

M&M číslo 4 ročník III

Milí řešitelé,

úvodem si dovolueme krapítek kritiky vašich řešení tím, že připomeneme některé vysoce frekvencované chyby, jichž jste se zhusta dopouštěli. Především zopakujeme, že vědecký článek by měl dosahovat jisté úrovně jak obsahové, tak i formální. Platí to obecně pro témata i rekreační úlohy.

Následující odstavec, obsahující drobné výtky k formální stránce příspěvků, se týká jenom jisté neprázdné podmnožiny řešitelstva. Pokud si myslíte, že v této podmnožině nejste, můžete následující řádky přeskocit.

Používáte-li ve svých článcích a řešeních jakékoliv matematické značky a značky pro fyzikální veličiny, je bezpodmínečně nutné, abyste ke každému takovému symbolu napsali, co znamená. Je to zpravidla nutná podmínka k tomu, abychom my vaše řešení v konečném čase pochopili a mohli je objektivně obodovat. Rovněž jest třeba diskutovat každý vzorec či vztah, který použijete. Žádný vzorec nespadne jen tak shůry – vždycky se k němu dopracujete nějakou racionální úvahou, užitím určitých fyzikálních nebo matematických principů, tvrzení či vět. My nyní žádáme, abyste kromě oněch výsledných vztahů vždy též uváděli, a to co nejsrozumitelněji, jak jste na tyto vztahy přišli. Osamocená torza vzorců a výpočtů jsou vpravdě nicnefajkající.

K obsahové stránce bychom vám chtěli sdělit, že za výroky typu “hélium je hélium a kyslík je kyslík”, jejichž informační hodnota leží v intervalu $(-1; 0)$, je naprosto zbytečné do řešení psát. Zkuste si své příspěvky občas po sobě přečíst, aby je pak naše redakce nemusela od začátku až do konce opravovat a přepisovat.

Nezanebatelnou motivací k dodržování právě zmíněných konvencí budiž pro vás bodování, v němž budeme hodnotit příspěvky s vysvětlenými symboly a vztahy o několik bodů příznivěji než články tyto podmínky nesplňující.

Co se týče soustředění, vaše vzkazy ohledně vaší účasti či neúčasti jsme si přečetli a bereme je na vědomí. Pozvánky na konferenci dostanete v pravý čas (tj. někdy koncem května nebo začátkem června). Pozvání budou všichni řešitelé, kteří nám nenapsali, že se soustředění zúčastnit nemohou.

Do té doby můžete přemýšlet o tom, jakými odbornými přednáškami byste mohli konferenci obohatit a zpestřit. Zatím nám nezbývá než popřát vám hodně štěstí nejen při řešení další série.

Vaše redakce

Téma 1 – Trosečníci

Dr. Pavol Habuda nám poslal velké množství příspěvků, jak teoretických, tak i experimentálních. Bohužel nemůžeme především z technických důvodů všechny jeho články v tomto čísle uveřejnit. Autorovi se omlouváme za všechna zestručnění, která jsme provedli. Není vyloučeno, že na některé z jeho článků dojde ještě v příští sérii.

Experimenty

Dr. Pavol Habuda: Experimentální měření zeměpisných souřadnic Žiliny

1. Měření zeměpisné délky

V Žilině dne 6.3.1997 vyšlo Slunce v 6:18 a zapadlo v 17:36. Vrcholilo tedy v $\frac{6:18 + 17:36}{2} = 11:57$ SEČ.

Tento den byla hodnota časové rovnice $\tau = -11,7$ min. Tedy Slunce na 15. poledníku nevrcholilo ve 12:00, ale v čase $t - \tau = 12 : 12$.

Časový rozdíl mezi Žilinou a nultým poledníkem SEČ je tedy $\Delta t = 15$ min.

Časovému intervalu 24 hodin odpovídá oblouk 360° opsaný Sluncem.

Můžeme použít trojčlenku:

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \dots\dots\dots 24\text{h} \\ \Delta\lambda \dots\dots\dots 15\text{minut} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{15\text{min}}{24\text{h}} \cdot 360^\circ = 3^\circ 45'.$$

Označme λ_{ZIL} zeměpisnou délku Žiliny. Jestliže Slunce vyšlo dřív v Žilině, potom $\lambda_{ZIL} > \lambda_{15}$. Proto je

$$\lambda_{ZIL} = \lambda_{15} + \Delta\lambda = 18^\circ 45'.$$

Přibližné určení chyby: Ježto jsem čas východu Slunce nemohl určit přímo (bránil mi v tom kopec), použil jsem následující fintu. Když Slunce vychází, osvětluje oblaky a díky odrazu vzniká záře. Předpokládal jsem, že když září poprvé uvidím, bude to v okamžiku východu Slunce. Chyba určení času východu podle mne nepřesáhne 3 minuty, přičemž tuto odchylku způsobuje refrakce.

Odtud $\lambda = 18^\circ 45' \pm 45'$.

2. Měření zeměpisné šířky

Z hvězdářské ročenky zjistíme, že:

- rektascenze Slunce je $\alpha_\odot = 23 : 07$,
- deklinace Slunce je $\delta_\odot = -5^\circ 39'$.

Pro hodinový úhel t platí: $t = \theta_m - \alpha$, kde θ_m je místní hvězdný čas.

Hvězdný čas v 0:00 UT byl $\theta = 10 : 56$.

Pro θ_m platí: $\theta_m = \theta + \Delta t + \lambda = 10 : 56 + 5 : 18 + 17 : 29$.

Potom $t = \theta_m - \alpha = 17 : 29 - 23 : 07 = -5 : 38 = -5 : 38 + 24 : 00 = 18 : 22 = 275,5^\circ$.

Slunce je na obzoru, tedy transformační vztahy mezi rovníkovou a "obzorovou" soustavou se zredukuje na vztah

$$\frac{-\cos t}{\operatorname{tg} \delta} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\cos(275,5^\circ)}{\operatorname{tg}(-5^\circ 39')} = 0,97,$$

odtud $\varphi = 44^\circ$, $\varphi = 44^\circ \pm 4^\circ$.

Skutečná φ je něco přes 49° . Minimální odchylka měření času východu Slunce však způsobí velkou nepřesnost v zeměpisné šířce. Tento nedostatek se dá odstranit měřením v okolí slunovratů.

3. Měření zeměpisné šířky triangulační metodou

S výsledkem, který jsem pro zeměpisnou šířku dostal, jsem se nespokojil. Proto jsem dne 10.3.1997 vykonal ještě jeden experiment.

V tento den je deklinace Slunce $\delta_\odot = -3^\circ 59'$ (vlastně okamžik kulminace). Pro Žilinu kulminace nastává o 15 minut dříve než na nultém poledníku. $\tau = -10,5\text{min}$, tedy kulminace nastává přibližně v 11:56.

V okamžiku kulminace Slunce nemění svoji výšku nad obzorem příliš rychle, proto 10 minut, během kterých jsem měřil, se projeví až na desetinných místech naměřených hodnot, možná ještě níže.

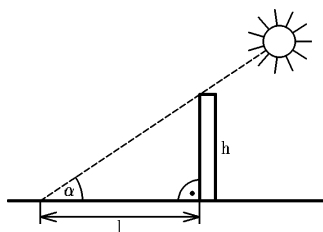
Pro úhel α z teorie vyplývá:

$$\alpha = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Naměřil jsem tyto hodnoty: $h = (1,27 \pm 0,01)\text{m}$.

Pro l jsem dostal tuto tabulku:

číslo měř.	l [cm]	$\operatorname{tg} \alpha$	α [°]	$\Delta \alpha$ [°]
1.	169	0,751	36,924	-0,044
2.	168	0,756	37,088	-0,208
3.	169	0,751	36,924	-0,044
4.	170	0,747	36,762	0,118
5.	169	0,751	36,924	-0,044
6.	170	0,747	36,762	0,118
7.	170	0,747	36,762	0,118
8.	169	0,751	36,924	-0,044
9.	170	0,747	36,762	0,118
10.	169	0,751	36,924	-0,044
11.	169	0,751	36,924	-0,044



Obr. IV.1.1: Triangulační metoda

Statistickým zpracováním dostáváme $\alpha = (36,88 \pm 0,03)^\circ$.

Po dosazení do výrazu pro φ dostáváme

$$\varphi = (49,14 \pm 0,03)^\circ.$$

Skutečné hodnoty (změřené z mapy) jsou: $\varphi = 49^\circ 20'$; $\lambda = 18^\circ 45'$.

Poznámka redaktora. Valouchovy tabulky udávají souřadnice Žiliny takto: $\lambda = 18^\circ 44'$, $\varphi = 49^\circ 14'$. Obdržel-li Dr. Pavol Habuda výsledky, které uvádí, pak lze jeho měření hodnotit jako velmi přesné.

Dr. Daniel Klír: Měření zeměpisné šířky

Zkoušel jsem naměřit tíhové zrychlení, avšak ani tím nejpřesnějším způsobem (kyvadlo) jsem nedosáhl potřebné přesnosti – chyba činila desetiny $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Předem jsem zavrhl tyto metody: měření magnetické indukce Země, polohy hvězd (nemám žádnou mapu), odchýlení tělesa při volném pádu, salinitu a zářivý tok. Také jsem se pokusil vyrobit vlastní Foucaultovo kyvadlo, leč neúspěšně. Kývalo nejdéle čtvrt hodiny.

Úspěšně jsem určil polokouli

a) dle kompasu

b) dle výtoky vody z umyvadla: vír měl směr proti pohybu hodinových ručiček.

Jelikož bylo právě 21.3., bylo možné zeměpisnou šířku určit dle výšky Slunce nad obzorem. Úhel jsem určil pomocí tyče. Pro danou tyč mi vyšla výška Slunce $\alpha = 39,5^\circ \pm 2^\circ$, což platí pro $\varphi = 90^\circ - \alpha = 50^\circ 30'$. Výsledek je přitom poměrně přesný, jelikož průměr Slunce je $32'$.

Gravitační zrychlení

Dr. Pavol Habuda: Teoretické odchylky v gravitačním zrychlení

Předpokládáme, že Země je rotační elipsoid s poloosami

$$r_{\text{rovníkový}} = r_r = 6378,140 \text{ km},$$

$$r_{\text{polární}} = r_p = 6356,755 \text{ km}.$$

Platí tedy (viz obr. IV.1.2):

$$\frac{x^2}{r_r^2} + \frac{y^2}{r_p^2} = 1, \quad x = r \cos \varphi', \quad y = r \sin \varphi',$$

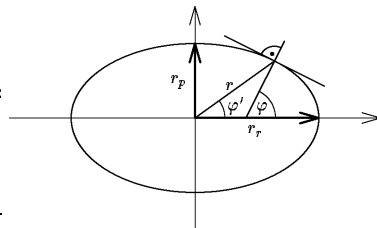
kde φ' je geocentrická šířka.

Odtud dostáváme poloměr jako funkci geocentrické šířky:

$$r = \frac{r_p r_r}{\sqrt{r_r^2 \sin^2 \varphi' + r_p^2 \cos^2 \varphi'}},$$

kde φ' je geocentrická šířka, kterou je třeba transformovat na geografickou šířku φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi' \cdot \frac{r_r^2}{r_p^2}.$$



Obr. IV.1.2: Zemský elipsoid

Předpokládejme nyní, že povrch Země tvoří ekvipotenciální plochu. Odtud

$$-\frac{\kappa M}{r_p} = -\frac{\kappa M}{r_r} - \frac{1}{2} r_r^2 \omega^2,$$

z toho plyne

$$r_p = \frac{r_r}{1 + \frac{\omega^2 r_r^3}{2\kappa M}}.$$

Zde je M hmotnost Země, ω úhlová rychlost zemské rotace, κ gravitační konstanta. Z předchozího platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi' \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 r_r^3}{2\kappa M}\right)^2, \quad \text{a též} \quad \cos \varphi' = \frac{\left(1 + \frac{\omega^2 r_r^3}{2\kappa M}\right)^2 - \left(\frac{r_r}{r}\right)^2}{\left(1 + \frac{\omega^2 r_r^3}{2\kappa M}\right)^2 - 1}.$$

Budeme-li nyní Zemi považovat zase za kouli, bude platit

$$g = \frac{\kappa M}{r^2}, \quad \text{a také} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Velmi přesným změřením g za absurdního předpokladu, že hmota Země je rovnoměrně rozmístěná, bychom tedy mohli zjistit geografickou šířku φ .

Coriolisova síla

Dr. Pavol Habuda: Příspěvek k teorii Coriolisovy síly

Mgr. Milan Orlita versus Dr. Jan Mysliveček.

Platí: $\vec{F}_C = -k\vec{\omega} \times \vec{v}$. Nakresleme si, jak vypadá pokles hladiny. Z obrázku IV.1.3 a IV.1.4 je jasné, že žádná rotace nenastane, pouze se skloní povrch výtékající vody. Pro tento sklon výtékající vody platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_C}{F_g} = \frac{2v\omega \sin \varphi}{g}.$$

Touto metodou bychom tedy mohli změřit zeměpisnou šířku, ale je to velmi nepřesné.

Domnívám se, že jestliže má síla \vec{F}_C uvést do rotačního pohybu vodu ve vaně, pak musí výslednice působit nenulovým momentem na vrstvy. Jenže, pokud rychlost výtékající vody \vec{v} nezávisí na poloměru, potom ani \vec{F}_C nemůže záviset na poloměru, tím pádem

$$\Sigma \vec{r} \times \vec{F}_C = \vec{0}.$$

Vše se změní, pokud budeme uvažovat vanu s bočním sklonem α (viz obr. IV.1.5 a IV.1.6). Platí:

$$F_{C1} = -2m\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_1 = -2mv\omega \sin(\varphi + 90^\circ - \alpha) = -2mv\omega \cos(\varphi - \alpha),$$

$$F_{C2} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_2 = -2mv\omega \sin(90^\circ + \varphi + \alpha) = -2mv\omega \cos(\varphi + \alpha).$$

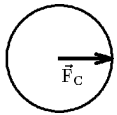
Porovnejme F_{C1} a F_{C2} . Až na argumenty kosinů se tyto síly neliší.

