

M&M číslo 3 ročník III

Vážení dopisovatelé našeho časopisu,

velice se vám omlouváme za minulé číslo M&M, které obsahovalo nesmírné množství chyb hlavně tiskových. Především se omlouváme autorům obrázků; obzvlášť nepovedené kousky jsme nakreslili znovu a otiskujeme je v lepším provedení hned za tímto úvodníkem.

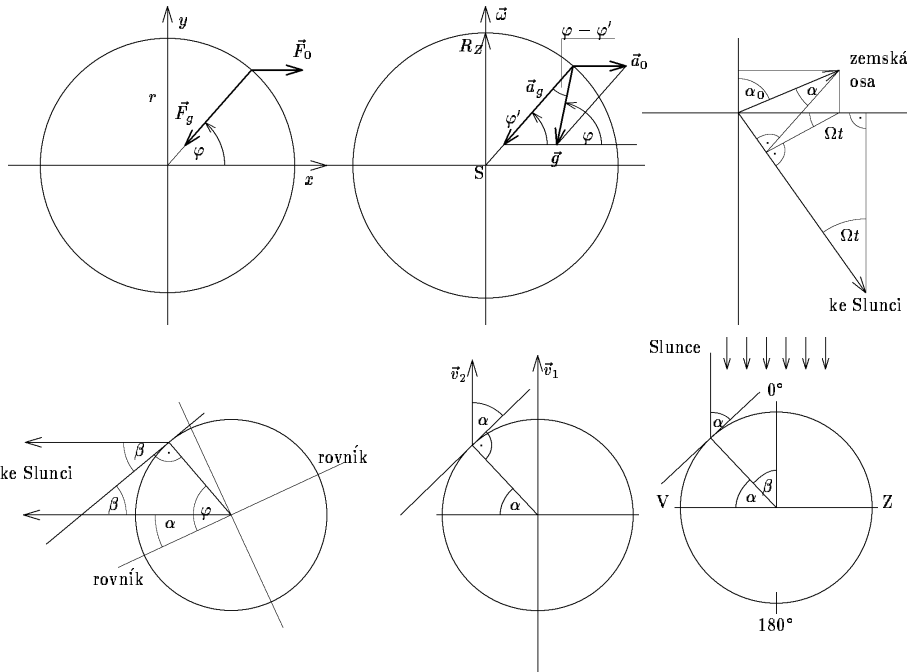
Dále věříme, že díky delší časové prodlevě, která od vydání posledního čísla uplynula, nezanevřete na náš seminář, nýbrž se na něj budete tím víc těšit. My vám za to slibujeme, že se pokusíme, aby doba tisku čísel příštích byla více dohledná a dohlednější.

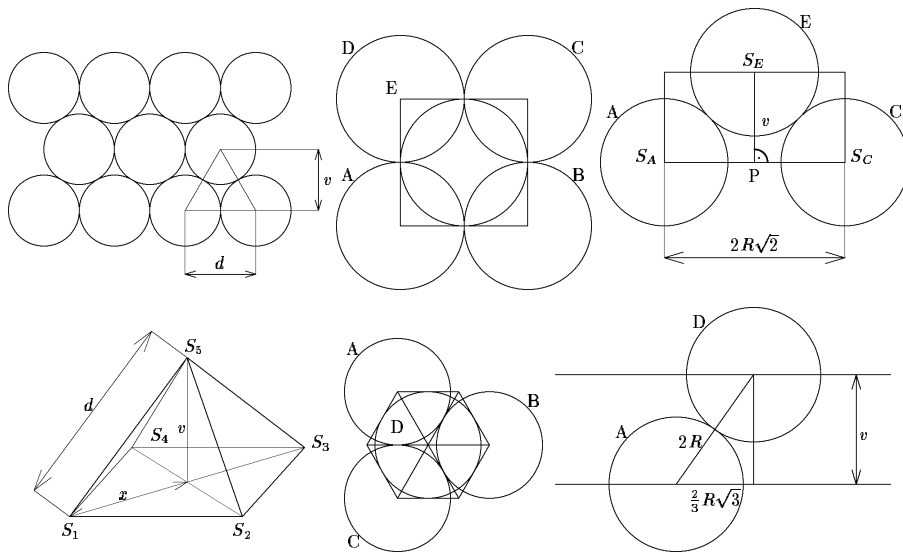
A teď jedna radostná informace. Ve dnech 16.–22. června asi bude soustředění v Dědově pod Ostašem (ve východních Čechách). Zatím bychom rádi věděli, kdo by se chtěl zúčastnit. Sdělte nám to proto pokud možno co nejdřív.

Za redakci Matouš

Oprava obrázků z minulého čísla

Vezměte si do ruky číslo 2 časopisu (nedopatřením je na něm napsáno "číslo 1"). Následující obrázky jsou otištěny v pořadí, v jakém byly uspořádány ve druhém čísle. Pouze obrázek na str.4 prvně nahoře neotiskujeme znovu, protože je srozumitelný. Ostatní obrázky až do str.11 jsou opraveny.





Téma 1 — TROSEČNÍCI

Coriolisova síla

Bc. Jiří Lísal, Bc. Milan Orlita, Dr. Daniel Klír: Ať žije zemská rotace!

Coriolisova síla působí na těleso pohybující se v rotujících vztažných soustavách, mezi něž patří také naše planeta. Tato síla se projevuje výrazněji jen u dlouhodobých pohybů, neboť je relativně malá. Na severní polokouli nás tato síla odklání vždy doprava: na těleso pohybující se na severní polokouli z jihu na sever působí síla na východ, na těleso směřující ze severu na jih působí síla na západ.

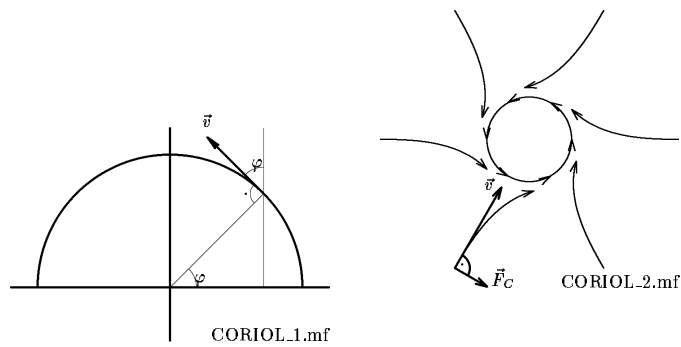
Byla učiněna mnohá pozorování důsledků Coriolisovy síly: pohyb řek (či např. Golského proudu), řeky tekoucí ze severu na jih na severní polokouli mají pravý břeh více vymletý; efekt je údajně patrný i na dvoukolejných tratích, kde vlaky jezdí po jedné koleji pouze jedním směrem: pravá kolejnice je pak na severní polokouli opotřebovanější. Také cyklony rotují na severní polokouli proti směru hodinových ručiček.

Pro Coriolisovu sílu platí $\vec{F}_c = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$, její velikost je $F_c = 2mv\omega \sin \beta$, kde \vec{v} je rychlost tělesa, $\vec{\omega}$ úhlová rychlost rotace (soustavy – např. Země) a β je úhel, který svírají vektory \vec{v} a $\vec{\omega}$. Směr síly F_c je určen pravidlem pravé ruky: položíme-li prsty pravé ruky ve směru otáčení od vektoru \vec{v} k vektoru $\vec{\omega}$, pak vychýlený palec ukazuje směr Coriolisovy síly \vec{F}_c .

Pohybujeme-li se těleso ve směru poledníků, působí na něj síla o velikosti $F_c = 2mv\omega \sin \varphi$ na severní polokouli doprava, na jižní doleva (viz předchozí pravidlo). Na rovníku je $\varphi = 0$, tedy je zde $F_c = 0\text{N}$. (Viz obr.CORIOL.1.mf.)

Umíme-li nějak změřit velikost a směr Coriolisovy síly, pak umíme také stanovit jednoznačně svoji zeměpisnou šířku, neboť \sin je na $(0, \pi)$ prostá funkce a severní polokouli od jižní odlišíme díky směru síly.

Stačí tedy potom vyjádřit $\varphi = \arcsin \frac{F_c}{2mv\omega}$, kde $\omega = \frac{\pi}{43082} \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

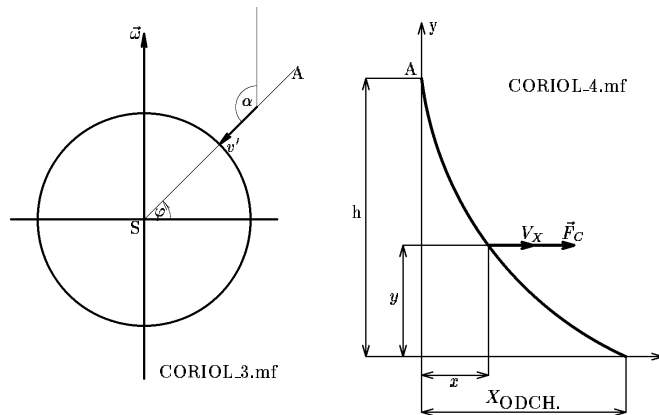


Bc. *Milan Orlíta* uvádí způsob, jak určit pomocí Coriolisovy síly polokouli: na severní polokouli je voda přitékající do víru stáčena Coriolisovou silou doprava, tedy dle obr.CORIOL-2.mf se vír točí doleva.

Na jižní polokouli je tomu naopak, vír se otáčí doprava, protože Coriolisova síla stáčí vodu doleva. Autor navrhuje provést větší množství pokusů a zjistit, který směr rotace víru převažuje (neboť je mnoho náhodných jevů, které mohou účinky Coriolisovy síly přehlušit – (třeba vlnobítí ve vaně – pozn. red.)). *Mgr. Jan Mysliveček* se oproti *Milanu Orlítovi* domnívá, že na severní polokouli by voda z vany tvořila vír točící se **po směru** hodinových ručiček. Je tedy na vás, kterému z vědců budete více věřit.

Dr. *Daniel Klír* s použitím literatury spočetl odchylku, jakou by zaznamenalo volně padající těleso z výšky h nad Zemí vlivem Coriolisovy síly. Podrobné řešení této úlohy naleznete v literatuře [1].

Z bodu A ve výšce h nad Zemí padá těleso (obr.CORIOL.3.mf).



Ve směru osy x (obr.CORIOL.4.mf) působí zrychlení $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, a platí pohybová rovnice (pro pohyb ve směru osy x):

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 2m\omega v' \sin \alpha,$$

kde z obr.CORIOL_3.mf máme $\sin \alpha = \sin(90^\circ + \varphi) = \cos \varphi$.

Tedy

$$\frac{dv_x}{dt} = 2\omega v' \cos \varphi,$$

kde přibližně platí $v' = gt$.

Řešením diferenciální rovnice je $v_x = \omega g t^2 \cos \varphi + C_1$, kde z počáteční podmínky $v_x(0s) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ máme $C_1 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Další integrací dostaneme

$$x = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi,$$

přičemž $h - y = \frac{1}{2} g t^2$, tedy

$$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}}.$$

Dosazením máme

$$x = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2(h-y)}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi,$$

odtud snadno

$$\cos \varphi = \frac{3x}{\omega g \left(\frac{2(h-y)}{g} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

kam dosadíme $x = x_{odch.}$ (vodorovná odchylka tělesa dopadnuvšího na zem, způsobená Coriolisovou silou), $y = 0 \text{ m}$ (těleso je po dopadu v nulové výšce nad povrchem zemským). Obdržíme

$$\cos \varphi = \frac{3x_{odch.}}{\omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Tím je φ určeno. Polokouli pak určíme ze směru odchylky.

