M&M číslo 2 ročník III

Milí řešitelé,

tak jsme vydali další číslo časopisu. Tentokrát nebude úvodník tak dlouhý jako v minulém čísle, neboť jsme si nejdůležitější věci už odbyli. Přesto musím napsat několik poznámek k vašim řešením.

• Ačkoli byl termín uzávěrky stanoven na 11. listopad, každý den nám docházejí další a další řešení. Rozhodli jsme se, že tato řešení již nezahrneme do tohoto čísla časopisu, ale také je nevyhodíme do koše. Články a body za ně přidělené budou aktualizovány v dalším čísle. Podobný postup byl stanoven i u rekreačních úloh, ale protože jejich opravování trvá kratší dobu, je možné, že budou opraveny dříve. Proto se nedivte, dojdou-li vám zpět např. pouze rekreační úlohy.

• V každém čísle časopisu budou autoři jmenováni s tituly, které získali dříve, neboť nové body budou přiděleny až po otisknutí článku. Ve výsledkové listině je uveden u každého autora jak součet bodů za všechny ročníky, během kterých řešil seminář, tak součet bodů za tento rok (podle kterého bude tříděna tato tabulka).

• Je mi to trapné, ale musím mnoha řešitelům připomenout, co to je vědecký článek. Jako takový by měl obsahovat název, krátký text o tom, co je jeho obsahem, samotný obsah včetně příslušných náčrtků, grafů... a krátký závěr. Co je nejdůležitější — měl by být čitelný a mít nějakou formu. Někteří autoři publikovali něco, co by se lépe dalo nazvat konceptem při řešení rekreační úlohy.

• Děkujeme *bc. Pavlovi Habudovi,* který využil možnosti, kterou jsme chtěli původně navrhnout až v tomto čísle, a to publikování vlastních výzkumů. Za zaslanou rekreační úlohu, kterou zatím nepřetiskujeme (autor však za ni dostal plný počet bodů), děkujeme. Nicméně přetiskujeme jím navrhnuté téma (ke kterému bohužel zatím neposlal žádný příspěvek).

• Vzhledem k tomu, že naše finanční prostředky jsou omezené, rozhodli jsme se, že nebudeme posílat časopis těm řešitelům, kteří nezašlou žádné příspěvky do dvou po sobě následujících čísel.

To je vše, přejeme vám mnoho úspěchů při dalším vašem bádání.

za redakci Robert

Téma 1 — TROSEČNÍCI

MĚŘENÍ ZEMĚPISNÉ ŠÍŘKY

Jaroslav Jánský, Radomír Budínek: **Jak vůbec zjistit, na které jsem polokouli?**

Zjistím, jestli je Slunce víc na jih nebo na sever (mám kompas).

doc. Tomáš Brauner, dr. Daniel Klír: **Měření velikosti tíhového zrychlení**

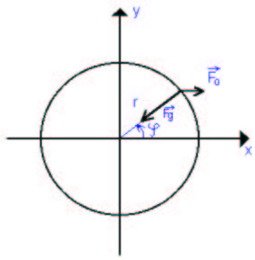
Tato metoda využívá známého faktu, že tíhové zrychlení závisí na zeměpisné šířce. Největší tíhové zrychlení je na pólu (asi $9,87m\cdot s^{-2}$) a nejmenší na rovníku (přibližně $9,78m\cdot s^{-2}$). Fluktuace na rovníku, jak se dočetl *doc. T.Brauner* v knize V.Vanýska *Základy astronomie a astrofyziky,* dosahují max. hodnot asi $0,0005m\cdot s^{-2}$. V roli trosečníka se nacházíme někde při hladině mořské, to znamená, že změně velikosti tíhového zrychlení s výškou nemusíme věnovat pozornost. Tíhové zrychlení lze změřit poměrně přesně např. matematickým kyvadlem. Platí

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

kde l je délka vlákna a T perioda kyvadla.

Najděme závislost g na zmp. šířce φ:

- Velká poloosa rot. elipsoidu představujícího Zemi je $a = 6378,2 km$.
- Malá poloosa téhož je $b = 6356,9 km$.
- Hmotnost Země uvažujme $M = 5,98 \cdot 10^{24} kg$.
- Perioda rotace Země je $T = 86164 s$.



Na obrázku jsou znázorněny síly gravitační F_g a odstředivá F_o. $x-$ová složka výsledného zrychlení je

$$a_x = -\frac{\kappa \cdot M}{r^2} \cdot \cos\varphi + x \cdot \omega^2$$
$$y \approx b \sin\varphi$$
$$x \approx a \cos\varphi$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$y-$ová složka zrychlení je

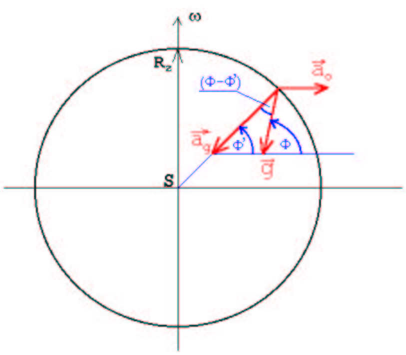
$$a_y = -\frac{\kappa M}{r^2} \cdot \sin\varphi,$$

tíhové zrychlení pak má velikost

$$g = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2},$$

odkud můžeme určit φ.

Neméně zajímavá je teorie *dr. Daniela Klíra,* který čerpal z publikace *Svět očima fyziky:*



Nechť φ je geografická šířka, φ' je geocentrická šířka. Z kosinové věty (viz obrázek) plyne vzorec (1):

$$g = \sqrt{a_g^2 + R_z^2 \cdot \omega^4 \cdot cos^2\varphi' - 2 \cdot a_g \cdot R_z \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\varphi'} \approx a_g \cdot \sqrt{1 - \frac{2R_z \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\varphi'}{a_g}},$$

avšak Země není koule, a proto budeme muset za R_z dosadit R_φ. Sinová věta:

$$\frac{a_o}{\sin(\varphi - \varphi')} = \frac{g}{\sin\varphi'},$$

a dále

$$\varphi - \varphi' \approx \sin(\varphi - \varphi') = \frac{a_o}{g} \cdot \sin\varphi' = \frac{R_z \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi' \cdot \sin\varphi'}{g} \approx \frac{R_z \cdot \omega^2 \sin 2\varphi}{2g}.$$

V prvním přiblížení můžeme Zemi považovat za elipsoid, pro velkou poloosu a a malou poloosu b platí:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pro tuto elipsu (svislý řez elipsoidem)

$$\tan\varphi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \tan\varphi',$$

poloměr

$$R_\varphi = \frac{a \cdot b}{\sqrt{b^2 \cdot \cos^2\varphi' + a^2 \cdot \sin^2\varphi'}},$$

a tedy dle předešlého je

$$R_\varphi = a \cdot \sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi' \cdot \cos(\varphi - \varphi')}}.$$

Po dosazení tohoto poloměru R_φ za R_z obdržíme ze vzorce (1) přesnější hodnotu g.

