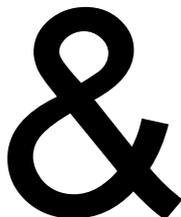


STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIX

Číslo 4



MATEMATIKA

FYZIKA

INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitelé zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí čtenáři,

s novým rokem přichází i nové číslo 29. ročníku časopisu M&M. Vánoční víkendovka i Vánoce jsou sice za námi, ale jarní soustředění, které proběhne v termínu od 25. března do 2. dubna 2023, se kvapem blíží. Body za řešení k prvnímu deadlinu tohoto čísla mohou zlepšit vaše šance se na soustředění dostat, tak neváhejte a řešte!

V témátku Akustika tentokrát rozebereme, jak se bránit hluku z praktického hlediska. Podíváme se tak na problém od snižování hluku přes omezování jeho šíření prostorem až po možnosti, jak od hluku izolovat dům nebo byt.

Derivace a integrály vás seznámí s problémem hledání primitivních funkcí. Kromě toho na vás čekají články od Mgr.^{MM} Ondřeje Sedláčka o různorodém využití hledání extrémů a monotonií a Mgr.^{MM} Radima Nováka o kyvadlech. V prvním článku se dočtete o konkrétních příkladech využití derivací ve statistice, umělé inteligenci nebo třeba ekonomii. V druhém článku pak nahlédneme pod pokličku popisu kmitavých pohybů pomocí diferenciálních rovnic.

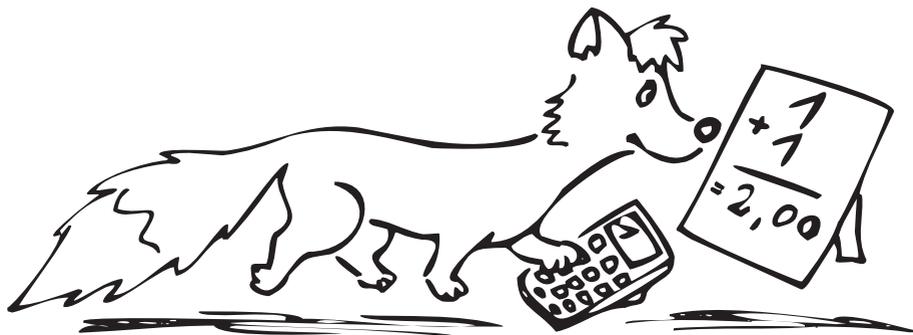
V témátku o outdoorových vařičích již máme první naměřená data! Zároveň jsme při měření narazili na první obtíže, v tomto čísle tedy najdete kromě stručného shrnutí naměřených výsledků i popis oněch obtíží a rovněž kompaktní shrnutí metodiky měření všech parametrů. Tak vzhůru do měření!

Na dalších stránkách najdete řešení úloh a zadání dalších úloh z Výtahů. Můžete se tak s využitím simulátoru směle pustit do programování kompletní řídicí elektroniky celého výtahu.

Úplně na konci čísla pak najdete článek Doc.^{MM} Vaška Tichého, ve kterém popisuje program určující sentiment filmových recenzí vytvořený v rámci podzimního soustředění. Nemusíte se bát, pokud nevíte, co si pod tím představit – v článku se vše dozvíte.

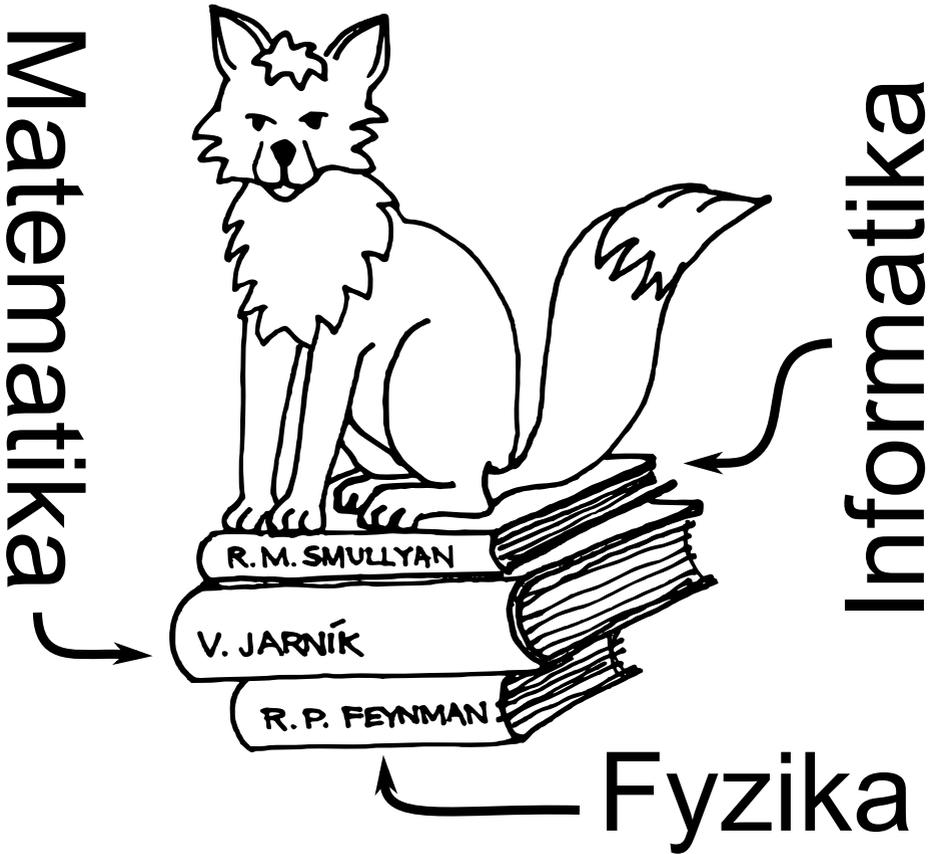
Těšíme se na vaše řešení a na soustředění, jehož přípravy jsou již v plném proudu, a věříme, že se také máte na co těšit!

Vaši organizátoři



Obsah

Téma 2 – Akustika	4
Téma 3 – Výtahy	18
Téma 4 – Derivace a integrály	29
Téma 5 – Outdoorové vaříče	46
Řešitelský článek – Určování sentimentu filmových recenzí	50



Zadání a řešení témat

1. deadline: 14. února 2023 | 2. deadline: 21. března 2023

Řešení odevzdaná do 14. února 2023 se započítají pro účast na soustředění.

Téma 2 – Akustika

Řešení 1. dílu

Úloha 1

Zadání:

Vytvořte si uzavřený prostor s dostatečným útlumem a změřte pro něj závislost koeficientu absorpce na frekvenci. Koeficient absorpce je definován jako poměr energie absorbované prostředím/stěnami a celkové energie emitované zvukovým zdrojem. Nezapomeňte popsat svou aparaturu a podmínky, za kterých jste experiment prováděli. Ke generování různých frekvencí můžete použít například nějakou volně dostupnou webovou aplikaci. Tuto materiálovou charakteristiku by mělo být snadné změřit i s pomocí obyčejného chytrého telefonu, na kterém bude nainstalovaná libovolná aplikace pro měření hladiny intenzity.

Řešení:

Zásadním rozhodnutím, které ovlivnilo celé měření, byl výběr vhodného materiálu, ze kterého se následně měl vytvořit prostor s dostatečným útlumem. Občas se v řešeních, co nám došla, stávalo, že volba materiálu nebyla úplně šťastná a výsledky měření potom byly neprůkazné. Přitom dobře navržené experimenty vedly k naměření rozdílů až 40 dB pro vysoké frekvence. Obecně by se dalo říct, že z řešitelů použitých materiálů zvuk nejlépe tlumily různé plastové nádoby a kartonové krabice. Je otázkou, jestli by se v domácnosti nenašly i materiály s lepšími tlumícími vlastnostmi, nicméně krabice se daly použít tak jak byly bez dodatečných úprav, a proto mnoho řešitelů sáhlo právě po nich.

Dalším krokem bylo zvolit si frekvenční rozsah, pro který hladiny intenzity naměřit. Byla by škoda, kdybychom přišli o část dat, a tak dávalo smysl začít s měřením hladiny intenzity na co možná nejnižší frekvenci, kterou je reproduktor ještě schopný rozumně reprodukovat, například 100 Hz, a pokračovat do té doby, dokud byl reproduktor schopný reprodukovat zvuk bez výrazného snížení hlasitosti, které by naměřenou datovou řadu znehodnotilo. Tento skok ale většinou přišel až vysoko nad 5 000 Hz, a proto nedávalo smysl měření utnout třeba už kolem 1 000 Hz.

Ze zvoleného frekvenčního rozsahu pak bylo ještě potřeba vybrat konkrétní frekvence a pro ně experiment provést. K tomu se každý postavil po svém. Někteří měli možnost měřit víceméně spojitě, jiným měřicí přístroje umožňovaly v rozumném čase provést jen několik málo řešení, a tak se rozhodli třeba pro postupné zvyšování frekvencí vždy na jedenapůlnásobek, neboť správně vypozařovali, že se skoky v hladině intenzity zvuku stávají se vzrůstající frekvencí méně častými a výraznými.

Samotné měření většinou proběhlo bez problémů. Pouze si bylo potřeba dát pozor, aby experiment nebyl prováděn v příliš hlučném prostředí, neboť to by mohlo výsledky měření zcela jistě ovlivnit.