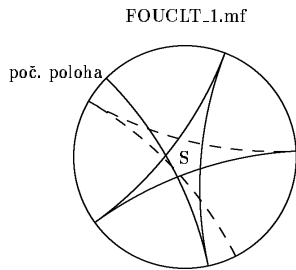
Kyvadlo pana Foucaulta

Bc. Milan Orlíta, Dr. Daniel Klír, Mgr. Pavol Habuda: Zamyšlení víceméně historické aneb pan Foucault měl problémy...

Roku 1851 zavěsil pan Foucault v kopuli pařížského Pantheonu kyvadlo. Aby nedocházelo k přílišnému tlumení kyvů, použil Foucault místo hmotného bodu kouli o hmotnosti 30kg a místo nehmotného závěsu lano o délce 67m. Po přepálení vlákna, které drželo kyvadlo ve vychýlené poloze, se kyvadlo rozkývalo, a po určité době bylo možné pozorovat odchylku od původní roviny kyvu. Po delší době bylo možné zjistit, že se rovina kyvu stáčí ve směru otáčení hodinových ručiček, díváme-li se na kyvadlo shora (tedy ve směru denního pohybu Slunce od východu přes jih k západu) (viz obr.FOUCLT_1.mf).

Kdyby pan Foucault pokus prováděl na severním pólu, činilo by stočení roviny kyvu za den právě 360°.

Naopak, na rovníku by bylo toto stočení nulové.



Dr. Daniel Klír, Prof. Matouš Jirák: Kterak tanec kyvadla zvaného Foucaultovo objasniti

Postavme kyvadlo ponejprv na pólu. Podíváme-li se na situaci z inerciální vztažné soustavy, uvidíme, že kyvadlo nemění v naší inerciální soustavě svoji rovinu kyvu. Zeměkoule se pod ním otočí za přibližně 24 hodin. Pozorovatel v neinerciální soustavě spojené se Zemí bude na severním pólu bedlivým pohledem ze stavebního jeřábu pozorovat, kterak hmotný bod stáčí rovinu kyvu po směru hodinových ručiček. Tvrdíme nyní, že když postavíme kyvadlo v libovolné existující zeměpisné šířce (vyjma rovníkové), bude toto kyvadlo také stáčet rovinu kyvu, leč s jinou periodou. Tvrdíme, že úhel stočení α za jeden den závisí na zem. šířce φ podle vztahu $\alpha = 360^\circ \cdot \sin \varphi$.

Nyní vám předvedeme jednu úvahu, jak se dá tento vztah odvodit (řešení kolegy *Klíra* bylo poněkud neúplné, proto jsem je upravil, nikoliv však principiálně). Podobnou úvahu naleznete též v literatuře [2].

Předpokládejme, že kyvadlo v poloze 1 kýve na obr.FOUCLT.3.mf ve směru poledníku. Pohlížejme na problém z inerciální soustavy cizí vesmírné civilizace (anebo ze soustavy nějaké beznadějně rovnoměrně přímočaře se vzdalující sovětské družice). V této inerciální soustavě zachovává kyvadlo rovinu kyvu. Za krátký čas Δt se Země otočí o úhel $\omega \Delta t$. Kyvadlo se tak ocitne v poloze 2. Má-li kyvadlo pro pozorovatele na Zemi úhlovou rychlost ω' , pak za čas Δt pootočí se rovina kyvu pro pozorovatele o $\omega' \Delta t$. Pro malé Δt pak můžeme vyjádřit délku dráhy mezi polohami 1 a 2 jako

$$l = \omega \Delta t \cdot a.$$

Z rovnoběžnosti roviny kyvu v poloze 1 a 2 můžeme úhel $\omega' \Delta t$ přenést k bodu X (viz obr. FOUCLT.3.mf). Délku oblouku l teď můžeme vyjádřit druhým způsobem:

$$l = \omega' \Delta t \cdot b.$$

Pro malé Δt mají oblouky skutečně skoro stejnou délku. Máme tedy

$$l = \omega \Delta t \cdot a = \omega' \Delta t \cdot b. \quad (\diamond)$$

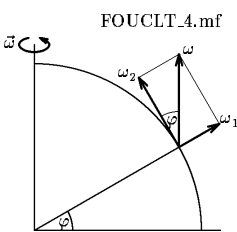
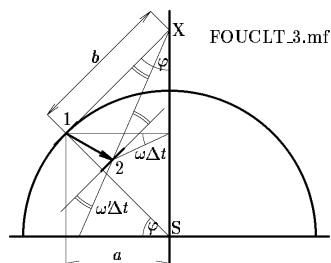
Snadno dále nahlédneme $\frac{a}{b} = \sin \varphi$, odkud plyne

$$a = b \cdot \sin \varphi. \quad (\diamond\diamond)$$

Řešením soustavy $(\diamond), (\diamond\diamond)$ je $\omega' = \omega \cdot \sin \varphi$, což opravdu pro Foucaultovo kyvadlo platí.

Toto vysvětlení však není správné. Když má rovina kyvu zůstat vzhledem k mimozemské inerciální soustavě nezměněna, měla by po 24 hodinách nastat identická situace. Ale perioda 24 hodin je, jak řečeno, pouze na pólech.

Kde je chyba? Kdo ji správně odhalí a připojí řádné zdůvodnění, získá nějaké body navíc.



Poznámka. Správný vztah lze korektně získat např. studováním kyvadla v pozemské neinerciální vztažné soustavě. Takové řešení je ovšem o dost delší – otisknout jej nelze; mohu si jej však případně připravit na soustředění.

Mgr. Pavol Habuda: Jiné odvození

Z obrázku FOUCLT_4.mf vidíme, že úhlová rychlost Země $\vec{\omega}$ se dá rozložit na složky ω_1, ω_2 . Složka ω_2 je kompenzována upevněním závěsu kyvadla. Podle obr.FOUCLT_4.mf je $\omega_1 = \omega \sin \varphi$, kde φ je skutečná zeměpisná šířka. Po násobení časem dostaneme $\alpha_1 = \alpha \sin \varphi$, kde α_1 je úhel, o který se otočilo kyvadlo, α je úhel, o který se za tž čas otočila Země. Kyvadlo se na severní polokouli stáčí proti pohybu hodinových ručiček, na jižní naopak.

(Poznámka redaktora: zde rovněž doporučujeme vědecké obci diskutovat o korektnosti řešení problému kyvadla.)

Chvála magnetismu

Mgr. Pavol Habuda: Zařízení na měření magnetického pole Země

Magnetické pole Země je velmi slabé ($B = 44 \mu\text{T}$). K jeho měření použijeme kruhový závit. Buď musíme závit rotovat velmi rychle, nebo místo něj užít cívku s velkým počtem N závitů. Na závit se vlivem magnetického pole indukuje napětí

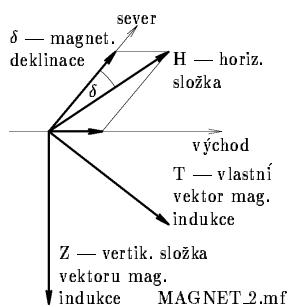
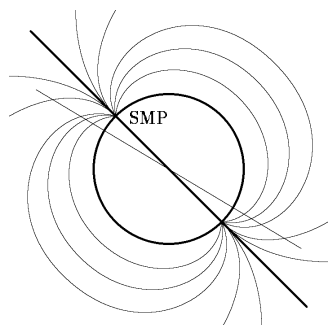
$$U_{MAX} = \frac{-d\Phi}{dt} = -B_{MAX} \pi R^2 N \omega \sin \omega t,$$

kde R je poloměr závitu a B_{MAX} je max. velikost magnetické indukce ve směru kolmém na osu otáčení. Přístroj uvádíme v rotaci mechanicky. Jestliže se napětí harmonicky mění, můžeme k jeho měření použít síťdávý voltmetr, kde pro hodnotu efektivního napětí platí

$$U_{EF} = \frac{U_{MAX} \sqrt{2}}{2}.$$

Ke změření směru magnetické indukce použijeme metodu měření velikostí tří na sebe kolmých vektorů. Vektorově tyto tři vektory sečteme a získáme směr magnetické indukce, vektor směřující k magnetickému pólu. Rozdíl mezi SZP a SMP pólem je maximálně 7° , pokud tedy nejsme v blízkosti pólu, dá se metoda použít na určení směru sever-jih.

Severní magnetický pól má souřadnice $\varphi = 77^\circ, \lambda = 102^\circ$ z.d.



Z obr.MAGNET_1.mf vidíme, že v oblasti pólů je magnetická inklinace (sklon magnetky) poměrně velká. Možná by se někdo mohl pokusit určit závislost inklinace na vzdálenosti od magnetického pólu.

Bc. Milan Orlíta: Indukce a složky

Magnetickou indukci můžeme v každém místě povrchu Země rozložit do složek dle obr.MAGNET_2.mf.

Zemí můžeme považovat za magnetický dipól; zjednodušíme-li ho na *geocentrický souosý dipól*, pak magnetická deklinace $\delta = 0$, magnetická indukce má pak pouze složky H (horizontální) a Z (vertikální). Potom pro složky magnetické indukce platí

$$H = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \cos \varphi,$$

$$Z = \frac{\mu_0 2m}{4\pi R^3} \sin \varphi,$$

kde φ je zeměpisná šířka, R je poloměr Země, a

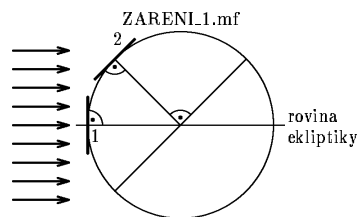
$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot M,$$

kde M je celková magnetizace Země. Změřením buď vertikální nebo horizontální složky vektoru magnetické indukce by se při znalosti *celkové magnetizace Země* M dala určit zeměpisná šířka. Pro co nejpřesnější měření by bylo výhodné změřit obě složky v různých místech ostrova. Porovnáním výsledků by se snad dala eliminovat chyba způsobená lokálními magnetickými anomáliemi.

Zářivý tok

Dr. Daniel Klír: Měření zářivého toku

Solární konstantu S položíme rovnu podílu zářivého výkonu Slunce (asi $3,8 \cdot 10^{26} \text{W}$) a plochy koule o poloměru 1AU (plochy $4\pi(1\text{AU})^2$), odtud $S \approx 1330 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Zanedbejme změnu vzdálenosti Země od Slunce během roku. Změříme-li hustotu zářivého toku dopadajícího na 1m^2 zemského povrchu, měl by nám vyjít výsledek stejný nebo menší než solární konstanta.



Dle obr.ZAREN1.1.mf uvažme polohy 1 a 2. V poloze 1 bude výsledek přibližně roven solární konstantě. V obecné poloze 2 pro úhel Ψ je $J_e = S \cdot \sin \Psi$, kde J_e je hustota zářivého toku na lm^2 . Odtud $\sin \Psi = \frac{J_e}{S}$, kde S je solární konstanta. Abychom z úhlu Ψ dostali ze zeměpisnou šířku φ , bude nutno ještě uvažovat datum; tímto vztahem φ a Ψ se autor dále nezabýval.

Astronomická pozorování

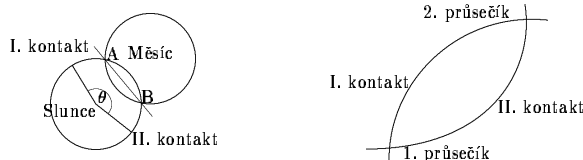
Mgr. Jan Fátor připomíná, že výška Polárky nad obzorem není přesně rovna zeměpisné šířce, protože deklinace Polárky je $\delta = 89^\circ 15'$. Jest nutno to uvážit, chceme-li získat polohu s přesností na minuty.