Problémem určení zmp. polohy pomocí měření velikosti tíhového zrychlení se zabývali i jiní autoři *(mgr. David Holec, mgr. Ondřej Přibyla, mgr. Jan Fátor)*. *Radomír Budínek* např. navrhl užít ke změření g reverzního kyvadla, *dr. Václav Račanský* předpokládal, že utonulý fyzik vlastnil mapu světa s velikostmi tíhového zrychlení. Navrhovali jste též měřit g pomocí kuželového kyvadla nebo doby volného pádu kuličky. Jako redaktor poznamenávám, že volný pád rozhodně není dobrá metoda jak g změřit - pokud ovšem nemáme to potěšení využít výhod vakua.

doc. Tomáš Brauner: Magnetická indukce Země

V principu by se dala zmp. šířka změřit určením velikosti a směru mag. indukce Země v daném místě — pomocí magnetky zjistíme směr mag. indukce (horizontální): k magnetce dám cívku o známé indukčnosti a měřím proud, který je potřeba, aby mag. pole cívky vyrovnalo zemské mag. pole (po vychýlení magnetka nekmitá — nevrátí se do původní polohy). V praxi ale tato metoda nebude příliš oplývat přesností vzhledem k různým mag. anomáliím (ložiska magnetovce apod.) Obávám se, že tak zjistím pouze to, co už můžu odhadnout např. z charakteru podnebí — když tam budou palmy, tak asi nejsem za polárním kruhem atp.

dr. Daniel Klír, doc. Tomáš Brauner: Výška Slunce nad obzorem

Pro danou zmp. šířku je v určitý den Slunce v poledne nad obzorem pod určitým úhlem. Tento úhel je poměrně jednoduše zjistitelný vzhledem k tomu, že obzor bude určovat hladina moře, a pak jej snadno naměříme nějakým úhloměrem (lze jednoduše sestrojit, nebo jej měl utonulý fyzik v kajutě), sextantem... Jinou možností je měření délky stínu tyčky, jejíž délku známe. Tuto metodu navrhl *Jaroslav Jánský:* Do země na vodorovné rovině zabodnu tyč známé délky d (změřím metrem). Dále změřím délku stínu tyče. Pro úhel určující výšku Slunce nad obzorem platí:

$$\frac{d}{l} = \tan\alpha,$$

odtud

$$\alpha = \arctan\frac{d}{l},$$

kde α je výška Slunce nad obzorem.

Platí vztah: $\alpha = 90° - \varphi + \delta$, kde

- φ představuje zeměpisnou šířku,
- α úhlovou výšku Slunce nad obzorem a
- δ je sluneční deklinace, neboli úhlová odchylka Slunce od světového rovníku během roku. (Tak např. pro 21.3. a 23.9., kdy nastává rovnodennost, je $\delta = 0°$ a pro letní/zimní slunovrat (21.6., 21.12.) je $\delta = 23,5°$, resp. $\delta = -23,5°$.)

Odtud též plyne to, co *mgr. Ondřej Přibyla* doplnil pro výšku Slunce nad obzorem v poledne ve speciálních případech:

- $\alpha_{poledne} = 90°$, pokud je jarní nebo podzimní rovnodennost,
- $\alpha_{poledne} = 66,5°$, pokud je letní nebo zimní slunovrat, neboť odklon zemské osy od Slunce nabývá hodnot $\{90° \pm 23,5°\}$.

Pro obecné datum najdeme příslušnou deklinaci v určitý den v tabulkách, které měl utonulý fyzik jistě prozřetelně u sebe. Metodou pozorování Slunce se zabývali též *dr. Václav Račanský, mgr. Jan Fátor* a *mgr. David Holec,* avšak ne tak úspěšně.

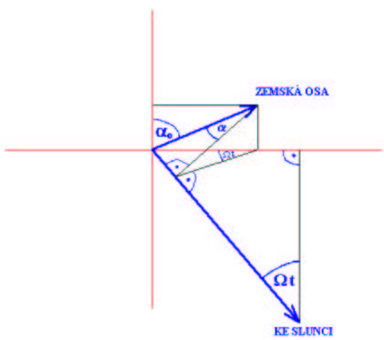
doc. Tomáš Brauner: **Obecné určení zmp. šířky**

Autor nalezl obecné určení zmp. šířky v libovolné známé datum bez tabulek — sluneční deklinaci si spočítal:

Měřme maximální výšku Slunce nad obzorem během dne — rotační osa Země je vzhledem ke směru kolmému na rovinu oběhu Země kolem Slunce skloněna o $23,5°$. Měříme-li čas od jarní rovnodennosti a je-li Ω úhlová rychlost oběhu Země kolem Slunce, pak sluneční paprsky dopadají kolmo na povrch Země v zeměpisné šířce

$$\alpha \approx 23,5° \cdot \sin \Omega t$$

($\alpha > 0$ pro severní a $\alpha < 0$ pro jižní polokouli). Je $\alpha_0 = 23,5°$.



Z obrázku plyne

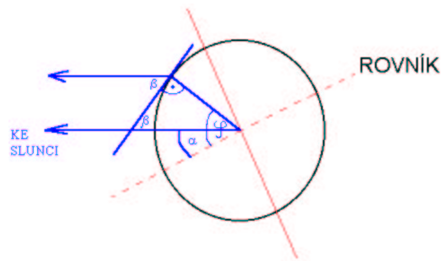
$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 \cdot \sin \Omega t.$$

Známe-li datum Ωt, můžeme určit α. Pak, je-li β maximální výška Slunce nad obzorem během dne, platí pro zmp. šířku φ:

$$\beta + \varphi - \alpha = 90°,$$

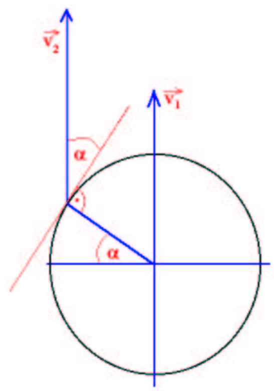
odtud

$$\varphi = 90° + \alpha - \beta.$$



doc. Tomáš Brauner: **Polohy hvězd**

Zmp. šířku můžeme určit porovnáním polohy stálic — např. Polárky (pokud jsme na severní polokouli) — zmp. šířka se přímo rovná výšce Polárky nad obzorem. *dr. Václav Račanský* pak doplnil, že jižní šířku lze určovat podle hvězdy sigma okta. *mgr. Ondřej Přibyla* doplňuje k pozorování Polárky: Nechť $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ jsou vektory směřující k Polárce. Jestliže položíme vzdálenost Polárky od Země rovnou nekonečnu, pak $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$. Proto je výška Polárky nad obzorem přímo zmp. šířkou pozorovatele.



Při určování zmp. š. postupujeme podobně jako u předchozí metody využívajícího Slunce. Patřičné souřadnice hvězd je třeba najít v tabulkách. Měření pomocí polohy hvězd navrhli ještě např. *mgr. Jan Fátor, mgr. David Holec*. *Radomír Budínek* navrhuje využít hvězd, které jsou v nadhlavníku anebo těch, které se "taktak" ukážou nad obzorem, a pak použít tabulky.

dr. Daniel Klír podle uvedené literatury: **Polohy hvězd**

Poznámka: článek uvádíme pro zajímavost, autor do jisté míry citoval z literatury. Vzorců se nelekejte, snad jsou dobře.

Tato metoda je velice podobná měření polohy Slunce. Na hvězdárnách, kde jsou pevně postaveny poledníkové kruhy (lze z pomůcek fyzika postavit) změříme přímo meridianní zenitovou distanci nařízených hvězd, tj. zenitovou distanci za doby jejich vrcholení. Označme tuto distanci v. Horní kulminace jižně od zenitu je potom $\Phi = \delta + v$, horní kulminace severně od zenitu je $\Phi = \delta - v$. Dolní kulminace $\Phi = 180° - (\delta + v)$, kde δ opět představuje deklinaci hvězdy. Pozoruje-li se hvězda blíže pólu v obou kulminacích, značí v a v' meridianní zenitovou distanci v horní a dolní kulminaci a δ a δ' deklinace za doby pozorování, pak plyne z rovnice $\Phi = \delta - v$ a $\Phi = 180° - (\delta' - v')$ hodnota $\Phi = 90° - 0,5(v + v') + 0,5(\delta - \delta')$. Jsou-li na observatoři k dispozici přenosné přístroje jako univerzály, sextanty aj., pozoruje se řada zenitových distancí poblíže a po obou stranách poledníku (metoda circummeridianních distancí zenitových) a vypočtou se z pozorovaných zenitových distancí z meridianní zenitové distance v, z nichž ihned podle výše uvedených vzorců spočteme zmp. šířku. Vzorce:

$$\sin\frac{1}{2}(v - z) = -\frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin\left[\frac{1}{2}(\varphi - \delta + z)\right]} \cdot \sin^2(t/2)$$

pro hořejší kulminaci, jižně od zenitu,

$$\sin\frac{1}{2}(v - z) = -\frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin\left[\frac{1}{2}(\delta - \varphi + z)\right]} \cdot \sin^2(t/2)$$

pro hořejší kulminaci, severně od zenitu,

$$\sin\frac{1}{2}(v - z) = \frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin\left[\frac{1}{2}(\delta + \varphi - z)\right]}\sin^2(t/2)$$

pro dolejší kulminaci dávají $v - z$ redukci pozorované zenitové distance z na meridianní zenitovou distanci, t jest hodinový úhel, na pravé straně vzorců je však třeba volit aspoň přibližnou hodnotu zmp. šířky. Proto je tato metoda dobrá hlavně na zpřesnění odhadu, jakou zmp. šířku má ostrov. Dále se píše: *"K redukci pozorování Polárky, již lze k určení polární výšky s výhodou použíti libovolného hodinového úhlu, potřebuje se řad, které postupují podle mocnin pólové distance $p = 90° - \delta$. Tak lze polární výšku vyjádřit ve tvaru: $\Phi = 90° - z - p \cdot \cos t + 0,5p^2 \sin 1'' \cdot \operatorname{cotg} z \ \sin^2 t$ přesně na $1''$. Výpočet se zjednoduší podle tabulek, jež se také udávají v astronomických efemeridách. Jsou-li δ, δ' deklinace dvou hvězd, z nichž jedna vrcholí jižně od zenitu, druhá severně od zenitu, a jsou-li v a v' jejich meridianní zenitové distance, pak platí pro polární výšku $\Phi = \delta + v$ a $\Phi = \delta' + v'$ a jejich sečtením dostaneme $\Phi = 0,5(\delta + \delta') + 0,5(v - v')$. Při užití této rovnice se tedy nevyžaduje určení absolutních zenitových distancí, nýbrž jen jejich rozdíl, jenž se měří mikrometricky."*

Čerpal jsem z poněkud starší literatury, je tedy možné, že některé výrazy a výpočty jsou zastaralé. Použitá literatura: *OSN.*

Poznámka redaktora. *Jistě jste postřehli, že se v tomto příspěvku hemží větší množství odborných pojmů, které ne každému musí být na první pohled jasné. Dovoluji si proto dodat některé vysvětlivky (znáte-li přesnější definice, můžete nám je sdělit — nicméně body navíc za ně nebudou):*

I. Souřadnicový systém užívaný astronomy má tyto souřadnice: *deklinaci* a *rektascensi.* Rektascensi měříme podél rovníku, deklinaci kolmo k rovníku. Deklinace je úhlová vzdálenost hvězdy od rovníku, udává výšku hvězdy nad obzorem. Rektascense (rovníková souřadnice hvězdy) je úhel, který svírají deklinační kružnice procházející jarním bodem a hvězdou. Jarní bod je ten ze dvou průsečíků nebeského rovníku s ekliptikou, v němž je Slunce 21. března. Např.:
   - Deklinace severního pólu je $+90°$,
   - deklinace jižního pólu je $-90°$.

II. *Meridianní zenitová vzdálenost, zenitová distance* Distance=vzdálenost. Meridián=nebeský poledník, tj. myšlená čára na světové kouli procházející zenitem pozorovacího místa a oběma světovými póly. Zenitová vzdálenost je úhel, který svírá záměrná přímka (na hvězdu) se směrem k zenitu (nadhlavníku). Přitom:
   - světová koule je myšlená koule s libovolným poloměrem a se středem v zemském středu nebo v pozorovacím místě, na kterou promítáme polohy nebeských těles.
   - zenit je myšlený bod na obloze, od kterého je možné vést svislici na místo, kde je pozorovatel (též nadhlavník).

III. Kulminace je průchod nebeského tělesa poledníkem. Horní kulminace je poloha nebeského tělesa nejvýše nad obzorem. Dolní kulminace je poloha neb. tělesa nejníže pod obzorem.

IV. Astronomické efemeridy jsou tabulky udávající polohy nebeských těles.

Propříště prosím všechny autory, kteří se rozhodnou užívat takto a více odborných pojmů, aby je též podrobně vysvětlili pro nezasvěcené.

dr. Václav Račanský: **Měření délky dne**

Změříme si délku dne a zjistíme datum. Potom jsme schopni za předpokladu, že právě není rovnodennost, vypočítat zmp. šířku. Hlouběji se autor problémem nezabýval, doporučujeme jej tedy jako námět k dalším příspěvkům.

MĚŘENÍ ZEMĚPISNÉ DÉLKY

Příspěvků týkajících se určení zmp. délky bylo podstatně méně než těch o zmp. šířce. Uvádíme je proto téměř v původním znění.

doc. Tomáš Brauner:

Zmp. délka není fyzikální veličinou a byla zavedena člověkem (nevidím žádný rozumný důvod, proč by měl nultý poledník procházet zrovna Greenwichem). Proto musíme při jejím určení použít jinou veličinu zavedenou člověkem, např. pásmový čas. Máme-li zachovalé hodinky a víme tedy, jaký je čas v místě vyplutí lodi, můžeme pozorováním dob východu, resp. západu Slunce, resp. hvězd určit časový posun a tím i zmp. délku našeho dočasného (autor uvádí dočasného) útočiště (samozřejmě k tomu potřebujeme i datum).

dr. Daniel Klír: **Určení zmp. délky**

Místa ležící na stejném poledníku, tj. místa se stejnou zmp. délkou, mají v každém okamžiku týž čas. Místa s různou zmp. délkou mají jiný místní čas (neberu v úvahu čas časových pásem) a tedy rozdíl místních časů (určím dle východu Slunce pro určitý den) je roven rozdílu zmp. délek — vyjádřeni v časové míře. Pak je k určení rozdílu zmp. délek třeba znát pro jeden okamžik rozdíl správných místních časů.

Mezi nejpoužívanější metody k určení zmp. délky patří tyto:

I. Pozorování dvou úkazů na nebi ve stejný čas na dvou místech — to je neproveditelné, protože nevíme, v jaké zmp. délce a kdy bude námi pozorovaný úkaz viděn. Leda kdyby měl u sebe fyzik nějakou mapu oblohy pro různá místa a údaje o tom, kdy je můžeme v jakých místech vidět. Což je možné.

II. Jde o totéž co bylo v 1. metodě. Pozorováním úkazů na nebi, které se sice v různých místech na nebi vyskytují v jiný čas, ale lze je snadno převést na týž absolutní okamžik, např. pozorování přechodů Merkura a Venuše před Sluncem, pokrytí planet a hvězd Měsícem, zatmění Slunce údajně poskytují dobrá data k určení zmp. délek míst. Pozorujeme-li začátek nebo konec úkazů v místním čase, jelikož známe svoji zmp. šířku (viz metody A), můžeme čas převést pro střed Země a porovnáme s časem také pro střed Země a určíme zmp. délku.

III. Jedna z nejužívanějších metod je tato: Metoda distancí Měsíce od Slunce, planet a jasnějších hvězd. V nautických ročnících se udává vzdálenost Měsíce od Slunce, hl.planet atd. pro každou třetí hodinu určitého meridiánu pro střed Země. Převede-li se vzdálenost Měsíce pozorovaná na nějakém místě dle místního času na distanci pro střed Země a vyhledá-li se pro tuto vzdálenost v nautických ročnících či astronom. příručkách příslušný čas prvního meridiánu, dá rozdíl pozorovaného místního času a času prvního poledníku rozdíl zeměpisné délky mezi daným místem a prvním poledníkem.