Jenže $\cos(\varphi - \alpha) > \cos(\varphi + \alpha)$, což víme z průběhu funkce \cos , takže $F_{C1} > F_{C2}$.

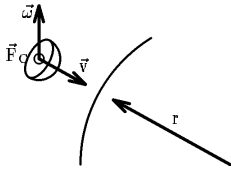
Tedy vír se bude skutečně točit proti směru hodinových ručiček a pravdu má Mgr. Milan Orlita.

Na určení velikosti ΣF_{C_i} bychom však potřebovali znát všechny složky rychlosti v_i , což je prakticky nemožné.

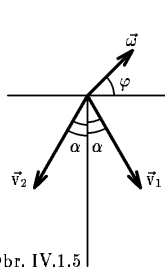
Experimentální pozorování ukázalo, že po zastavení přítoku vody do nádoby se cca 5 sekund vyrovnávají vír a nastává pohyb, který jsem předpovídal. Ten je způsobený právě rozpadem vírů a stáčením směru rychlosti dopadající vody. Vždy jsem po ustálení pozoroval směr rotace levotočivý, což potvrzuje teorii.



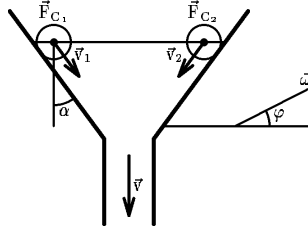
Obr. IV.1.3



Obr. IV.1.4



Obr. IV.1.5



Obr. IV.1.6

Dr. Pavol Habuda: K špatnému odvození periody Foucaultova kyvadla

Neexistuje důvod, proč by měla po 24 hodinách nastat identická situace. Země je přece neinerciální soustava! Na kyvadlo působí neinerciální Coriolisova síla, proto neplatí princip relativity. Aby po 24 hodinách nastala identická situace všude na Zemi, musela by Země být inerciální vztažnou soustavou. Pak by ovšem zrychlení vzniklé působením Coriolisovy síly bylo $a_c = 0$, tedy Země by nesměla rotovat ($\omega = 0$), a tedy perioda otočení roviny kyvu kyvadla by byla nekonečná, což je v rozporu se skutečností.

Dr. Pavol Habuda: Ještě jednou Coriolisova síla

Představme si, že malá kulička klouže po hladké rovině která se dotýká země v zeměpisné šířce φ . Odstředivá síla bude kompenzována silou Coriolisovou a kulička bude kroužit po kružnici. Tedy

$$\frac{mv^2}{r} = 2mv\omega_z \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v}{2\omega_z \sin \varphi}.$$

Kulička opíše úhel 2π za čas $T = \frac{\pi}{\omega_z \sin \varphi}$.

Pokud máte rovinu bez tření, můžete experimentovat.

Dr. Pavol Habuda: Solární konstanta

Hodnotu, kterou udává Dr. Daniel Klír pro sluneční konstantu, musíme opravit o absorpci vzduchu, rozptýl atd. Hodnota, kterou udává, je zářivý tok dopadající na jednotku povrchu nad atmosférou.

Když započítáme výše uvedené vlivy, účinný koeficient bude asi 30%. Touto hodnotou si nejsem zcela jist, ale řádově určitě souhlasí. Tedy povrchová "sluneční konstanta" je $S_{povrchu} \approx 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

K měření sluneční konstanty můžeme použít tzv. "ruský způsob". Nechť sluneční paprsky dopadají na plachtu pod úhlem α . Je-li plachta rovnoběžná se zemí, pak $\alpha = 90^\circ - \varphi + \delta$, kde δ je deklinace Slunce.

Namočíme plachtu, aby obsahovala m kg vody. Necháme ji vysušit na vzduchu. Vyschne za čas t_1 .

Potom vezmeme stejné množství vody, které ohřejeme v kalorimetru spirálou s výkonem P . Voda se vypaří za čas t_2 .

Dodaná tepla jsou stejná, tedy

$$\frac{P}{t_2} = \frac{S_{povrchu} \cdot S \cdot \sin \alpha}{t_1},$$

kde S je plocha plachty.

Tedy $S_{povrchu} = \frac{P}{S \sin \alpha} \frac{t_1}{t_2}$. Měřit takto zeměpisnou šířku je samozřejmě nereálné.

Dr. Pavol Habuda: Výlety zemské osy aneb několik zajímavostí

Zemská osa neprotíná povrch Země pořád ve stejném bodě, nýbrž se nepatrně pohybuje. Tento efekt má na svědomí, že zeměpisná šířka pevně zvoleného místa se mění až o úhel $0,7''$, což činí asi 20 metrů.

Pól za rok vykoná pohyb po elipse o poloosách 7,5 m a 2,5 m (tyto hodnoty se však mění). Rovněž koná pohyb po kružnici s poloměrem 4 m s periodou 415 až 433 dní. Tyto pohyby se dějí v kladném smyslu otáčení.

Efekt je způsoben skutečností, že osa rotace nesplývá s geometrickou osou, což je důsledek nerovnoměrného rozložení hmoty Země.

Euler pro pohyb pólu odvodil periodu 300 dní. Tato hodnota se však liší od skutečné, protože Země oproti Eulerovým předpokladům není tuhé a nepružné těleso. Chybu zvětšují ještě další vlivy jako např. sezónní výkyvy teploty a tlaku.

Z dalších jevů jmenujeme pohyby zemských desek, které způsobují změnu zeměpisné šířky řádově cm.

Závěr z tohoto vlastivědného intermezza je ten, že přesnost měření zeměpisné polohy je omezená.

Magnetismus

Dr. Pavol Habuda: Magnetismus

Mějme magnetku upevněnou v těžišti. Pro periodu kyvu horizontálně kývajících magnetky platí:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{MH}},$$

kde J je moment setrvačnosti, M magnetický moment a H horizontální složka magn. pole.

Odtud dostáváme

$$M \cdot H = \frac{\pi^2 J}{T^2}.$$

Umístíme kolmo na směr (magn.) sever-jih magnet, který nám vychýlí magnetku o úhel α .

Pro malé úhly α platí

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \alpha,$$

kde r je vzdálenost magnetu od magnetky ($r \gg r_m$; r_m je průměr magnetky).

Změřme nyní T , J , r a α experimentálně, a dostáváme

$$H = \sqrt{\frac{2\pi^2 J}{T^2 r^3 \alpha}},$$

jak praví jedna starší učebnice astrofyziky.

Platí $H = T \sin i$ (viz obr. IV.1.7),

$$T = \sqrt{H^2 + Z^2}.$$

Uvážíme-li publikované vztahy, pak

$$\frac{H}{Z} = \frac{1}{Z} \cotg \varphi_m = \cotg i,$$

odtud $2 \operatorname{tg} i = \operatorname{tg} \varphi_m$.

Později jsem přišel na to, že Mgr. Milan Orlita prostě bez přečtení opsal tyto vztahy z knihy R. Brázdil a kol. – Úvod do studia planety Země.

Tyto vztahy neplatí tak, jak mají, a proto jsem dělal mnoho věcí zbytečně. Je hanba, že se vědec uchýlí k takovýmto praktikám, opsat něco bez prostudování.

Periodu T bych změnil přístrojem, který jsem popsal minule. Totiž: $T^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$.

Máme tedy dva systémy souřadnic, pro které je třeba odvodit transformační vztahy. Budu je odvozovat metodou transformace souřadnic, tedy nechť platí, že nulový poledník prochází průsečíkem rovníku geografického a geomagnetického (viz obr. IV.1.8). Souřadnice λ_m (magn. délka) a φ_m (magn. šířka) jsou spojeny s geocentrickými souřadnicemi x, y, z pomocí vztahů

$$x = R_z \cdot \cos \varphi_m \cos \lambda_m,$$

$$y = R_z \cdot \cos \varphi_m \sin \lambda_m,$$

$$z = R \sin \varphi_m,$$

přičemž rovina xy je rovinou magn. rovníku, osa x míří k průsečíku obou rovníků a osa z k severnímu magn. pólu.

Na základě tohoto lze už lehce nalézt transformační vztahy mezi oběma soustavami. Použijme poučku sférické trigonometrie, že paralelním posunutím se směr souřadnicových os nemění.

Sklon obou rovníků je

$$\delta = |\angle \text{SevZemPól, StředZemě, SevMagnPól}|.$$

Tedy

$$\cos \varphi_m \cos \lambda_m = \cos \varphi \cos \lambda,$$

$$\cos \varphi_m \sin \lambda_m = \cos \varphi \sin \lambda \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta,$$

$$\sin \varphi_m = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \lambda \sin \delta,$$

$$\delta = 90^\circ - 77^\circ = 23^\circ.$$

Zavedme přirozenější systém, nechť nulový magn. poledník prochází všemi čtyřmi póly.

Odtud $\lambda_{mi} = \lambda_m - 102^\circ = \lambda_m + \lambda$ (SMP).

Ještě zbývá určit λ_m . Označme úhel κ jako odchylku SMP od SZP – magnetická deklinace.

Ze sinové věty pro sférický trojúhelník plyne:

$$\cos \lambda_{mi} = \frac{\cos \kappa \cos \varphi - \cos \delta \cos \varphi_m}{\sin \delta \sin \varphi_m}.$$

Nyní tedy stačí změřit magnetickou deklinaci κ , což je poměrně jednoduché. Je to odchylka magnetky od Polárky (přibližně).

Po vyřešení těchto rovnic (raději numericky, analyticky si na to netroufám) dostaneme φ a λ , zeměpisné souřadnice našeho místa.

Zásadní rozdíl mezi mým článkem a článkem Mgr. Milana Orlity je v tom, že dotyčný pravděpodobně odněkud opsal vztahy, a neuvědomil si, že ve vztazích

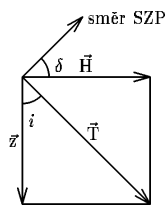
$$H = \frac{\sigma_0 m}{4\pi R^3} \cos \varphi_m,$$

$$Z = \frac{\sigma_0 2m}{4\pi R^3} \sin \varphi_m$$

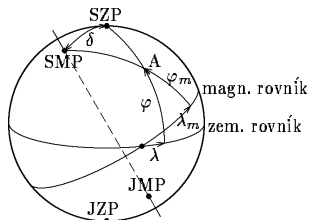
vystupuje magnetická šířka φ_m , a ne zeměpisná šířka φ .

Např. pro SMP je magnetická deklinace neurčitá, u magnetky nemůžeme určit téměř žádný parametr, protože se stále vrčí. To by znamenalo, že $\tan \varphi \rightarrow \infty$, to jest $\varphi \rightarrow 90^\circ$. Jenže to je v rozporu se skutečností.

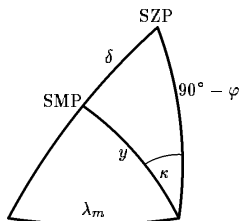
Mnou právě popsaná metoda nebude příliš přesná, protože např. vulkanická činnost dost ovlivňuje magn. pole, existují i jiné magnetické anomálie.



Obr. IV.1.7



Obr. IV.1.8

Obr. IV.1.9: $y = 90^\circ - \varphi_m$

Náměty

Dr. Pavol Habuda nám zaslal také několik pěkných námětů.

Po pár dnech na ostrově jste se vydali na vycházku, a potkali jste jiného trosečníka (poznámka překladatele: slovensky "stroskotanca"). Vetchý kmet, který mohl být klidně 100 roků star, se s vámi dal do řeči, a tvrdil vám, že Země je deska, kterou nesou tři sloni stojící na želvě. Uměli byste mu vyvrátit tuto jeho teorii? Také tvrdí, že Země je středem vesmíru.

Dále se vám snažil namluvit, že na ostrově plyne čas po skocích, a právě před chvílí jeden takový skok nastal. Nikdo neví, jestli to byl skok do minulosti nebo do budoucnosti, ani o kolik se posunul čas.

Předpokládejme, že mluvil pravdu. Uměli byste říci, jak daleko v čase jste se octli od roku 1996, kdy jste ztroskotali? Zůstala vám stále bystrá hlava.

Téma 4 – Tetris

Prof. Tomáš Brauner: Reakce na článek Mgr. Aleše Přivětivého

Autor popisuje vzorec pro počet n -rozměrných útvarů skládajících se ze 4 nadkrychlí. Vychází z toho, že plošné útvary složené ze 3 čtverečků jsou pouze 2 (viz minulý číslo). Na tyto 2 útvary budeme připojovat čtvrtou krychli ve více dimenzích.

Podle článku *Bc. Tomáše Bárty* otištěném v M&M ročník 2, číslo 3, víme, že n -rozměrná krychle má $2n(n-1)$ -rozměrných stěn. Při přechodu od dimenze n k dimenzi $n+1$ tedy přibude celkem 6 stěn, kam se dá připojit

čtvrtá krychle. U každé z těchto 6 možností jsou 2 zrcadlově otočené, pak jsou ještě stejná 2 krajní připojení \Rightarrow celkem přibudou 2 nové tvary.

Počet n -rozměrných kostek je tedy $p(n) = 2n + k$, podle počtu počáteční podmínky $p(2) = 5$ zjistíme, že $p = 2n + 1$.

Pozn. Redakce je jiného mínění. Teoreticky můžeme čtvrtou krychličku připojit na tolik nových míst, ale prakticky je možno vhodnou prostorovou rotací vzniklý útvar umístit do trojrozměrného prostoru. Např. libovolně 3 krychle lze položit rovinou, analogicky libovolně 4 krychle lze proložit prostorem. Takže pro libovolné $n \geq 3$ je $p = 7$.