Mgr. Jan Fátor také vyjadřuje jistou pochybnost o přesnosti pozorování hvězd, které se "taktak ukážou" nad obzorem, neboť u obzoru je poměrně velká refrakce; polohu takové hvězdy lze určit s malou přesností – majitelům dobrých dalekohledů autor doporučuje provést pozorování těchto hvězd a výsledek porovnat s tabulkami.

Mgr. Pavol Habuda: Měření zeměpisné délky pomocí zatmění

"Podle *Dr. Daniela Klíra* se dá k určování zeměpisné šířky použít zatmění Slunce. Zatmění Měsíce použít nemůžeme, neboť tento úkaz je stejný pro všechna místa zeměkoule. Mění se pouze azimutální souřadnice Měsíce, které lze použít k výpočtu zeměpisných souřadnic i bez zatmění."

Dále *Mgr. Pavol Habuda* uvádí metodu, kterou konzultoval s ředitelem hvězdárny v Žilině. "Na fotografický film nafotíme sluneční zatmění (obr.ZATMENI.1.mf). Pomocí přímky AB určíme okamžik prvního a druhého kontaktu (okamžik prvního kontaktu je čas, kdy se kotouč Měsíce poprvé dotkne Slunce; okamžik druhého kontaktu je čas, kdy se ho dotýkat přestane. Tento postup platí pro částečné zatmění Slunce.) Když pomocí nebeské mechaniky určíme polohu těles na nebeské sféře, získáme kružnici pro první kontakt, obdobně kružnici i pro druhý (obr.ZATMENI.2.mf).



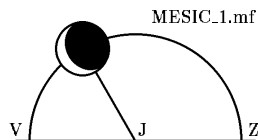
Metoda určení přesného času kontaktů je následující. Předpokládejme, že posun Měsíce přes sluneční disk je rovnoměrný. Pro několik poloh přímky AB určíme přesné časy kontaktů. Souřadnice polohy kontaktů opravíme o refrakci, probíhá-li zatmění nízko nad obzorem. Ze vztahů mezi polohou objektů na obloze (tj. azimutem a výškou hvězdy) a zem. souřadnicemi dostaneme řešením složitých rovnic dvě místa na Zemi s přesností řádově km (záleží na přesnosti přístrojů). **Jednoznačně** polohu můžeme určit teprve pomocí např. maximální fáze zatmění, což je poměr mezi zastíněnou plochou a plochou celého disku. Jiná metoda je užít velikost úhlu θ mezi prvním a druhým kontaktem."

Máme-li možnost pozorovat úplné zatmění, potom máme k dispozici dva kontakty navíc. Řešení pak tedy bude jednoznačné. Stejně jednoznačné bude i při prstencovém zatmění Slunce.

Mgr. Pavol Habuda: Měsíc jako srpek

Srpek vzniklý zatměním Měsíce vypadá ze všech míst Země stejně, a tedy nám žádnou informaci o naší

poloze dát nemůže.



Všimněme si proto raději jiného jevu. Předpokládejme, že Země, Měsíc a Slunce leží v jedné rovině (max. odchylka je 4.1°). Srpek Měsíce ukazuje směrem na jih. Uvážíme-li libraci v délce $6^\circ - 7^\circ$, potom bude srpek ukazovat buď k severnímu nebo k jižnímu bodu. Při opravě o zmíněné faktory bude metoda pravděpodobně poměrně přesná.

Mgr. Pavol Habuda: Šaty a délka dne

Položme na pláž šaty. Když svítá, změříme čas t_1 , kdy je poprvé uvidíme, a večer čas t_2 , kdy je vidět přestaneme. Položme $\Delta t = t_2 - t_1$. Pro hodinový úhel t v okamžiku východu i západu Slunce platí $\cos t = -\tan \varphi \cdot \tan \delta$, kde δ je deklinace Slunce. Platí $\cos(t + \Delta t) = \cos t$, odtud $\tan t = \frac{1 - \cos \Delta t}{\sin \Delta t}$. Za rok pobytu na ostrově zjistíme maximální a minimální dobu Δt .

$$\Delta t = MAX : \quad \tan t_1 = \frac{1 - \cos \Delta t_1}{\sin \Delta t_1} \quad \& \quad \cos t_1 = -\tan \varphi \cdot \tan(\delta + \epsilon), \text{ kde } \epsilon \text{ je sklon ekliptiky k rovníku } 23.5^\circ.$$

$$\Delta t = MIN : \quad \tan t_2 = \frac{1 - \cos \Delta t_2}{\sin \Delta t_2} \quad \& \quad \cos t_2 = -\tan \varphi \cdot \tan(\delta - \epsilon), \quad \epsilon = 23.5^\circ.$$

Slaná voda

Dr. D. Klír, Bc. M. Ortita, Mgr. J. Mysliveček, J. Krouželová, K. Nováková: Sůl nad zlato...

Autoři se vzácně shodují, že ze slanosti vody se toho moc neurčí. Salinita je totiž ovlivněna příliš mnoha faktory, které mohou měření zcela znehodnotit. Mezi tyto vlivy patří kupříkladu mořské proudy, vývěry spodní vody, blízkost ústí řeky nebo většího města, jakož i znečištění. Je však pravdou, že v místech s vysokým výparem je salinita větší, proto např. v Atlantiku slanost směrem od rovníku klesá, jak lze zjistit z mapy. Závislost salinity na poloze však ani zdaleka není funkce prostá. Bohužel musíme spolu s *Milanem Ortitou* cynicky konstatovat, že i zde určíme v nejlépeším případě jen to, co poznáme podle výskytu palem nebo jiné vegetace.

Připomínky a komentáře

Mgr. Pavol Habuda: Poznámka ke gravitačnímu zrychlení

Mgr. Pavol Habuda upozorňuje na nepřesnost v článku *Prof. T. Braunera* a *Dr. D. Klíra* z minulého čísla M&M (literatura [3]). Připomínám, že článek se týkal měření velikosti tíhového zrychlení a bylo v něm navrženo měření g matematickým kyvadlem.

Mgr. Pavol Habuda zpracoval grafy z literatury [4] a dostal tuto tabulku vztahu mezi max. rozdílem grav. zrychlení dg a zeměpisnou šířkou φ :

| zeměpisná šířka φ [°] | -60 | -45 | -30 | 0 | 30 | 45 | 60 |
|--|-------------------|-------------------|---------------------|--------------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| max. rozdíel grav. zrychlení dg [$m \cdot s^{-2}$] | $6 \cdot 10^{-4}$ | $6 \cdot 10^{-4}$ | $5.5 \cdot 10^{-4}$ | $11 \cdot 10^{-4}$ | $4 \cdot 10^{-4}$ | $5.5 \cdot 10^{-4}$ | $7 \cdot 10^{-4}$ |

Kdybychom chtěli kyvadlem měřit takto malé rozdíly tíhových zrychlení, jejichž relativní odchylka je $\delta_{MAX} = 1,1 \cdot 10^{-2}\%$, potom $\delta_l \cdot \delta_T$ je také maximálně $1,1 \cdot 10^{-2}\%$. Přesnost této metody je taková, že ji splňuje např. hodnota $l = 1.000m$ a $T = 2 \pm 0.2s$. Tato hodnota je ještě poměrně dobře měřitelná. Avšak museli bychom použít velmi přesné přístroje. Kdyby byla poblíž kyvadla skála ($\rho = 3000kg \cdot m^{-3}$, vysoká 300m a pomalu klesající do vnitrozemí – autor viděl v dobrodružném filmu), potom $\delta_g = 6 \cdot 10^{-4}m \cdot s^{-2}$. Odchylku autor počítal z gravitačního zákona, skálu aproximoval koulí vzdálenou 1km.

Odchylky jsou způsobeny nerovnoměrným rozdělením hmoty Země. Proto vztahy v citovaném článku je třeba opravit o tuto hodnotu, chceme-li být přesní.

Mgr. Jan Mysliveček: Global Position System

Je to zařízení k určování zeměpisné šířky i délky. Jak funguje? Vysílací část vyšle signál, který pokrývá celou oblohu, tedy nikam nemíří. Hustota pokrytí oběžné dráhy družicemi je již tak vysoká, že signál zachytí aspoň tři družice a odrazí jej zpět. Z přijatých signálů je možné vypočítat zeměpisnou polohu.

Náměty

Tak teoretické náměty mě už žádné nenapadly. Ale co kdybyste zkusili taky trochu experimentovat ??? Aspoň byste si mohli ověřit, jak dalece jsou některé vámi či vašimi kolegy navržené metody praktické anebo naopak šílené. Můj skromný odhad je, že těch nepraktických bude víc.

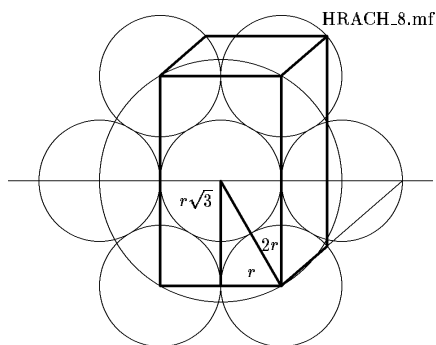
Literatura

- [1] Z.Ungermann: Matematika a řešení fyzikálních úloh, SPN Praha 1990.
- [2] Horák, Krupka: Fyzika, SNTL 1961 ± 5let.
- [3] M&M, číslo 2, ročník III., str.1 – 3.
- [4] Milan Burša, Karel Peč: Tíhové pole a geodynamika Země, str.106, 114, 115.

Téma 2 — HRÁCH

Mgr. Pavol Habuda: Další uspořádání

*Uvažme strukturu hrachů nakreslenou na obr.HRACH.7.mf.



Nechť poloměr hrachu $r \ll a$, kde a je hrana krychle z úvodní úlohy. Objem kvádrů na obr.HRACH.7.mf je $V_K = 2r \cdot 2r \cdot 2r\sqrt{3}$. V každém rohu kvádrů má střed jedna kulička, každá přispívá osminou svého objemu. Navíc jsou do kvádrů vnořeny polovinou svého objemu dvě další kuličky. Tedy hrách v kvádrů zabírá objem

$$V_O = \frac{24}{23}\pi r^3 + \frac{84}{83}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Položme

$$p = \frac{V_O}{V_K} = \frac{\pi r^3 \frac{8}{3}}{8\sqrt{3}r^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Čím je p větší, tím víc kuliček hrachu se vejde do daného tělesa. Domnívám se, že za podmínky $r \ll a$ je můj způsob nejvýhodnější." Do krychle z úvodní úlohy autor tímto způsobem uvěznil 8771 hrachů.

Mgr. Jan Fátor: Hrách v praxi

Autor zakoupil balíček zeleného jedlého hrachu a jal se experimentovat. Do válcové nádoby s rozměry $v = 83\text{mm}$ (výška válce), $d = 79\text{mm}$ (průměr válce) nasypal přesně po okraj hrách. Vešlo se mu tam přesně 1266 hrachů. Poté vybral náhodně 20 hrachů a změřil jejich náhodně vybraný průměr – nejprve uvážil, že má smysl takovou veličinu počítat, uvážil též zjevnou šišatost hrachu. Tabulku průměrů s promínutím autora neotiskujeme z technických důvodů, pouze uvedeme výsledek: průměrný objem jednoho hrachu je $V_p \approx 214\text{mm}^3$. Laskavý čtenář nahlédne, že objem nádoby byl $V \approx 407000\text{mm}^3$, a tedy objem připadající na jednu kuličku $V_1 = \frac{V}{1266} \approx 321\text{mm}^3$. Odtud procento zaplnění prostoru použitého válce je

$$p = 100 \cdot \frac{214}{321} \approx 67\%.$$

Autor se domnívá, že pro větší rozměry nádoby se procento ještě trochu zvětší.