Výpočet koeficientu absorpce byl kamenem úrazu. Více než polovina řešitelů jej počítala jako podíl hladin intenzity a zapoměla nejprve intenzitu zvuku převést na energii. To potom vedlo ke zcela nesprávným závěrům, jako například, že útlum nepřevyšuje několik desítek procent, přitom pro vyšší frekvence nebyl problém dosáhnout útlumu vysoko nad 99,9%. Naše uši nás svádí věřit podobným závěrům, neboť hladina intenzity je logaritmická veličina a i naše uši vnímají zvuk logaritmicky. To, že i po pohlcení 99,9% energie zvuku je zdroj stále velmi dobře slyšet, jaksi odporuje našemu chápání světa. Vzorec pro výpočet koeficientu absorpce se dal odvodit například následujícím způsobem:

Ze vzorce pro hladinu intenzity zvuku si nejprve vyjádříme energii (L je hladina intenzity zvuku, I je intenzita zvuku, I_0 je intenzita zvuku odpovídající prahu sluchu, E je celková vyzařovaná energie, S plocha, do které je tato energie vyzařována, a t je čas, po který k tomu dochází):

$$\begin{aligned} L &= 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ L &= 10 \cdot \log\left(\frac{E}{S \cdot t \cdot I_0}\right) \\ 10^{\frac{L}{10}} &= \frac{E}{S \cdot t \cdot I_0} \\ E &= S \cdot t \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}} \end{aligned}$$

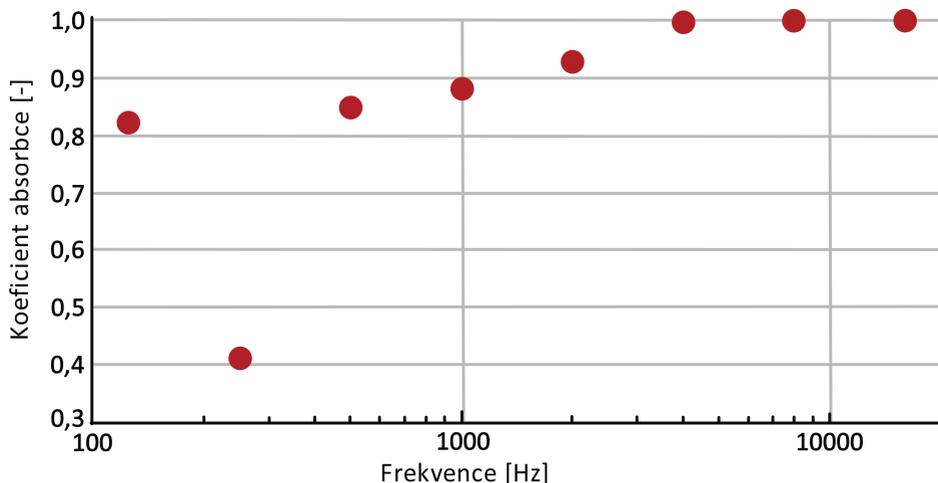
Označme si E_1 energii vyzařovanou zdrojem zvuku bez přítomnosti tlumení a E_2 energii, která prošla skrz tlumení. Potom je koeficient absorpce podíl $\frac{E_1 - E_2}{E_1}$, který si můžeme rozepsat jako:

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = 1 - \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{S \cdot t \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}}}{S \cdot t \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}}} = 1 - \frac{10^{\frac{L_2}{10}}}{10^{\frac{L_1}{10}}}$$

Pro potřeby analýzy naměřených hodnot si půjčíme hodnoty, které naměřil řešitel Mgr.^{MM} Ondřej Novák.

Frekvence [dB]	Hladina intenzity s krabicí [dB]	Hladina intenzity bez krabice [dB]	Koeficient absorpce
125	58,0	65,5	0,82217
250	78,3	80,6	0,41116
500	78,9	87,1	0,84864
1000	80,6	89,9	0,88251
2000	76,1	87,6	0,92921
4000	54,8	83,3	0,99859
8000	34,1	68,7	0,99965
16000	31,5	75,0	0,99996

Naměřené hodnoty určitě dávalo smysl si v první řadě vynést do grafu.



Obrázek 1: Graf

Zdá se, že platí, že čím vyšší je frekvence, tím větší je útlum. Rozhodně z toho ale nejde dělat obecný závěr, a už vůbec nedává smysl snažit se body prokládat například lineární závislostí. Měřili jsme materiálovou charakteristiku, a proto bude křivka vypadat pro každý materiál použitý na vytvoření prostoru s dostatečným útlumem trochu jinak.

Problém 2

Zadání:

Jak se změní výsledky experimentu, pokud změníme některý z jeho relevantních parametrů, například to, jestli jej provádíme venku, nebo uvnitř? Nebo když použijeme jiný reproduktor s výrazně odlišnými parametry? Můžete vyzkoušet i několik různých izolačních materiálů, pro které výše zmíněnou závislost změříte.

Řešení:

Prostup provádění experimentu byl v zásadě totožný jako v úloze 1, pouze stačilo změnit některé relevantní parametry. Většina řešitelů, která se do řešení problému pustila, dospěla k závěru, že provádění experimentu venku nevede k žádným měřitelným změnám oproti provádění uvnitř. Naopak určitý vliv měla volba jiného materiálu podobné tloušťky, případně volba stejného materiálu různých tloušťek. Dalo by se říct, že některé materiály tlumí víc než jiné a čím tlustší je vrstva izolačního materiálu, tím větší je koeficient absorpce. Mgr.^{MM} Jana Uglickich se pustila i do zkoumání vlivu velikosti krabice, ale nenašla žádnou jednoznačnou závislost. Podobný experiment navrhl i Bc.^{MM} Martin Švanda, ale jeho výsledky byly částečně zkresleny tím, že krabice byly nejen různé velké, nýbrž také z různého materiálu. Pokud by vás napadl ještě nějaký jiný zajímavý parametr, můžete

se pokusit pro něj experiment ještě jednou provést a my vaše závěry otiskneme v dalším čísle.

Úloha 3

Zadání:

Spuštěný vysavač má hladinu intenzity zvuku 70 dB. Jak vysokou hladinu způsobí spuštění dvou takových vysavačů zároveň?

Řešení:

Kolem dvou vysavačů bude dvakrát větší intenzita zvuku, neboť se celková energie zdvojnásobí a přitom bude vyzařována do stále stejné plochy. Jelikož decibel je logaritmická jednotka, je třeba použít energetický součet. Tedy:

$$\begin{aligned}70 \text{ dB} &= 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\L &= 10 \cdot \log\left(2 \cdot \frac{I}{I_0}\right) \\L &= 10 \cdot \left(\log\left(\frac{I}{I_0}\right) + \log(2)\right) \\L &= 70 + 10 \cdot \log(2) \\L &\doteq 73 \text{ dB}\end{aligned}$$

Hladina intenzity zvuku dvou vysavačů je přibližně rovna 73 dB.

Úloha 4

Zadání:

Pokuste se na základě svých dosavadních zkušeností zpřesnit, co pro vás subjektivně znamená hluk. Nebojte se uvést konkrétní příklady.

Řešení:

Na tuto otázku není jedna správná odpověď, jelikož hluk je zvuk, který je subjektivně vnímán jako nepříjemný. Například Bc.^{MM} Veronice Bartákové jako hluk přijdou větráky či práce bagru, ovšem obzvláště nenávidí hluk, který vydávají bujaře povídající si lidé ve skupince. Bc.^{MM} Nela Burzová uvádí, že hluk je pro ni všechno, když se zrovna pokouší se učit. Mgr.^{MM} Veronika Menšíková tvrdí, že záleží, jestli je zdrojem onoho zvuku ona nebo někdo jiný. Dále přidává parametr, že pro ni je hluk typicky hlasitější než 80 dB. Mgr.^{MM} Matyáš Pokorný přišel se zajímavou myšlenkou, že i kontext okolních zvuků určuje, jestli určitý zvuk považuje za hluk; jako příklad uvádí, že když jede metrem, tak má hudbu ve sluchátkách nastavenou na určitou pohodlnou hlasitost, nicméně když z metra vystoupí, hudba ve sluchátkách je najednou příliš hlučná vzhledem k okolí a mění se ve hluk. Bc.^{MM} Lucie Zůnová dělí hluk na tři různé kategorie, první je náhlý hlasitý zvuk (projíždějící vozidlo záchranky), druhá kategorie je dlouhotrvající

rušení jinak tichého místa (tikání hodin, kapání vody) a třetí kategorie je zkratka zvuk, který se blíží prahu bolesti.

Zde mi přijde zajímavé zmínit nejtišší místnost na světě. Do nedávna držela podle Guinnessovy knihy rekordů titul Nejtišší místnosti na světě anechoická (=bez ozvěny) komora v Orfield Laboratories v městě Minneapolis ve Spojených státech, ambientní hladina zvuku zde byla naměřena na -9 dB. Laboratoře se jmenují podle hlavního inženýra a konstruktéra této komory, Stevena Orfielda.

V roce 2015 byl rekord prolomen novou anechoickou komorou v budově 87 sídla Microsoftu v Redmondu ve Spojených státech, její konstrukci navrhoval inženýr Hundraj Gopal. V testovací komoře bylo naměřena ambientní hladina $-20,3$ dB. Komora je konstruována z šesti oddělených a od sebe odhlučněných vrstev železobetonu, má vlastní základy a k nim je připevněna 68 tlumícími pružinami.

Anechoické komory slouží k určení hlasitosti nějakého testovaného zařízení. Umožňují totiž změřit zvuk vydávající opravdu jen tím konkrétním zařízením a měření není ovlivněno zvuky z okolí.

Lidé, kteří zkoušeli trávit čas v jakékoliv z těchto komor, se shodovali, že ticho v komoře je mimořádně nesnesitelné. Prakticky všichni uvádí, že jim kvůli dokonalému tichu v komoře začalo nesnesitelně zvonit v uších, že slyšeli, jak se pohybuje jejich krev v žilách, jak rezonují jejich srdeční chlopně a při každém pohybu slyšeli velmi hlasité vrzání vlastních kostí a kloubů. Někteří návštěvníci komory tvrdili, že v komoře zažívali halucinace. Mnoho návštěvníků se shodlo na tom, že v komoře museli sedět, jinak ve stoje nedokázali udržet rovnováhu. To má jednoduché vysvětlení: náš mozek potřebuje mimo jiné i ozvěnu okolí pro určování naší polohy v prostoru. Když v anechoické komoře žádná ozvěna není, mozek je dezorientován. Zdá se tedy, že všeho může být příliš – a to dokonce i ticha.

Anechoická komora v Orfield Laboratories je mimochodem veřejnosti přístupná, po zaplacení poměrně vysokého vstupného se můžete zkusit podívat do místnosti i vy. Nejdéle, co kdo kdy v místnosti vydržel, bylo prý 55 minut.

Řešení úloh druhého dílu

Úloha 1

Zadání:

Jaké různé korekce ještě existují? Dokážeš najít nějaké zákonem citované okolnosti, kde je limit pro hluk naopak méně přísný, tedy se zde aplikuje kladná korekce?

Řešení:

Co se týče metod, existují ještě korekce dle metody C a G. Metoda C ustanovuje v zákoně výšku hranice impulsivního zvuku. Metoda G ustanovuje v zákoně výšku hranice infrazvuku a nízkofrekvenčního zvuku.

Co se týče samotných hodnot korekcí metody A, ty jsou citovány v Nařízení vlády č. 272/2011 Sb. Nařízení vlády o ochraně zdraví před nepříznivými účinky hluku a vibrací. Příkladem je třeba korekce -5 dB pro lékařské ordinace po dobu

používání, v noci v nemocničních pokojích je korekce -15 dB. Kladná korekce se uplatňuje například v přednáškových místnostech a ve školách $+5$ dB.

Pro vysoce impulsní hluk se navíc přičte další korekce -12 dB. V případě hluku s tónovými složkami, s výjimkou hluku z dopravy na pozemních komunikacích, drahách a z leteckého provozu, se přičte další korekce -5 dB.

Několik řešitelů se poztrácelo v tom, co přesně znamená kladná či záporná korekce. Záporná korekce zpřísňuje platné limity na hluk (které jsou hodně obecné), kladná korekce naopak uděluje větší benevolenci. Platné limity na hluk jsou hodně obecné, mluví například o maximálním přípustném hluku v rezidenční zástavbě nebo o maximálně přípustném hluku na pracovišti. Nicméně je jasné, že soused má právo dělat rekonstrukci svého bytu a způsobit dočasně vyšší hluk svojí stavební činností. A je pochopitelné, že pokud pracujete v jeslích nebo v mateřské školce, je třeba počítat, že budete mít poněkud hlučnější pracoviště.