Mgr. Jan Holeček: Algoritmus hledání nových kostiček

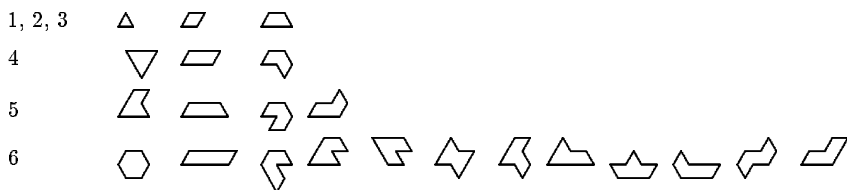
Autor zavrhl možnost uložení tvarů kostiček do dvojrozměrného pole, protože mu to připadalo neefektivní. Místo toho ukládá tvary kostiček ve 'vektorovém' tvaru (popisuje, jak vypadá ten který výběžek kostičky).

Podle toho se řídí i jím navržené algoritmy. Bohužel musíme konstatovat, že tyto algoritmy nejsou ve stadiu, kdy by je bylo možné vytisknout. Autor nově vzniklý útvar porovnává se všemi již nalezenými ve všech 8 rotacích, ale přesto si myslíme, že toto porovnávání nebude vždy spolehlivé. Slabinou je i generování nových útvarů.

Domnívám se, že ukládání útvarů do pole není zas tak špatné řešení. Ve svém programu, který kostičky velikosti n generoval, jsem použil seznamu se všemi útvary velikosti $n - 1$, ke kterým jsem přikládal postupně na všechna místa obvodu nový čtvereček. Útvary byly uloženy v dvojrozměrném poli a každý nově vzniklý byl porovnán ve všemi již nalezenými ve všech 8 rotacích. Je nutné dát také pozor na správné posunutí kostičky. Tímto programem byly také vygenerovány všechny útvary vytištěné v tomto časopisu.

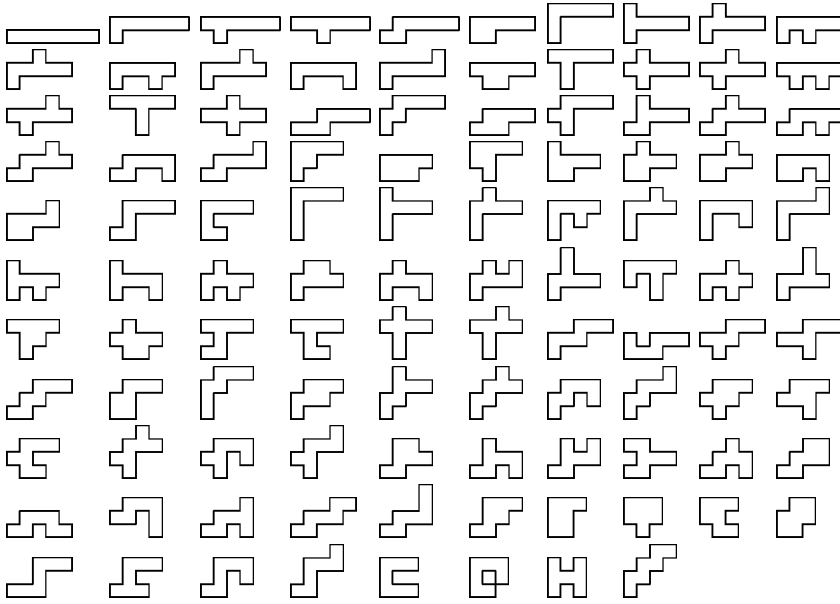
Bc. Ivana Čapková, Prof. Tomáš Brauner: Trojúhelníkové útvary

Autoři hledali všechny útvary do velikosti 6 v trojúhelníkové síti. Jsou zobrazeny na následujícím obrázku. Nezbyvá mi, než vám popřát štěstí při hledání šestiúhelníkových útvarů, které by měly být podle mého názoru 'nejhezčí'.



Bc. Ivana Čapková: Teorie čtverečkových a trojúhelníkových útvarů

Autorka nejprve nesmírně vyčerpávajícím ručním postupem našla všech 108 útvarů velikosti 7. Za tuto duševní námahu sice děkujeme, ale podotýkáme, že tato mechanická práce není posláním našeho časopisu. Nesporně užitečnější by bylo hledání teorie těchto kostek, neboť toto hledání může rychleji a spolehlivěji provádět počítač (viz náš redakční program). Na obranu autorky však musím dodat, že spolu s tímto příspěvkem poslala i velice zajímavou teorii.



Všimněte si třetího útvaru od konce, neboť je to *první nepříjemný* útvar, znemožňuje nám vyplňování roviny těmito útvary.

Zkusme si počet útvarů velikosti n vyjádřit jako součet útvarů, které se vejdou do obdélníků různých velikostí. Počet některých těchto útvarů již můžeme analyticky vyjádřit lépe než celkový počet útvarů nebo počet útvarů vzniklých z nejdelsího řetězce.

k	celkem	$1 \times k$	$2 \times (k-1)$	$2 \times (k-2)$	$2 \times (k-3)$	$3 \times (k-2)$	$3 \times (k-3)$	$3 \times (k-4)$	$4 \times (k-3)$				
3	2	=	1		1								
4	5	=	1		3		1						
5	12	=	1		3		2		6				
6	35	=	1		5		6		1	15	7		
7	108	=	1		5		11		2	25	40	7	17

Útvar velikosti $1 \times k$ je vždy jenom jeden. Útvarů velikosti $2 \times (k-1)$ je vždy $2 \lfloor N/2 \rfloor - 1$. Odvodí se to lehce takto: útvar může být buď úsečka s jedním výstupkem, to je $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ možností, nebo 2 úsečky napojené na sebe, to je $\lfloor \frac{N-3}{2} \rfloor$ možností, sečtením těchto 2 čísel dostaneme uvedený výsledek. Počty útvarů dalších velikostí již tak snadno spočítat nejdou.

Analogická úvaha se dá provést i u trojúhelníkových kostiček. Tyto kostičky však nebudeme omezovat do obdélníku, ale do *zploštělého šestiúhelníku*, který bude dán 3 délkami stran (podle 3 směrů čar ve trojúhelníkové síti). Podobná tabulka je:

k	celkem	$1 \times [k/2]$	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 3$	$2 \times 3 \times 3$	$2 \times 2 \times 4$
3	1	=	1			
4	3	=	1	2		
5	4	=	1	1	2	
6	12	=	1	1	3	6
						1

Bohužel ani zde zatím nebyl nalezen obecný vzorec popisující počet jednotlivých kombinací.

Rada. Zkuste využít vytvořujících funkcí. Kdo neví, co to je, ať si přečte nějaký úvod do diskretní matematiky, např. Matoušek & Nešetřil: Kapitoly z diskretní matematiky.

✕
R

Téma 5 – List papíru

Dr. Pavol Habuda nám zaslal hned několik výsledků provedených měření. Kromě těch, které jsme stihli přepsat, poslal také měření relativní permeability papíru. Tento příspěvek otiskneme v příštím čísle.

Ještě než se pustíte do četby, chtěl bych upozornit nederivující a neintegrující část populace, že asi textu příliš neporozumí. Nevadí, všechno se dá napravit. Na soustředění určitě nějaká ta přednáška z diferenciálního počtu bude. Poznamenejme navíc, že přístup Dr. Pavla Habudy není příliš matematicky korektní (odvozování přes diferenciály). Redakce se však domnívá, že všechny výsledky má autor správně a z hlediska fyzikálního o tak velký prohřešek nejde.

Dr. Pavol Habuda: Měření Youngova modulu pružnosti papíru

Položme papír na dva bity tak, aby se samovolně prohnul. Rozdělme si papír na velmi tenké vrstvy. Vrstvy níže položené se budou při prohnutí prodlužovat, výše položené zkracovat. Papír považujeme za pravidelný hranol. Podle této teorie středem jeho průřezu prochází tzv. neutrální vrstva, která nemění svoji délku.

Předpokládáme, že výchylka nejvíce prohnutého místa papíru od jeho původní polohy je mnohem menší než délka papíru. Předpokládáme dále, že papír je homogenní.

Na bod A papíru, jehož vzdálenost od bitu je x , působí ohybový moment $M_0 = F \cdot (\frac{l}{2} - x)$, přičemž vzdálenost x je malá. Proti tomuto momentu reaguje materiál papíru momentem vnitřních soudržných sil, které se snaží udržet papír v rovnováze.

Vyšetřeme okolí bodu A . Nechť oblouk neutrální vrstvy má v tomto bodě poloměr křivosti r . Tloušťka papíru je h . Můžeme říci, že i vrstva vzdálená h od neutrální vrstvy má též poloměr křivosti r .

Tedy pro relativní prodloužení určené poměrem prodloužení Δl a vzdálenosti bítů l platí

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(r+h)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{h}{r}, \quad (5.1)$$

Toto prodloužení je způsobeno napětím v tahu σ , pro které z Hookova zákona platí

$$\sigma = E\epsilon = E\frac{h}{r} = konst \cdot h, \quad (5.2)$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu.

Tedy napětí klesá přímo úměrně se zmenšováním vzdálenosti vrstvy od neutrální vrstvy. V horních vrstvách přechází tah v tlak. Nemá-li být neutrální vrstva namáhána, pak se výsledné příspěvky od obou stran vyruší.

Platí $\sigma = \frac{dF}{dS}$.

Celkový moment sil vůči neutrální vrstvě je

$$M_0 = \frac{E}{r} \int_0^{\frac{h}{2}} 2h^2 dS = \frac{EI}{r}, \quad (5.3)$$

kde I je z definice plošný moment setrvačnosti.

Můžeme nahlédnout, že pro r platí

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{x}, \quad (5.4)$$

kde úhel α přísluší oblouku x se středem ve středu křivosti.

Odtud

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (5.5)$$

kde y je výchylka od původní polohy ve svislém směru.

Dosažením za poloměr křivosti r z integrálu (5.3) dostaneme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_0}{EI}. \quad (5.6)$$

Do této rovnice dosadíme za M_0 a obdržíme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F(\frac{l}{2} - x)}{2EI}, \quad (5.7)$$

odtud

$$y = \frac{F}{2EI} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{l}{2} dx dx - \int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} x dx dx \right) = \frac{F}{2EI} \left[\frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{Fl^3}{48EI}. \quad (5.8)$$

Pro plošný moment setrvačnosti obdélníku pak autor odvodil vztah

$$I = \frac{ah^3}{12},$$

kde a je šířka papíru; pro jeho délku přitom platí $b \approx l$.

Získal tak konečnou podobu vzorce pro výpočet Youngova modulu:

$$E = \frac{mgl^3}{3ayh^3}.$$

Naměřené hodnoty:

$m = 5,57$ g s relativní odchylkou $\delta_m = 2\%$,

$h = 0,11$ mm s relativní odchylkou $\delta_h = 4\%$,

$a = 2,9$ cm s rel. odchylkou $\delta_a = 3\%$.

Výchylku y měřil autor pro různé vzdálenosti břitů l třicetkrát. Dospěl (patrně regresí) k experimentální závislosti

$$E = \frac{mgl^3}{3ayh^3} \cdot \left[1 + 2,85 \left(\frac{h}{l} \right)^2 - 0,84 \left(\frac{h}{l} \right)^3 \right]. \quad (5.9)$$

Rozdíl hodnot E mezi tímto experimentálním vztahem a vztahem teoretickým se však projevil až v desetinách MPa, což je vzhledem k níže uvedené hodnotě E zanedbatelné.

Pro interval hodnot $17,2$ cm $\leq l \leq 18,3$ cm ležely výchylky y v intervalu $1,5$ cm $< y < 2,5$ cm, zpracováním všech dat dostal autor skutečnou hodnotu

$$E = (1,30 \pm 0,03) \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$

Na úplný závěr pak poznamenává, že ze znalosti Youngova modulu lze již snadno určit rychlost šíření podélných vln v papíru

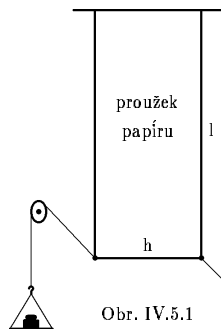
$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 12,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.10)$$

s relativní odchylkou 4%. Symbol ϱ představuje hustotu papíru.

Poznámka redakce. Pokud uvážíme, že i nenamáhaný papír se mírně prohýbá a krouží, potom sledujeme měření jako mírně nekorektní. Správnější by možná bylo použít velmi malý kus papíru a zatěžovat ho ve středu závažíčky.

Dr. Pavol Habuda: Měření modulu torze v polních podmínkách

Z papíru vystříháme obdélníček o delší straně l a kratší straně h . Kratší stranu obdélníku nahoře upevníme a obdélník od ní necháme volně viset, tj. rovina papíru je svislá. Na levý dolní roh visícího proužku papíru připevníme PVC vlákno. Pravý dolní roh pevně fixujeme, například druhým vláknem, které přivážeme k nějakému pevnému vybavení naší laboratoře. Volné vlákno přehodíme přes kladku a na jeho konec budeme zavěšovat závaží. Díky tíhové síle závaží bude vlákno tahat za levý roh papíru. Za pravý roh papíru však bude tahat síla způsobená upevněním. Proužek papíru se tudíž začne kroužit.



Označme modul torze (jinak řečeno modul pružnosti ve smyku) písmenem G . Působící síla nechť způsobí otočení dolní strany papíru o výchylku φ . Předpokládáme, že osa tohoto otočení je svislá a prochází středem symetrie ještě nedeformovaného papíru, tj. středem kratších stran obdélníka. Střed otočení pro dolní kratší hranu je tedy totožný s jejím geometrickým středem. Vzdálenost tohoto středu otočení od jednoho z dolních rohů papíru je $r = \frac{h}{2}$.