Další náměty k tomuto luštěninovému tématu již nabízet nebudeme. Pokud však někdo z vás přijde s nějakým novým pěkným řešením anebo originálním nápadem, jeho článek samozřejmě rádi zveřejníme pro širší akademickou obec.

Téma 3 — Vážení kuliček

Pozdě došlá řešení z minulého čísla

Nestihli jsme vás zpracovat příspěvky *Bc. Jana Holečka, Ivany Čapkové a Mgr. Pavla Habudy*, kteří dělili kuličky na 4 trojice a dosáhli maximálního počtu 4 vážení. Poněvadž byl tento postup již uveřejněn, nebudeme jejich příspěvky přetiskovat.

Polemika s vážením 13 kuliček

Mgr. Pavol Habuda: 13 kuliček pomocí 3 vážení určit nejde.

Autor zvážil 1234 s 5678. Pokud nastane nerovnost, použije postupu otištěného ve druhém čísle časopisu. Pokud nastane rovnost, ukazuje výpisem všech možností, že 13. kuličku zvážit nelze.

To je sice důkaz, že to nejde navázat za **těchto** počátečních podmínek, ale to neznamená, že při jiném prvním vážení to zjistit nepůjde. Jak je vidět z dalších řešení, možné to je.

Ivana Čapková: Obecný vzorec

Autorka přikládá postup, jak 13 kuliček navázat; bohužel je v něm chyba, neboť v jednom případě zjistí pouze, která kulička je vadná, nikoliv to, jestli je lehčí nebo těžší.

Poopravila vzorec určující počet vážení N nutných k určení k kuliček z původního $N = \lceil \log_2 k \rceil$ na silnější odhad $N = \lceil \log_3(2k + 1) \rceil$. Bohužel tento odhad nepodpořila vědeckými argumenty.

Mgr. David Holec: Určení špatné při znalosti druhu vady

Předpokládejme, že právě jedna kulička je špatná a víme, je-li lehčí nebo těžší než ostatní. BÚNO¹ je špatná kulička lehčí než ostatní. Rozdělme kuličky na třetiny takto:

$$\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil, \quad \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil, \quad k - 2 \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil.$$

Porovnejme první a druhou skupinu kuliček. Nastane-li rovnost, je špatná kulička ve třetí skupině. Bude-li lehčí polovina lehčí, je v ní špatná kulička, v opačném případě je špatná kulička ve skupině 3. Ve všech třech případech musíme zvážit už pouhou třetinu kuliček.

Indukcí můžeme pokračovat dále, dokud nedostaneme jednu kuličku, která už je zjevně špatná.

Počet nutných vážení k určení špatné kuličky je nutno provést $N = \lceil \log_3 k \rceil$ vážení.

Dr. Daniel Klír: Zobecnění vzorce vč. vážení 13 kuliček

Označme si 13 kuliček jako 123456789ABCD.

1. Zvážíme 12345 s 67890. Pokud je výsledkem rovnováha, je špatná kulička mezi ABCD, což umíme určit na 2 vážení (viz minulé číslo). Uvažujme tedy, že první část je lehčí než druhá.

2. Porovnejme 12367 s 4ABCD.

= špatná kulička je mezi 589 (5 je potenciálně lehčí, 89 jsou potenciálně těžší). Zvážíme tedy 89 — při rovnosti je lehčí 5, jinak určíme, která z 89 je špatná a jak.

< špatná je jedna z 123, protože zůstaly na stejné míse vah. Všechny jsou potenciálně lehčí a tak např. zvážením 12 zjistíme, která a jak je špatná.

> tento případ je analogický až na to, že špatná je mezi 467, které změnily miskou vah.

Byla položena otázka, proč nejde 12 kuliček zvážit méně než 3 váženími. Každým vážením můžeme lokalizovat špatnou kuličku v $1/3$ kuliček. Jedním vážením můžeme kuličku lokalizovat maximálně na $12/3 = 4$ míst, na 2 vážení do $4/3 > 1$ míst, takže 2 vážení nemohou rozhodně stačit.

Autor se dále zamýšlí nad obecným vzorcem, porovnáním s tabulkou se dostává ke vzorci $k = \frac{3^N - 1}{2}$. Tuto zákonitost se pokouší vysvětlit, avšak zdařilo se mu zdůvodnit pouze to, proč by měl vzorec růst podobně jako 3^N — při každém vážení dostaneme informaci o jedné ze 3 možností, takže počet kuliček můžeme podělit až 3.

Autorské řešení

Nejprve si položíme otázku, kolik můžeme maximálně navážit kuliček pomocí N vážení. Každé vážení může dát výsledek menší, rovno nebo větší — tedy 3 možnosti. N vážení může dopadnout 3^N způsoby. Pokud by se nám podařilo zajistit, aby každý možný výsledek vážení odpovídal jednomu možnému výsledku měření, využijeme vah nejvyšší možnou mírou. Výsledkem měření může být:

- (a) všechny kuličky mají stejnou hmotnost (1 výsledek),
- (b) některá kulička je lehčí (k výsledků),
- (c) některá kulička je těžší (k výsledků).

Možných výsledků měření je tedy $2k + 1$. Musí platit $2k + 1 \leq 3^N$, tedy $k \leq f(N) = \frac{3^N - 1}{2}$. Více kuliček rozhodně nejsme schopni navážit, otázkou je, dá-li se vymyslet postup, jak navážit kuličky takto efektivně.

¹ Bez újmy na obecnosti

Vypišme si tabulku několik počátečních hodnot tohoto vzorce:

| vážení (N) | kuliček (k) |
|----------------|-----------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 13 |
| 4 | 40 |
| 5 | 121 |
| 6 | 364 |
| \vdots | \vdots |

To, že skutečně existuje postup, jak maximálně využít informace z vah, dokážeme indukcí.

Krok 1. Na 1 vážení jsme schopni pomocí jedné normalizované kuličky zjistit, zda a jak je 1 kulička vadná.

Krok 2. Dovedeme-li pomocí N vážení s použitím normalizovaných kuliček zjistit, zda a jak je v $f(N)$ kuličkách některá vadná, pak pomocí $N + 1$ vážení budeme schopni udělat totéž pro $f(N + 1)$ kuliček.

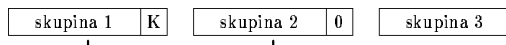
Takto tedy matematickou indukcí dokážeme, že pro každý počet vážení N umíme navážit $f(N)$ kuliček. Naopak dostaneme-li k kuliček, můžeme jejich počet doplnit normalizovanými kuličkami na nejbližší vyšší hodnotu $f(N)$ a zvážit je pomocí N vážení. Počet vážení, které potřebujeme na zvážení obecného počtu k kuliček, je

$$N = \lceil \log_3(2k + 1) \rceil.$$

První krok indukce jsme dokázali, dokažme i krok druhý. Nechť nějak umíme navážit $f(N)$ kuliček na N vážení. Vymysleme postup, jak přidáním jednoho vážení zvážíme $f(N + 1)$ kuliček. Jaký je vztah $f(N)$ a $f(N + 1)$?

$$f(N + 1) = \frac{3^{N+1} - 1}{2} = \frac{3 \cdot 3^N - 3 + 2}{2} = 3 \cdot \frac{3^N - 1}{2} + 1 = 3 \cdot f(N) + 1.$$

Rozdělme si $f(N + 1) = 3 \cdot f(N) + 1$ kuliček na 3 skupiny a přidejme jednu normalizovanou kuličku. Situace je vidět na vloženém obrázku.



Nyní zvážíme první 2 skupiny kuliček. Výsledkem vážení může být:

= pak jsou obě skupiny správné a případná špatná kulička je ve třetí skupině, která obsahuje $f(N)$ kuliček, které už podle indukce na N vážení určíme,

< pak je špatná kulička ve skupině 1 nebo 2, nebo je to kulička K. Spojme skupiny 1 a 2 tak, že první kuličku 'spojíme' s první, druhou s druhou... až poslední s poslední. Tyto kuličky budeme považovat za jednu novou kuličku o dvojnásobné hmotnosti. Nová skupina se skládá z $f(N)$ kuliček a můžeme ji proto zvážit podle indukčního předpokladu. Tak zjistíme jeden z 3 možných výsledků:

= pokud budou všechny tyto spojené kuličky správné, pak nutně byla špatná kulička K a víme i to, že má menší hmotnost,

< pokud je jedna spojená kulička lehčí než ostatní, pak je z této skupiny 2 kuliček jedna špatná. Bude to ta z 1. skupiny,

> pokud je naopak jedna spojená kulička těžší, je špatná zřejmě ta z 2. skupiny.

> také spojíme kuličky do skupin po 2 a použijeme indukční předpoklad. Určení špatné kuličky bude probíhat analogicky, pouze výsledky budou opačné než v případě '<'.
</p>
</div>
<div data-bbox="21 530 604 563" data-label="Text">
<p>Použili jsme jen jedno vážení, jinak jsme se pouze odkázali na indukční předpoklad. Ke správnému pochopení této úvahy zkuste porovnat tento obecný postup s konkrétním postupem vážení 4 kuliček na 2 vážení uveřejněném v minulém čísle.</p>
</div>
<div data-bbox="21 563 604 597" data-label="Text">
<p>Za daných předpokladů (použití normalizovaných kuliček, buď jsou všechny dobré nebo je právě jedna špatná, chceme zjistit nejen která kulička, ale i jak je špatná) je toto nejlepší možné řešení, neboť podle nerovnosti nemůže lepší existovat a ukázali jsme, že tento postup funguje.</p>
</div>
<div data-bbox="21 598 604 620" data-label="Text">
<p>Pokud někdo z vás vymyslí nějaké zajímavé řešení za jiných předpokladů, může o tom napsat článek. Toto téma je již považováno za uzavřené.</p>
</div>
<div data-bbox="304 629 321 641" data-label="Page-Footer">13</div>

Téma 4 — Tetris

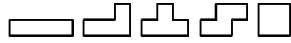
Nakreslené kostičky

Bc. Jan Holeček, Prof. Tomáš Brauner, Dr. Daniel Klír, Kateřina Nováková: Tvary pentaminových a tetrisových kostiček

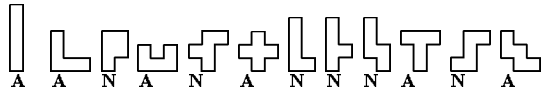
Jednoduchým kreslením na čtverečkováném papíře bylo snadné přijít na to, jaké jsou tvary (*mono-*, *di-* a *tri-*) minových kostiček:



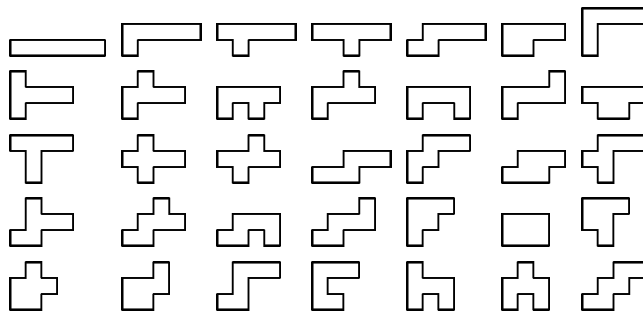
Již zmiňovaných *tetrisových* kostiček je 5 a jsou to tyto:



Pokračováním postupu zjistíme, že *pentaminových* kostiček je 12 a jsou to následující:



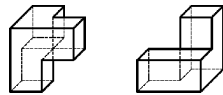
Bc. Jan Holeček našel i 35 *hezaminových* kostiček:



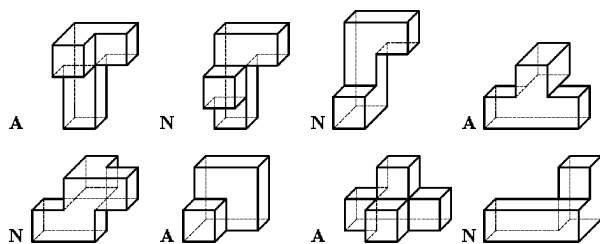
Bc. Jan Holeček dále roztřídil kostičky na dvě třídy podle toho, zda je kostka stejná jako její zrcadlový obraz (po vhodné rotaci) nebo ne. Z 12 *pentaminových* kostiček patří do každé třídy 6 kostiček (viz písmena **A** a **N**).