Úloha 2

Zadání:

Jsou nějaké jiné situace a prostředí, kde by Tobě dávalo smysl limity na hluk udělat méně či více přísné? Proč bys to v konkrétním případě řešil(a)?

Řešení:

Zde opět neexistuje žádné jedno správné řešení, cílem bylo spíše podnítit zamyšlení se nad problematikou regulace hluku a jejími úskalími. Několik řešitelů zmiňovalo, že nesouhlasí s korekcí či limity hluku na školách – konkrétně se opakoval názor, že školy jsou příliš hlučné – a to jak samy o sobě (vlivem studentů), tak je v nich i příliš hlučno (z venkovních zdrojů), když se studenti potřebují třeba soustředit na test. Dále se mnoho z vás shodlo na tom, že hluk z dopravy je zregulován nedostatečně a že by bylo vhodné jej řešit přísněji, ať už instalací či modernizací protihlukových bariér, tak třeba snížením dopravního zatížení nebo odklonem dopravy mimo rezidenční zónu.

Matouš Rybecký navrhoval například úpravu času nočního klidu z 22:00 až 6:00 na více vyhovující 20:00 až 7:00, pro změnu argumentuje tím, že rodiče dávají děti běžně spát dříve než v 22 hodin a zároveň děti mohou být na hluk z okolí citlivější než ostatní. Bc.^{MM} Adam Mikulič zase navrhoval zavedení limitů hluku nebo záporné korekce pro přírodní rezervace, chráněné krajinné oblasti, přírodní parky a národní parky, aby lidé či stroje zbytečně nevyrušovali zvířata žijící v přírodě.

Problém 3

Zadání:

Napadá tě, jak se lze doma v bytě bránit hluku, který pochází z venku? Lze nějaká opatření udělat přímo venku, aby se hluk od zdroje šířil co nejméně? Jakými způsoby může architekt či projektant budovy snižovat akustickou zátěž obyvatel bytového domu? A jak by šlo se bránit hluku vznikajícímu uvnitř budovy? Ve všech otázkách předpokládáme, že zdroj hluku nelze odstranit.



Řešení:

U třetího problému bychom chtěli vyzdvihnout zejména vynikající řešení Bc.^{MM} Martina Švandy. Řešitel Bc.^{MM} Martin Švanda například zmiňuje, že byt nelze odstranit zdroj zvuku, lze však stále omezit vznik zvuku, například pokud hluk vzniká v důsledku aut jedoucích po kamenných kostkách v centru města, hypotetické řešení by bylo odstranit „hlučnou“ vrstvu vozovky a nahradit jí tlumícím asfaltem. Martin dále uvažuje, že omezit jde i přenos zvuku, například tvarovat ulici tak, aby se zvuk nerozšířel, dělat městské prostředí, ulice i fasády členitější. Samotné domy na ulici by nemusely mít ostré hrany a velké rovné plochy, ale mohly by být oblé, což by opět pomohlo s tlumením ozvěny. Dalším krokem po omezení šíření zvuku je pracovat s tím, jak zvuk vniká do interiéru stavby: v této kapitole Martin zmiňuje různé systémy zvukového těsnění a zamýšlí se i nad potenciálem použití vakua, které zvuk vůbec nepřenáší.

Podobné myšlenky ve stavební komunitě již pár let kolovaly a vedly k vývoji speciálních vakuových izolačních panelů. Příklad konkrétního výrobku na českém trhu je například vakuový panel Kingspan OPTIM-R[®], který se vyrábí v České republice. Takové panely dosahují úžasných hodnot pro akustický útlum i tepelnou izolaci, nicméně jejich nevýhodou je vysoká cena i životnost jen v řádu jednotek let, než se tlak uvnitř panelu vyrovná s tlakem vnějším. Podobně jako izolační panely, tak i okna se dnes vyrábí několikvrstvá s dutinou, kde se snižuje kompresorem tlak na co nejnižší hodnotu.

Problém 4

Zadání:

Jak by šlo vytvořit co největší rámus? A jaké jsou tam fyzikální limity?

Řešení:

Několik řešitelů správně přišlo na klíčovou limitující hodnotu 194 dB, Anežka Stará píše, že „zvuk může být hlasitější než 194 dB, ale už to technicky vzato nebude považováno za zvukovou vlnu, ale za rázovou vlnu, kvůli deformaci dodatečné energie.“ Mgr.^{MM} Ondřej Sedláček správně doplňuje, že hodnota 194 dB je hodnota pro nulovou nadmořskou výšku. Jedná se o hodnotu, kdy je akustický tlak tak vysoký, že mezi vlnami vzniká vakuum.

Anežka Stará dále píše: „Největší rámus, který kdy lidstvo stvořilo, byl při odpálení Tsar Bomby (fúzní bomba, odpálena 30. 10. 1961). Pravděpodobně vyprodukovala nejsilnější zvuk (rázovou vlnu) a to 224 dB. Člověka by samotný zvuk zabil. Nejsilnější rámus stvořený přírodou byl při erupci sopky Krakatoa roku 1883. Rázová vlna údajně dosáhla 310 dB. Přístroje vzdálené 160 km od Krakatoa zachytily 172 dB, což je neuvěřitelné vzhledem ke vzdálenosti.“ Tsar Bombu i erupci sopky Krakatoa zmínilo i několik dalších řešitelů.

Mgr.^{MM} Julie Klementová navíc dodává, že pro prostředí ve vodě je nejvyšší hodnota akustického tlaku 270 dB, než mezi jednotlivými vlnami vznikne vakuum. To nám dává prostor navíc pro vytvoření ještě hlasitějšího zvuku. Julie píše: „Nejhlasitější zvuk byl vytvořen na Stanfordově univerzitě a nazývá se shockwave

train. Když bylo do tenoučkéhó proudú vody o průměru 14 až 30 mikrometrů vypáleno výkonným rentgenovým laserem, vytvořila se série rázových vln a tím vznikl řev o síle 270 dB. To je také z fyzikálního hlediska nejvyšší možný zvuk; zvuk o určité síle způsobuje, že se médium, v němž se pohybuje, začíná kvůli energii zvuku rozpadat. Tato hranice je asi 194 dB pro zvuk ve vzduchu a právě oněch 270 dB pro zvuk ve vodě.“

Díl 4: Jak se bránit zvuku

Na chvíli se opět vrátíme ke stavební akustice. V druhém čísle jsme se v našem akustickém tématku ptali, jak se můžete bránit doma hluku, který pochází z venku. V zásadě lze tento problém rozdělit na následující podproblémy:

1. Lze snížit hlasitost zdroje?
2. Jak zabránit přenosu hluku od zdroje k domu?
3. Jak zabránit proniknutí hluku do domu nebo do pokoje?
4. Jak zabránit proniknutí zvuku do lidského ucha?

Projděme spolu tyto možnosti a ukažme si, jaká se v současné stavební praxi používají řešení.

Snížení hlasitosti zdroje

I když zdroj hluku nelze odstranit, existují občas chytré způsoby, jak zdroj hluku učinit tišším, aniž bychom jej odstraňovali. Příkladem je třeba údržba cest (pravidelné olejování tramvajových kolejí či záplatování vzniklých děr v silnicích), či používání elektromobilů místo spalovacích aut. Tento bod zahrnuje nejrůznější organizační opatření – ta bývají však spíše politického rázu, proto se s ním ve stavebnictví většinou nezabýváme.

V některých městech se můžeme setkat s nízko-emisní zónou či dokonce bez-emisní zónou. Toto organizační opatření zakazuje vjezd určitých vozidel například do rezidenční zóny či do center měst. Primárně tento koncept vznikl za účelem ochrany ovzduší na místech, kde bydlí mnoho lidí (ve městech), ale sekundárně to i sníží hlučnost ulic. Do takové bez-emisní zóny nemůže vjet vozidlo se spalovacím motorem, což znamená, nejen že se zde nyní mohou vyskytovat jen elektromobily a vodíková vozidla, ale také to drasticky sníží objem motorové dopravy v lokalitě – lidé jsou nepřímo finančně motivováni využívat raději hromadnou dopravu nebo třeba jízdní kolo. Na světě existují desítky měst s nízko-emisní zónou (některé ji dokonce mají extrémně přísnou), ale zatím neexistuje žádné město, které by již implementovalo zcela bez-emisní zónu. Na první zavedení bez-emisních zón se v následujících letech chystá Londýn a Rotterdam.

Existují však i některá technická opatření. Můžeme na vozovku navrhnout takovou vrchní vrstvu, která dokáže více či méně pohltit hluk – například měkčí typy asfaltů dokážou tlumit valivý hluk, naopak dlažba bude při poježdění aut



Obrázek 2: Sice už máme vymyšlené dopravní značení, ale stále ještě není žádné místo, kde by bylo použito.

hluk vydávat. Asfaltová pojízdná vrstva neboli asfaltový beton na vozovkách se skládá ze šterku a asfaltu. Samotný asfalt (někdy se také říká živice či bitumen) je viskózní černá kapalina. Čím větší podíl asfaltu oproti šterku ve směsi je, tím víc je schopná pohlcovat zvuk vznikající vibrací a třením kol o vozovku. Vyrábí se speciální typ asfaltového betonu, kterému se říká „tichý asfalt“, ten je právě specifický vysokým podílem asfaltu, vzduchovými mezírkami, jemným ostrohraným kamenivem a pryžovým granulátem. Zvýšením mezerovitosti povrchu vozovek jsme schopni docílit lepších akustických vlastností, zejména díky zmenšení rozpínání a stlačování vzduchu ve vzorku pneumatiky a pohlcení zvukové energie ve vzduchových mezerách povrchu. Pokud je na vozovce položen „tichý asfalt“, může klesnout hladina valivého hluku o čtyři i více decibelů oproti běžnému asfaltovému povrchu. Přitom již pokles o 3 decibely přináší stejný efekt jako snížení intenzity dopravy na polovinu.

S tím, že je to kapalina, se ale pojí jeden zásadní problém: jak vozovka stárne, tak asfalt gravitací stéká do hlubších a hlubších vrstev vozovky (proto jsou nové silnice výrazně černé a jak stárnou, tak šednou a drolí se – zůstává už jenom šterk). Asfaltované silnice mají zkrátka krátkou životnost. Z hlediska akustiky je nejvýhodnější tedy nový čerstvě vyasfaltovaný povrch vozovky a pro zachování jeho akustických vlastností je třeba jej asi po osmi letech vyfrézovat a položit nový. Pokud chceme zachovat tichý asfalt, musíme ho navíc dvakrát ročně tlakově čistit, abychom obnovili zanesené vzduchové mezírky. Tichý asfalt je bohužel finančně nákladná technologie. V Praze můžeme tichý asfalt vidět už na 19 různých úsecích, například na ulici Slezské úsek U Vodárny – náměstí Míru.