IV. Další metoda je použitím faktu, že Měsíc mění rychle svou rektascensi. Jsou-li rektascense Měsíce při vyvrcholení téhož dne známy pro dvě místa, můžeme z jejich rozdílu spočítat zmp. délku.

V. Přenos hodin a pak porovnání s místním časem je neproveditelný.

VI. K pozorování pozemských signálů je také třeba znát nějaké údaje, které se nedají zjistit.

Jaroslav Jánský:

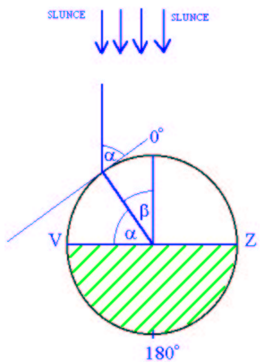
Předpokládám, že po profesorovi zbyly hodiny seřízené na Greenwichský čas. V pravé poledne (to je okamžik, kdy je Slunce nejvýš) si tento Greenwichský čas zjistím. Z rozdílu místního a Greenwich. času vzpočtu zmp. délku.

Vím totiž, že za 24 hodin se Země otočí o 360°. Odtud

$$z.d. = \frac{(t_G - t_m) \cdot 360°}{24 \cdot h}.$$

mgr. Ondřej Přibyla:

Známe-li světový čas, pak můžeme určit zmp. délku. O jarní a podzimní rovnodennosti Slunce zapadá přesně na západě a vychází přesně na východě.



Na obrázku hledíme na Zemi "shora." Změříme α přesně ve chvíli, kdy je 12^{00} světového času (ten musím znát). β pak získám jako $\beta = 90° - \alpha$. Pokud je více než 12^{00} mého místního ostrovního času (tedy na ostrově už poledne bylo), leží ostrov na β stupni východní délky, pokud je méně než 12^{00} místního času, pak leží ostrov na β stupni západní délky.

doc. Tomáš Brauner: **Měření vedoucí ke zjištění zmp. šířky i délky**

Jestliže máme radiopřijímač a dobrou anténu, můžeme najít směr ke dvěma vysílačům se známou polohou. Vynesením těchto směrů na mapu (resp. glóbus) získáme jejich průsečík, který je místem, kde se nacházíme. Na totéž přišel *mgr. Jan Fátor*.

mgr. Jan Fátor:

Pokud budou k dispozici (podrobné) mapy např. salinity vody, teploty vzduchu, hloubky oceánu…, potom mohou posloužit jako pomocné prostředky k dříve uvedeným metodám určování polohy.

NÁMĚTY DO DALŠÍHO ČÍSLA

Některé vás třeba napadly některé další metody, ale příliš jste se jimi nezabývali, něco taky napadlo nás a myslíme si, že by bylo zajímavé se tím dále zabývat.

• Dva autoři navrhli užít GPS přístroj. Jako redaktor nevím, co to je a jak to funguje.

• Měření mag. indukce Země by pro nás bylo smysluplné, pokud bychom znali nějaký vztah mezi touto indukcí a zmp. polohou (aspoň přibližný).

• Kdyby někdo náhodou věděl, jak určit polohu z měření salinity, nechť dá vědět.

Naše nápady:

• Foucaultovo kyvadlo

• Nešlo by ještě nějak (aspoň k určení polokoule) využít Corriollisovu sílu? Na kterou stranu se bude točit vír vody vytékající z vany na severní polokouli?

• Když je Měsíc částečně zastíněný Zemí, jeví se nám jako srpek. Možná by mohl mít nějakou vlastnost související se zmp. polohou pozorovatele.

Téma 2 — HRÁCH

Vzhledem k tomu, že na mnoho řešení vás přišlo vícero, jevilo se mi lepší strukturovat text na příspěvky k jednotlivým strukturám (uspořádáním) koulí.

IDEÁLNÍ HRÁCH

doc. Tomáš Brauner: **ŘEŠENÍ číslo 1. Krychlová soustava (uvedli všichni, kdo téma řešili)**

Všichni autoři nalezli uspořádání hrachů takové, že středy koulí ležících v rovině tvoří čtvercovou síť o straně $2R$. Vrstvy potom klademe na sebe tak, aby středy koulí v k-té vrstvě byly právě nad středy koulí v $(k-1)$-té vrstvě. Středy koulí tedy v prostoru tvoří krychlovou síť. Není těžké zjistit, že do krychle se v tomto uspořádání vejde $20^3 = 8000$ hrachů.

Doc. Tomáš Brauner k tomu určil následující (procentuální zaplnění elementární buňky): Elementární buňka nechť je krychle o straně $2R$ opsaná kouli. Pak je tato buňka zaplněná

$$z = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8 \cdot R^3},$$

odtud

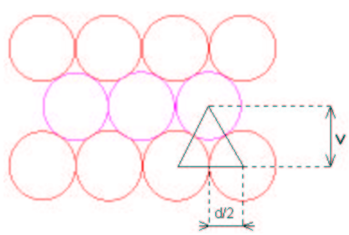
$$z = \frac{\pi}{6} \approx 0.52.$$

To je dost málo, existují výhodnější způsoby.

mgr. Jitka Spoustová: **ŘEŠENÍ č.2**

Mějme jednu vrstvu z řešení 1. Na ni položme druhou tak, že je oproti řešení 1 posunuta v jednom směru rovnoběžném s hranou čtverce čtvercové sítě (tj. rovnoběžně s vodorovnou hranou krychle), a to tak, aby kuličky v liché vrstvě byly "v dolíku" mezi dvěma sousedními ve spodnější vrstvě, profil viz. obrázek.

V liché vrstvě bude tedy o 1 řadu 20-ti kuliček méně, tj. jen $19 \cdot 20 = 380$. Jitka dále počítala, kolik lichých a sudých vrstev (aby se střídaly) se vejde do výšky dané krychle o straně délky $10cm$:



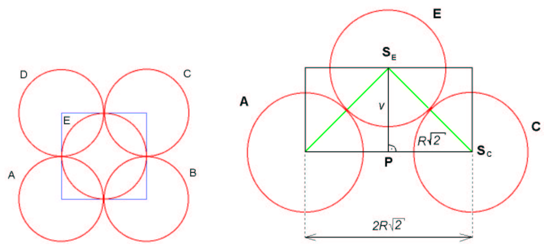
Z obrázku je vidět, že

$$v = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{d}{2}\sqrt{3} \approx 0,433.$$

Snadno spočítáme, že se nad sebe vejde (aby se střídaly) 11 lichých a 11 sudých vrstev. Poslední horní řada, která se už nevejde celá, je lichá. 21. i 22. řada mohou, jak se dá lehce ověřit, obsahovat obě 20×20 kuliček a ještě se vejdou do krychle. Lze tedy docílit 12 vrstev po $20 \times 20 = 400$ kuličkách a 10 vrstev po $19 \times 20 = 380$ kuličkách. Dohromady se tedy vejde tímto způsobem 8600 hrachů.

doc. Tomáš Brauner, mgr. Jitka Spoustová: **ŘEŠENÍ č.3**

Středy koulí ve vodorovné rovině nechť tvoří čtvercovou síť jako v řeš.1 a 2. Jednotlivé vrstvy jsou však posunuty tak, že každá koule z vyšší než první vrstvy se nalézá "v dolíku" mezi čtyřmi koulemi pod ní:



$$z = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{8 \cdot R^3},$$

odtud

$$z = \frac{\pi}{6} \approx 0,52.$$

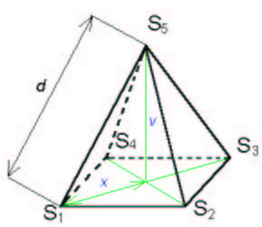
Z trojúhelníku PS_CS_E plyne $v = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R \cdot \sqrt{2}$, $v = R \cdot \sqrt{2}$. Elementární buňka obsahuje $\frac{1}{2}$ koule E a $\frac{1}{8}$ koulí A, B, C, D, tj. celkem jednu kouli.

$$z = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{4 \cdot R^2 \cdot v} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{6} \approx 0.74.$$

To už je lepší zaplnění prostoru než řešení 1, existuje však ještě lepší.