Bc. Jan Holeček: Tvary trojrozměrných kostiček

Kostičky složené ze 3 a méně čtverců nebudou nikdy opravdu trojrozměrné (vždy budou ležet všechny krychle v nějaké rovině). *Bc. Jan Holeček* a *Bc. Aleš Přivětivý* našli všechny trojrozměrné *tetrisové* kostičky. Mimo výše uvedených dvourozměrných existují ještě tyto 2:



Bc. Jan Holeček se pokusil nalézt i všechny trojrozměrné *pentaminové* kostičky. Mimo 12 uvedených dvou-rozměrných našel těchto 8:



I u těchto kostek je uvedeno písmenko určující, je-li kostka shodná se svým zrcadlovým obrazem. Podle našeho názoru ale nenalezl všechny kostičky. Zkuste chybějící kostičky nalézt.

Nikdo z autorů bohužel nepodnikl odvážnější kroky ve zkoumání trojúhelníkových nebo šestiúhelníkových kostiček. Přitom zrovna tyto kostičky by mohly být velice zajímavé.

Metody vytváření kostiček

Bc. Jan Holeček: Algoritmus tvoření n -minových kostiček

Odeberu-li jeden čtvereček tak, abych neporušil souvislost kostky, pak z n -minové kostky vyrobím kostku $(n - 1)$ -minovou. Tento postup mohu obrátit tak, že ke všem $(n - 1)$ -minovým kostičkám postupně zkouším přidat na všechny možné pozice jeden nový čtvereček; takto po odstranění duplicit získám všechny n -minové kostky.

V programu by se to implementovalo zapisováním čtverečků do pole o rozměrech $\lceil \frac{n}{2} \rceil \times n$. V programu si musíme dát pozor na několik věcí:

- zkusit přidat nový čtvereček na opravdu všechny možné pozice,
- posunout a vyrotovat správně kostku, abychom se vešli do pole,
- vhodně porovnávat, zda jsme nově vytvořenou kostičku už nevytvořili (i vyrotovanou nebo vyzrcadlenou).

Autor se bohužel touto otázkou do hloubky nezabýval, takže ani nevíme, jaké by tento program dal výsledky.² Zajímavé by bylo aspoň zjistit, kolik je kostiček vyšších řádů. Zkuste na toto téma bádát: kupříkladu můžete napsat takový program a poslat nám výsledky, které byly jeho výstupem.

Autor dále uvažoval nad kostičkami ve více dimenzích a došel k závěru, že zde existují netriviální vícerozměrné transformace (např. zrcadlení či rotace), ve kterých je orientace téměř vyloučena. Jenom ve třech dimenzích můžeme kostku vyrotovat do 4 směrů a každou z nich ještě zrcadlově obrátit (takže málo symetrická kostka se dá nakreslit 8 způsoby).

Podobným směrem se ubíraly i úvahy *Bc. Pavla Habudy*, který se na otázku díval nikoliv z hlediska programátorského, ale z hlediska teorie grafů. Nakreslil několik grafů, ze kterých je patrné, která kostička se vyvinula z které, bohužel však jeho grafy nejsou kompletní, některé důležité kostky se v nich neobjevují.

Ivana Čapková: Hledání systému v počtu kostiček

Autorka zkusila nalézt systém v počtech kostiček jednotlivých řádů. Bohužel její úvahy postrádají jakékoliv vědecké zdůvodnění.

Vypíšeme si tabulku počtů kostiček a do řádku pod ně napíšeme diference (rozdíly) následujících dvou. Totéž uděláme s diferencemi. Poté uděláme podobnou operaci, a to podělení následujících 2 čísel. Vyjde nám tato tabulka:

| | | | | | | |
|--------|---|---|---|----|----|----|
| počty | 1 | 1 | 2 | 5 | 12 | 35 |
| rozdíl | 0 | 1 | 3 | 7 | 23 | |
| rozdíl | 1 | 2 | 4 | 16 | | |
| podíl | | 2 | 2 | 4 | | |

² redakce samozřejmě takový program sestrojila a ví to

Autorka předpokládá, že podíl v dolní řádce bude postupně nabývat těchto hodnot: 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16... Bohužel nenapsala, kolik kombinací kostiček nám podle tohoto vzorce vyjde pro $n = 7$.

Bc. Aleš Přivětivý: Spojování 4 n -rozměrných krychlí v n -rozměrném prostoru

Autor předpokládá, že v jednorozměrném prostoru existují 3 možnosti poskládání objektů: jeden dlouhý had, had s odbočkou a písmeno x.³ Dále ověřuje, že ve dvojrozměrném prostoru existuje 5 výše uvedených tetrisových kostiček. Ve trojrozměrném prostoru pak přibudou další 2 kostky (také výše uvedené). Z této neúplné indukce usuzuje, že počet tetrisových kostiček v n -rozměrném prostoru je $2n + 3$.

Bc. Aleš Přivětivý: Spojování n čtverců ve dvojrozměrném prostoru

Autor se rozhodl rozdělit kostky do skupin podle délky nejdelší úsečky (např. u *pentamina* má had délku 5, písmeno x délku 3...). Těchto skupin bude vždy $n - 1$, je-li $n > 1$. Celkový počet kostek je součet počtů kostek v jednotlivých skupinách.

Je-li délka nejdelší úsečky k , musíme k ní z boku přilepit $n - k$ dalších čtverců. Pro $k \in \{0, 1, 2\}$ je možno počty kostiček v této skupině spočítat relativně snadno, pro $k > 2$ je to velmi obtížné.

$k = n$: taková 'nejdelší' kombinace je vždy jen 1,

$k = n - 1$: pro $n \in \{1, 2\}$ tyto kombinace neexistují, pro $n = 3$ je jedna, pro $n = 4$ jsou dvě... Vznikají tak, že kolem základní řady délky $n - 1$ umísťujeme čtverec, a to celkem $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ způsoby.

$k = n - 2$: pro $n < 4$ tyto kombinace neexistují. Pro $n = 4$ jsou 2, pro $n = 5$ jich je 8. Lze odvodit, že pro $n \geq 6$ je počet kombinací $\lfloor \frac{n^2 - 2n + 2}{2} \rfloor$.

$k < n - 2$: pro tyto kombinace můžeme udělat hrubý odhad na $\frac{(n-1)^n}{n!}$ kombinací.

Následuje tabulka všech vypočítaných kombinací pro n od 1 do 7.

| n | 0. | I. | II. | III. | IV. | V. | Celkem |
|-----|----|----|-----|------|-----|----|--------|
| 1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | | | | | | 1 |
| 3 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | | | | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 8 | 1 | | | 12 |
| 6 | 1 | 3 | 13 | 18 | 1 | | 36 |
| 7 | 1 | 3 | 19 | 42 | 12 | 1 | 78 |

K této tabulce musíme poznamenat, že podle našeho názoru je počet všech kombinací pro $n \in \{6, 7, 8\}$ jiný, a to 35, 108 a 369. Nicméně nikdo není neomylný, nejlépe by bylo, kdybyste se pokusili tato čísla potvrdit nebo vyvrátit.

K této problematice se vyjádřil i *Dr. Daniel Klír*. Zamýšlí se nad tím, že je diskutabilní, jsou-li za kostičky považovány i útvary s děrami nebo 'velmi nekonvexní' útvary, neboť takové kostičky bychom moc nevyužili v hrách, jako je Tetris, kde je úkolem skládat kostičky k sobě. Uvedl i několik poznámek o trojúhelníkových a šestiúhelníkových útvarech, které však nestojí za otisknutím.

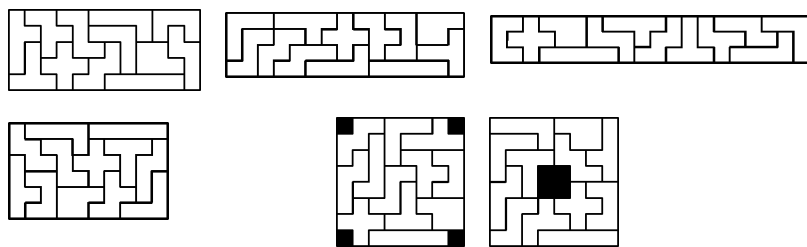
Nalezené vyskládané obrazce

Bc. Jan Holeček, Prof. Tomáš Brauner: Obdélníky všech rozměrů

Tito dva autoři poslali správné řešení zadané úlohy. Mnoho autorů bohužel nepochopilo zadání. Považoval jsem je za tak jasné, že jsem opomněl zdůraznit, že každá kostička musí být při vyplňování použita právě jednou. V opačném případě je úloha triviální.

³ tyto obrázky jsme nepřekreslovali

Hlavním úkolem bylo vyskládat obdélníky 6×10 , 5×12 , 4×15 , 3×20 . Tato úloha má velký počet řešení. Na níže uvedeném obrázku jsou ještě nakreslena navíc 2 vyskládaní šachovnice 8×8 bez 4 polí (rohových a středových), které navrhli sami autoři.



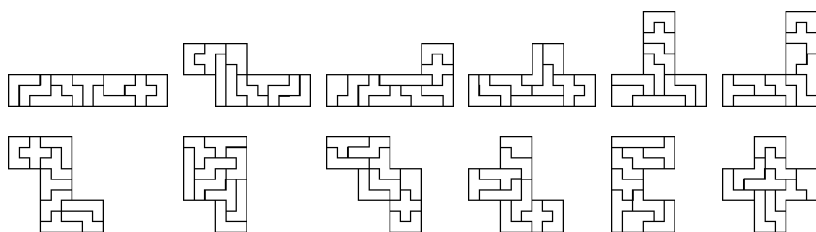
Tyto útvary se dále pokoušeli vyskládat *Mgr. Pavol Habuda, Kateřina Nováková a Jitka Krouželová*, kteří bohužel nepochopili pointu úlohy a využívali některých kostiček víckrát a některých vůbec.

Bc. Jan Holeček: Vyskládání jednotlivých kostiček

Tato úloha byla jednodušší variantou skládání obdélníků. Přesto její řešení poslal pouze tento autor. Úkolem bylo pro každou z 12 kostiček provést tuto operaci:

- odstranit tuto kostičku,
- odstranit ještě 2 další kostičky (libovolné),
- z ostatních kostiček poskládat zvětšeninu odložené kostičky.

Následují vybrané konstrukce všech 12 kostiček.



Bc. Jan Holeček: Algoritmus na skládání kostiček k sobě

Stejně jako u algoritmu na tvoření kostiček, ani tady se autor bohužel nepustil do hloubky. Pouze stručně popsal algoritmus, už ho však neimplementoval v žádném programovacím jazyce (ani symbolicky).

