislosti mezi matematikou a fyzikou a krapet i informatikou, nikoliv však násilně. Bezpochyby mezi těmito obory lidského smýšlení nečiníme umělé hranice. Fyzika matematiku potřebuje a mnohý matematický problém zase pochopíme na názorném fyzikálním příkladě.

(3) Úlohy v M&M jsou rozloženy v celém spektru složitosti. Každý si zde může vybrat, co ho baví a na co stačí – to platí o úlohách i o tématech. Z článků, které nám napíšete, se na naše stránky dostanou ty nejlepší a nejzajímavější.

• Jak M&M probíhá?

M&M se může zúčastnit každý středoškolák, který má dostatek chuti a času. Pokud se rozhodnete M&M řešit, budeme vám na vaši adresu časopis zasílat (samozřejmě zdarma). V časopise naleznete vždy zadání tří tzv. "rekreačních úloh" a občas zadání nových témat. "Rekreační úlohy" jsou příklady, které najdete v podobných seminářích – jsou jasně zadané a žádá se u nich jasné řešení. Vhodné jsou zvláště pro dobu kdy se rekreujete. Někdy mají podobu hádanek, jindy fyzikálních úvah apod. O tématech jsme již hovořili. Podaří-li se vám vyřešit nějakou z úloh anebo zaujme-li vás některé z témat, můžete nám svá řešení a postřehy zaslat na adresu semináře, která je uvedena na konci tohoto letáku.

Řešení úloh posílejte do termínu, který pro každou sérii stanovíme. Pozdní odeslání řešení rekreačních úloh tolerujeme jen výjimečně. Rozhodující je přitom datum na poštovním razítku. Na řešení každé série budete mít asi měsíc času. My vaše řešení vyhodnotíme a okomentujeme, nejlepší články k tématům otiskneme přímo v časopise. S novým číslem časopisu (ve kterém najdete též autorská řešení úloh) pak dostanete zpátky svá okomentovaná řešení i vědecké příspěvky. Ročně hodláme vydat asi 5 čísel časopisu.

• M&M je, jak jsme již v úvodu zmínili, soutěží. Za každé řešení úlohy nebo příspěvek k tématu obdržíte několik bodů, jejichž množství bude určeno mírou správnosti vašeho řešení, originalitou a nápaditostí článku, brilantností vašich úvah… Správné řešení rekreačních úloh bývá zvykem hodnotit asi 5 body, dobré články k tématům se cení třeba i na 10b. Dodejme, že nerozlišujeme bodování podle ročníku studia, jak to mnohé semináře činí. Volné pojetí témat totiž umožňuje zvítězit i nejmladším řešitelům, jsou li dost aktivní. Na základě množství bodů přiřazených jednotlivým řešitelům posléze sestavíme pořadí, které budeme průběžně otiskovat na poslední straně časopisu. V závěrečné sérii provedeme celkové vyhodnocení a odměníme vítěze zatím neznámými, ale jistě hodnotnými cenami.

Hovoříme-li o hodnocení, neopomeňme zdůraznit jednu zvláštnost, kterou má pouze M&M. Po překročení určitých bodových limitů totiž získáte pro účely semináře titul, kterým jsou vás povinni ostatní účastníci oslovovat. Příslušné bodové limity jsou: 10b (bakalář), 20b (magistr), 50b (doktor), 100b (docent), 200b (profesor), 500b (akademik). Do limitu potřebného pro dosažení titulu se započítávají i body získané v předchozích ročnících semináře.

• Konference M&M

Pro nejlepší řešitele organizujeme každoročně alespoň jednu konferenci. Nechceme to zakřiknout, ale vypadá to zatím tak, že letos budou dokonce konference dvě. První by měla proběhnout v zimě někde na horách, na druhou se můžete těšit asi tak v červnu. Účastníky budeme vybírat podle průběžného pořadí.

Konference jsou příležitostí k seznámení s lidmi podobného smýšlení, pro mnohaleté řešitele pak vhodným místem, kde potkat staré známé. Na podobných akcích se pak vedou vědecké polemiky, můžete zde vyslechnout nebo též sami přednést řadu přednášek. Protože konference jsou pořádány v přírodě, je nasnadě, že jejich program není pouze odborný (provozují se rozmanité hry a podobně). Všichni, kdo na podobné akci někdy byli, mi dají za pravdu, že nelitovali.