Na toto řešení dále přišli:

- *Jaroslav Jánský,* který do krychle takto nacpal 14459 kuliček, ale nepíše jak,
- *mgr. Jitka Spoustová:* odvoďme výšku v mezi středy hrachů ve dvou sousedních vrstvách nad sebou. Všimneme si přitom, že středy čtyř koulí elementárního čtverce sítě nějaké vrstvy a střed koule o vrstvu výše mezi tyto čtyři koule zapadající tvoří pravidelný čtyřboký jehlan, jehož každá hrana má délku *d*.



Z obrázku vidíme a pomocí Pythagorovy věty odvodíme

$$x = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{2}},$$

$$v = \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Dále spočteme, že lichých vrstev se vejde maximálně 14 a sudých 13. V tomto uspořádání se do krychle vejde

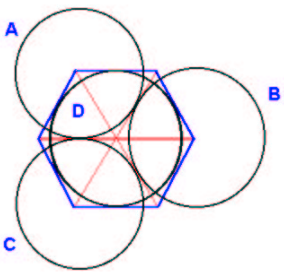
$$N = 20^2 \cdot 14 + 19^2 \cdot 13 = 10293$$

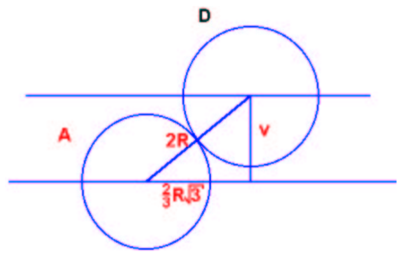
koulí hrachu.

• *dr. Václav Račanský* našel totéž uspořádání, avšak dopustil se drobné chyby při výpočtu počtu vrstev-vyšlo mu tedy něco jiného.

doc. Tomáš Brauner: **ŘEŠENÍ č.4**

Středy koulí v rovině tvoří trojúhelníkovou síť. Elementární buňkou je pravidelný šestiboký hranol s podstavnou hranou a, výškou v





BOKORYS -jen koule A, D.

Z obrázku plyne

$$v = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{2}{3}R\sqrt{3}\right)^2},$$
$$v = \frac{2}{3}R\sqrt{6}.$$

El. buňka obsahuje $\frac{1}{2}$ koule D a $\frac{1}{6}$ kouli A, B, C, celkem tedy 1 kouli.

$$z = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{S_{\text{šestiuhelník}} \cdot v} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{6 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot v} =$$
$$= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{9}R^2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}R \cdot \sqrt{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} =$$
$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0.74.$$

Nedosáhli jsme tedy hustší struktury — koule jsou sice v rovině uspořádány těsněji, ale roviny jsou od sebe více vzdáleny. Vzhledem k tomu je tento způsob uspořádání buď vůbec nejvýhodnější a $z = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ maximální, nebo se z_{max} jen málo liší od $z = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$. Všimněme si, že z nezávisí na R. Podstatného pokroku by se dalo dosáhnout, kdybychom měli koule různé velikosti (menší koule by se daly do mezer mezi většími): to ale asi odporuje koncepci hrachu, ledaže bychom přidali např. mák (jenom nevím, k čemu by nám pak taková směs byla).

Radomír Budínek, dr. Daniel Klír:

Vytvořme první vrstvu na principu trojúhelníkové sítě. V první řadě je 20 hrachů, v druhé 19, ve třetí 20 atd. Snadno spočteme, že takto se vejde do první vrstvy 12 lichých a 11 sudých řad, tedy celkem kuliček v první vrstvě je 429. Nyní záleží na tom, jak jsou vrstvy uspořádány na sobě. Předpokládejme, že jsou uspořádány stejně jako kuličky v jedné vrstvě. Pak je opět vrstev 22, každá obsahuje 429 kuliček, tedy celkem v krychli je 9438 hrachů. Do poslední vrstvy se vejde ještě 18 kuliček navíc jako okrajový jev. Celkem tedy 9456 hrach (možná ještě víc).

Radomír Budínek vytvořil liché vrstvy stejným způsobem, každou po 429 kuličkách. Každou sudou vrstvu vytvořil z liché tak, že ubral jednu řadu o 19 kuličkách. Nalezl potom způsob kladení vrstev na sebe, takže dvě vrstvy po sobě jdoucí mají celkem 839 kuliček. Rozdíl úrovní středů kuliček v ve dvou sousedních vrstvách určil z toho, že středy kuliček v prostoru tvoří síť pravidelných čtyřstěnů o hraně d. Výška v je tedy výškou takového čtyřstěnu a snadno dostaneme

$$v = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Dále počítáním zjistíme, že do krychle se vejde 14 lichých vrstev po 429 kuličkách a 13 sudých vrstev po 410 kuličkách, dohromady tedy 11336 hrachů.

Tím jsou vyčerpány příspěvky k umisťování koulí do krychle. Nejvíc se jich tam podařilo nacpat (zatím) řešením č.4 *Radomíru Budínkovi* (11336) — pokud je jeho výsledek správný.

ZAVAŘENÉ HRACHY

Radomír Budínek:

1. způsob: Položme na dno válce 10 hrachů tak, aby jejich středy ležely v jedné přímce. To lze udělat jedině tak, že tyto středy budou vytyčovat průměr válce od okraje první koule k okraji poslední. Okolo této "úsečky" vytvořme v první vrstvě ze středů kuliček trojúhelníkovou síť.

V této vrstvě nám zůstane

$$10 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 76$$

kuliček. Do sudé vrstvy se vejde

$$3 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 3 + 4 = 66 + 4 = 70$$

kuliček, kde poslední čtyři přičtené jsou okrajovým jevem. Počet vrstev je stejný jaku u krychle při tomto uspořádání, to jest 14 lichých a 13 sudých. Celkem jsme do válce nacpali $14 \cdot 76 + 13 \cdot 70 = 1974$ kuliček.

2. způsob: Dát doprostřed první vrstvy dvě řady po devíti kuličkách. Nahlédneme ale, že takto uspořádaná lichá vrstva je identická se sudou vrstvou z předchozího (prvního) způsobu. Zbytečně bychom se tedy takto zbavili některých kuliček (bylo by zde o 6 kuliček méně: $14 \cdot 70 + 13 \cdot 76 = 1968$.

3. způsob jistě neobsahuje více kuliček. Uprostřed první vrstvy položme řadu osmi kuliček, vedle po každé straně řadu devíti atd. - trojúhelníková síť. Všimněme si, že se jedná o roztažení sudé řady z prvního případu (způsobu) a vložení řady o osmi kuličkách, čímž nám jich však víc vypadne než přibyde.

Závěr. *nacpali jsme max. 1974 kuliček.*

dr. Daniel Klír:

1. způsob: Do každé liché vrstvy klaďme kuličky tak, aby jejich středy ležely na soustředných kružnicích. Na největší kružnici bude $n_1 = 28$ kuliček, na dalších postupně $n_2 = 22, n_3 = 15, n_4 = 9, n_5 = 3$, celkem tedy v první vrstvě 77 kuliček. Dále *dr. Daniel Klír* uvádí bez zdůvodnění a bližšího vysvětlení, že se do válce vejde 22 vrstev jako u krychle, tj. celkem 1694 kuliček.