Uvažme bod na dolní hraně papíru, který leží ve vzdálenosti $x \leq r$ od středu rotace. Pro smykovou deformaci γ potom platí

$$\gamma = \frac{x\varphi}{l} = \frac{\tau}{G}, \quad (5.11)$$

kde τ je mechanické napětí, $\tau = \frac{dF}{dS}$, tedy první derivace síly podle průřezu v tomto bodě.

Vlákna působí na papír silou téměř v jeho rozích, tedy ve vzdálenosti r od osy rotace. Uvážíme-li z předchozího, že diferenciál síly je

$$dF = \frac{Gx\varphi dS}{l}, \quad (5.12)$$

pak tato síla ve vzdálenosti x od středu rotace působí momentem síly

$$dM = x dF = \frac{G\varphi x^2}{l} dS. \quad (5.13)$$

Moment M celého průřezu je určitý integrál přes tento průřez:

$$M = \int_{-r}^r x dF = 2 \cdot \int_0^r \frac{G\varphi x^2}{l} dS = \frac{2G\varphi}{l} \cdot \int_0^r x^2 dS. \quad (5.14)$$

Pro diferenciál povrchu dS platí $dS = hdx$. Tedy

$$M = \frac{2Gh\varphi}{l} \cdot \int_0^r x^2 dx, \quad (5.15)$$

což ale můžeme zintegrovat:

$$M = \frac{2Gh\varphi}{l} \cdot \int_0^r x^2 dx = \frac{2Gh\varphi}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{2Gh\varphi r^3}{3l}. \quad (5.16)$$

Z tohoto vztahu vyjádříme modul torze G :

$$G = \frac{3Ml}{2hr^3\varphi},$$

daný moment síly je ovšem $M = mg \cdot r$, kde m je hmotnost závaží zavěšovaného na vlákno. Po dosazení obdržíme

$$G = \frac{3mgl}{2hr^3\varphi} = \frac{3mgl}{2hr^2\varphi}. \quad (5.17)$$

Měřil jsem výchylku φ v závislosti na hmotnosti závaží. Jako zátěž jsem použil závažíčka o hmotnosti 50 mg. Pro výchylku $\frac{\pi}{2}$ jsem obdržel po dvaceti měřeních hmotnost $m = (2,6 \pm 0,1)g$, chyba při měření m byla 4%.

Dosazením do odvozeného vztahu máme modul torze $(1,0 \pm 0,1) \cdot 10^5$ Pa, vzniká totiž ještě chyba při měření výchylky a příslušných délek.

Poznámka. V diskusi autor značně pochybuje o správnosti svého měření, neboť mezi modulem torze a Youngovým modulem pružnosti by pro tutéž látku měl platit vztah

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2},$$

což ale podle předchozího autorova měření Youngova modulu neplatí.

Téma 6 – Hélium

Uvážil jsem, že je na čase mírně usměrnit tok vašich úvah, které se (zřejmě díky příliš obecné formulaci tématu) občas pozastavily ve velmi obecné a nicneřkající rovině. Také se mi nelíbilo, jestliže jste téma pochopili jako příležitost opisovat tabulky. V závěru proto vyslovím několik velice konkrétních námětů k úvahám kvalitativním i kvantitativním.

Abych zabránil vašemu pokušení sklouzávat k výčtům tabulkových veličin přiřazených héliu, přetiskuji tabulku vybraných vlastností nejen hélia, ale pro srovnání i vzduchu. Na tabulku se můžete ve svých člancích odvolávat jako na hodnověrný zdroj informací (pokud v ní ovšem nedošlo k tiskové chybě).

Hodnoty v tabulce jsou přepočteny do soustavy SI a pochází z těchto pramenů:

- 1) Kolektiv: MFChT tabulky, SPN Praha, 1989;
- 2) Miroslav Valouch: Pětimístné logaritmické tabulky a tabulky konstant, SNTL Praha, 1967.

	Hélium	vzduch
Hustota plynu	$0,1762 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ při 0°C	$1,2759 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ při 0°C
Měrná tepelná kapacita při stálém tlaku c_p	$5,234 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ při 18°C	$1,005 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ při 15°C
Měrná tepelná kapacita při stálém objemu c_v	$3,153 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ při 18°C	$0,718 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ při 18°C
Poissonova konstanta $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$	1,66 při 18°C	1,40 při 18°C
Tepelná vodivost	$144,61 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ při 0°C	$24,28 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ při 0°C
Měrné skupenské teplo tání	$3,349 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	
Měrné skupenské teplo varu	$25,121 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	$209,34 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
Teplota tání	$-272,2^\circ\text{C}$ při 2,6 MPa $-269,6^\circ\text{C}$ při 10,4 MPa	
Teplota varu	$-268,934^\circ\text{C}$ při $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	-193°C při $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Zvýšení teploty varu přírůstkem tlaku o 1 torr ¹⁾	$1 \cdot 10^{-3}^\circ\text{C}$	
Kritická teplota ²⁾	$-267,9^\circ\text{C}$	$-140,7^\circ\text{C}$
Kritický tlak ³⁾	$2,03 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$38,50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Molární hmotnost	$4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$	$28,96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Střední volná dráha molekul	$17,5 \text{ nm}$ při 0°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	
Počet srážek za jednotku času	$6,9 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ při 0°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	
Dynamická viskozita	$18,73 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ při 0°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$17,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ při 0°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Rychlost šíření zvuku	$971 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ při 0°C $971 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ při 20°C	$331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ při 0°C $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ při 20°C
Hustota kapaliny	$122 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	
Absolutní index lomu pro čáru D	1,00035 při 0°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	1,000292 při 0°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Relativní permitivita	1,00007 při 18°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	1,00060 při 18°C , $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ pro suchý vzduch

Poznámky k tabulce:

- 1) 1 torr = 133,322 Pa.
- 2) Kritická teplota je teplota, při níž je hustota kapaliny rovna hustotě syté páry (tento stav se nazývá "kritický stav"). Při dalším zvýšení teploty přestane kapalná fáze látky existovat.
- 3) Tlak v kritickém stavu (viz pozn. 2).

Příspěvky

Dr. Daniel Klír přisuzuje značný význam počátečním podmínkám, za kterých stroj hélium vyráběl. Domnívá se, že tyto podmínky ovlivní rozložení hélia kolem Země. Uvádí, že za určitých podmínek může odstředivá síla, působící na hélium, převládnout nad silou gravitační, která plyn poutá k Zemi, a část hélia odlétne z oblasti gravitačního vlivu Země.

Dr. Daniel Klír, Dr. Pavol Habuda a Mgr. Aleš Přivětivý předpokládali, že všechno hélium na Zemi zůstane, a spočítali pro takový případ tlak při zemském povrchu, pokud bude hélium rozloženo rovnoměrně kolem Země, jak je tomu např. se současnou atmosférou.

Je-li $M = 5 \cdot 10^{18}$ kg hmotnost hélia, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ gravitační zrychlení (za předpokladu malé výšky atmosféry zanedbáme změnu g s výškou), $R = 6378000$ m poloměr Země, pak pro tlak při povrchu platí zřejmě

$$p = \frac{Mg}{4\pi R^2} \approx 9,56 \cdot 10^4 \text{ Pa},$$

což je jen o trochu méně, než je současný atmosférický tlak. To vše však přestane platit, pokud část hélia atmosféru opustí.

Otázkou udržení hélia v oblasti gravitačního působení Země se zabývali Jarmila Mulačová, Jitka Krouželová a Dr. Daniel Klír. Situaci sice považují za nevypočitatelnou (soudě dle toho, že nic nevyočítali), ale z nízké hustoty hélia soudí, že hrozba úniku plynu je reálná a pravděpodobná. Atmosféra by dle Dr. Daniela Klíra zřejmě měla větší tloušťku. V případě úniku částí hélia by zákonitě klesl atmosférický tlak.

Změnu doby rotace Země spočítal Mgr. Aleš Přivětivý za předpokladu, že těsně před vznikem hélia měla Země periodu $T = 24$ h a moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace $I_0 = 4,3 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (autor bohužel neuvádí, jak k této hodnotě I_0 dospěl). Vznik héliové atmosféry prý způsobí změnu momentu setrvačnosti o $\Delta I = 5 \cdot 10^{32} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (opět nevíme, jak se autor k této hodnotě dobral!!!).

Platí zákon zachování momentu hybnosti:

$$I_0 \omega_0 = (I_0 + \Delta I) \omega,$$

kde ω_0 je úhlová rychlost rotace před Trurlovým činem a ω úhlová rychlost po něm. Odtud Mgr. Aleš Přivětivý odvodil novou periodu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{I_0}{I_0 + \Delta I} \omega_0 = \frac{I_0}{I_0 + \Delta I} T_0,$$

$$T = 1,000012 \cdot T_0,$$

což je zanedbatelná změna oproti periodě původní.

Jitka Krouželová, Mgr. Štěpánka Kučková a Dr. Jan Mysliveček se zaobírali teplotou hélia. Mgr. Štěpánka Kučková si myslí, že na Zemi bude chladněji než dnes, protože hélium "odvádí teplo rychleji než vzduch". Dr. Jan Mysliveček soudí, že se obnoví aspoň zčásti skleníkový efekt, čímž se zmírní teplotní výkyvy mezi dnem a nocí.

Dle téhož autora by mohli fyzikové hledat závislost rychlosti šíření zvuku v atmosféře na teplotě. Přes den by prý byla rychlost zvuku asi $971 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, v noci by klesala s teplotou.

Šíření zvuku zkoumali i další. Jitka Krouželová se domnívá, že by se třeba ani nemusely používat telefony. Bc. Kateřina Nováková poukazuje na veselý fakt, že pokud by lidé mohli na chvíli sejmut skafandry, mluvili by jako hurvínci. Mgr. Štěpánka Kučková dodává, že by bylo nutno upravit stupnice hudebních nástrojů.

Dr. Daniel Klír upozorňuje, že se změní absorbní spektrum v atmosféře, tedy se můžou změnit barvy. Mgr. Štěpánka Kučková vidí příčiny změny barev okolních věcí i oblohy v rozdílu mezi indexem lomu hélia a vzduchu. Také se domnívá, že díky změně úhlu odrazu a dopadu budou některé optické přístroje ukazovat – cituji – "bludy".

Mgr. Aleš Přivětivý poukazuje na modrou barvu výboje v héliu, aniž by se však zmínil o tlaku, při kterém lze takový výboj pozorovat.

Jarmila Mulačová předpokládá, že se změní také propustnost atmosféry pro elektromagnetické záření a část atmosféry bude ionizována.

Mgr. Štěpánka Kučková a Dr. Jan Mysliveček si všimli odporu prostředí. Mgr. Štěpánka Kučková tvrdí, že pokud bude hustota hélia $7 \times$ menší než hustota vzduchu, bude např. peří padat výrazně rychleji než ve vzduchu, neboť odporová síla je přímo úměrná hustotě prostředí. Doplnuji, že onu sedmkrát menší hustotu nám nic nezaručuje.

Dr. Jan Mysliveček předpovídá návrat k starým dobrým příručkám o aerodynamice. Autor rovněž věští "znovuzrození výroby v leteckém průmyslu, neboť by mohla začít létat letadla". Mgr. Štěpánka Kučková však sází spíše na balóny a vzducholodě plněné horkým héliem, neboť letadla spotřebují příliš mnoho cenného kyslíku (bez něj nemůže dojít k hoření). Poznamáváme, že takové ohřívání hélia by se značně prodražilo.

Elektrické vodivosti si povšimla Jitka Krouželová – cituji: “. . . muselo by se vedení elektrického proudu pořádně zabezpečit nebo najít náhradu za el. proud, jinak by se naše planeta stala velkým elektricky nabitým tělesem – elektrárnou”. Naše chabé představy o elektrárně jsou přece jen trochu jiné.

Mgr. Štěpánka Kučková vyjadřuje znepokojení nad rozdílem mezi permitivitou vzduchu a hélia (viz tabulku). Snížila by se např. kapacita deskových kondenzátorů. Některé elektrické přístroje by tudíž změnily své chování. Připomeňme, že hélium je vodivé, kapacita deskových kondenzátorů by se tedy snížila ještě mnohem rapidněji, než se snad autorka domnívala.

Bc. Kateřina Nováková uvádí zajímavý postřeh, že by došlo také k nasycení zemské kůry héliem.

Tolik stručný výčet vašich objevů. Téměř všichni autoři pak připojili nějaký filosofický závěr (bohužel bez filosofického poučení). Citujme některé z nich.

Mgr. Štěpánka Kučková: “Nebylo by to vůbec k žití. Dříve než by mořské řasy (kdyby přežily) stačily vyrobit trochu toho kyslíku, byl by konec. Nejspíš bychom nevystačili s energií (tepelné elektrárny by byly kvůli velké spotřebě O_2 vyřazeny z provozu). Energií zbývajících zdrojů bychom museli vynaložit na výrobu kyslíku a tepla, případně k trvalému odstranění vzešlého hélia, protože to umí projít i sklem.”

Bc. Kateřina Nováková: “Lidé by byli rádi, že mají konečně nějakou atmosféru a adaptovali by se na ni.”

Jitka Krouželová: “Konstruktor Trurl dal Zemi pořádně zabrat svým novým vynálezem a jeho produkci hélia. Lidé musí používat skafandry, ostatní živé organismy již nežijí. Země se stává pouštinou. (Možná se však časem vyvinou organismy, které uzpůsobí své buňky a metabolické funkce právě tomuto prostředí.) Bylo by zajímavé podívat se do této doby, ale žít bych v ní nechítěla.”

Dr. Jan Mysliveček: “Asi nejzávažnějším důsledkem by byla žaloba, kterou by podalo OSN k mezíplanetárnímu soudu na Saturnu. Důsledek této žaloby by byl, že by Trurla zavřeli na Slunci, které by díky pokusům zničil, a s ním i veškerý život v naší Sluneční soustavě. Mezitím by stačil zkrachovat průmysl na výrobu hélia.” Dodáváme, že Saturn je z valné většiny plynný, neplynným soudcům by se na něm proto špatně soudilo.