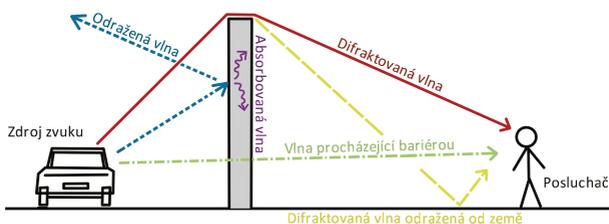
Snížení přenosu hluku

Pro zabránění přenosu hluku v exteriéru můžeme využít protihlukové stěny (zkráceně PHS). Jak koncipovat tvar, materiál, polohu i výšku protihlukové stěny je předmětem matematického modelování a šílené optimalizace. Vyšší stěny pochopitelně chrání okolí před hlukem více, ale v některých případech je rozdíl efektivity oproti nízké zdi jen malý – například u železniční dopravy se na modernizovaných



Obrázek 3: Lokality v Praze, kde byl kvůli nadměrnému akustickému zatížení položen tichý asfalt

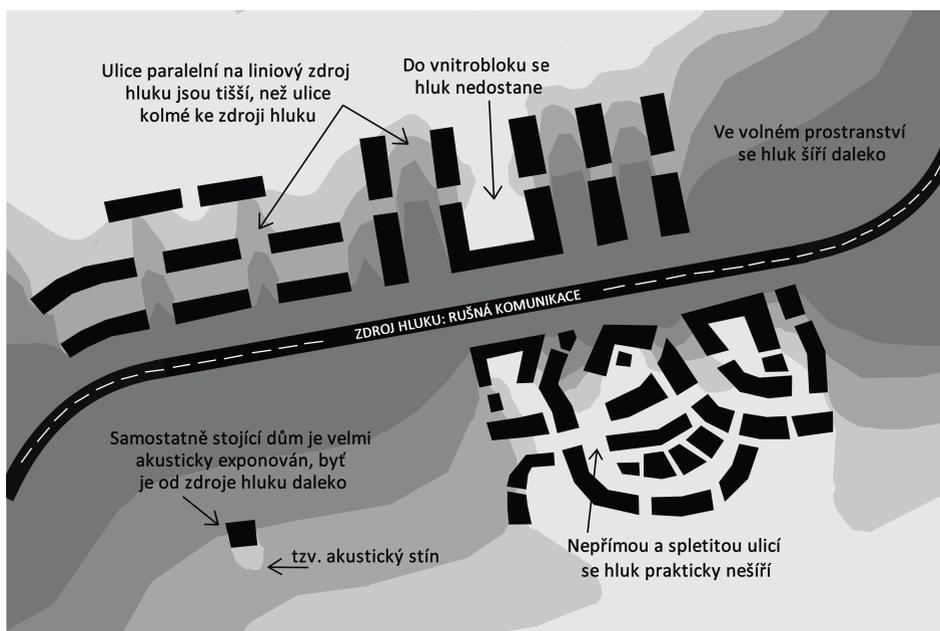
tratích často používají jen nizoučké (cca 1 metr) protihlukové bariéry, jelikož hluk vzniká hlavně u podvozku a u železnic si můžeme dovolit dát PHS velmi blízko kolejnici a tím efektivně pohltit zvuk ještě dřív, než se dostane do okolí. Pokud po železnici jezdí nákladní vlaky, je však vhodnější zvolit vyšší PHS, protože samotný náklad vydává při převozu hluk také.



Obrázek 4: Diagram odraženého a pohlceného zvuku protihlukovou stěnou. Část zvukových vln projde bez odražení i bez pohlcení skrze stěnu.

Co se týče materiálu PHS, principiálně máme dva směry: pohltivé materiály a odrazivé materiály (každý materiál však nějaké množství zvukových vln pohltí

a nějaké množství odrazí – jde nám o to, co dělá víc). Pohltivé materiály mají porézní povrch a ideálně co nejvyšší objemovou hmotnost, používá se třeba beton se strukturovaným povrchem nebo různé desky ze stlačených gumových granulátů. Pohltivé PHS jsou typicky účinnější, ale dražší. Odrazivé stěny znáte možná z plexiskel, ale občas jsou k vidění i z hladkého betonu či zdiva. U odrazivých PHS je nutné dávat pozor, kam hluk odrazíme – co je na opačné straně, jelikož tam jimi můžeme hluk ještě zvýšit. Proto je vhodné je navrhovat po obou stranách hlučné komunikace, s příkrytem, a nebo ještě líp úplně jimi komunikaci obalit i z horní strany. Za protihlukovou stěnou nám vzniká tzv. akustický stín.



Obrázek 5: Jak se modeluje pronikání hluku skrz zástavbu

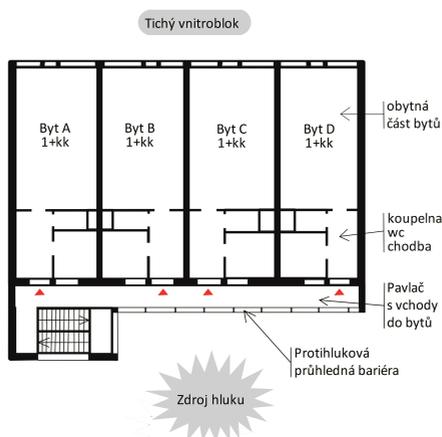
Přenosu hluku můžeme bránit nejen protihlukovými stěnami, ale vlastně čímkoliv, co nám stojí v cestě, třeba alejí stromů, zemním valem a nebo... samotnými domy? Možná si říkáte: co je to za nesmysl, domy přece chceme chránit od hluku, nemůžeme z nich dělat protihlukovou stěnu!

Některé domy však potřebujeme chránit víc a jiné to pro změnu téměř nepotřebují. Takové základní nepsané pravidlo je, že blízko něčeho hlučného umístíme třeba komerční vybavenost (tj. obchody), které hluk nevadí a může tvořit akustický stín pro rezidenční zástavbu za ní. Další věc, kterou můžeme ovlivnit šíření zvuku, je tvar ulic. Když bude ulice kolmá na rušnou komunikaci, více domů bude zatíženo hlukem, než kdybychom udělali ulici paralelní s rušnou komunikací a tím hlukově zatížili jen polovinu domů. Rovnými ulicemi se hluk ponese mnohem dál

než ulicemi různě zakřivenými. Rovné povrchy domů budou hluk odrážet, takže snížení hluku může pomoci i členitost fasád, oblé rohy, různé povrchy. . .

Omezení pronikání hluku do domu

Dispozičně Podobně jako při chytrém umístění některých budov blíž ke zdroji hluku a jiných zase dál od zdroje hluku, můžeme stejný princip aplikovat z hlediska architektury i u samotných budov. Efektivní řešení je například umístění klidových částí bytu na opačnou stranu bytového domu, než na které působí zdroj hluku. Klidovými částmi bytu rozumíme hlavně ložnici, sekundárně obývací pokoj, jídelnu. Tam je lidem hluk z venku nepříjemný a může jim rušit odpočinek. Naopak hluk z venku nám zdaleka tolik nevádí například v koupelně, ve vstupní hale či v kuchyni, kde je stejně hlučno tak i tak od naší činnosti (vaření, sprchování se).



Obrázek 6: Dispozice bariérového domu

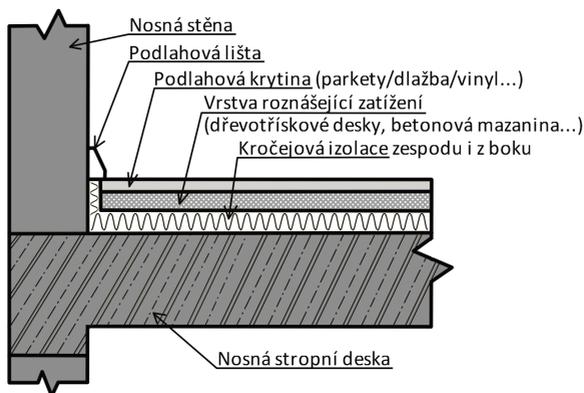
K dokonalosti tento koncept dovádí typ bytového domu, kterému v architektuře říkáme bariérový dům viz obrázek 6. Bariérový dům má nejen klidové místnosti odvrácené od zdroje hluku, ale navíc má na hlučnou stranu umístěnou pavlač, která je ještě navíc typicky krytá, čímž v podstatě vytváří průhlednou protihlukovou stěnu přímo na samotném domě. Než by se nepříjemné zvuky z rušné komunikace dostaly ke spícímu člověku v bytě, dříve se odrazí či pohltí od skleněné bariéry a mnoha zdí dělicích spící osobu od zdroje hluku.

Stavebně Ve stavebnictví rozeznáváme dva druhy neprůzvučnosti stavby, tedy její schopnosti tlumit hluk.

Prvním typem neprůzvučnosti je tzv. vzduchová neprůzvučnost – přenášení zvuku vzduchem (neřešíme přenos ze vzduchu do pevné hmoty). Aby byla bu-

dova co nejvíce neprůzvučná, musí být maximálně těsná. To pro nás znamená co nejtěsnější okna, žádné otvory ve zdech.

Druhým typem neprůzvučnosti je takzvaná kročejová neprůzvučnost (od slova „kročej“, což je zastarale šlápnutí, krok). Ta se řeší v případě toho, že zdroj zvuku je v samotné řešené budově – respektive, zdrojem zvuku jsou běžné činnosti uvnitř budovy – chození, mluvení, splachování záchodu apod. Aby byla budova kročejově neprůzvučná, musí zamezit šíření hluku způsobeného mechanickým kontaktem s konstrukcí. Možná tento princip znáte například z otopného potrubí a topných těles (radiátorů) – když do potrubí nebo tělesa v jedné místnosti praštím, je to výrazně slyšet i v ostatních místnostech, kde je pak lokálně zdrojem hluku samotné otopné potrubí. Pokud mám bytový dům centrálně vytápěný se stoupačkami, takové praštění do otopného tělesa pak slyší všichni obyvatelé bytového domu. Tento efekt nastává nejen s kovovým potrubím, ale s jakoukoliv spojitou konstrukcí, třeba se stropy nebo se stěnami.



Obrázek 7: Plovoucí podlaha – důležitý detail je, že zvuková izolace musí být i z boku podlahy, aby krytina nemohla „narážet“ do zdi při smyku.