2. způsob je velmi podobný prvnímu způsobu *Radomíra Budínka,* avšak počty kuliček v jednotlivých řadách vrstvy jsou:

1	střední řada	10
2	řada od středu	9
3	řada od středu	9
4	řada od středu	8
5	řada od středu	6
6	řada od středu	4

Pokud se takovéto uspořádání do válce vejde, pak vrstva obsahuje 82 kuliček. Daniel Klír zde opět bez zdůvodnění předpokládá, že takových vrstev se vejde 22 nad sebe a dostává počet hrachů $22 \cdot 82 = 1804$.

doc. Tomáš Brauner: Teorie elementárních buněk

Doc. Tomáš Brauner se zabýval otázkou, jak zaplnit kuličkami celý prostor bez ohledu na okrajové efekty, které beztak jenom znepříjemňují život. Zaplnění prostoru kuličkami určoval v procentech jako zlomek objemu elementární buňky, připadající na kuličky. U jednotlivých řešení (viz výše) jsem jeho výpočty tohoto procenta ocitoval.

Pro danou strukturu, která má vyplnit velkou nádobu o objemu V (a má rozumný tvar — všechny její rozměry (hrany) jsou podstatně větší než je průměr hrášku) platí přibližný vztah, že se do ní vejde

$$N = \frac{V \cdot z}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

kuliček,

$$N = \frac{6V \cdot z}{\pi d^3},$$

kde d je průměr kuličky. Pro strukturu z řešení 4, kterou jsme shledali "nejhustší," platí že zaplňuje prostor z této části z:

$$z = \frac{\pi\sqrt{2}}{6},$$

jak jsme u řešení č.4 odvodili. Pro tuto strukturu je

$$N = \frac{V\sqrt{2}}{d^3}.$$

Tento přibližný vzorec dává pro krychli asi 11313 koulí (odchylka od skutečně spočítaného řešení č.4, které vyšlo 10293 hrachů, je stále ještě dost velká — asi 10 procent. Pro v úvodní úloze zadanou láhev vychází z téhož vzorečku asi 2000 kuliček — ale chyba tu bude větší, protože objem našeho válce je menší než objem dané krychle.

DALŠÍ NÁMĚTY

Teorie elementárních buněk *doc. Tomáše Braunera* je věc, kterou bylo tak trochu cílem najít, protože se vyznačuje jistou obecností — byť přesněji platí až pro vhodná tělesa s velkými objemy. Tomáš však nespecifikoval požadavky, které na elementární buňku klade — kdyby se buňkou v nějakém směru trochu pootočilo, třeba by vyšlo procentuální zaplnění prostoru jinak, a který z obou výsledků je potom správný?

Možná bychom mohli zformulovat a ukázat nějaký požadavek periodicity a stejnosti buněk a to, že takovými buňkami je prostor úplně vyplnitelný.

Jinou možností, jak určit "hustotu" hmoty tvořené hrachem a mezerami mezi ním, může být odvození nějaké závislosti počtu kuliček v libovolně velké krychli (se zanedbáním okrajových jevů) a určení tohoto počtu pro krychli s hodně velkou hranou.

Téma 3 — Vážení kuliček

K tomuto tématu bylo napsáno celkem 14 článků. Bohužel není možné vytisknout v doslovném znění každý z nich. Všechny články jsme proto shrnuli do několika statí s krátkými poznámkami, jak postupovali někteří autoři.

Nejvíce došlých článků popisovalo určení špatné kuličky na 3–4 vážení. Pouze 2 autoři vymysleli, jak kuličky zvážit vždy na maximálně 3 vážení. Přesto ani jejich řešení nejsou dokonalá co se týče zobecňování pro N vážených kuliček.

Většina autorů použila pro znázornění své úvahy slovní popis. Pouze 2 autoři si uvědomili, že nejkratší a zároveň nejnázornější je popis algoritmu pomocí grafů: při každém vážení je popsáno, které kuličky jsou váženy, a 3 šipky určují, jak budeme pokračovat pro každý ze 3 možných stavů vah $<, =, >$. Z obrázku je ihned patrno, kolik vážení potřebujeme v nejhorším případě, i to, kde je možno algoritmus vážení vylepšit. Vzhledem k technickým problémům při sázení složitějších grafů a nedostatečné zkušenosti redaktorů se bohužel budeme muset přidržet slovních výkladů, samozřejmě upravených k co nejvyšší čitelnosti.

Nejjednodužší řešení na 3–4 vážení

Ondřej Škoda, mgr. Jitka Spoustová: **rozdělení na 2 šestice**

I. Závaží rozdělíme na 2 šestice, které porovnáme. Mají-li obě stejnou hmotnost, žádná kulička nebyla špatná.
II. Vybereme si jednu z nich, rozdělíme ji na 2 trojice, které spolu taktéž porovnáme. Mají-li stejnou hmotnost, máme smůlu a ztratili jsme jedno vážení (špatná kulička je v opačné šestici) a musíme vážit znovu. V opačném případě shrnutím těchto 2 vážení zjistíme, ve které trojici je špatná kulička a je-li lehčí nebo těžší.
III. Z dané trojice vybereme 2 kuličky, které spolu porovnáme. Mají-li shodnou hmotnost, je špatná poslední kulička, jinak je špatná jedna z nich. My ale víme která, protože jsme již zjistili, je-li špatná kulička lehčí nebo těžší.

Analogicky lze postupovat při vážení většího počtu kuliček. První dva kroky provedeme pro $N/2$ a $N/4$ kuliček a po zjištění, je-li špatná kulička lehčí nebo těžší, ji už jen hledáme dělením kuliček do dvou skupin. Pokud není počet kuliček dělitelný 2, musíme dát některé závaží stranou. Pokud se váhy nevychýlí, je špatná ona vybraná kulička, jinak pokračujeme dál.

Toto řešení má nevýhodu, že při každém dělení kuliček do dvou skupin nám váhy mohou podat pouze 2 informace: $<, >$ (nezbyde-li nám kulička). Rovnost nemůže nastat. My ale musíme vážení naaranžovat tak, abychom využili co nejvíce poskytované informace a tak co nejvíc snížili počet nutných vážení.

Jan Fátor, Kateřina Nováková, Svatava Vyvialová, mgr. Jitka Spoustová, Štěpánka Kučková, Milan Orlita, Radomír Budínek: **rozděle**

I. Koule rozdělím do 3 čtveřic. Porovnáme skupinu 1 a 2. Mají-li stejnou hmotnost, špatná je skupina 3 (při dalším vážení zjistíme, je-li lehčí nebo těžší), jinak je špatná jedna z vážených skupin (při dalším vážení zjistíme která).
II. Zvážíme jinou dvojici a podle výsledku zjistíme, ve které čtveřici je špatná koule a je-li lehčí nebo těžší.
III. Ve špatné čtveřici zvážíme 2 kuličky. Vychýlí-li se váhy, známe již výsledek a skončili jsme, jinak je špatná koule mezi 2 zbyvajícími koulemi.
IV. Přesný výsledek zjistíme posledním vážením.

Při vážení většího počtu kuliček zjistíme nejdřív, ve které třetině (z počtu $N/3$ kuliček) je špatná kulička a je-li lehčí nebo těžší. Pak v každém kroku rozdělíme počet kuliček na třetiny, zvážíme libovolné dvě z nich a protože víme, je-li špatná kulička lehčí nebo těžší, můžeme se po jednom vážení rozhodnout, která třetina je špatná (váhy mohou být ve 3 stavech $<, =, >$). Takto pokračujeme, dokud nelokalizujeme špatnou kuličku. Pokud není počet kuliček dělitelný 3, musíme dát některé kuličky bokem a pak je přidáme do skupiny, se kterou budeme dále pokračovat.

Tento postup je asymptoticky rychlejší, protože v každém kroku se počet kuliček dělí nikoliv dvěma, ale třemi.

Někteří autoři diskutovali kromě výše uvedeného i další řešení. Za nejpomalejší z nich lze označit řešení *mgr. Jana Fátora,* který vážil každou kuličku s každou a dosáhl tak rekordního počtu $N(N-1)/2$ vážení. *mgr. Jan Fátor* dále zkouší vážit jednu kuličku se všemi ostatními, k čemuž potřebuje $N-1$ vážení. *Milan Orlita* vybere náhodné 2 kuličky, které zváží. Mají-li stejnou hmotnost, vyřadí je, jinak je jedna z nich špatná, což upřesní dalším vážením. K tomuto potřebuje 2 až $N - cosi$ vážení.