Dr. Daniel Klír: “Kapalně hélium by bylo zajímavější – škoda. Bylo by lepší vyrobit $5 \cdot 10^{18}$ kg kapalného 4He nebo aspoň 3He (také supratekuté). To by pak byly teprv zajímavé jevy!”

Dr. Pavol Habuda: Vznik hélia

Nejprve odhadneme čas potřebný na výrobu hélia. Předpokládejme, že počet kopanců jednoho člověka za sekundu je $H = 2$ až 5 sekund. Tedy stroj dostal za sekundu $2H = 4$ až 10 kopanců. Vezmeme průměr $7kop \cdot s^{-1}$. Stroj tedy chrlí hélium po dobu $\frac{10^7}{7} s \approx 16,5$ dne. Zjistíme nyní, za jakou dobu se vyrovnají tlaky na všech místech zeměkoule. Platí

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi R_z}{\sqrt{\frac{3kT}{m_{He}}}} = 10,4 \text{ s.}$$

Zanedbali jsme přitom zakřivení Země, zemětřesení, blesky... Z předchozího vidíme, že tlak stoupal jen pozvolna s časem, všude stejně.

Dr. Pavol Habuda: Tlak na povrchu Země

Hmotnost atmosféry Země je přibližně $5,3 \cdot 10^{18}$ kg, héliová atmosféra se tedy bude podobat vzdušné. Tlak jsem počítal metodou numerické integrace na počítači. Integrujeme zdola až do výšky 10000 km. Pro krok $dh = 1$ m je rozdíl dvou po sobě jdoucích hodnot tlaku malý. Položme

$$dp = p + \frac{F}{S} = p + \frac{\kappa M_Z dm}{R_Z^2 S},$$

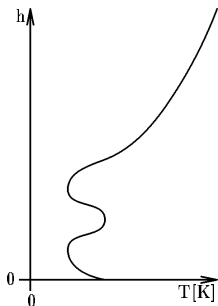
kde κ je gravitační konstanta, M_Z hmotnost Země, R_Z poloměr Země, p tlak, dm přírůstek hmotnosti hélia, dp přírůstek tlaku.

Úpravou

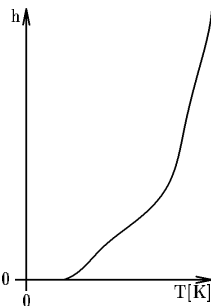
$$dp = p \left(1 + \frac{\kappa M_Z M_{He}}{(R_Z + h)^2 T} \right),$$

kde M_{He} je molární hmotnost hélia, h aktuální výška atmosféry.

Chtěli bychom nyní spočítat teplotu T . K jejímu výpočtu si vezmeme na pomoc tepelnou křivku atmosféry. U země jsou dvě teplotní minima pod a nad ozónovou vrstvou. V héliové atmosféře ozónová vrstva neexistuje, můžeme proto předpokládat exponenciální růst teploty. (Pozn. red.: autor pokračuje řadou vzorců, které však téměř nekomentuje; proto je neotiskujeme.) Následující obrázky IV.6.1 a IV.6.2 znázorňují teplotu coby funkci výšky ve vzdušné a héliové atmosféře.



Obr. IV.6.1: Vzdušná atmosféra



Obr. IV.6.2: Héliová atmosféra

Dr. Pavol Habuda: Všeobecný dopad na atmosféru

Počasí bude velmi podobné současnému. Atmosféra však nebude obsahovat ozónovou vrstvu, proto bude nutné kupovat olověné skafandry na ochranu před kosmickým zářením. Atmosféra bude také sahat mnohem výše než dnes, proto se zvýší hranice ionosféry. Díky tomu selepší příjem televizního signálu a radiových vln – budeme moci lépe sledovat televizi a poslouchat kvalitnější rádio a stanice z větší dálky. Ze stejného důvodu budou častěji pozorovatelné polární záře na jih od pólu. Jestliže se při dnešní atmosféře polární záře tvoří v oblasti nízko nad pólem, při héliové atmosféře se budou tvořit výše nad pólem. Ionosféra je totiž nejvyšší vrstva atmosféry a polární zář vzniká pouze v oblasti pólů. Pouze tam se dostatek částic dostane do oblasti, kde může ionizovat molekuly. (Např. na rovníku záře vzniknout nemůže, protože van Allenovy pásy prakticky vůbec nepropouštějí nabitě částice.)

Barva atmosféry je diskutabilní. Rozptýlí závisí na velikosti částic, tuším, že na čtvrté mocnině vlnové délky. Podle tohoto rozptýlení bude mít obloha tmavě modrou barvu.

Za určitý čas (řádově $10^6 - 10^8$ let) se héliová atmosféra díky nízké hustotě vypaří do meziplanetárního prostoru.

Závěr

Jsme toho názoru, že nerozřešených problémů zůstalo ještě mnoho. Héliová atmosféra je jednodušší fyzikální model než atmosféra vzdušná, neboť se skládá z jediného, poměrně jednoduchého prvku. Proto byste měli být schopni řadu efektů předpovědět. Toto téma je pěkné také proto, že nemůžete opisovat žádnou existující literaturu – o héliovém obalu Země začnou fyzici psát až v době po Trurlově pokusu.

Náměty

Výrobu hélia správně upřesnil Dr. Pavol Habuda. Doplníme, že vznikající hélium mělo sympatickou teplotu 20° . Dále specifikujme, že nás zajímají především fyzikální důsledky Trurlova činu. Ostatní následky a důsledky jsou sice také zajímavé, ale přece jen, náplní tohoto časopisu by měla být hlavně matematika a fyzika.

Tolik na vysvětlenou. A nyní slíbený balíček nikoliv ekonomických opatření, nýbrž konkrétních námětů pro případ, že by vám snad došla fantazie:

- 1) Hlavním úkolem je zjistit, jaké množství plynného hélia se na Zemi skutečně udrží.
- 2) Bude se hélium v závislosti na čase ohřívat nebo chladnout? Jak rychle? Může se stát, že přejde do kapalného nebo nedejbože i pevného skupenství?
- 3) Má pravdu Dr. Pavol Habuda ve svém článku o závislosti teploty na výšce nad zemským povrchem?

- 4) Bude množství hélia pohlčeného zemskou kůrou relevantní (nezanedbatelné)?
- 5) Vznikne nějaký koloběh hélia jako je tomu např. s koloběhem vody? Vzniknou nějaké louže třeba “napršeného” hélia, na kterých by mohl Dr. Klír kromě pouštění lodíček zkoumat krásy supratekutosti?
- 6) Vzniknou nějaké mraky např. z vodních par? Pokud ano, jak asi vysoko?
- 7) Byla řeč o letecké dopravě. Zkuste navrhnout létající stroj, který by fungoval na jiném principu než raketa a unesl by deset osob za předpokladu, že hélium zůstane plynné.
- 8) Zkuste se podrobněji zabývat otázkou mechanismu vzniku barev předmětů i oblohy.
- 9) Proč a jak se změní výška všech zvuků a “všichni budou mluvit jako hurvínci”?
- 10) Jak bude třeba upravit stupnice hudebních nástrojů?
- 11) Jak velký bude odpor hélia? Bude peříčko padat pomaleji v současné atmosféře nebo v té budoucí héliové?
- 12) Bude foukat vítr?
- 13) Změní se výška Slunce nad obzorem?

Doufám, že upřesněním zadání jsem již teď zajistil tématu přibližně mnoha miliónů řešitelů. Přesto opakují, že výše vyjmenovaných otázek se nemusíte zdaleka držet. Mnohem zajímavější bude, když si budete různé otázky klást sami.

Téma 7 – MAGICKÁ ZRCADLA

Téma se setkalo s nebyvalým ohlasem celého jednoho řešitele, Dr. Daniela Klíra. Ostatní vědátoři se zdrželi svých příspěvků, někteří údajně dokonce zadání neporozuměli. V tom případě nelze než dotyčným doporučit soustavnou četbu zadání tak dlouho, dokud ho nepochopí. (Algoritmus je triviální a důkladně odzkoušený – jedná se o prostý `while` cyklus. Zájemcům zašleme vývojový diagram nebo černý štítek.) Případným úspěšným řešitelům tohoto nikterak nezájímavého tématu, kteří za něj dostanou aspoň 10 bodů, budeme udílet zvláštní titul “promovaný optik”.

Vzhledem k tomu, že Dr. Daniel Klír nevyřešil zdaleka všechny problémy s danou oblastí optiky spojené, nemá smysl zveřejňovat náměty nové. Jistě by však bylo ostudou, kdyby otázky položené v minulém čísle zůstaly na věčné časy nerozřešeny.

Pokud vám připadá zadání příliš složité, nemusíte se jej samozřejmě striktně držet. Můžete si vymyslet tisíce jiných, jednodušších příkladů deformovaných zobrazení rovinnými zrcadly. Inspirovatí se můžete třeba v Zrcadlovém bludišti v Praze na Petříně.

Dr. Daniel Klír: Magická zrcadla

(a) Pouze zakřivená zrcadla

Zformulujeme nejprve základní princip, kterého budeme využívat při zobrazování geometrických útvarů pomocí zrcadel.

Princip 1. *Je-li zrcadlo vypuklé, zobrazovaný objekt se v příslušném rozměru zkrátí. Je-li zrcadlo vyduté, příslušný rozměr se prodlouží. Mějme zakřivené zrcadlo. Nechť nějaký řez jeho plochou je vypuklý a některý jeho řez je vydutý. Všechny vyduté řezy pak rozměry s nimi rovnoběžné prodlužují, vypuklé řezy příslušné rozměry zkracují.*

Příklady použití Klírova principu.

- Jednoduše uděláme ze čtverce kruh – a naopak – pomocí vypuklého resp. vydutého zrcadla – musí se však měnit poloměr křivosti tohoto zrcadla (tj. není všude stejný).

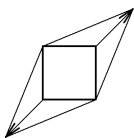
- Různou kombinací můžeme dostat libovolné hruškovité tvary aj.

- Pravděpodobně lze zobrazit i čtverce na kosočtverec (stačí pouze vyduté zrcadlo – tím není myšleno zrcadlo se stálým poloměrem křivosti!) – viz obr. IV.7.1.

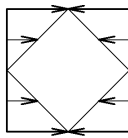
Méně snadná je rotace o 45° – musí se hodně měnit poloměr křivosti, ale teoreticky je tento problém řešitelný užitím *principu 1* (viz obr. IV.7.2).

Bez zalomení pak pravděpodobně není možné zobrazit čtverec na tvar písmene X nebo Y – bude to problematické i s využitím zalomených zrcadel.

Jednoduché je zobrazení čtverce na úsečku – ta ale nikdy nebude úsečkou v matematickém slova smyslu, nýbrž rovnou čarou o jisté nenulové tloušťce (jinak by stejně nebyla vidět). K tomuto zobrazení použijeme zrcadlo s konstantním poloměrem křivosti r v jednom směru a s poloměrem křivosti ∞ ve směru kolmém. Jeden rozměr se zkrátí, druhý zůstane zachován (viz obr. IV.7.3). Analogicky vytvoříme úsečku z kruhu.



Obr. IV.7.1



Obr. IV.7.2



Obr. IV.7.3

(b) i zalomená zrcadla

Pomocí zalomených zrcadel lze již zobrazovat navzájem libovolné rovinné útvary. Jen je třeba vymyslet jak. (Autor dodává, že by se zde hodila počítačová simulace. Souhlasíme. Pouze se podívujeme, že autor takovou simulaci neprovedl.)

Téma 8 – Číselné soustavy

Desítková soustava

Bc. Kateřina Nováková, Dr. Daniel Klír, Mgr. Štěpánka Kučková: Základní algoritmy

Tito autoři popsali známé školní algoritmy pro počítání v desítkové soustavě. Protože se však tyto základní znalosti probírají ve třetí třídě základní školy, nebudeme je otiskovat.

Mgr. Štěpánka Kučková: Za vším hledej Sumer

Kdo vymyslel počítání, nevíme, ale staří Sumerové jej považovali za vynález člověka na rozdíl od písma – daru bohů. S číselnými znaky se setkáváme již na nejstarších piktografických tabulkách, zprvu to byly jen prosté tečky a čárky, ale později byly uspořádány do soustav. V Sumeru se užívaly soustavy dvě: *desítková* a *šedesátková*, jejich kombinace umožňuje dělit celá čísla beze zbytku dvěma a třemi.

Už ve 2. tisíciletí př. n. l. se v Mezopotámii používala tzv. *poziční soustava* – jedno číslo může mít různou hodnotu podle svého umístění v komplexu číslic (vznik řádů). Na princip této poziční soustavy Římané nepřišli!

První lidé, kteří objevili, že sčítání stejných čísel lze povýšit na násobení, byli rovněž Sumerové. Tento vynález doplnili pak počátkem 3. tisíciletí př. n. l. (ne-li dřív) vynálezem dělení.

Vznik desetinné soustavy je ale připisován víceméně Indům. Ti na tuto soustavu přišli také a navíc vytvořili deset znaků pro číslice dnes označované jako arabské. Upevnění pozic arabských číslic později pomohli Arabové jejich užíváním.

Literatura. *V. Zamarovský: Na počátku byl Sumer; J. Jílek: Dějepis.*

Mgr. Štěpánka Kučková: Vlastnosti tělesa reálných čísel

Tato autorka popsala některé známé vlastnosti, které splňují reálná čísla, např.:

1. neutrální prvek vzhledem ke sčítání $\exists 0 : 0 + a = a$ a k násobení $\exists 1 : 1 \cdot a = a$,
2. asociativita sčítání $a + (b + c) = (a + b) + c$ a násobení $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
3. komutativita sčítání $a + b = b + a$ a násobení $a \cdot b = b \cdot a$,
4. distributivita násobení vzhledem ke sčítání $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
5. existence inverzního prvku ke sčítání $\forall a : \exists (-a) : a + (-a) = 0$ a pro každé nenulové číslo i k násobení $\forall a, a \neq 0 : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$.