Algoritmus používá pole o velikosti daného obdélníka, ve kterém je uloženo u každého čtverečku 0 nebo nenulové číslo, podle toho, který útvar zasahuje na dané políčko. Na počátku je pole prázdné. Poté zkusíme (nejlépe *backtrackem*⁴) přikládat postupně všechny kostky, dokud nesložíme celý obdélník. Nalezené řešení zapíšeme do souboru a případně zkusíme vyhledat další.

Každou kostku zkusíme přiložit ve všech 8 jejích rotacích, tyto rotace se velmi snadno provedou např. záměnou os x a y , násobením souřadnic číslem -1 ...

Autor se velmi mýlí v odhadech časové složitosti programu. Mínil, že by byla řádově tisíce let. Program, který jsme si pro tento účel v redakci vytvořili, však všechna řešení vypíše asi po 10 minutách. Bylo by zajímavé, kdyby se někdo z Vás pokusil tento program sestavit a publikovat jeho výsledky. Nejzajímavější by asi byl počet všech možných vyskládaní daného obdélníka.

⁴ viz učebnice programování

Náměty pro další výzkum

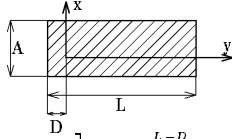
- sestrojít program pro výpočet kostiček a publikovat jejich počty pro větší n ,
- sestrojít program pro skládání obrazců a publikovat počty všech možných vyskládání,
- totéž pro vícedimenzionální objekty,
- totéž pro trojúhelníkové a šestiúhelníkové kostky (pro které by mohly být obrázky velice pěkné).

Téma 5 — List papíru

Nejprve bych chtěl napsat menší komentář o této úloze. Domnělý autor *Mgr. Pavol Habuda* nám obratem napsal, že takovou úlohu nikdy nevymyslel a neposlal. To nás velmi udivilo, neboť jsme tuto úlohu nevymysleli, ale přepsali z jednoho dopisu, který nám do redakce došel, a jediné dopisy, které nám sem došly, byly od zmiňovaného *Mgr. Pavla Habudu*. Každopádně se za vzniklé nedorozumění omlouváme.

Prof. Tomáš Brauner: Měření velikosti \bar{g}

Poskládáme papír do tuhé tyčky o velikosti 289×6.5 mm, kterou použijeme jako fyzické kyvadlo. Nejprve musíme vypočítat moment setrvačnosti obdélníku o hmotnosti M , délce L a šířce $2A$. Osa otáčení prochází tyčkou ve vzdálenosti D od konce. Vše je dokumentováno na přiloženém obrázku.



$$I = \iint_{\text{tyčka}} \rho(x^2 + y^2) dy dx = \rho \int_{-D}^{L-D} \left[\int_{-A}^A (x^2 + y^2) dy \right] dx = \rho \int_{-D}^{L-D} (2Ax^2 + \frac{2}{3}A^3) dx = \rho \left[\frac{2}{3}Ax^3 + \frac{2}{3}A^3x \right]_{-D}^{L-D} =$$

$$= \frac{2}{3}\rho A [L^3 - 3L^2D + 3LD^2 - D^3 + A^2L - A^2D + D^3 + A^2D] = \frac{2}{3}\rho AL[L^2 - 3LD + 3D^2 + A^2],$$

$$I = \frac{m}{3}(L^2 + A^2 - 3LD + 3D^2).$$

Vzdálenost těžiště od osy otáčení je $d = L/2 - D$. Dosadíme-li moment setrvačnosti do vzorce pro periodu kyvu fyzického kyvadla, získáme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{m/3(L^2 + A^2 - 3LD + 3D^2)}{mg(L - 2D)/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3g} \left(L + \underbrace{\frac{A^2 - LD + 3D^2}{L - 2D}}_x \right)}.$$

Změřením periody a parametrů kyvadla pak dostaneme

$$g = \frac{3\pi^2(L + X)}{3T^2},$$

vzhledem k parametrům $L = 289$ mm, $A \approx 3$ mm, $D \approx 5$ mm můžeme ve výrazu X zanedbat A^2 a $3D^2$ a dostaneme

$$g \approx \frac{8\pi^2L}{3T^2} \cdot \frac{L - 3D}{L - 2D}.$$

Dvacetinásobným měřením doby 30 kmitů bylo změřeno, že $T = 0.870 \pm 0.6\%$. Započítáme-li i chybu D , L , dostaneme, že $g = 9.87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \pm 1\% = (9.87 \pm 0.10) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Prof. Tomáš Brauner, Bc. Štěpánka Kučková: Měření hustoty papíru

Nejprve zvážíme papír: $m = 5.57 \text{ g} \pm 2\%$, jeho rozměry jsou $28.9 \text{ cm} \times 21.0 \text{ cm}$. Nejproblematictější je měření tloušťky papíru. Nejvhodnější je nastříhat papír na 60 plátků a tyto změřit na různých místech, aby se vykompenzovaly nerovnoměrnosti. Vyjde tak $t = 0.11 \text{ mm} \pm 4\%$. Hustota papíru pak je $\rho = \frac{m}{abt} \Rightarrow \rho = 842 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \pm 6\% = (842 \pm 50) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Dr. Daniel Klír: Postupné odvození mnoha fyzikálních konstant

Ze znalosti standardní velikosti papíru nadefinujeme délku $d = 1 \text{ mm}$. To nám umožní sestavit nádobu o objemu $V = 1 \text{ l}$. Naplníme-li tuto nádobu vodou, můžeme definovat hmotnost $m = 1 \text{ kg}$. Časovou jednotku $t = 1 \text{ s}$ a gravitační zrychlení g můžeme přibližně definovat podle délky kyvu 1 m dlouhého matematického kyvadla: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Součin gravitační konstanty a hmotnosti Země zjistíme podle vzorce $g = \kappa \frac{M_1 M_2}{R^2}$. Poloměr Země můžeme pro tento účel změřit 2 způsoby:

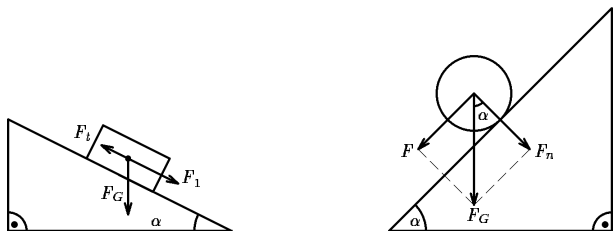
- přikládáním papíru A4 k Zemi, což je časově velmi náročné a kvůli možným obtížně proveditelné;
- změnou gravitačního zrychlení v závislosti na výšce — což je možné díky tomu, že R se ve vzorci vyskytuje ve druhé mocnině.

Hmotnost Země můžeme určit z charakteru a parametrů dráhy Měsíce kolem Země $m\omega^2 R_{ZM} = \kappa \frac{M_2 m}{R_{ZM}^2}$. Gravitační konstantu lze určit, známe-li hmotnosti dvou těles a jejich vzdálenost, změřením gravitační síly a porovnáme-li se silou, kterou působí pružina. Tato metoda je velice nepřesná, lepší je použití torzních vah.

Celé naše měření bude zatíženo více a více vzrůstající chybou. Naše úvahy tedy mají význam pouze teoretický za absurdního předpokladu absolutní přesnosti měření.

Mgr. Jan Mysliveček, Mgr. Pavol Habuda, Bc. Štěpánka Kučková: Statické a dynamické tření

Činitel statického smykového tření můžeme určit podle úhlu, pod kterým musíme naklonit rovinu, aby se papír začal smýkat.



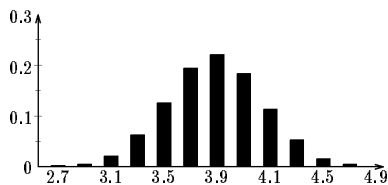
Podle obrázku vidíme, že v okamžiku, kdy se papír začne pohybovat, nastane rovnost sil $0 = a = g(\sin \alpha - \cos \alpha F_s)$, tedy $F_s = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$.

Dynamické tření se projevuje při pohybu, takže ho nejlépe určíme podle vzorce pro rovnoměrný zrychlený pohyb $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - \cos \alpha F_D)t^2$, tedy po úpravách $F_D = F_s - \frac{2l}{gt^2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$.

Bc. Aleš Přívětivý: Zmačkatelnost papíru

Autor provedl 50 měření průměrů koulí, které vzniknou po zmačkání papíru A4. Statistickým zpracováním

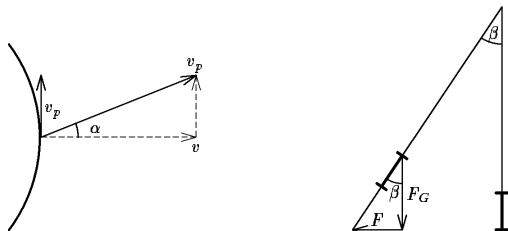
naměřených hodnot vznikne Gaussova křivka (četnost jednotlivých průměrů).



Bc. Štěpánka Kučková: Tíhové zrychlení, součinitel odporu, modul pružnosti v tahu

Papír zmačkáme do co nejmenší kuličky, pouštíme ho ze známé výšky a měříme čas letu. Zanedbáme-li odpor vzduchu, pohybuje se papír rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $g = \frac{2s}{t^2}$. Bylo změřeno $s = 2.1$ m, $g = (7 \pm 1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Menší naměřené zrychlení bylo způsobeno zmíněným zanedbáním odporu vzduchu.

Budeme-li na pověšený papír foukat vzduch, můžeme změřit úhel odklonění od svislé osy. Nejprve si změříme rychlost vzduchu proudícího z fénu pomocí odklonění vody, vytékající z nádoby, od původní trajektorie. Voda vytéká známou rychlostí $v = \sqrt{2hg}$, rozepsáním sil dostáváme $v_p = v \tan \alpha = \sqrt{2hg} \tan \alpha$, naměřené hodnoty jsou $h = 0.32$ m, $\alpha \approx 18^\circ$, $v_p \approx 0.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



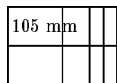
Papír složíme do malého obdélníku a měříme úhel, o který se odkloní při foukání fénem. Podle obrázku platí $F = F_g \tan \beta$, $F = \frac{1}{2} C S \rho v^2$, $C = \frac{2F}{S \rho v^2} = \frac{2F_g \tan \beta}{S \rho v^2}$. Naměřené hodnoty: $m = 4 \cdot 10^{-3}$ kg, $v_p = 0.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $S = 5.2 \cdot 7.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ nám dávají $C = (9 \pm 1)$.

Papír nastříháme na tenké proužky, na které postupně přidáváme závaží. Modul pružnosti v tahu zjistíme změřením relativního prodloužení papíru $E = \frac{F_G \cdot l_1}{S \cdot \Delta l}$.

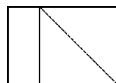
Mgr. Jaroslav Jánský, Ondřej Škoda, Mgr. Jan Mysliveček, Andrej Pavlík, Bc. Aleš Přívětivý: Kuriozity

Mgr. Jaroslav Jánský by papír rozstříhal na proužky délky l . Jeden z nich by házel a ostatní by byly narovnaný ve vzdálenostech $2l$. Podle postupu publikovaném v předchozím ročníku časopisu by chtěl statisticky změřit π . Názor redakce je, že pokud by se papír použil na zápis matematických vzorců, tak by se π vypočítalo mnohem snadněji.