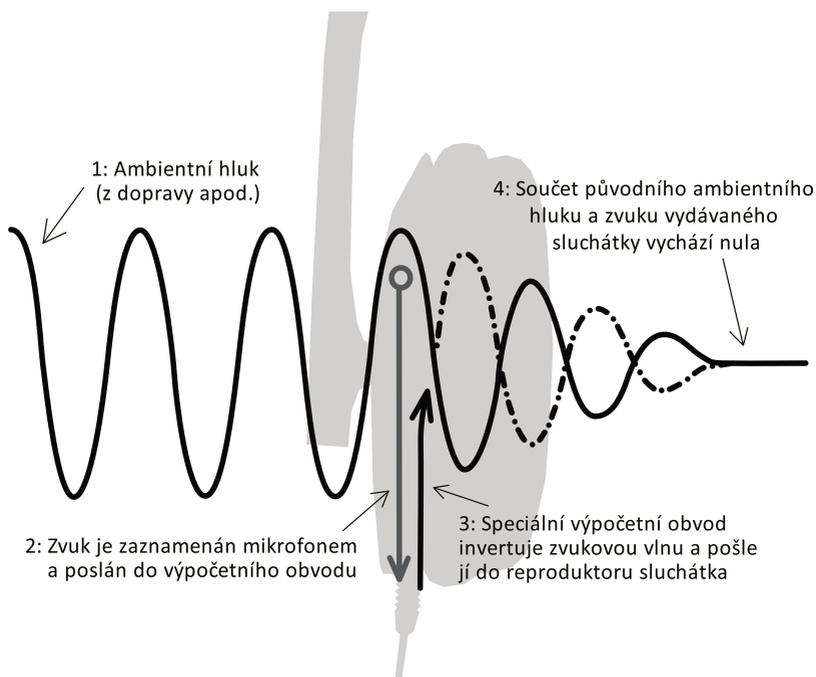
Řešením je konstrukce buď přerušovat (aby nebyly spojitě) a nebo zcela zabránit průniku hluku do konstrukce. Pro to se používá například takzvaná „plovoucí podlaha“, viz obrázek 7. Tento termín se běžně nesprávně užívá pro laminátové podlahové krytiny, jeho skutečný význam je však jiný. Termín „plovoucí podlaha“ označuje podlahu takovou, která není pevně spojená se zbytkem konstrukce, neboli „plove“ v prostoru. Vibrace z plovoucí podlahy se tedy nemohou přenést do konstrukce, kterou by se pak nesly třeba do dalších bytů.



Problém 1: Výrazným zdrojem hluku uvnitř bytových domů bývá schodiště, neboť člověk chozením po schodech vyvíjí větší nárazy na konstrukci, než kdyby chodil po rovině. Jak byste tento problém řešili? Lze schodiště nějak odizolovat? Nezapomeňte, že konstrukce schodiště musí být ke stropům (nebo stěnám) nějak připevněná nebo na nich položená, aby přenášela své zatížení.

Zabránit zvuku proniknutí do mého ucha

Existují špunty do uší. Nicméně v této kapitole chceme zmínit něco jiného – zajímavou technologii Active Noise Cancellation (zkráceně ANC, česky aktivní potlačení hluku) pro sluchátka: ta dokáže rozpoznat užitečný zvuk od neužitečného a ten neužitečný potlačit. Potlačení zvuku probíhá vysláním zrcadlového obrazu hluku, který se s původním hlukem vyruší. U kvalitnějších sluchátek dochází k útlumu až o 30 dB. Většina sluchátek předpokládá, že „užitečný“ zvuk je právě ten, který si přehráváte, a „neužitečný“ je všechen ostatní. Některá sluchátka ale umožňují volitelně propustit některé zvuky zvenčí, například frekvence typické pro lidský hlas – chovají se tedy vlastně jako váš osobní ekvalizér.



Obrázek 8: Fungování ANC

Viktor Materna; viktor.mat@seznam.cz

Tereza Agnes Pokorná; tereza.tter.hladikova@gmail.com

odevzdávejte do odevzdávátka



Téma 3 – Výtahy

Řešení 2. dílu

Všechny ukázky kódu najdete ve strojově čitelné podobě v repozitáři k tématu ve složce `examples`.¹

Úloha 1

Zadání:

Vytvořte konfiguraci dvou výtahů ve formátu JSON, kde platí:

- Budova má 5 nadzemních pater, přízemí a 2 podzemní patra.
- První výtah zastavuje pouze v přízemí a v 5. patře.
- Druhý výtah jezdí mezi všemi patry.
- První výtah umí jezdit dvakrát rychleji než druhý.
- Oba výtahy mají stejné zrychlení.
- Ostatní parametry si můžete zvolit libovolně.

Řešení:

```
1 {
2   "buttons": [],
3   "elevators": [
4     { "id": "A", "floors": [0,5], "maxSpeed": 2.0, "speedStep": 0.2},
5     { "id": "B", "floors": [-2,-1,0,1,2,3,4,5], "maxSpeed": 1.0, "speedStep": 0.2}
6   ]
7 }
```

Kód 1: Ukázka řešení 1. úlohy

Tuto úlohu jste měli téměř všichni správně. Body jsem strhával jen za syntaktické chyby, kvůli kterým nebylo možné váš kód načíst a zobrazit na simulátoru. Nejčastěji vám někde chyběla nebo naopak přebývala čárka.

Úloha 2

Zadání:

Vytvořte libovolnou konfiguraci výtahů ve formátu JSON, která se v simulátoru zobrazí stejně jako na obrázku 9.

Řešení:

V této úloze jste nejčastěji přehlédli tlačítko. Druhou nejčastější chybou bylo, že jste měli více výtahů s jedním id. Tím pádem druhá konfigurace stejného výtahu přepsala tu první. Další chyby byly opět spíše syntaktického charakteru v podobě zapomenuté čárky nebo závorky do páru.

¹Repozitář pro připomenutí naleznete na: <https://github.com/bsaid/ElevatorSimulator>



Obrázek 9: Zadání úlohy 2

```

1 {
2   "buttons": [
3     { "id": "M&M - KORESPONDENČNÍ SEMINAR A-CASOPIS MFF UK" }
4   ],
5   "elevators": [
6     { "id": "A", "floors": [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
7     { "id": "B", "floors": [0, 6 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
8     { "id": "C", "floors": [0, 5 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
9     { "id": "D", "floors": [0, 6 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
10    { "id": "E", "floors": [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
11    { "id": "F", "floors": [0 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
12    { "id": "G", "floors": [0, 2, 3, 5, 6 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
13    { "id": "H", "floors": [0, 1, 4, 7], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
14    { "id": "I", "floors": [0, 2, 3, 5, 6 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
15    { "id": "J", "floors": [0, 2 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
16    { "id": "K", "floors": [0, 1, 3 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
17    { "id": "L", "floors": [0 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
18    { "id": "M", "floors": [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
19    { "id": "N", "floors": [0, 6 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
20    { "id": "O", "floors": [0, 5 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
21    { "id": "P", "floors": [0, 6 ], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 },
22    { "id": "Q", "floors": [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], "maxSpeed": 1, "speedStep": 0.1 }
23  ]
24 }

```

Kód 2: Ukázka řešení 2. úlohy.

Úloha 3

Zadání:

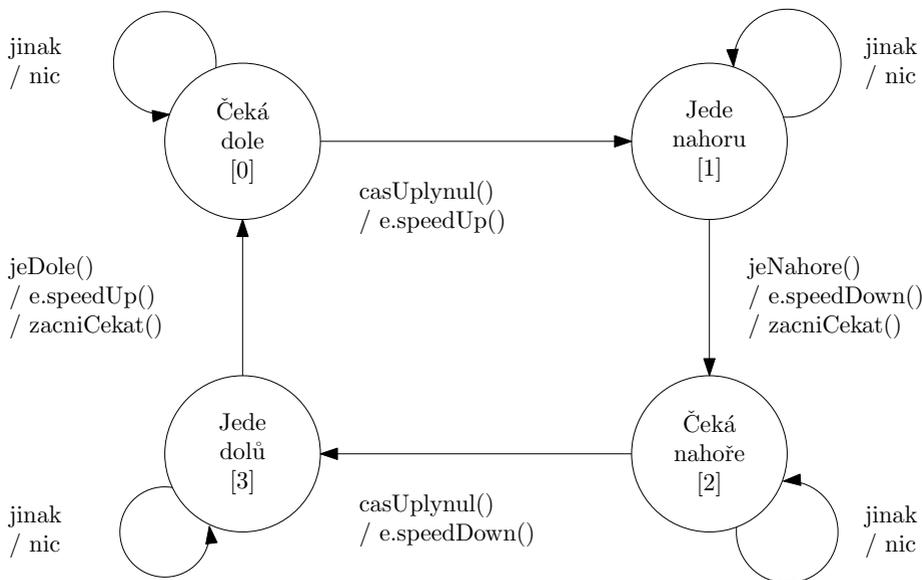
Vytvořte simulaci výtahu ve třípatrovém domě, který funguje podobně jako páternoster. Tento výtah nebudeme ovládat žádnými tlačítky. Výtah bude automaticky



pomalou přejíždět z přízemí do třetího patra. Ve třetím patře se zastaví a za chvíli se opět vydá pomalým tempem do přízemí, kde opět na chvíli zastaví. Tento proces se opakuje donekonečna. Pro pomalou jízdu stačí funkci `e.speedUp()`, respektive `e.speedDown()` zavolat jen jednou.

Řešení:

Cílem této úlohy bylo rozmyslet si, jak zapsat relativně jednoduchou přechodovou funkci automatu do Python kódu pro náš simulátor. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že tento výtah nemá žádné dveře. (Někteří z vás problém dveří ignorovali, někteří na začátku otevřeli všechny dveře a někteří postupně otevírali a zavírali dveře během jízdy výtahu. Za postupné otevírání a zavírání dveří jsem uděloval bonusové body.) Příklad automatu, který řeší tuto úlohu, najdete na obrázku 10.



Obrázek 10: Příklad automatu pro řešení 3. úlohy

JSON konfigurace definuje jeden výtah, příklad můžete vidět v kódu 3.

```

1 {
2   "buttons": [],
3   "elevators": [
4     {"id": "A", "floors": [0,1,2], "maxSpeed": 2.0, "speedStep": 0.2}
5   ]
6 }

```

Kód 3: JSON konfigurace pro 3. úlohu

Příklad zdrojového kódu, který řeší úlohu 3, najdete v ukázce 4. Na řádcích 4–7 vidíme definice konstant. Pro jednoznačné odlišení konstant od proměnných jsem konstanty zapsal hůlkovým písmem. Konstanta `PRECISION` definuje přesnost senzoru polohy výtahu. Konstanta `WAITING_TIMEOUT` říká, jak dlouho má výtah čekat v nejnižším a nejvyšším patře. Konstanty `POS_UP` a `POS_DOWN` definují patra, ve kterých má výtah změnit směr jízdy.

Proměnná `actState` na řádku 9 říká, v jakém stavu se výtah zrovna nachází vzhledem k obrázku 10. Tato proměnná se bude vyskytovat ve všech programech, které implementují automat s několika stavy a přechodovou funkcí.