Dále uvádí, že čísla se dělí na *přirozená, celá, racionální, reálná a komplexní*. Autorka se domnívá, že toto je vlastnost desítkové soustavy. To není přesné, neboť všechny výše uvedené vlastnosti a rozdělení se týkají čísel jako takových, ne jejich zápisu. Ať si vymyslíme jakoukoliv soustavu, vždy budou platit tyto axiomy a bude možno dělit čísla do skupin.

Autorka dále uvádí některé zajímavé algoritmy na zjednodušení počítání s čísly (např. malá násobilka podle počtu prstů na rukou¹ nebo rychlejší počítání druhých mocnin čísel pomocí využití vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \dots$).

Dvojková soustava

Mgr. Aleš Přivětivý, Dr. Daniel Klír, Prof. Tomáš Brauner: Základní početní operace

Počítání ve dvojkové soustavě je podobné jako počítání v soustavě desítkové. Je mnohem jednodušší, neboť máme jen 2 cifry $\{0, 1\}$ a tedy si musíme pamatovat menší tabulky (na sčítání či násobení).

Označme si čísla takto: $A = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ (obvyklý zápis v poziční soustavě).

Sčítání se dá jednoduše popsat jako sečtení odpovídajících si cifer spolu s přenosem do vyššího řádu. Sčítá se podle takto: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = (1)0$. Takto zpracujeme postupně všechny řády od nejnižšího po nejvyšší. Při sčítání více čísel sečteme všechny cifry daného řádu a přenos, výsledek podělíme dvěma, do výstupu zapíšeme zbytek po dělení a nový přenos bude celá část podílu. **Př.:** $10011 + 111 = 11010$.

Analogicky se v této soustavě **odečítá**. Aby tento proces byl konečný, je NUTNO, aby odečítané číslo bylo menší než to druhé. Zde mohou nastat záporné přenosy. Odečítá se takto: $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$, $0 - 1 = (-1)1$.

Poznámka redakce: Pokud bychom se dohodli, že kladné číslo má od jistého řádu výše samé nuly a záporné číslo naopak samé jedničky, je možno v této soustavě vyjádřit i čísla záporná. Udělá se to takto: od čísla odečteme 1 a prohodíme nuly a jedničky. **Př.:** $-11 = \dots 111101$. Dá se ukázat, že početní operace zůstanou správnými i pro tato čísla (zkuste si např. sečíst výše uvedené $11 + (-11) = 11 + (\dots 111101)$). Např. odečítání můžeme snadno realizovat jako sčítání s číslem vynásobeným (-1) . Tento způsob zápisu čísel používají mj. i počítače. Jeho nevýhodou je, že záporná čísla nemají konečný zápis.

Násobení čísel snadno realizujeme, pokud máme k dispozici sčítání. Jedno z čísel násobíme postupně všemi ciframi čísla druhého, mezivýsledky posuneme o odpovídající počet řádů a pak je sečteme. V této soustavě je výhodné, že se násobí buď cifrou 0 (pak je výsledek 0) nebo cifrou 1 (pak je výsledek stejný). Závěr tedy je, že nemusíme vůbec násobit, pouze sčítáme mezivýsledky. **Př.:** $1101 \cdot 1011 = 1101 + 1101x + 0xx + 1101xxx = 10001111$.

Dělení čísel se provádí také podobně jako v desítkové soustavě. Dělitel si posuneme o tolik řádů doleva, aby jeho nejvyšší cifra byla na stejném místě jako u dělence. Pak ho zkusíme odečíst od dělence. Je-li to možné, napíšeme 1, jinak napíšeme nula. Dělitel posuneme o řád níže a postup zopakujeme. Jakmile dojedeme na nejnižší řád, máme několik možností: vyjde-li zbytek 0, dostali jsme přesný podíl a můžeme skončit. V opačném případě můžeme

(A) vzít celočíselný podíl a skončit,

(B) pokračovat v dělení za desetinnou čárkou a pak

(a) nalézt periodu (protože zlomky jsou vždy periodické),

(b) číslo vhodně zaokrouhlit.

Umocňování můžeme provádět buď opakovaným násobením (což bude při výpočtu 3^{128} velice pomalé) nebo následujícím trikem. Při výpočtu 128. mocniny není třeba počítat všechny mocniny $(1, 2, 3, 4, \dots, 128)$, nám stačí

¹ podle čeho si asi člověk vybral zrovna desítkovou soustavu?

znát tu poslední. Nejkratší cesta k jejím u výpočtu je postupný výpočet $3^1, 3^2, 3^4, 3^8, \dots, 3^{128}$, na což potřebujeme 7 násobení (pokaždé umocníme na druhou předchozí mezivýsledek). Tato finta se dá použít vždy, budeme postupovat takto:

Chceme-li vypočítat $z = x^y$, vyjádříme si y ve dvojkové soustavě. Do proměnné z uložíme 1. Nyní pro každou cifru y od nejvyšší po nejnižší provedeme toto $z := z^2$ a $z := z \cdot x$. Každý jistě snadno nahlédne, že toto vede vždy ke správnému výsledku (zkuste si tento algoritmus představit nikoliv jako výpočet mocnin pomocí násobení ale jako výpočet násobení pomocí sčítání).

Po pochopení tohoto triku byste si mohli myslet, že tento postup vede vždy k nejrychlejšímu výpočtu výsledku. Ale intuice se často mýlí, jinak je tomu i v tomto případě. Při výpočtu x^{15} potřebujeme tímto způsobem 6 násobení. Pokud si ale uvědomíme, že $x^{15} = (x^5)^3$, tak na postupný výpočet 5. a 3. mocniny potřebujeme pouhých 5 násobení. Který postup je podle vás výhodnější?

Soustava o základu -2

Jarmila Mulačová, Mgr. Aleš Přivětivý, Prof. Tomáš Brauner, Dr. Jan Mysliveček, Dr. Daniel Klír, Bc. Ivana Čapková: Základní početní operace

Již rozepsáním několika prvních čísel (podle binárního zápisu) v této soustavě je zřejmé, že pro člověka bude tento zápis naprosto nestravitelný. To však nijak nebrání tomu, aby se s těmito čísly jednoduše počítalo.

Veškeré úvahy o přenosech do sudých a lichých řádů můžeme obejít tak, že si čísla rozdělíme na skupiny po dvou a sčítáme je po těchto dvojicích. Snadno nahlédneme, že z vnějšího pohledu se tento zápis chová skoro jako čtyřková soustava (po provedení součtu v dané dvojici cifer vypočítáme výsledek a přenos, který pak regulárně přičítáme k další dvojici). Tabulka součtů bude tato:

00	00	00	00	01	01	01	10	10	11
00	01	10	11	01	10	11	10	11	11
00	01	10	11	(1)10	11	00	(11)00	(11)01	10

Pro praktický výpočet je nutno si zapamatovat, že $-1 = 11$, takže vznikne-li nám přenos 11, je vhodné uvážit, nemáme-li radši použít přenos -1 . Pokud bychom se fixovali na jeden typ přenosu, snadno se nám stane, že nám budou vycházet pořád přenosy až do nekonečna (cifry výsledku budou samé nuly a přenosy pořád ne a ne se zastavit — zkuste si například sečíst 11 a 1).

Touto úvahou jsme ale úplně obešli vlastnosti této soustavy a nepochopili jsme plně princip **sčítání**. Při bližším prozkoumání zjistíme, že výpočet probíhá stejně jako u dvojkové soustavy až na jedinou výjimku — přenosy do vyššího řádu se před předáním vynásobí (-1) . Je to logické, neboť my chceme, aby se nějaký přenos z naší operace přičítal o řád výše. Ve dvojkové soustavě mají všechny řády stejné znaménko, takže se přenos předá bez problémů. V této soustavě se ale znaménka řádů střídají, takže přenos musíme vynásobit (-1) .

Analogicky v této soustavě i **odčítáme**. Počítáme stejně jako ve dvojkové soustavě, ale případný záporný přenos (-1) vezmeme jako kladný přenos 1.

Násobení se provádí ÚPLNĚ stejně, rozdíl ve výpočtu se projeví v tom, že použijeme mínus dvojkové sčítání místo dvojkového. Speciálním případem je násobení (-1) , což znamená násobení 11 (tedy v této soustavě se $(-x)$ počítá složitěji než v dvojkové soustavě).

Dr. Jan Mysliveček: Dělení v (-2) -soustavě

Na první pohled si člověk možná pomyslí, že bylo-li násobení stejně jako ve dvojkové soustavě, bude tomu i u dělení. Zde nás intuice opět zklame. Kámen úrazu je v odečtení čísla. Ve dvojkové soustavě zjistíme jednoduše porovnáním odpovídajících si cifer, je-li možno číslo odečíst (a má-li se zapsat 0 nebo 1). Poté číslo odečteme a **dělenec má aspoň o cifru méně**.

Tady nic podobného pravděpodobně nefunguje. Pouhé zjištění, zda je možno číslo odečíst, zde nejspíš nemá smysl, neboť např. k tomu, abychom dostali -4 , musíme nejprve odečíst 8 a pak teprve přičíst 4, což je v přímém rozporu s výše uvedenou metodou.

Složitou ale schůdnou cestu navrhl Dr. Jan Mysliveček. Nebudeme se starat o nějaké zmenšování dělence a postupně psaní jednotlivých cifer podílu. Prostě posuneme dělitel tak, aby jeho nejvyšší cifra splývala s cifrou dělence a odečteme ho. Na zvláštní papír si budeme dělat poznámky, kde jsme co odečetli (připíšeme tam 10000...000 —

podle daného řádu). Vznikne nám mezivýsledek, který může mít obecně víc cifer než ten předchozí, ale my na to nebudeme hledět a budeme odčítat dál a dál, dokud nedostaneme v dělení číslo s menším počtem cifer než v děliteli. To pak prohlásíme za zbytek po dělení a podíl bude součet všech čísel na vedlejším poznámkovém papíře.

Aby se situace vyjasnila, zkuste si vypočítat podíl $-35/-1$ neboli $101101/011$. Svůj výpočet porovnejte s tabulkou:

	dělenec	cifra podílu
	101101	
	-11000	
	11010101	1000
analogicky dále	10101	100000
	1101001	100
	1001	100000
	1011	10
	110101	10
	101	10000
	11010	1
	10	1000
	11	1
	0	1

Součet čísel $1 + 1 + 1 + 10 + 10 + 100 + 1000 + 1111000 = 11001111$, což je kýžených 35.

Je vidět, že je tento postup není dokonalý a je na vás, abyste navrhli jeho vylepšení.

Dr. Jan Mysliveček: Hledání kořenů funkcí

Autor se zabývá hledáním kořene funkce $f(x) = x^2 - 2$, tedy čísla $\pm\sqrt{2}$. Navrhuje k tomu použít tento postup: odhadneme si nějak kořen, např. číslem $x_0 = 1$. Chceme-li najít přesnější odhad, dosadíme jej do funkce: $0 = f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2$. Předpokládáme-li, že náš odhad je dostatečně přesný, tj. Δx je malé, můžeme zanedbat člen $(\Delta x)^2$. Dostaneme tak, $\Delta x = \frac{2 - x^2}{2x}$. Nyní jsme našli lepší odhad kořene funkce

$$\text{a to } x_1 = x_0 + \Delta x = x_0 + \frac{2/x_0 - x_0}{2} = \frac{x_0 + 2/x_0}{2}.$$

Tímto autor končí, nezabývá se diskusí o tom, zda tato posloupnost čísel skutečně konverguje ke kořenu funkce.² Pravdou je, že objevil jednu z používaných metod na hledání kořenů funkce, tzv. *Newtonovu metodu*, která obecně využívá vztahu $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, což je v naprostém souladu s uvedeným vzorcem. Poznamenejme ještě, že tato posloupnost konverguje ke kořenu skutečně velice rychle.

Autor dále rozebírá tento postup v mínus dvojkové soustavě, což však z pochopitelných důvodů nepřetiskujeme (nejedná se o novou operaci, pouze o posloupnost již použitých operací). Posloupností těchto operací můžeme vyjádřit mnohé funkce, např. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Zatím neřešenou otázkou je výpočet druhé odmocniny přímo — viděl jsem kdysi postup, který se podobal dělení a který podobně druhou odmocninu počítal. Pokud o něm někdo něco ví, nechť jej publikuje, bude nás to velice zajímat (nemusí to být ani v exotických soustavách, stačí i soustava desítková).

Soustava o základu $\sqrt{2}$ · i

Bc. Ivana Čapková, Dr. Daniel Klír, Prof. Tomáš Brauner: Porovnání s (-2) -soustavou

Tato na první pohled hrůzně vypadající soustava je docela jednoduchá, známe-li již mínus dvojkovou sou-

² a to je jediné dobře, neboť toho budete mít dost na vysoké škole

stavu. Rozepíšeme-li si prvních několik řádů dostaneme

řád	hodnota
0	1
1	$\sqrt{2} \cdot i$
2	-2
3	$\sqrt{2}^3 \cdot i^3 = -2 \cdot \sqrt{2} \cdot i$
⋮	⋮

a hned nás napadne, že na sudých řádech jsou čísla reálná a na řádech lichých čísla imaginární. Ba co víc, tato čísla jsou zapsána v mínus dvojkové soustavě!

Z toho okamžitě plyne, jak se v této soustavě sčítá a odčítá: vezmeme si liché cifry zvlášť a provedeme s nimi požadovanou operaci. To stejné provedeme i se sudými ciframi.