Ondřej Škoda by využil znalosti velikosti papíru formátu A4 a pomocí půlení intervalů by získal měřidlo pro určování vzdáleností a plošných obsahů. Přehnutím papíru kolem 1 rohu bychom získali na měření i úhel 45° .



37 mm



tady přehneme

Mgr. Jan Mysliveček by chtěl vystřihnout dírký do papíru měřit pomocí difrakce vlnovou délku světla. Myslíme si, že by pro to potřeboval monofrekvenční zdroj světla.

Andrej Pavlík by papír přeměnil na plyn. Pak by změřil počet molů daného plynu podle molární hmotnosti $n = M/\mu$. Dosazením do stavové rovnice by vypočítal plynovou konstantu $R = \frac{pV}{nT}$. Pak by vypočítal Boltzmannovu konstantu z Brownova pohybu. Z té by pak vypočítal Avogadrovu konstantu. Při spalování papíru by určil Planckovu konstantu podle intenzity záření a Stephen-Boltzmannovu konstantu podle vyzážené energie (za předpokladu, že papír je dokonale černé těleso). Po zjištění počtu vzniklých fotonů bychom byli schopni změřit i Planckovu konstantu.

Bc. Aleš Přívětivý by příkládáním papíru změřil Astronomickou jednotku (vzdálenost Země-Slunce). Pro zvýšenou teplotu v okolí Slunce doporučuje pracovat v noci.

Dr. Daniel Klír, Mgr. Jan Mysliveček, Mgr. Pavol Habuda, Bc. Aleš Přívětivý: Návrhy na další měření

U papíru lze změřit měrný elektrický odpor (vyšlo by asi $10^{13} \Omega \text{ m}^{-1}$). Pokud na sebe položíme více papírů, můžeme změřit mez pevnosti v tahu jako $\sigma = F/S$, mez pevnosti v tlaku se kvůli kroucení papíru bude měřit velmi obtížně. Dále je možno určit tepelnou vodivost, absorpci světla a spalné teplo.

Odpor vzduchu můžeme vypočítat takto: pustíme zmačkanou kuličku z dostatečně velké výšky a po změření její rychlosti po jejím ustálení (např. při nárazu na zem) můžeme podle vzorce $F_{od} = \frac{1}{2} c \rho v S v^2$ zjistit, že $\rho v = \frac{2mg}{cSv^2}$.

Relativní permitivita papíru se změní pomocí změny kapacity deskového kondenzátoru po vložení papíru mezi jeho desky $\varepsilon = \frac{C_{\text{papír}}}{C_{\text{vzduch}}}$.

Úloha 4 — Posloupnost

AUTORSKÉ ŘEŠENÍ

Posloupnost 122112122122112112212112 může samozřejmě pokračovat, jak mnozí z vás správně uvedli, libovolně, aniž by přitom přestala být dobře definovanou posloupností. Avšak ze skutečnosti, že se tato úloha objevila v matematickém semináři (renomovaném a věhlasném), jste mohli předpokládat, že hledané řešení úplně náhodně být nemá a že má být aspoň trochu matematické.

Tak tedy, jak se vytváří zmíněná posloupnost: (viz obrázek)

- posloupnost začíná jedničkou a dvojkou,
- *jednička* na prvním (**lichém**) místě říká, abychom napsali *jednu jedničku*, ta je však už napsaná,
- *dvojka* na druhém (**sudém**) místě říká, abychom napsali *dvě dvojky*,
- na **třetím** místě je *dvojka*, tedy na konec zatím napsané posloupnosti napíšeme *dvě jedničky*,
- takto postupně procházíme další místa; čteme-li hodnotu z lichého (sudého) místa, potom na konec posloupnosti připišeme tolik jedniček (dvojek), kolik udává číslo na tomto místě.

Posloupnost tedy vypadá takto:

122112122122112112212112 – 1221121212212211212212112122122112...

Vzhledem ke způsobu, jakým se posloupnost tvoří, nelze určit jednoznačně, kolik obsahuje jedniček a kolik dvojek. (Vězte však, že jakýsi pilný student MFF UK se to pokusil spočítat a zjistil, že poměr mezi jedničkami a dvojkami je 0.49 – 0.52, což znamená, že jedniček je přibližně stejně jako dvojek.)

Kromě výše popsaného řešení přišlo i mnoho jiných, neméně zajímavých. *Bc. Aleš Přívětivý* naši posloupnost generoval pomocí Fibonacciho čísel: pro každé sudé Fibonacciho číslo F_n nebo pro každý člen, pro který platí

$$n^4 - 36n^3 + 411n^2 - 1635n + 1260 = n,$$

jsou na n -tém místě dvojky. Na ostatních místech jsou jedničky.

Jiné originální řešení zaslal *Mgr. Jan Fátor*, který přiřadil písmenům abecedy střídavě jedničky a dvojky (tedy $A = 1, B = 2, C = 1, \dots$). Posloupnost pak přepsal jako názvy hudebních skupin:

ABBA ELO BLUR REM TMA TLC BEAT – LES.

Dle tohoto klíče tedy posloupnost pokračuje úsekem 211. Řešení na nás esteticky hluboce zapůsobilo, ale bohužel jsme museli s politováním konstatovat, že souvislost s matematikou najít neumíme.

Ostatní matematická řešení se zpravidla zabývala hledáním nějaké periody. Objevilo se též pozoruhodné řešení využívající osově souměrnosti s teorií poruch symetrie.

zápis: čtecí index, zapisovací index

1. $\overline{12}$
2. $1\overline{22}$
3. $12\overline{211}$
4. $1221\overline{12}$

Úloha 5 — Sluníčko

Známe parametry zemské dráhy (poloměr r , periodu T) a úhlovou velikost α Slunce. Pro jednoduchost předpokládáme, že se Země pohybuje kolem Slunce po kruhové dráze.

Pro systém Země-Slunce platí, že gravitační síla, kterou působí Slunce na Zemi, je rovna odstředivé síle působící na Zemi.

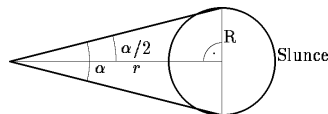
$$F_g = F_o$$

$$\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} = M_Z \omega^2 r,$$

$$\text{tedy } M_S = \frac{\omega^2 r^3}{\kappa}, \quad \text{dále víme, že } \omega = 2\pi/T$$

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2}.$$

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r}$$



$$\text{tedy } R = r \text{tg } \frac{\alpha}{2}$$

$$V_S = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$$

po dosazení do vztahu pro hustotu $\rho_S = \frac{M_S}{V_S}$

$$\rho_S = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2 \frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2 \frac{4}{3} \pi r^3 \text{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\rho_S = \frac{3\pi}{\kappa T^2 \text{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

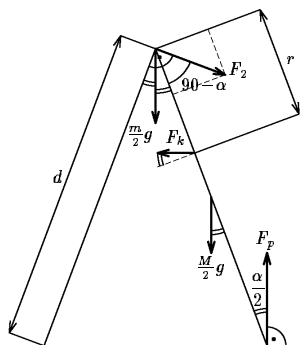
Po dosazení tabulkových hodnot $\rho_S \approx 1410 \text{ kg m}^{-3}$.

Úloha 6 — Štafle

Přístupů k úloze bylo mnoho. Většina z vás uvažovala poměr velikostí nějakých dvou sil, působících na rameno štaflí, a tento poměr položila do rovnosti s tangens nejčastěji poloviny úhlu svíraného rameny štaflí. Někdy takové postupy vedly ke správnému výsledku, trochu častěji však do záhuby. Nicméně ani v těch, ani v oněch skoro nikdo nezduvodnil, proč co platí. Mnohem jasnější byl postup pomocí momentů sil a součtů sil působících v nějakém bodě. Nejlepší mi připadal postup doc. Tomáše Braunera, a protože jsem nic lepšího nevymyslel (téměř vše ostatní vedlo k podstatně nechtutnějším rovnicím, často obludných stupňů), přibližně se jeho řešení budu držet.

Pokud se týče hmotnosti M štaflí, někteří z vás ji uvažovali, jiní ne. V autorském řešení ji budeme uvažovat, a komu se to nelíbí, ať si místo ní dosadí nulu.

K řešení jsme nakreslili obrázek, pro přehlednost jsou síly působící na štafle znázorněny pouze na jednom jejich rameni; na druhé rameno přirozeně působí symetrické síly. Detailista, postrádající síly působící na druhé rameno, nechť si přiloží k ose obrázku zrcadlo.



STAFLE-1.mf

1) Štafle jsou v klidu, tedy se nepohybují ani ve vodorovném směru vzhledem k Zemi. Tedy součet všech sil, působících ve vodorovném směru na štafle, je roven nule. Uvažme reakční sílu \vec{F}_p podložky. Platí $2 \cdot F_p = mg + Mg$, odtud

$$F_p = \frac{mg + Mg}{2} \quad (1)$$

2) Součet momentů sil působících na jedno rameno štaflí je vzhledem k libovolnému bodu tohoto ramene nulový. Výhodné je uvažovat momenty vzhledem ke špičce štaflí, protože se tak zbavíme síly F_2 , kterou působí jedno rameno štaflí na druhé.

Tedy:

$$\begin{aligned} F_p \cdot d \cdot \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \frac{M}{2} g d \sin \frac{\alpha}{2} + F_k \cdot r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{1}{2} m g d \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} M g d \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{4} M g d \sin \frac{\alpha}{2} + F_k \cdot r \cos \frac{\alpha}{2}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} g d (2m + M) \right) &= F_k \cdot r \cos \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

odtud

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{F_k 4r}{g d (2m + M)} \quad (2)$$

3) Vyjádřeme tažnou sílu pružiny. Nechť l_0 je délka pružiny v nenapínaném stavu, l délka pružiny, když jsou štafle v rovnovážné poloze.

Potom $F_k = k(l - l_0)$, přičemž snadno z obrázku nahlédneme $l = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$. Tedy

$$F_k = k \left(2r \sin \frac{\alpha}{2} - l_0 \right). \quad (3)$$

4) Do rovnice (2) dosadíme F_k z (3) a upravme:

$$(2m + M) g d \tan \frac{\alpha}{2} = 4kr \left(2r \sin \frac{\alpha}{2} - l_0 \right),$$

což bohužel vede na rovnici čtvrtého stupně. Pouze pokud $\frac{\alpha}{2}$ je malé (do 5°), máme $\frac{\alpha}{2} \approx \tan \frac{\alpha}{2} \approx \sin \frac{\alpha}{2}$, a platí

$$\frac{\alpha}{2} \approx \frac{4kr l_0}{8kr^2 - (2m + M)gd}.$$

Zadání rekreačních úloh

Úloha 7. Průtrž novin

Ocelová kulička o hmotnosti m padá z výšky $h = h_1 + h_2$ nad zemí volným pádem. Ve výšce h_2 nad zemí jsou ve vodorovné poloze napnuté noviny. Kulička papír protrhne a dopadne na zem. Spočítejte, jaká energie se spotřebovala na deformaci a protřzení papíru, znáte-li výšky $h_1, h_2, h = h_1 + h_2$, celkovou dobu pádu t a hmotnost kuličky m .

Úloha 8. Sluníčka

Jednoho dne, byla to tuším středa, Sluníčko potkalo druhé Sluníčko. Jenže to druhé Sluníčko bylo Antisluníčko z antihmotičky. Poté, co se Sluníčka přátelsky objala, zjistila, že již nejsou Sluníčka, ale gamazáfeníčko. A na vás je spočítat, kolik planetiček se neroztavilo.

Úloha 9. Souměrnosti

Zajisté existují tělesa, která jsou souměrná podle dvou os. Existují však tělesa, která jsou souměrná podle dvou středů ?