Funkce `zacniCekati` a `casUplynul` definované na řádcích 11–15 fungují podobně jako stopky, které umíme resetovat. Když výtah dorazí do cílového patra, funkce `zacniCekati` si v proměnné `waitingFrom` definované na řádku 8 zapamatuje aktuální čas. Následně funkce `casUplynul` porovnává aktuální čas s časem uloženým v proměnné `waitingFrom`. Pokud je rozdíl větší než `WAITING_TIMEOUT`, funkce `casUplynul` vrátí `True`. V tu chvíli výtah ukončuje čekání a vydává se na cestu opačným směrem.

Funkce `jeNahore` a `jeDole` definované na řádcích 17–21 vrací `True`, pouze pokud se výtah nachází přesně v patře, ve kterém má změnit směr jízdy. Výtah jsem si v JSON konfiguraci pojmenoval „A“, takže toto jméno používám i ve funkci `e.getPosition('A')`. Na řádcích 18 a 21 si můžeme všimnout, že polohu výtahu akceptujeme s tolerancí definovanou pomocí konstanty `PRECISION`. Náš simulátor ani senzory v reálném světě neumí reprezentovat všechna reálná čísla přesně, proto potřebujeme zavádět tuto akceptovatelnou odchylku měření.

Na řádcích 23–41 vidíme samotnou přechodovou funkci našeho automatu. Přechodová funkce vždy reaguje v závislosti na stavu, ve kterém se automat právě nachází. Proto je přechodová funkce rozdělena na několik sekcí pomocí `if ... else`. Každá sekce obsahuje kód přesně podle diagramu na obrázku 10. Nejdůležitějším krokem v každé sekci je přechod do nového stavu, který vidíme na řádcích 27, 32, 36 a 41.

Poslední řádek 43 spouští samotnou simulaci našeho výtahu.

```
1 import elevators
2
3 class GD:
4     PRECISION = 0.01
5     WAITING_TIMEOUT = 20
6     POS_UP = 2
7     POS_DOWN = 0
8     waitingFrom = 0
9     actState = 0
10
11 def zacniCekati(e) -> None:
12     GD.waitingFrom = e.getTime()
13
14 def casUplynul(e) -> bool:
15     return e.getTime() - GD.waitingFrom > GD.WAITING_TIMEOUT
16
17 def jeNahore(e) -> bool:
18     return abs(e.getPosition('A') - GD.POS_UP) < GD.PRECISION
19
```



```

20 def jeDole(e) -> bool:
21     return abs(e.getPosition('A') - GD.POS_DOWN) < GD.PRECISION
22
23 def prechodovaFunkce(e) -> None:
24     if GD.actState == 0:
25         if casUplynul(e):
26             e.speedUp('A')
27             GD.actState = 1
28     elif GD.actState == 1:
29         if jeNahore(e):
30             e.speedDown('A')
31             zacniCekat(e)
32             GD.actState = 2
33     elif GD.actState == 2:
34         if casUplynul(e):
35             e.speedDown('A')
36             GD.actState = 3
37     elif GD.actState == 3:
38         if jeDole(e):
39             e.speedUp('A')
40             zacniCekat(e)
41             GD.actState = 0
42
43 elevators.runSimulation('elevators.json', prechodovaFunkce)

```

Kód 4: Zdrojový kód 3. úlohy

Úloha 4

Zadání:

Vytvořte simulaci výtahu, který jezdí z přízemí na rozhlednu a zpátky. Výtah můžeme ovládat tlačítky *nahoru*, *dolu* a *stop*. Tlačítko *stop* zastaví výtah v aktuální pozici. Tlačítka *nahoru* a *dolu* odvezou cestující na rozhlednu, respektive do přízemí.

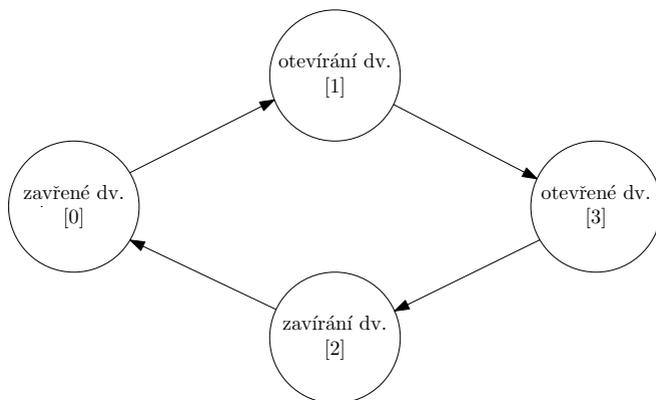
Řešení:

Cílem této úlohy je vyzkoušet si interakci s tlačítky. Asi nejjednodušším řešením je nakreslit si opět vhodný Mealyho stroj a zaměřit se hlavně na přechodovou funkci. Můžeme si všimnout, že v této úloze interagujeme jak s kabinou výtahu, tak s dveřmi. Pro manipulaci s dveřmi si můžeme nakreslit samostatný graf podobný tomu na obrázku 11. Obdobně pro manipulaci s kabinou výtahu si můžeme nakreslit graf podobný obrázku 12.

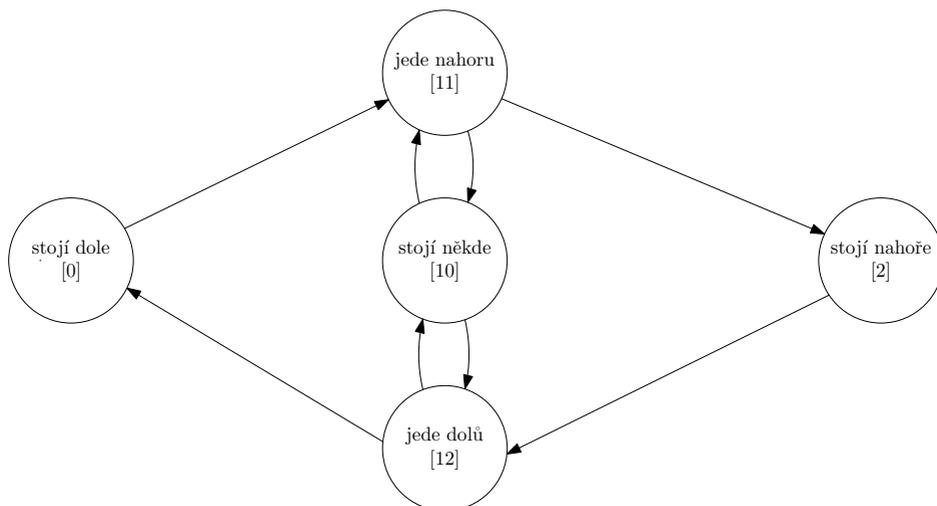
Otázkou nyní je, jak tyto dva grafy spojit do jednoho Mealyho stroje pro ovládání celého výtahu. Na obrázcích 11 a 12 jsem každému stavu přiřadil číslo. Spojením těchto grafů vznikne Mealyho stroj uvedený na obrázku 13, který má u každého stavu přiřazenou dvojici čísel.

První číslo v každé dvojici odpovídá stavu z obrázku 12 a druhé číslo odpovídá stavu z obrázku 11. Můžeme si všimnout, že Mealyho stroj na obrázku 13 respektuje přechody obou grafů na obrázcích 11 a 12. Takto si můžeme částečně zkontrolovat, že náš výsledný Mealyho stroj neobsahuje chybu.

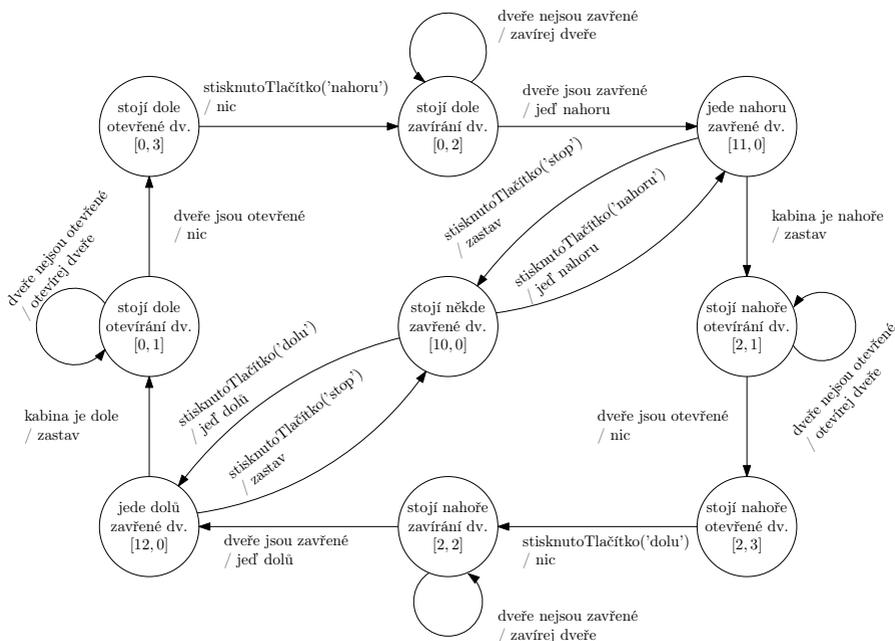
U složitějších strojů je běžnou praxí reprezentovat konkrétní stav n -ticí hodnot. Pro každou z hodnot můžeme nakreslit samostatný jednodušší graf, který



Obrázek 11: Samostatný graf znázorňující manipulaci s dveřmi výtahu



Obrázek 12: Samostatný graf znázorňující manipulaci s kabinou výtahu



Obrázek 13: Mealyho stroj řešící 4. úlohu

```

1 {
2   "buttons": [{"id": "nahoru"}, {"id": "dolu"}, {"id": "stop"}],
3   "elevators": [
4     {"id": "A", "floors": [0,2], "maxSpeed": 2.0, "speedStep": 0.2}
5   ]
6 }

```

Kód 5: JSON konfigurace pro 4. úlohu

nám slouží ke snadnějšímu pochopení celého komplexu. V této úloze jsem si určil číslování stavů následovně:

- **Kabina:** 0 = stojí dole, 11 = jede nahoru, 12 = jede dolů, 2 = stojí nahoře (podle čísla patra), 10 = stojí někde (po zastavení tlačítkem stop)
- **Dveře:** 0 = zavřené, 1 = otevírají se, 2 = zavírají se, 3 = otevřené