Svatava Vyvialová, mgr. Jan Mysliveček, mgr. Ondřej Přibyla, Jaroslav Jánský: **rozdělení na 4 trojice**

I. Kuličky si rozdělíme na 4 trojice. Zvážíme 123 s 456.

II. Zvážíme 123 s 789. Jestliže se aspoň v jednom případě váhy vychýlily, lze z toho zjistit, ve které trojici špatná kulička je a je-li lehčí nebo těžší. Ukáží-li nám váhy v obou případech rovnost, je špatná kulička zřejmě v poslední trojici a musíme vážit ještě jednou, abychom to upřesnili.

III. Víme, ve které trojici špatná kulička je a jakou má hmotnost, takže zvážíme libovolné 2 kuličky z této trojice a z výsledku lehce odvodíme, která z nich je špatná.

Tento postup je analogický prvnímu z uvedených, tj. dělení na 2 šestice. Všechny výše uvedené postupy mají společnou 'chybu': autoři vyzkoušeli několik postupů, které je napadly, a z nich usoudili, že na určení chybné kuličky potřebujeme vždy až 4 vážení. Pouze 2 autoři se hlouběji zamysleli nad rozhodovacím stromem a vymysleli postup, jak si vždy vystačit s 3 váženími.

Řešení na 3 vážení

dr. Daniel Klír, doc. Tomáš Brauner: **rozdělení na 3 čtveřice**

I. Kuličky si rozdělíme na 3 čtveřice (1234, 5678, 9ABC). Zvážíme první s druhou z nich.

II. Mají-li obě stejnou hmotnost, je špatná kulička v poslední z nich. Pak pokračujeme tímto postupem:
   (i) Porovnáme 123 s 9AB. Jsou-li shodné, je špatná C, jinak je špatná jedna z 9AB.
   (ii) Porovnáme A s B. Při rovnováze je špatná 9, jinak shrnutím posledních 2 vážení zjistíme, která z AB a jak je špatná (rozmyslete!).

III. Jedna čtveřice je lehčí. Nechť je to 1234. Vážíme 125 s 346.
   (i) Nastane-li rovnováha, je špatná 7 nebo 8, což jistě příštím vážením zjistíme.
   (ii) Je-li 125 lehčí, pak shrnutím posledních 2 vážení zjistíme, že je buď 12 lehčí nebo 6 těžší.
   (iii) Je-li lehčí 346, pak je buď 34 lehčí nebo 5 těžší.

IV. V obou nerozhodných případech porovnáme lehčí dvojici (12 nebo 34) a lehce zjistíme, jaký je celkový výsledek.

Postup obou autorů se od ostatních liší v tom, že se nebáli kombinovat kuličky různých skupin na vahách, čímž 'vyždímali' z vah maximum informací, které jim mohly poskytnout.

Ostatní autoři buď nevyužívali dostatečně poskytnuté informace (např. v některém vážení nemohl nastat stav rovnost, čímž byl omezen počet poskytnutých informací ze 3 na 2) nebo měli nevyvážený rozhodovací strom (při troše štěstí získali sice kýženou informaci již po 2 váženích, v ostatních případech však museli vážit celkem čtyřikrát). Poněvadž se dá předpokládat, že vždy nastane ta nejhorší varianta,[2] je nejlepším postupem ten postup, který potřebuje nejméně vážení ve svém nejhorším případě.

Na první pohled je sice zřejmé, že na méně než 3 vážení špatná kulička zjistit nejde, ale u všech autorů chybí jednoduchý jednoznačný exaktní matematický důkaz, že tomu tak skutečně je. Stejně tak ani jeden z autorů nepodal vyčerpávající odvození toho, kolik kuliček lze navážit N váženími. Několik autorů popsalo slovně, jak by postupovali, ale nikdo nenapsal jednoduchý vzorec, který by tento počet určoval. Několik autorů se zmínilo o tom, že kdyby věděli, je-li špatná kulička lehčí nebo těžší, tak by špatnou z nich určili mnohem rychleji. To je sice pravda, ale tato úloha je nesmírně jednoduchá, neboť bychom už od začátku mohli pouze dělit počet kuliček na třetiny a po každém vážení dvě z nich vyřadit.

NÁMĚTY PRO DALŠÍ VÝZKUM

V prvním čísle byla úmyslně zadána 'neúplná' úloha. 12 kuliček sice jde určit na 3 vážení, ale lehkou modifikací posledního postupu lze dokonce při zadání 13 kuliček určit na 3 vážení buď to, která z nich je špatná a

[2] to je způsobeno tzv. *Murphyho zákony*

jak, a nebo že jsou všechny kuličky v pořádku. Kdo má chuť, může si tuto těžší variantu vyřešit do příštího čísla. Dále je možno bádat na téma, jak závisí počet kuliček, které jsme schopni vždy určit na N vážení, na tom, máme-li k dispozici několik standardních kuliček (na 100% se správnou hmotností).

Úloha 1 — Jupiter a Kallisto

Autorské řešení

Na Kallisto působí gravitační síla Jupitera

$$G = \kappa \frac{Mm}{(26R)^2}.$$

Ve směru opačném (tj. směrem od Jupitera) na Kallisto působí síla odstředivá

$$F_o = \frac{mv^2}{26R}.$$

Tyto síly se kompenzují (Kallisto obíhá přibližně po kružnici), tj. jejich velikosti se rovnají:

$$\begin{aligned} G &= F_o, \\ \kappa \frac{Mm}{(26R)^2} &= \frac{mv^2}{26R}, \\ v^2 &= \frac{\kappa M}{26R}. \qquad (\cdot) \end{aligned}$$

Z oběžné doby Kallista a poloměru oběhu určíme rychlost

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi \cdot 26R}{T}, \qquad \text{a dosadíme } (\cdot) \\ \kappa M &= \frac{4\pi^2 \cdot 26^3 R}{T^2}, \\ \frac{\kappa M}{R^2} &= \frac{4\pi^2 26^3 R}{T^2}. \end{aligned}$$

Na povrchu Jupitera platí $mg = \frac{\kappa Mm}{R^2}$ (tedy $G = F_g$), odtud

$$g = \frac{\kappa M}{R^2} = \frac{4\pi^2 26^3 R}{T^2} = 23.9 m \cdot s^{-2}.$$

Tedy lehčeji než na Zemi by se nám na Jupiteru rozhodně nechodilo...

Úloha 2 — Ještě jednou vážení

Hledanými závažími jsou závaží 1g, 3g, 9g, 27g. K tomuto výsledku můžeme dospět úvahou: Každé závaží můžeme dát buď na levou nebo na pravou misku vah anebo taky na žádnou. Tedy pokud máme 4 závaží, existuje 3^4 možností, jak závaží naskládat na váhy. Pokud nebudeme počítat možnost, že na žádnou misku vah nedáme žádné závaží, a to, že vždy dvě možnosti jsou symetrické, dostáváme výsledek, že existuje celkem $(3^4 - 1)/2 = 40$ hodnot, které můžeme navážit pomocí 4 závaží.

Odtud plyne, že pokud chceme navážit všechny hodnoty od 1 do 40, musí být součet hmotností všech závaží 40g. Tedy $40 = A + B + C + D$. Hodnota nejmenšího závaží musí být $D = 1$g, abychom mohli navážit 39g. Takže $39 = A + B + C$, dále $38 = A + B + C - D\ldots$ Dále by se mohlo pokračovat výčtem kombinací $\pm A \pm B \pm C \pm D$, čímž bychom časem dospěli k hodnotám $A = 27, B = 9, C = 3, D = 1$.