Úloha ∞ . Psychologie

Na zadní stranu obálky s Vaším řešením napište právě jedno přirozené číslo. Za přirozená čísla považujeme množinu $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$ Ptáte se, co z toho budete mít?

Vyhraje (a dostane body navíc) ten z vás, který napíše nejmenší přirozené číslo, které nenapíše nikdo jiný. Takže musíte:

1. vymyslet své vlastní *originální* číslo.
2. musí být pokud možno co nejmenší.

Zadání dalších témat

Téma 6. Hélium

Konstruktor Trurl vyrobil ondy stroj, který dovedl vyrobit všechno, co začínalo písmenem h . Po nedávném katastrofálním fiasku se strojem vyrábějícím vše od n zvolil pro své pokusy raději toto, řekněme, více neutrální písmeno. Sotva stroj dokončil, nařídil mu na zkoušku vyrobit humus a hrobařika. To mu však nestačilo, tak nakázal stroji vyrobit ještě hroudy, hafany, hraboše, haksny, hákovnice, hadry a hihňaly. Pak stroj musel udělat ještě herinky, halefý, hromnice, hegemonii, Hirohita, hrušky a hudbu. Hudba se však příliš nepovedla, neboť současně s ní stroj vytvořil i hluk a hřmot. Po odstranění této drobné vady zjevně potěšen jinak bezchybnou činností stroje poslal Trurl pro svého dávného přítele a konkurenta Klapaciuse, který ochotně pozvání přijal, těše se na další Trurlovu ostudu, již bude moci roztrubovat po všech vzdálených i blízkých vesmírech ještě nejmíň další miliardu let. Trurl představil stroj Klapaciovi, vychvaluje mu přitom všechny přednosti stroje včetně optimální časové složitosti. Klapacius požádal svého kolegu, zda by si mohl také něco zkusit, načež zadal stroji vyrobit hejkaly, hastruše, hnidopícha, harakiri, Huyghense, Homéra, hobliny, hampéjz, Himaláj, habešskou hymnu a hubeného hrocha. Dlouho pak přemýšlel, jakou záluždností by odhalil nějakou chybu přístroje, a tak zkusil ještě hlaholici, hnusný hamiltonián, hrubosrstou housenku, herbář a hélium. To poslední však neměl říkat, protože stroj, zřejmě již trochu přehřátý, se při výrobě hélia zasekl a přes ustavičné kopance obou konstruktorů tvrdošijně pokračoval ve výrobě tohoto na Zemi jinak vzácného plynu. Teprve po desetimiliontém kopanci se stroj hluboce urazil, roztráhl křídla, vysolil na oba slovně kolegy 15000 šlavnatých nadávek od písmene h a plívaje diody odletěl neznámo kam.

Vaším úkolem bude odhadnout všechny důsledky tohoto pohnutého příběhu, ke kterým na Zemi došlo. Posměšné letáky a pomluvy, které Klapacius od té doby o Trurlovi trusil po všech sousedních galaxiích, raději

nepočítejte, jelikož byste se nedopočetali. Vaše práce bude zajisté nelehká, neboť héliu se stačilo vyrobit přesně $5 \cdot 10^{18}$ kg. Mladším řešitelům připomínám, že původní atmosféru tvořenou směsí vzduchu a olova zneškodnil konstruktor Trurl za pomoci přístroje zvaného "Zemanův kufřík" již v jednadvacátém století, což tehdy na newyorské burze vedlo k rapidnímu vzestupu akcií společností vyrábějících skafandry.

Téma 7. MAGICKÁ ZRCADLA — Úvodní úloha: Křivá zrcadla

Pan X má chicht tvaru přesného čtverce, na čemž si velmi zakládá. Navíc má tento vážený měšičanosta řandy tvaru písmene H. Pan X je sousedem pana Y. Jednou ukradl pan X panu Y slepici, za což se rozkacený pan Y rozhodl pomstít. Sestrojil několik zrcadel, do kterých když se pan X podíval, musel se nutně zhrozit, neboť v jednom spatřil místo skvělého čtverce obludný kruh, ve druhém kosočtverec, ve třetím křížek ve tvaru písmene x, ve čtvrtém pak svůj chicht zrotovaný o 45° . Řandy pak zjevily se mu v podobě mnoha pitvorných útvarů jeho důstojnost znevažujících. Pan X se rozhodl nežstát obtloustlému panu Y s kulačoučkou tvářičkou nic dlužen, a tak vyrobil jiná zrcadla, v nichž se chudák pan Y zřel coby odporný čtverec, ubohá úsečka či dokonce tvrdé Y! Není proto divu, že oba pánové na sebe podali žalobu pro urážku osobnosti. Soud sice svolal světoznámé odborníky z oboru optiky k odbornému posouzení žalob, jenže při převozu zrcadel na soudní dvůr došlo k jejich rozbití. Žaloby pak byly pro nedostatek důkazů staženy. Dodnes tedy nevíme, jak zrcadla vypadala. Dokážete je alespoň matematicky rekonstruovat, popřípadě ukázat, že si jejich existenci pan X či pan Y vymysleli ku vzájemnému očerňení?

Můžete se zabývat i zrcadlením jiných útvarů na jiné útvary. Zrcadla můžete používat

- pouze zakřivená,
- zakřivená i zalomená.

Až vás to přestane bavit, zkuste si představit, že se např. pan Y kouká šikmo do zrcadla na pana X, a vymyslete, jaké by to zrcadlo muselo být, aby pan Y pozoroval místo kolečka třeba sinusoidu nebo nekonečně mnoho soustředných kružnic.

Téma 6. Čísła

Pravěcí lidé znázorňovali čísla počtem kamínků a jiných malých předmětů (říkáme tomu *unární soustava*). Poté přišli na to, že ke znázornění velkých čísel je tento způsob nevhodný. Římané vymysleli svou *římskou soustavu*, při které používají písmen k označení čísel různých řádů. Kdo zná tuto soustavu, ví, jak je složitá a nepraktická. Proto byl vymyšlen nový způsob zápisu **reálných** čísel pomocí mocninné řady. Dnešní člověk počítá obvykle v *desítkové soustavě*, při které je použito čísel 0–9. Přesto i ta je na početní operace příliš složitá a počítače používají nejjednodušší možný *binární zápis* čísel pomocí čísel 0 a 1.

Počítání v této soustavě je neobvykle jednoduché, ale také není dokonalé. K zápisu záporných čísel potřebujeme speciální znak — před číslem. Přitom je možno sestavit soustavu o základu -2 , která se chová jako binární soustava (používají se cifry 0 a 1), ale ve které není většího rozdílu mezi zápisem kladných a záporných čísel. Kdo zná komplexní čísla, ví, že se obvykle zapisují jako součet reálné a imaginární čísel ($\varphi = a + bi$). Pokud ovšem použijeme soustavu o základu $\sqrt{2} \cdot i$, zjistíme, že **jedním** zápisem (pomocí 0 a 1) obsáhneme všechna komplexní čísla, nepotřebujeme je tedy psát v původním složitém tvaru. Zápisy všech čísel se nám taktó maximálně sjednotily a zjednodušily.

Vaším úkolem je vybrat si z výše uvedených soustav některou, která se Vám nejvíce líbí a popsat, jak se v takové číselné soustavě sčítá, odčítá, násobí, dělí, odmocňuje... a uvážit, který způsob je nevhodnější.

| Č. | Jméno | Třída | Σ_{-1} | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | R4 | R5 | R6 | Σ_0 | Σ_1 |
|---------|------------------------|------------|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|------------|------------|
| 1. | Dr. Daniel Klír | GPoděb 4.B | 98 | 4 | | 3 | 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 24 | 56 |
| 2. | Prof. Tomáš Brauner | GMorKr 4.B | 201 | | | | | 4 | 6 | | 3 | 5 | 18 |
| 3. | Mgr. Pavol Habuda | 3.B | 39 | 9 | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 25 | 45 |
| 4. | Bc. Jan Holeček | GKJB 2.A | 14 | 2 | 2 | 3 | 8 | | 4 | 4 | 3 | 26 | 40 |
| 5. | Mgr. Ondřej Přibyla | ? | 60 | | | | | | 4 | 4 | 2 | 10 | 34 |
| 6.–7. | Mgr. Milena Svobodová | ? | 31 | | | | | | | 1 | 1 | 2 | 33 |
| | Mgr. Jan Fátor | ? | 48 | 1 | 3 | | | | 1 | 4 | 2 | 11 | 33 |
| 8.–9. | Mgr. Jaroslav Jánský | GKJB 2.A | 21 | | | | | 1 | 4 | 3 | 1 | 9 | 30 |
| | Bc. Aleš Přivětivý | GParad 4.? | 13 | | | | 3 | 4 | 2 | 4 | 4 | 17 | 30 |
| 10. | Mgr. David Holec | GKJB 2.A | 47 | | | 2 | | | 4 | 4 | 2 | 12 | 28 |
| 11. | Bc. Milan Orlita | GUHra 7.A | 13 | 4 | | | | | 1 | 3 | 4 | 12 | 25 |
| 12.–14. | Bc. Štěpánka Kučková | GArab 3.E | 12 | | | | | 4 | 1 | 4 | 3 | 12 | 24 |
| | Mgr. Jan Mysliveček | GKJB 2.A | 37 | 2 | | | | 3 | 4 | 3 | 2 | 14 | 24 |
| | Mgr. Radomír Budínek | GHod s7A | 24 | | | | | | | | | 0 | 24 |
| 15. | Dr. Václav Račanský | GKJB 2.A | 79 | | | | | | | | | 0 | 23 |
| 16. | Mgr. Jitka Spoustová | ? | 47 | | | | | | | 4 | 1 | 5 | 22 |
| 17. | Bc. Jiří Lísal | Gymn 4.A | 14 | 2 | | | | | | 4 | 1 | 7 | 21 |
| 18. | Bc. Vlastimil Křápek | GBrno 4.C | 15 | | | | | | | 4 | | 4 | 19 |
| 19.–20. | Andřej Pavlík | GTrenč 1.r | 8 | 3 | | | | 3 | 2 | 2 | | 10 | 18 |
| | Ivana Čapková | SPŠE 4.B | 5 | | 3 | 5 | 1 | | | 3 | 1 | 13 | 18 |
| 21. | Dr. Tomáš Klír | ? | 52 | | | | | | | | | 0 | 14 |
| 22. | Bc. Barbora Vostrovská | GJKT 4.A | 12 | | | | | | | | | 0 | 12 |
| 23. | Kateřina Nováková | GMnich | 6 | 1 | | 2 | | 1 | | | | 4 | 10 |
| 24.–25. | Jitka Krouželová | septíma B | 5 | 1 | | 1 | | 1 | | | | 3 | 8 |
| | Mgr. Jiří Roubínek | GŽďár 4.A | 46 | | | | | | | 2 | | 2 | 8 |
| 26.–27. | Bc. Zuzana Rychnová | ? | 14 | | | | | | | | | 0 | 5 |
| | Jarmila Mulačová | ? | | | | | | | | 2 | 3 | 5 | 5 |
| 28.–29. | Svatava Vyvialová | ? | 4 | | | | | | | | | 0 | 4 |
| | Ondřej Škoda | ? | 3 | | | | | 1 | | | | 1 | 4 |
| 30. | Pavel Železný | ? | 0 | | 2 | | | | | | | 2 | 2 |

Uzávěrka dalšího čísla je **31. března. 1997**

Adresa semináře:

M&M — B1507, VŠK 17. listopadu, Pátkova 3, 182 00 Praha 8, Libeň