Ve zdrojovém kódu 6 bychom mohli použít datový typ `enum` místo čísel. Pro účely tohoto textu v kódu ponechám reprezentaci pomocí čísel, abychom jednoznačně viděli, ke kterému stavu na obrázku 13 se kód vztahuje. Pojďme si nyní přechodovou funkci Mealyho stroje z obrázku 13 přepsat do zdrojového kódu akceptovaného naším simulátorem. JSON konfigurace v ukázce 5 je triviální. Naopak zdrojový kód v ukázce 6 si okomentujeme podrobněji.

```
1 import elevators
2
3 class GD:
4     PRECISION = 0.01
5     POS_UP = 2
6     POS_DOWN = 0
7     # POS_DOWN - dole, POS_UP - nahore, 10 - stojí, 11 - jede nahoru, 12 - jede dolu
8     posState = 0
9     # 0 - zavrene, 1 - oteviraji se, 2 - zaviraji se, 3 - otevrene
10    doorState = 1
11
12 def stisknutoTlacitko(e: elevators.Simulator, text: str) -> bool:
13     if e.numEvents() > 0:
14         if e.getNextEvent() == text:
15             return True
16         return False
17
18 def kabinaJeNahore(e: elevators.Simulator) -> bool:
19     return abs(e.getPosition('A') - GD.POS_UP) < GD.PRECISION
20
21 def kabinaJeDole(e: elevators.Simulator) -> bool:
22     return abs(e.getPosition('A') - GD.POS_DOWN) < GD.PRECISION
23
24 def otevirejDvere(e: elevators.Simulator, id: str, floor: int) -> bool:
25     # rozliseni senzoru je GD.PRECISION, tolerovat o polovinu mene je dobry odhad
26     if e.getDoorsPosition(id, floor) > 1 - GD.PRECISION / 2:
27         return True
28     else:
29         e.openDoors(id, floor)
30         return False
31
32 def zavirejDvere(e: elevators.Simulator, id: str, floor: int) -> bool:
33     if e.getDoorsPosition(id, floor) < GD.PRECISION / 2:
34         return True
35     else:
36         e.closeDoors(id, floor)
37         return False
38
39 def prechodovaFunkce(e: elevators.Simulator) -> None:
40     # dole nebo nahore s otevirajicimi se dvermi
41     if GD.doorState == 1:
42         if otevirejDvere(e, 'A', GD.posState):
43             GD.doorState = 3
44     # dole s otevrenymi dvermi
45     elif GD.posState == GD.POS_DOWN and GD.doorState == 3:
46         if stisknutoTlacitko(e, 'nahoru'):
47             GD.doorState = 2
48     # nahore s otevrenymi dvermi
49     elif GD.posState == GD.POS_UP and GD.doorState == 3:
50         if stisknutoTlacitko(e, 'dolu'):
51             GD.doorState = 2
52     # dole se zavirajicimi se dvermi
53     elif GD.posState == GD.POS_DOWN and GD.doorState == 2:
54         if zavirejDvere(e, 'A', GD.POS_DOWN):
55             GD.doorState = 0
56             GD.posState = 11
57             e.speedUp('A')
58     # nahore se zavirajicimi se dvermi
59     elif GD.posState == GD.POS_UP and GD.doorState == 2:
60         if zavirejDvere(e, 'A', GD.POS_UP):
61             GD.doorState = 0
62             GD.posState = 12
63             e.speedDown('A')
64     # jede nahoru
```



```

65     elif GD.posState == 11:
66         if kabinaJeNahore(e):
67             e.speedDown('A')
68             GD.posState = GD.POS_UP
69             GD.doorState = 1
70             elif e.numEvents() > 0:
71                 if e.getNextEvent() == 'stop':
72                     e.speedDown('A')
73                     GD.posState = 10
74 # jede dolu
75 elif GD.posState == 12:
76     if kabinaJeDole(e):
77         e.speedUp('A')
78         GD.posState = GD.POS_DOWN
79         GD.doorState = 1
80     elif e.numEvents() > 0:
81         if e.getNextEvent() == 'stop':
82             e.speedUp('A')
83             GD.posState = 10
84 # stojí nekde
85 elif GD.posState == 10:
86     if e.numEvents() > 0:
87         event = e.getNextEvent()
88         if event == 'nahoru':
89             e.speedUp('A')
90             GD.posState = 11
91         elif event == 'dolu':
92             e.speedDown('A')
93             GD.posState = 12
94     else:
95         print('Neznamy stav:', GD.posState, GD.doorState)
96
97 elevators.runSimulation('elevators.json', prechodovaFunkce)

```

Kód 6: Přechodová funkce pro řešení 4. úlohy

Řádky 4–6 fungují podobně jako v úloze 3. Řádky 8 a 10 definují proměnné, ve kterých je uložen aktuální stav, ve kterém se řídicí elektronika nachází. Výhodu uložení stavu do dvou proměnných poznáme například na řádce 40, kde nás zajímá pouze stav dveří bez ohledu na stav kabiny výtahu. Funkce `stisknutoTlacitko` definovaná na řádcích 12–16 vrací `True` pouze tehdy, když se první událost ve frontě stisknutých tlačítek rovná obsahu argumentu `text`. U této funkce také ukazují, jak můžeme Pythonu předat informaci o očekávaném typu argumentů i návratové hodnoty. Doslovný překlad řádku 12 by vypadal asi takto: Definujeme funkci `stisknutoTlacitko`, která dostává 2 argumenty, jeden je simulátor výtahu a druhý `string`, a vrací `True` nebo `False`. Specifikace očekávaného typu například umožní našeptávači doporučit nám vhodné názvy funkcí při psaní kódu.

Funkce na řádcích 18–22 fungují stejně jako ve 3. úloze. Funkce `otevirejDvere` a `zavirejDvere` zkontrolují, zda jsou dveře otevřené, respektive zavřené. Pokud ano, tak vrátí `True`, a pokud ne, tak roztočí motor ovládání dveří správným směrem a vrátí `False`. Podobnost kódu uvnitř těchto funkcí je obecně spíše na škodu a obecně se opakujícím se kódu přezdívá „špagetový kód“.² Můžete se zamyslet nad tím, jak bychom mohli tomuto jevu zabránit.

²Konkrétnější popis této neřesti včetně názorných ukázek najdete například na Wikipedii: https://cs.wikipedia.org/wiki/Špagetový_kód

Od řádku 38 až do konce programu definujeme přechodovou funkci s výjimkou posledního řádku 96, který spouští celou simulaci. Můžeme si všimnout, že každá větev uvnitř konstrukce `if . . . else` odpovídá jednomu stavu na obrázku 13. Jedinou výjimkou jsou řádky 39–42, které obsluhují dva stavy pomocí jednoho kódu. Tyto řádky slouží také jako ukázka toho, jak můžeme zamezit vzniku „špagetového kódu“.

Opět si všimněte podobnosti se 3. úlohou. V každém stavu musíme nejen nastavit vhodný výstup, ale také nesmíme zapomenout přejít do nového stavu. Jako počáteční stav jsem zvolil polohu výtahu v přízemí s otevírajícími se dveřmi s ohledem na počáteční stav simulace před kliknutím na tlačítko start. Nastavení počátečního stavu můžeme vidět na řádcích 8 a 10.

Díl 4: Řízení jednoho výtahu

V minulých dílech jsme se prokousali dostatečným množstvím teorie k tomu, abychom mohli naprogramovat kompletní řídicí elektroniku jednoho výtahu. Tentokrát nebudeme přidávat novou teorii, ale spíš využijeme již dříve získané dovednosti. V příštím díle opustíme problematiku jednoho výtahu a podíváme se podrobněji na to, jak optimálně řídit strukturu několika výtahů.

Úloha 1 [2b]: *Mějme výtah, který pojede z přízemí do n -tého patra. Celkově tedy urazí vzdálenost n pater. Můžeme předpokládat, že vzdálenost mezi dvěma sousedními patry je vždy stejná. Pro pohodlí cestujících si určíme maximální zrychlení označené písmenkem a v jednotkách počet pater za sekundu na druhou. (U reálných výtahů je minimální požadavek takový, aby maximální zrychlení výtahu bylo vždy menší než gravitační zrychlení. Potom nedochází k „obratům gravitace“ během cesty.) Určete maximální rychlost v , kterou se výtah na této cestě může pohybovat. Tuto rychlost budou následně konstruktéři potřebovat pro správné dimenzování parametrů motoru. Dále určete minimální čas t , za který dokáže kabina výtahu tuto cestu zdolat. U této úlohy budu uznávat i řešení získaná jinak než fyzikálním výpočtem.*

Problém 2: *V 1. díle jsem ve vašich řešeních často četl, že dveře výtahu musí obsahovat senzor překážky. Díky tomuto senzoru se uživatel nemusí bát, že by mu zavírající se dveře výtahu nějak ublížily. Jak byste takovýto senzor překážky ve dveřích implementovali na našem simulátoru?*

Úloha 3 [12b]: *Navrhněte libovolný výtah, který obsluhuje alespoň tři patra. Pokud vámi odevzdaný kód nepůjde spustit na simulátoru, dostanete nejvýše 1 bod. Bodování je následující:*

1b *Vaše řešení obsahuje náčrt Mealyho stroje, který implementujete.*

1b *Náčrt Mealyho stroje jste vytvořili elektronicky a dodali jste i zdrojový zdrojový soubor vašeho diagramu. My například v tomto tématku používáme editor IPE*



(<https://ipe.otfried.org/>). Můžete ale použít libovolný program, jako vhodné kandidáty uvedu například InkScape (<https://inkscape.org/>), yEd (<https://www.yworks.com/products/yed>), případně cokoliv jiného. Napište nám prosím, jaký editor jste si zvolili.

- 1b Výtah obsluhuje alespoň 3 patra a JSON konfigurace neobsahuje chyby.
- 2b Výtah umí zrychlovat a zpomalovat (tedy funkce `speedUp` a `speedDown` jsou volány více než jednou).
- 2b Výtah správně zavírá a otevírá dveře. Výtah se nerozjede, pokud jsou nějaké dveře otevřené. Dveře se neotevřou, pokud výtah nestojí přesně v patře.
- 2b Výtah je možné pomoci tlačítek přivolat do všech pater.
- 2b Výtah jezdí mezi patry optimálně. (Výtah například nepojede z přízemí do 5. patra, potom do 1. patra a nakonec do 3. patra. Místo toho zastaví postupně v patrech 1, 3 a 5.)
- 1b Ve výtahu je tlačítko, pomocí kterého můžu otevřít právě se zavírající dveře, a tlačítko, pomocí kterého můžu dát pokyn k okamžitému zavírání dveří.



Problém 4: Výzva k napsání řešitelského článku: Máte nápad na nějakou vlastní výukovou aplikaci nebo simulátor? Jak by taková aplikace měla vypadat a co by měla umět? Rozepište nám svůj nápad podrobněji a my vám ho otiskneme v některém z dalších čísel.

Béda; bedrich.said@gmail.com

Odevzdávejte do odevzdávátka



Téma 4 – Derivace a integrály

Řešení 3. dílu

První tři úlohy hezky vyřešil a popsal Mgr.^{MM} Ondřej Sedláček, jeho postup řešení si můžete přečíst na <https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/29-4-t4/sedlacek.pdf> a jeho řešení v Pythonu najdete na <https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/29-4-t4/sedlacek.py>.

Úloha 1

Zadání:

Řešte numericky rovnici $x' = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$. K a r si zvolte, jak uznáte za vhodné.