Násobení se bude dělat také jako ve dvojkové soustavě: vybereme si jedno ze dvou čísel a to budeme postupně násobit všemi ciframi čísla druhého a mezivýsledky posunuté o příslušný počet řádů budeme sčítat. I zde to dá správný výsledek (důkaz je jednoduchý, využijeme distributivního zákona a toho, že násobení mocninou základu soustavy odpovídá posunu o odpovídající počet řádů).

Nevýhodou této soustavy je to, že číslo i má nekonečný binární rozvoj (umíme jednoduše vyjádřit $\sqrt{2} \cdot i$, ale ne i).

Unární soustava

Dr. Daniel Klír, Prof. Tomáš Brauner: Počítání s kamínky

Nevýhodou této soustavy je nepohodlný zápis velkých čísel. Algoritmy na výpočty jsou však nesmírně jednoduché.

Sečtení dvou čísel odpovídá spojení dvou hromádek kamenů. **Odečtení** odpovídá vyčleněním daného počtu kamenů z dané hromádky.

Násobení snadno realizujeme skládáním kamínků do mřížky $m \times n$ (délky stran mřížky snadno zjistíme naskládáním všech kamenů v hromádce za sebe). **Dělení** také není nic obtížného, pouze zkusíme z dané hromádky odebrat daný počet kamenů. Pokud se nám to podaří, uchováme si jeden kamínek a zkusíme to znovu. Počet uchovaných kamínků je roven celočíselnému podílu a zbylé kameny na hromádce zbytku po dělení.

Poznámka redakce: Elegantní je také celočíselná **druhá odmocnina**. Odebírajíce kameny z hromádky skládáme čím dál větší čtverce ($1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots$). To uděláme snadno tak, že ke dvěma sousedním hranám původního čtverce přidáme po jednom kamínku. Až nám kamínky dojdou, strana čtverce je celočíselná odmocnina a snadno zjistíme i zbytek. Takto snadno vypočítáme i třetí odmocninu (pokud jdou kamínky skládat na sebe), s vyššími odmocninami bychom už asi měli problémy vzhledem k dimenzi prostoru, ve kterém žijeme.

Římská soustava

Dr. Daniel Klír, Prof. Tomáš Brauner: Fúj!

Oba autoři se vzácně shodují, že tato soustava je naprosto nevhodná pro zápis čísel, o počítání raději ani nemluvě.

Dr. Daniel Klír se sice pokusil něco málo naznačit, ale byly to jenom konkrétní protipříklady ukazující, jak nerozumné výsledky nám mohou vyjít (např. $MCXVI-X=MCVI$, ale $M-X=XM$, $M-DC=CD \dots$).

Polyadické soustavy

Prof. Tomáš Brauner: Vyjádření čísel a počítání s nimi

Zvolme si základ soustavy z (přirozené číslo). Při zápisu čísel budeme používat cifry $0, 1, \dots, (z-1)$. Každé číslo vyjádříme ve tvaru $(\dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 + a_{-1}/z + a_{-2}/z^2 + \dots)$. Před číslo můžeme ještě připsat znaménko “-” podle toho, zda je číslo záporné. Dále uvažujeme pouze celá čísla.

Zápis čísla v této soustavě získáme tímto algoritmem: $a_i := x \bmod z$, $x := x \operatorname{div} z$. Na počátku je $i = 0$ a po každém dělení se jeho hodnota zvýší. Takto počítáme jednotlivé cifry, dokud je $x \neq 0$. Vyjádření čísel v polyadické soustavě je jednoznačné. K důkazu využijeme znalosti nerovnosti $|\sum_i x_i| \leq \sum_i |x_i|$.

Nechť $\sum_{k=0}^m a_k z^k = x = \sum_{k=0}^n b_k z^k$. Je-li $m \neq n$, bez újmy na obecnosti nechť $m < n$. Platí ale $x \leq \sum_{k=0}^m (z-1)z^k = (z-1) \sum_{k=0}^m z^k = (z-1) \cdot \frac{z^{m+1}-1}{z-1} = z^{m+1}-1$, což je spor. Takže musí platit $m = n$. Nechť $a_n \neq b_n$.

Z $a_k, b_k \in \{0, 1, \dots, z-1\}$ plyne $|a_k - b_k| \in \{0, 1, \dots, z-1\}$, tj. odečtením dostaneme $z^n(b_k - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - b_k)z^k$, ale platí $|z^n(b_k - a_k)| \geq z^n > z^n - 1 = (z-1) \cdot \frac{z^n-1}{z-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (z-1)z^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - b_k| \cdot z^k \geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - b_k)z^k \right|$, což je spor. Odtud plyne $a_n = b_n$. Dále postupujeme indukcí, dostaneme, že $\forall i: a_i = b_i$.

Speciálními případy této soustavy jsou již zmíněná desítková a dvojková soustava.

Prof. Tomáš Brauner: Vyjádření v (-2) -soustavě

Díky nerovnosti $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}$ se dá ze zápisu čísla ihned rozhodnout, je-li kladné nebo záporné (podle toho, je-li nejvyšší řád sudý nebo lichý). Největší možné číslo je pak to, ve kterém jsou na sudých místech jedničky, jinak všude samé nuly. Tedy největší $(2n+1)$ -ciferné číslo je $1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n} = \frac{2^{2n+2}-1}{2^2-1} =$

$\frac{1}{3}(2^{2n+2}-1)$, analogicky nejmenší možné $(2n+1)$ -ciferné číslo je $\frac{1}{3}(2^{2n}-1) + 1$.

Stejným postupem jako u normálních polyadických soustav i zde můžeme lehce dokázat jednoznačnost vyjádření čísel.

Další náměty

Potěšilo mne, že soustavu o základu $\sqrt{2}$ jste rozlouskli. Mám pro vás další oříšek, tentokrát o něco těžší. Zkuste vymyslet, jak by se počítalo v **soustavě o základu** $(i-1)$. Velice zajímavý je i graf vyznačující body, které lze vyjádřit částečným rozvojem např. 10 binárních cifer. Vůbec to není čtvercová síť, jak by se mnozí mohli domnívat.

Další velice zajímavou soustavou je **vyvážená trojková soustava**. Je to soustava o základu 3, ale nepoužívá cifer $\{0, 1, 2\}$, nýbrž $\{-1, 0, 1\}$. Toto nepatrné vylepšení maximálně zjednoduší všechny početní operace. Zkuste vymyslet převod z trojkové soustavy do vyvážené trojkové soustavy a porovnat zápisy přirozených čísel s rekreační úlohou číslo 2 (vážení 1–40 gramů).

Námětem pro hlubší zamýšlení by se mohl stát zápis čísel v **nepravidelné číselné soustavě**, kde je každá cifra v jiné soustavě. Tento na první pohled nesmyslný příklad našel překvapivě velkého využití v praxi — počítání sekund, minut, hodin, dnů, týdnů, měsíců a roků. Zkuste vymyslet převod z /do této soustavy, a to jak celé, tak zlomkové části (pozor, každá se převádí trochu jinak).

Z jiného soudku je počítání **modulární aritmetikou**. Uvedme trochu matematické teorie:

Vyberme si nějaké prvočíslo p a počítejme v okruhu Z_p , tzn. ve zbytkových třídách podle modulu p . Budeme používat pouze čísla $0, 1, \dots, (p-1)$. Pokud při počítání přetečeme, vezmeme zbytek po dělení p , např. $2 + 2 \equiv 1 \pmod{3}$ nebo $2^{-1} \equiv 3 \pmod{5}$, protože $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$. Dá se snadno dokázat, že tento okruh je tělesem, tzn. mimo samozřejmou komutativitu, asociativitu a neutrální prvek vzhledem k násobení existuje ke každému nenulovému prvku i prvek k němu inverzní. Dá se dokázat, že $a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}$, protože podle *malé Fermatovy věty* platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Pokud nepřetečeme (výsledky operací budou mezi 0 a $p-1$) a výsledkem dělení nebude celé číslo, tak výsledky aritmetických operací modulu p budou stejné jako u normálních algoritmů. To nám nemusí připadat moc výhodné. Tato věhoda se projeví v okamžiku, kdy začneme počítat s více moduly:

Vybereme si několik prvočísel p_1, p_2, \dots, p_k . Dané číslo x si vyjádříme moduly x_1, x_2, \dots, x_k , kde $x_i = x \bmod p_i$. Podle *Čínské zbytkové věty* se dá dokázat fundamentální tvrzení: toto vyjádření je jednoznačné. Přesněji řečeno, možných zbytků je $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ a pro každé A jsou čísla $A, A+1, \dots, (A+P-1)$ jednoznačně přiřazena všem možným zbytkům. Zkuste si tuto větu dokázat, není těžká.

Takže pokud si číslo od 0 do $P-1$ (které může být VELMI velké) nejprve převedeme do zbytkových tříd,

tak můžeme místo operací s velkými čísly počítat ZVLÁŠTĚ s každým zbytkem. Na konci jednotlivé zbytky zase převedeme na číslo (zkuste vymyslet jak) a máme výsledek. Výhodou je, že operace s malými čísly jsou rychlejší a operace s jednotlivými zbytky můžeme provádět paralelně (např. několika procesory najednou). Velkou nevýhodou je nemožnost detekce přetečení (v jednotlivých modulech to bude přetékat skoro pořád, ale to nevádí, hlavně když nepřeteče celkový výsledek z intervalu $0, 1, \dots, (P - 1)$) a porovnávání čísel (snadno nahlédneme, že porovnávat jednotlivé zbytky není správné řešení). Pokud žádný z těchto dvou nedostatků není podstatný, může být tento postup tím pravým řešením.

Zkusme si to ukázat na příkladu:

1. $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$,
2. $x = 4 = (0, 1, 4)$, $y = 7 = (1, 1, 2)$,
3. $x + y = (0 + 1, 1 + 1, 4 + 2) = (1, 2, 1) = 11$,
4. $x \cdot y = (0 \cdot 1, 1 \cdot 1, 4 \cdot 2) = (0, 1, 3) = 28$,
5. $28/y = (0/1, 1/1, 3/2) = (0, 1, 4) = 4$.

✕

Úloha 7 – Průtrž novin

Úloha byla velmi triviální. Téměř všichni ji bez problémů vyřešili, proto můžeme autorské řešení hodně zestručnit.

Před pádem má kulička v bodě A vzhledem k novinám potenciální energii mgh_1 , která se přemění (při zanedbání odporu vzduchu) celá na kinetickou energii $\frac{1}{2}mv_1^2$, již má kulička těsně před dopadem na noviny.

Ze zákona zachování energie je $mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, tedy rychlost dopadu na noviny je $v_1 = \sqrt{2gh_1}$. Protože $v_1 = gt_1$ (volný pád), máme dobu pádu t_1 v prvním úseku délky h_1 :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Předpokládáme, že energie ΔE , potřebná na deformaci a protržení novin se předá okamžitě. Z novin kulička vyletí rychlostí v_2 . Pro pohyb po dráze h_2 platí

$$h_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2,$$

odkud

$$v_2 = \frac{h_2 - \frac{1}{2}gt_2^2}{t_2},$$

kde $t_2 = t - t_1$.

Dosaďme za $t_2 = t - t_1 = t - \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$:

$$v_2 = \frac{h_2 - \frac{1}{2}g\left(t - \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right)^2}{t - \sqrt{\frac{2h_1}{g}}}.$$

Hledaná práce spotřebovaná na průtrž je rovna úbytku kinetické energie kuličky v bodě B , kde kulička prolétává novinami:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}m\left(2gh_1 - \left[\frac{2h_2 - g\left(t - \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right)^2}{2\left(t - \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right)}\right]^2\right).$$

Upravit tento vztah do nějaké hezčí podoby se nám už asi nepovede. Je to tedy konečné řešení.

Úloha 8 – Sluníčka

Dříve než se pustíme do řešení na kvantitativní úrovni, musíme se vypořádat s několika problémy. Většinou se nikdo z řešitelů nezabýval (nebo je pouze zmínil bez podrobnější analýzy).

- Jak vypadá absorpce záření látkou? Není zcela samozřejmé, jak všichni řešitelé mlčky předpokládali, že všechno záření procházející látkou je pohlceno. Pouze velké rozměry planet jsou toho dostatečnou zárukou.
- Došlo by k značným destrukcím planety tlakem záření.
- Planeta by byla odsouvána tlakem záření, takže obdržená energie by s časem klesala (planeta se zřejmě neroztaví najednou).
- Většina planet má již značnou část svého objemu v tekutém a plynném stavu.
- Náhlé objevení se antisluníčka by ovlivnilo dráhy těles naší sluneční soustavy. Dráhy všech planet by se razantním způsobem změnily (jak, to záleží na dráze antisluníčka) a pravděpodobně by buď skončily v jednom ze sluníček, nebo by se jejich dráha k nim natolik přiblížila, že by došlo k jejich znatelnému ohřátí, popřípadě roztrhání slapovými silami. Ke katastrofě by tedy pravděpodobně došlo ještě před anihilací. **Kdo máte doma počítač, můžete se pokusit nasimulovat tuto vesmírnou katastrofu, její závěry (diskutované a doplněné popisem simulace) odměníme speciálním bonusem.**

Celkový vliv těchto jevů bude takový, že planetičky dopadnou ještě hůře, než kdybychom tyto jevy neuvažovali.

Abychom byli vůbec schopni něco spočítat, musíme učinit jisté zjednodušující předpoklady, které však výsledek výrazněji neovlivní, neboť provádíme pouze řádový odhad:

- Energie se vyzáří v podobě γ -záření okamžitě. Ve skutečnosti by byly částice a antičástice od sebe vzdalovány tlakem záření.
- Nedojde k zastínění planety jiným tělesem (ostatně to je vzhledem k “místním” poměrům velice nepravděpodobné) a nedochází k pohlcování záření meziplanetární hmotou (to můžeme s klidným svědomím zanedbat).
- Energie se vyzáří ve všech směrech rovnoměrně. To by zajisté také nebyla pravda, neboť situace není dostatečně symetrická. (Tvrzení, že máme-li symetrickou soustavu, jsou všechny probíhající děje symetrické, plyne z tzv. materialistického postulátu: *Všechny fyzikální jevy mají původ v materiálních objektech.*³ Pak tedy netvrdíme nic jiného, než že je-li symetrická příčina, je symetrický její důsledek.)
- Měrná tepelná kapacita není zdaleka v celém rozsahu teplot a tlaků konstantní. Můžeme však použít horního odhadu její velikosti na daném rozsahu.