• Pokud jste vydrželi číst až sem, a M&M vás zaujalo natolik, že jste se rozhodli jej řešit, pak pro vás máme ještě těchto pár drobných rad a podmínek soutěže:

(1) K řešení první série prosím přiložte lístek se jménem, ročníkem, adresou školy a Vaší adresou pro korespondenci.

(2) Každou úlohu (téma) pište na zvláštní papír (různé úlohy obvykle opravují různí lidé). Každý papír označte svým jménem a číslem úlohy, popřípadě číslem listu. K náležitostem vědeckého článku patří jeho název a jméno autora. Nenazvete-li článek, vymyslíme pro něj v případě otištění název sami. Redakce si vyhrazuje právo články pro lepší srozumitelnost zestručňovat nebo upravovat, vždy však jen do té míry, aby nebyl změněn smysl článku.

(3) Nemusíte posílat řešení všech úloh a témat. Vyberte si, co vás nejvíce zajímá. Ohodnotíme i náznaky řešení (samozřejmě, vděčnější budeme za řešení úplná).

(4) Nepište jenom výsledky, ale podrobně nám vysvětlete postup, jak jste k nim došli. Pokud nám pošlete pouze výsledek (byť správný), na mnoho bodů se netěšte.

(5) Pište prosím opravdu, ale opravdu čitelně. Nad nečitelnými řešeními pak strávíme zbytečně mnoho času. Navíc je nemůžeme objektivně ohodnotit.

(6) Svá řešení nám můžete posílat na papíře (ať už v rukopise nebo vytištěná počítačem), na disketě (preferujeme zdrojový text pro sázecí systém TEXnebo čistý ASCII-text) nebo přes Internet e-mailem na adresu...

(7) Dodržujte termíny odesílání rekreačních úloh. Příspěvky k tématům můžete posílat po celý rok.

(8) Ve svých příspěvcích můžete reagovat na články svých kolegů. Budete-li používat výsledků práce někoho jiného, doporučujeme vám použité výsledky napsat formou citace.

(9) M&M můžete začít řešit kdykoli v průběhu roku.

• Na závěr několik slov o historii M&M. Coby korespondenční seminář pro Středočeský kraj bylo M&M založeno již na sklonku roku 1994. Zakladateli byli Martin Vyšohlíd a Martin Čížek – oba studenti MFF UK. Současnými organizátory jsou další studenti Matematicko-fyzikální fakulty.

SOUTĚŽ

Ježto náš seminář, jak jsme zmínili, oslaví již čtvrté narozeniny, můžeme hovořit o veliké a bohaté tradici. Proto vyhlašujeme po vzoru jistého nejmenovaného velkého semináře veřejnou soutěž o logo semináře, které by zdobilo první stranu našeho listu. Své náměty zasílejte na adresu semináře. Redakční rada v říjnu vybere (doufejme) alespoň jednoho vítěze. Doporučujeme vám vymyslet logo alespoň dvourozměrné. V případě vícerozměrného díla si však redakce činí právo otisknout libovolný dvourozměrný průmět artefaktu.

A ještě jedna prosba na úplný závěr. Máte-li možnost tento leták jakkoli rozšířit na střední školy nebo třeba mezi své kamarády, o kterých víte, že se matematikou nebo fyzikou zabývají, pak vás prosíme, abyste tak učinili.

Toť vše, přejeme vám hodně štěstí a zábavy při práci, a protože je ještě červen, tak taky hezké prázdniny.

Ája, Robert a Matouš

Zadání nových témat

Téma 1. *Neukončená čísla*

Všichni znáte počítání s přirozenými čísly $\aleph_0$. Tato čísla se obvykle zobrazují konečnou posloupností cifer v nějaké soustavě, např. desítkové. Zkusme tento číselný obor rozšířit na množinu obecnějších (neukončených) čísel $\aleph'_0$. Tato čísla budou dána obecnou posloupností cifer. Tato čísla tedy budou mít vlevo od desetinné čárky nekonečně mnoho řádů.

Na této množině zavedeme operace analogické operacím s přirozenými čísly:

"+" Sčítání se provádí od nejnižších řádů výše stejně jako u přirozených čísel, analogicky se provádí i přenos do vyšších řádů. Např. $\ldots 999999 + 1 = 0$. Odčítání zavedeme stejným způsobem.

"·" Při násobení $A \cdot B$ vynásobíme číslo A postupně všemi ciframi čísla B a tyto mezivýsledky vzájemně posunuté o daný počet řádů sečteme. Tento součin bude jednoznačně definován, protože cifra k. řádu ve výsledku bude záviset na cifrách $0 \ldots k$. řádů součinitelů a těch je pro každé konečné k konečně mnoho. Např. $\ldots 11111 \cdot 11 = \ldots 22221$.