Ale vzhledem k tomu, že každé zavází může nabývat třech hodnot (vlevo +, vpravo −, nikde 0), pak bude nejlepší využít zápis čísla v trojkové soustavě. Odtud vyplývá, že nejvýhodnejší budou mocniny $3^0 = 1, 3^1 = 1, 3^2 = 9, 3^3 = 27$. Zápisem požadované hmotnosti ve vyvážené trojkové soustavě[4] zároveň získáme předpis, jak závaží na váhy naskládat.

Úloha 3 — Pět žárlivých manželek

Je zřejmé, že musí být celkem lichý počet přeplutí, a že kdyby manželky nekomplikovaly návrat svou žárlivostí, skupina by se dostala na pevninu po devíti přeplutích. Podmínka, že žádný muž nesmí být ve společnosti jiných žen bez své manželky, znamená dvě plavby navíc.

Označme si všechny lidi a vor takto:

ABCDE	manželky
abcde	manželé
*	vor

Při jednotlivých plavbách se lidé mohou střídat například takto:

	ostrov				pevnina	
začátek	ABCDE	abcde	*			
1.	ABCDE	de		*		abc
2.	ABCDE	bcde	*			a
3.	ABCDE	e		*		abcd
4.	ABCDE	de	*			abc
5.	DE	de		*	ABC	abc
6.	CDE	cde	*		AB	ab
7.		cde		*	ABCDE	ab
8.		bcde	*		ABCDE	a
9.		e		*	ABCDE	abcd
10.		bce	*		ABCDE	ad
11.				*	ABCDE	abcde

Poznámka k řešením. *U mnohých řešitelů se objevila mylná domněnka, že pokud muž vystoupí z voru a cizí žena ihned nastoupí na vor a odpluje, pak nejsou ve své společnosti. V této úloze nešlo o to, aby manžel neměl příležitost*

[4] soustava o základu 3 a cifrách $-1, 0, 1$ místo $0, 1, 2$. Blíže o zápisu čísel v různých soustavách viz. některé z příštích čísel časopisu.

k nevěře, ale o to aby manželka neměla příležitost k žárlivosti. (např. doc. Tomáš Brauner "...ostatně za tak krátký čas by během přestupu ti dva sotva něco stihli.")

Zadání dalších témat

Téma 4. *Tetris*

Každý z Vás se už určitě někdy setkal s klasickou počítačovou hrou *Tetris*. Jistě také víte, že cílem je vhodně pokládat kostičky známých 5 tvarů. Je zřejmé, že toto jsou všechny možné útvary, které mohou vzniknout spojením 4 jednotkových čtverců stranami k sobě.

Zkuste bádat nad tím, kolik a jakých útvarů je možno složit z N jednotkových čtverců. Dále je možno zauvažovat nad tím, jaké útvary mohou vzniknout, skládáme-li obecné k-rozměrné krychle v odpovídajícím prostoru (např. krychle v E_3), nebo nad tím, jaké útvary vzniknou skládáním pravidelných trojúhelníků, resp. šestiúhelníků.

Dalším možným směrem, kterým můžete bádat, je skládání kostiček k sobě. Klasická úloha je skládání *pentaminových kostiček*[1] do obdélníků 6×10, 5×12, 4×15 a 3×20. Zajímavé by bylo nejen nalézt nějaké řešení, ale např. s pomocí počítače zjistit počet všech řešení. Kostičky je možno skládat i do jiných útvarů, např. tři z nich vyřadit a z ostatních složit zvětšenou kopii jedné z vyřazených kostiček... Také je možno skládat útvary ve více dimenzích. Možností k bádání je nepřeberně, každý může poslat svůj příspěvek k tomuto obsáhlému tématu.

Téma 5. *bc. Pavol Habuda navrhnul, abychom pomocí jediného listu papíru formátu A4 změřili*

co nejvíc fyzikálních konstant,

co nejvíc materiálových konstant tohoto listu.

Zadání dalších rekreačních úloh

Úloha 4. *Posloupnost*

Je dáno několik počátečních členů posloupnosti cifer 1 a 2. Vaším úkolem je vymyslet, jak tato posloupnost může pokračovat, a pak to co nejlogičtěji zdůvodnit. Další otázkou je, jestli při stále se zvětšujícím počtem členů je v posloupnosti více jedniček nebo dvojek. Posloupnost začíná

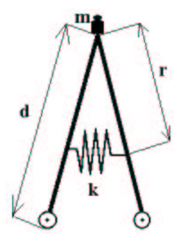
$$122112122122112112212112\ldots$$

Úloha 5. *Sluníčko*

Znáte-li úhlovou velikost Slunce na obloze a parametry zemské dráhy, spočtěte hustotu Slunce.

Úloha 6. *Štafle*

Závaží o hmotnosti m nechť je upevněno na špičce štaflí; ramena štaflí jsou spojena pružinou tuhosti k, celé štafle stojí na kolečkách, takže tření o podlahu můžeme zanedbat. Najděte rovnovážnou polohu.



[1] útvary vzniklé spojením 5 jednotkových čtverců

Č.	Jméno	Třída	$\sum_{-1}$	T1	T2	T3	R1	R2	R3	+	$\sum_0$	$\sum_1$
1.–2.	doc. Tomáš Brauner	?	169	8	4	6	5	5	4		32	32
	dr. Daniel Klír	?	66	8	3	7	5	5	4		32	32
3.–4.	Radomír Budínek	GHod s7A		5	4	4	5	5	1		24	24
	mgr. Ondřej Přibyla	?	36	7		3	5	5	4		24	24
5.	dr. Václav Račanský	GKJB 2.A	56	3	3	3	5	5	4		23	23
6.	mgr. Jan Fátor	?	26	3		4	5	5	5		22	22
7.	Jaroslav Jánský	GKJB 2.A		2	2	3	5	5	4		21	21
8.	bc. Pavol Habuda	3.B	19	?	?	?	5	5	5	5	20	20
9.	mgr. Jitka Spoustová	?	30		3	4	5	2	3		17	17
10.	mgr. David Holec	GKJB 2.A	31	2	2		5	5	2		16	16
11.	Vlastimil Křápek	?					5	5	5		15	15
12.–14.	Jan Holeček	GKJB 2.A		?	?	?	5	5	4		14	14
	mgr. Tomáš Klír	?	38				5	5	4		14	14
	Jiří Lísal	Gymn 4.A					5	5	4		14	14
15.–16.	Milan Orlita	?				3	5	5			13	13
	Aleš Přívětivý	?		?	?	?	5	5	3		13	13
17.–18.	Štěpánka Kučková	GArab 3.E				4	5		3		12	12
	Barbora Vostrovská	GJKT 4.A					2	5	5		12	12
19.–20.	mgr. Jan Mysliveček	? GKJB 2.A	27			3		5	2		10	10
	mgr. Milena Svobodová	?	21					5	5		10	10
21.	Andrej Pavlík	GTrenč 1.r		?	?	?	5		3		8	8
22.–23.	Kateřina Nováková	GMnich				4			2		6	6
	mgr. Jiří Roubínek	?	40				4		2		6	6
24.–26.	Ivana Čapková	SPŠE 4.B		?	?	?		5			5	5
	Jitka Krouželová	septima B						1	4		5	5
	Zuzana Rychnová	?	9						5		5	5
27.	Svatava Vyvialová	?				4					4	4
28.	Ondřej Škoda	?				3					3	3
29.	Pavel Železný	?		?	?	?					0	0

Uzávěrka dalšího čísla je **20. prosince.** Slovem uzávěrka je míněno to, že po tomto datu již nebudeme na koleji, abychom mohli došlé příklady vyzvednout. Takže poslat je musíte asi o týden dřív.

Adresa semináře:

M&M — B1507, VŠK 17. listopadu, Pátkova 3, 182 00 Praha 8, Libeň