Při anihilaci se (za předpokladů výše uvedených) uvolní energie

$$E_u = M_\odot c^2 + M_{-\odot} c^2 = 2M_\odot c^2,$$

kde M_\odot je hmotnost sluníčka, $M_{-\odot}$ je hmotnost antisluníčka a c je rychlost světla.

Planetička obdrží energii

$$E_o = E_u \frac{\pi r^2}{4\pi R^2},$$

kde r je poloměr planetičky a R je její vzdálenost od sluníčka. (πr^2 je plocha kotoučku planety, $4\pi R^2$ povrch koule o poloměru R .)

Teplo potřebné k roztavení látky je

$$Q_L = m(l_t + c' \Delta T),$$

kde m je hmotnost dané látky, l_t je její měrné skupenské teplo tání, c' je (průměrná) měrná tepelná kapacita a ΔT je rozdíl teploty tání a původní teploty.

³ Tento postulat vlastně vymezuje obor fyzikálního zkoumání. Fyzika se vždy kromě popisu jevu snaží i o jeho zdůvodnění teorií, na jejímž základě předpoví další jevy, které pak experimentálně ověřuje. Případné jevy nemající materiální původ (např. existence bóží) nezapadají do rámce fyzikálního obrazu světa – jejich důsledky nejsou experimentálně ověřitelné.

Za teplo Q potřebné k roztavení planetičky berme maximum z tepel potřebných k roztavení jednotlivých látek, ze kterých je složena.

$$Q = M(l_t + c \cdot \Delta T) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho (l_t + c \cdot \Delta T),$$

kde ρ je hustota a M je hmotnost planety.

Aby došlo k roztavení planetičky, musí tedy platit

$$\begin{aligned} E_o &\geq Q \\ 2M_\odot c^2 \frac{r^2}{4R^2} &\geq \frac{4}{3} \pi r^3 \rho (l_t + c \cdot \Delta T) \\ \frac{M_\odot c^2}{8R^2} &\geq \frac{\pi r \rho (l_t + c \cdot \Delta T)}{3}. \end{aligned}$$

Tabulkové hodnoty jsou:

- měrná tepelná kapacita: $100 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. (maximální je pro H_2 ; bereme ohled na to, že její velikost není konstantní),
- měrné skupenské teplo tání: $100 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (horní odhad),
- teplota tání: 4000 K (max. hodnota),
- počáteční teplota: 0 K (min. hodnota),
- poloměr planety: $71\,000 \text{ km}$ (maximální – Jupiter),
- vzdálenost planety: $40 \text{ AU} = 6.10^{12} \text{ km}$ (maximální – Pluto),
- hustota planety: $5500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (maximální – Země).

Po dosazení těchto výsoce přeceněných hodnot dojdeme k závěru, že celkově vychází opravdu levá strana nerovnice větší, a proto za výše uvedených předpokladů dojde k roztavení celé sluneční soustavičky.

Úloha nekonečno – Psychologie

Téměř všichni řešitelé nám poslali nějaké číslo. Bohužel musím konstatovat, že někteří z nich nepochopili, co je to přirozené číslo, a tak nám poslali čísla tvaru $-x/0$, kde $x = 1$ apod. My jsme všechna čísla přebírali (a pochopili po svém), přetřídili a sestavili z nich tuto tabulku:



Jak vidno, mnoho řešitelů se mylně domnívalo, že jedničku nenapíše nikdo jiný. Dále se jich více shodlo na několika malých číslech a vyhrála docela vysoká sedmička. Podle mého názoru bylo napsání čísel větších než 20 strategickou chybou, protože tolik ani nemáme aktivních řešitelů. I kdyby každý z nich napsal různé číslo, stejně se čísla 22 nebo 29 velmi pravděpodobně umístí na posledních místech.

✎

Úloha 9 – Souměrnosti

*V*erš líbezný, verš lahodící,
vašemu sluchu libě znící,
verš dokonalý jako rým,
rým, jímž budete oslněni
více nežli svazkem laserovým,
rým, nad který už lepší není,
verš, jenž si vaši přízeň získá
a pozornost si bdělou nutí,
strnete v němém užasnutí,
jak s matikou se máza tříská!

*D*ílo je vlastní ryze stylu,
verš připomíná zlatou žílu
v jalové skále pustých vět.
Takové dílo jen básník umí –
odvážnou strofou k cíli spět
(laskavý čtenář porozumí).
Jak moudrá a přec skromná slova
z paprsků svatojánských jen
upředla tiše jako sen
básnická střeva autorova!

*O*braťme list. Dle definice
(která nám jistě poví více
ve správném znění přednesena),
těleso je oblast prostoru
uzavřená a omezená.
Později dojdeme ke sporu.
Buď T těleso libovolné,
souvěrné podle středů dvou
navzájem různých. Úmluvou
 S_1, S_2 pro ně zvolme

*L*e skvostů naší abecedy.
Máme už označené středy.
Dík výše psané definici
(inu, jdeme na to od lesa)
existuje X_M splňující,
že X_M je prvkem tělesa,
a navíc skrz naskrz tělesem
každické X z T splňuje,
že $|S_1 X|$ menší je
než rovno $|S_1 X_M|$.

*P*rasátko uzří, kdo se postí.
 X_M v středové souměrnosti
dle středu S_1 zobrazíme
do bodu X_M^* .
(I další kroky budou přímé
jak tupý úder paličkou.)
Z bodů X_M, X_M^*
označme A ten, který jesti
od S_2 dál (máme-li štěstí
a oba stejně vzdáleny jsou,

*N*echť A je libovolný z nich).
Pro bližší bod ze jmen barvitých
vyberme B . Pak v souměrnosti
středové podle S_2 středů
zobrazme bod A po libosti
do bodu A' . Vykoledu-
jeme si dále vztah dost prostý:
 $|AS_2| + |BS_2|$
je ostře větší než $|BA|$
z trojúhelníkové nerovnosti.

*T*áž nerovnost je zodpovědná
za to, že délka $|AS_1|$
je ostře menší nežli délka
úsečky AS_2 (kde však
bere se tato znalost velká?
Podrobně: z obrázku náš zrak
vyčte $|BA|$ že rovno jest
 $2|AS_2|$, a pak též
 $|BS_2|$ menší rovno než
 $|AS_2|$. Na mou skromnou čest.)

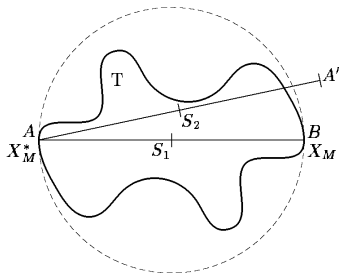
*N*yní už k svému konci spěje
náš důkaz – dílo beznaděje
(však beznadějně dokonalé).
 $|AA'|$ (jaképak divy)
je rovno $2|AS_2|$. Ale
předchozí sloky nápěvu tklivý
nám oznamuje nerovnici:
 $2|AS_1|$ je ostře méně
než $2|AS_2|$ zaručeně.
Spor odhalí už ba i spící.

*Všimněme si – eh – ejhle – ouha –
že AA' je moc dlouhá
úsečka na to, aby směla
vejít se do koule opsané
tělesu T (ta koule celá
má střed S_1). Ne, ach ne,
to nejde, a v tom je ten spor,
který jsme jasnozřivě našli.
Kdo nepochopils, hoď si mašli,
a nechť sežere tě škvor!*

*Pluřelo by se ještě říci
poznámku: pokud v definici
tělesa výše uvedené
dva požadavky uberete
– omezenost a nota bene
i uzavřenost (ó div se světe) –,
pak obdržíte "tělesa"
dle nekonečně mnoha středů
souměrná – dáme vám nápovědu,
ať vaše mysl neklesá.*

*Občane, vědče, zanech stesků,
uvažuj nekonečnou desku!
Představ si prostor, rovinu
a rouru nekonečnou.
(Jestli se mýlím, ať zahynu
a spadnu v marnost věčnou!)
Uvaž též nekonečnou mříž.
(Martin Krsek už šilhá hlady,
vymýšlí další předpoklady,
však půlnoc blízko již.)*

*Matfyzák jásá. Všechno zřejmé.
Nyní se s chutí posmívejme
řešitelům, co ztroskotali
ve vlastních bludech: kyškyš-heč!
Chechtací pytlík je nám malý
a Martin smíchy ztratil řeč.*



Zadání dalších témat

Poněvadž na minule zadaná témata nebyl ještě publikován dostatečný počet vědeckých článků, rozhodla se naše rada, že nová témata nebude vypisovat.

Zadání rekreačních úloh

Úloha 10. Pouštní šlenství

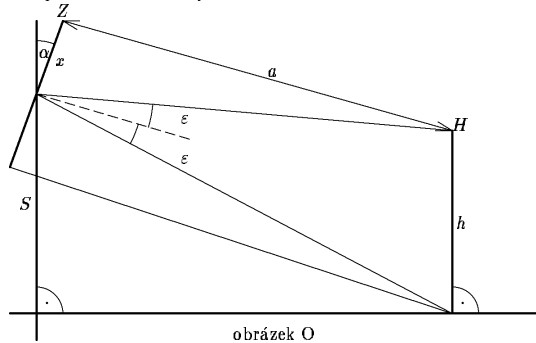
S podobnou úlohou jste se již určitě alespoň jednou setkali – když ne na olympiádě na základní škole, tak přinejmenším v nějakém křížovkářském magazínu.

V následujícím součtu nahraďte každé písmenko právě jednou číslicí z množiny $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tak, aby součet platil a žádná dvě písmena nebyla nahrazena stejnou číslicí.

$$\begin{array}{r} S A H A R A \\ S A H A R A \\ \quad F A T A \\ \hline M O R G A N A \end{array}$$

Úloha 11. Princeznička

Princeznička P se zhlíží v rovinném zrcadle Z , jehož rovina R svírá se svislou stěnou S úhel $\alpha = 20^\circ$ (viz obrázek O). Určete délku x zrcadla Z , aby se v něm princeznička P celá viděla. Princeznina jasnost má výšku $h = 1.8$ m. Výšku čela \check{C} od očí $O_{\check{C}}$ zanedbejte. Vzdálenost zrcadla Z od princezny jasně hlavy H je $a = 3$ m. Úlohu řešte nejdříve obecně, potom pro zadané hodnoty.



Úloha 12. Parník

Po otevření obálky na vás kromě opravených témat a nového čísla M&M vypadl také papírový parník. Vaším úkolem je vypočítat přesnou polohu jeho těžiště, je-li plavidlo ve “slisovaném”, tj. totálně rozplacatělém stavu.

Až to budete mít, tak řekněte, jestli rozšířením postavy tak, aby parník stabilně stál na vodorovné rovině komíny vzhůru, posunete jeho těžiště nahoru nebo dolů.

Č.	Jméno	Třída	Σ_{-1}	T1	T4	Tx	T6	T8	R7	R8	R9	Σ_0	Σ_1
1.	Dr. Pavol Habuda	3.B	64	18		12	5		5	5	5	50	95
2.	Dr. Daniel Klír	GPoděb 4.B	122	3		3	3	3	5	5	4	26	82
3.	Prof. Tomáš Brauner	GMorKr 4.B	219		1		7	5	5	5		23	73
4.	Dr. Jan Mysliveček	GKJB 2.A	51				2	6	5	5	5	28	52
5.	Mgr. Aleš Přivětivý	GPar 4.?	30				3	4	5	3	5	20	50
6.	Mgr. Jan Holeček	GKJB 2.A	40		1				5			6	46
7.	Mgr. Milena Svobodová	?	33						5		5	10	43
8.	Mgr. Štěpánka Kučková	GArab 3.E	24				4	3	5		5	17	41
9.	Dr. Ondřej Přibyla	?	70									0	34
10.	Dr. Jan Fátor	?	59									0	33
11.	Bc. Vlastimil Křápek	GBrno 4.C	19						5	4	4	13	32
12.	Bc. Ivana Čapková	SPŠE 4.B	18		5	0		2	5		1	13	31
13.-14.	Mgr. Jaroslav Jánský	GKJB 2.A	30									0	30
	Dr. David Holec	GKJB 2.A	59						2			2	30
15.	Dr. Jitka Spoustová	?	52						5		1	6	28
16.	Mgr. Jiří Lísal	Gymn 4.A	21						5		1	6	27
17.	Mgr. Milan Orlita	GUhHra ?.A	25									0	25
18.	Bc. Andrej Pavlík	GTrenč 1.r	18									0	18
19.	Jarmila Mulačová	GMIB	5				1	2	5		3	11	16
20.	Bc. Kateřina Nováková	GMnich	10				1	1	1		1	4	14
21.	Jitka Krouželová	septima B	8				1		0		0	1	9
22.	Mgr. Jiří Roubínek	GŽďár 4.A	48									0	8
23.	Petra Habrovanská	?	2								0	0	6
24.	Ondřej Škoda	?	4									0	4

Poznámka redakce: Tx znamená sjednocení bodů za T5 a T7.
Mimořádných 5 bodů za úlohu R_{∞} získal Dr. Jan Mysliveček.

Uzávěrka dalšího čísla je **26. května 1997.**

POZOR! Adresa semináře je:

Robert Špalek – B1507, VŠK 17. listopadu, Pátkova 3, 182 00 Praha 8, Libeň