"/" U těchto čísel jde definovat inverzní prvek i v některých případech, kdy to u přirozených čísel nejde. Každé číslo B, které splňuje podmínku, že $A \cdot B = 1$, nazveme inverzním prvkem vzhledem k násobení, tedy $B = 1/A = A^{-1}$. Např. $1/3 = \ldots 66667$.

Ačkoliv tato čísla nemají na první pohled žádné použití, dá se u nich studovat mnoho krásných problémů.

I. Charakterizujte čísla, pro která existuje inverzní číslo – bohužel ani v tomto oboru nebude existovat vždy.

II. Vymyslete algoritmus pro výpočet inverzního čísla.

III. Zkuste najít netradiční řešení zajímavých rovnic, zde předkládám např. rovnici

$$x^2 = x, \qquad x \neq 0, \quad x \neq 1.$$

Téma 2. *Lednička*

Vysvětlete princip ledničky. Pokud nevíte, jak toto zařízení vypadá, resp. funguje, použijte odbornou literaturu.

Vybaveni znalostí tohoto principu zkuste navrhnout vytápění a ochlazování budov v létě a zimě. Spočítejte účinnost tohoto děje, zdali je to výhodnější než např. spalování uhlí.

Téma 3. *Dláždění v rovině*

Rovina se dá vydláždit mnoha způsoby. Jmenujme např. obdélníkové dlaždičky nebo čtvercové dlažební kostky. Těchto dláždění můžeme vymyslet libovolně mnoho, stačí když vyzmeme již existující kostičky, trošku jim zvlníme okraje (aby to ale zůstalo symetrické) a nové dláždění je na světě.

Přesto mají tato dláždění mnoho společného. Ukazuje se, že existuje docela malé množství tříd takových, že libovolné dláždění patří do právě jedné z nich. Tyto třídy se vyznačují např. počtem sousedů jednotlivých kostiček, počet stýkajících se kostiček v každém rohu, množinou všech symetrií dláždění…

Na vás je, abyste nalezli všechny druhy dláždění a zdůvodnili, proč jich není více ani méně.

Zadání rekreačních úloh

Úloha č.1. *Zahradní sprcha*

Existuje zařízení, které se chová následujícím způsobem:

1. Prvních 10 minut do něj pořád teče jedním otvorem voda, ven neteče nic.
2. Po uplynutí této doby najednou veškerý obsah vyteče jiným otvorem, zařízení se vyprázdní a cyklus začne znovu od začátku.

Vysvětlete a načrtněte, jak toto zařízení funguje. Ještě je nutno dodat, že ho lze sestrojit BEZ JAKÝCHKOLI POHYBLIVÝCH ČÁSTÍ. Můžete použít různé nádoby, trubky a plechy, ale ne např. dvouramenné váhy, které se posléze převáží.

Pokud první část vyřešíte, zkuste ještě oddiskutovat, jestli by skutečně fungovalo (i na druhý pohled) a jaké by mělo uplatnění v praxi. Nejlépe bude, když si jej sami sestrojíte a vyzkoušíte.

Úloha č.2. *Kulečník*

Mějme kulečník. Je tvořen obdélníkovou deskou stolu, která je ohraničena mantinely. Na vodorovné rovině kulečníku leží právě jedna koule. Do koule strčíme tak, aby se začala pro rovině stolu pohybovat. Předpokládejme, že při srážkách s okraji stolu ani během valivého pohybu nedojde ke ztrátám pohybové energie koule. Bude pak vždycky existovat úsečka MN, po které se koule během svého putování bude pohybovat dvakrát? Kolik bude takových úseček a kolikrát se po nich koule bude postupně pohybovat?

Úloha č.3. *Šneček provazochodec*

Mezi body A a B je nataženo 1 m dlouhé lano. V bodě A stojí šnek. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ se začne šnek plazit rychlostí $1\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ směrem k bodu B. Bohužel se v témže čase začne bod B vzdalovat rychlostí $1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Předpokládejme, že lano je dokonale pružné, tzn. že nikdy nepraskne a že šneček po prodloužení lana zůstane ve stejné části délky lana (míním tím, že byl-li v 1/3 délky lana před prodloužením, zůstane tam i potom).

Určete, zda se šnečkovi padaří doplazit se do bodu B, pakliže ano, tak za jak dlouhou dobu.