Řešení:

Tato úloha byla přímým aplikováním postupu z minulého dílu. Můžete si prohlédnout řešení Mgr.^{MM} Jany Uglických <https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/29-4-t4/uglickych.ggb>, ale v podstatě totožné řešení měl i Bc.^{MM} Jan Tregler.

Další dvě úlohy se věnovaly křivkám, které se souhrnně (anglicky) nazývají pursuit curves (pursuit = pronásledovat) viz Wikipedie.³

Úloha 2

Zadání:

Vlk a zajíc: Z bodu $(0, 0)$ běží po ose x zajíc rychlostí v_z . Z bodu $(0, 1)$ ho pronásleduje vlk, který vždy běží přímo k zajíci rychlostí v_v . Jak bude vypadat křivka, po které běží vlk?

Řešení:

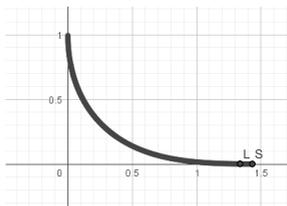
Řešením je tzv. radiodroma (Wikipedie⁴), která překvapivě má exaktní vyjádření, ale rozhodně není v našich silách (v rámci tohoto tématka) ho najít.

Numerické řešení ale umíme najít a v Geogebře se to hezky povedlo Bc.^{MM} Lence Šimové a Dr.^{MM} Pavle Šimové, jejich řešení naleznete na <https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/29-4-t4/simove2.ggb>.

Toho, že jste mohli řešit i v jiných programech, jste hojně využívali, takže kromě řešení v Pythonu a Geogebře přišlo řešení i v Desmosu, a to od Bc.^{MM} Jana Treglera: <https://www.desmos.com/calculator/a8d88xkr65>.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Pursuit_curve

⁴<https://en.wikipedia.org/wiki/Radiodrome>



Obrázek 14: Tvar radiodromy, jak vyšel Bc.^{MM} Lence Šimové a Dr.^{MM} Pavle Šimové

Úloha 3

Zadání:

Čtyři střely: V bodech $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ a $(1, 0)$ začínají čtyři řízené střely. Každá se vždy pohybuje ve směru k další střele proti směru hodinových ručiček rychlostí v . Nakreslete trajektorie.

Řešení:

Problém se v angličtině jmenuje Mice problem (Wikipedie⁵) a řešením jsou logaritmické spirály (Wikipedie⁶). I tady je k nalezení exaktního řešení pravděpodobně potřeba více než jsme se doteď naučili (speciálně integrály, které jsou obsahem tohoto dílu).

To však nezabránilo Mgr.^{MM} Michaelu Jarvisovi, aby toto řešení našel. Pomohl si trikem, který situaci dost ulehčil – posunul střed dění do počátku. Potom stačí počítat trajektorii jedné rakety, trajektorii ostatních pak získáme otočením o 90 stupňů.

Nicméně námi očekávaným řešením bylo zase numerické řešení, v Geogebře ho našly Bc.^{MM} Lenka Šimová a Dr.^{MM} Pavla Šimová: <https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/29-4-t4/simove3.ggb>.

Hezké řešení, kde dokonce můžeme měnit počáteční polohu raket a jejich rychlost (po změně hodnoty je třeba kliknout na první šipku), vytvořil v Desmosu Bc.^{MM} Jan Tregler: <https://www.desmos.com/calculator/6ttkyeopat>

Úloha 4

Zadání:

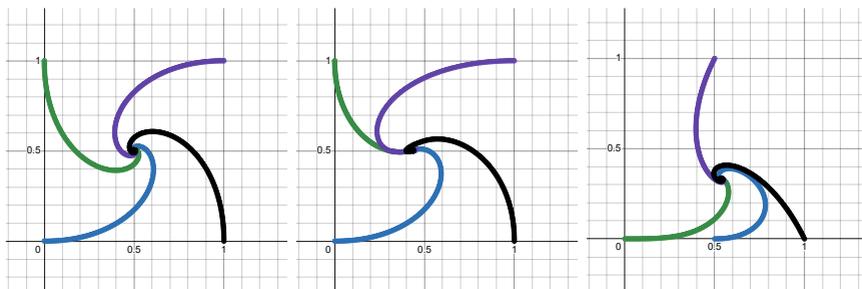
Dvě kyvadla aneb úvod do chaosu: Na konec kyvadla zavěsíme druhé kyvadlo (s ne nutně stejnými parametry) a necháme je se kývat. Pozorujte trajektorii druhého kyvadla. Jak se změní, když pustíme kyvadla o velmi malou vzdálenost jinde?

Řešení:

K této úloze nám k prvnímu deadline přišla pouze dvě řešení, a to jedno – článek od Mgr.^{MM} Radima Nováka, který naleznete na konci tématka – dokonce dříve než byla úloha zadána (jako využití derivací).

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Mice_problem

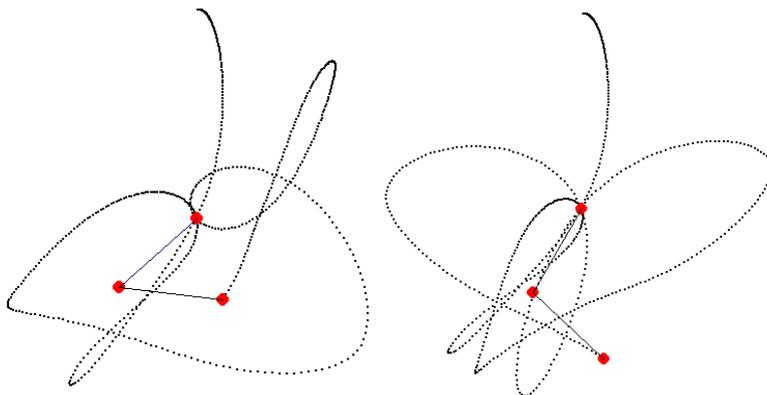
⁶https://cs.wikipedia.org/wiki/Logaritmická_spirála



Obrázek 15: Různá nastavení střel v řešení Bc.^{MM} Jana Treglera

Řešení od Doc.^{MM} Václava Tichého, které je spíše simulace než řešení diferenciálních rovnic, je také v Pythonu. Je potřeba knihovna `pygame` a pak již stačí spustit příslušný skript: <https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/29-4-t4/tichy.zip>

Výsledek bude vypadat přibližně jako na obrázku 16.



Obrázek 16: Výstup řešení čtvrté úlohy od Doc.^{MM} Václava Tichého; na druhém obrázku začalo kyvadlo o malý kousek vedle

Díl 4: Integrály

Celé tři díly jsme se zabývali hledáním derivace (změny, rychlosti, přírůstku při „nekonečně malém“ posunu parametru, atd.). Vždy jsme měli původní funkci a k té jsme spočítali její derivaci.

Co když ale naopak máme derivaci (např. máme rychlost odečtenou z tachometru, známe tíhové zrychlení, změřili jsme průtok, apod.) a chceme získat původní funkci (uraženou vzdálenost, napuštěný objem)?



Úvod

Člověk by řekl, že takový úkol je jednoduchý, vždyť v prvním díle jsme si ukázali, jak zderivovat v podstatě jakoukoliv funkci. Opačným směrem je to ale o dost složitější.

Můžeme sice „otočit“ vzorce pro derivace základních funkcí, derivaci součtu, dokonce i derivaci složené funkce. Ale už u derivace součinu ($f \cdot g$) je součet nějakých součinů ($f' \cdot g$ a $g' \cdot f$), tedy pokud dostaneme samotný jeden součin, tak jak získáme, čeho je derivací?

A co hůř, například e^{-x^2} je derivací nějaké funkce, ale tuto funkci neumíme napsat kombinací čísel, $+$, \cdot , $/$, $-$, x a všech funkcí, co jsme doteď potkali. Takže nejen, že je hledání původní funkce těžké, ale nemůže na to existovat žádný konkrétní postup.

Formálněji

Formálně máme tedy funkci f , ke které chceme najít tzv. primitivní funkci F , tedy F takové, že $F' = f$ ($F'(x) = f(x)$ pro všechna x). Množině takových funkcí budeme říkat neurčitý integrál a značit ji $\int f(x) dx$. Lze také dokázat, že se všechny primitivní funkce liší právě o konstantu (derivace konstanty je nula, takže se neprojeví v derivaci), takže pro konkrétní F píšeme

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{nebo} \quad \int f(x) dx \stackrel{C}{=} F(x).$$

\int značí písmeno *s* jako suma,⁷ $f(x)$ prostě to, že tzv. integrujeme funkci f v proměnné x . A dx znamená (a bude to ještě víc patrné u určitého integrálu), že „sčítáme“ přes „nekonečně malé“ změny proměnné x . Nakonec C vyjadřuje libovolné reálné číslo, neboť pokud $F(x)$ je primitivní funkce, tak $F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$, je primitivní funkce.

To však není vše. Jak jsme si říkali, e^{-x^2} má primitivní funkci, ale neumíme ji vyjádřit. Co ale můžeme umět spočítat (ať už přibližně nějakou numerickou metodou nebo přesně nějakým trikem) je situace, kdy bychom si e^{-x^2} představili jako rychlost v čase x a my bychom chtěli ujetou dráhu od času a do času b . To pak nazýváme určitý integrál a značíme

$$\int_a^b e^{-x^2} dx, \quad \text{respektive} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

To je pro konkrétní a a b reálná nebo komplexní čísla (*ne funkce*), a pokud si zafixujeme primitivní funkci $F' = f$ a F existuje⁸ v a a b , potom

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

⁷Jak jsem se 28. prosince 2022 dočetl na https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_symbol znak zavedl německý matematik Leibniz, kterého každý matematik musí znát. Symbol je ve skutečnosti založen na jedné variantě psaní *s*, tzv. dlouhé *s*.

⁸Nebo její limita z příslušného směru existuje, tak to musíme definovat hlavně pro $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Tuto rovnost můžeme brát jako definici určitého integrálu a takto definovaný integrál se pak nazývá Newtonův.

Teď už počítání

Pro úplnost zopakujme vzorečky z prvního dílu ve formě pro integrály:

$$\int a \cdot f(x) + b \cdot g(x) dx = a \cdot \int f(x) dx + b \cdot \int g(x) dx \quad (\text{tzv. linearita integrálu}),$$

$$\text{tj. } \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad \int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \text{ a } \int -f(x) dx = - \int f(x) dx.$$

$$(r \neq -1) : \int x^r dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{r+1}}{r+1}, \quad \text{speciálně: } \int a dx \stackrel{C}{=} ax, \quad \text{speciálně: } \int 0 dx \stackrel{C}{=} 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx \stackrel{C}{=} \ln x, \quad \int e^x dx \stackrel{C}{=} e^x, \quad \int a^x dx \stackrel{C}{=} \frac{a^x}{\ln a},$$

$$\int \cos x dx \stackrel{C}{=} \sin x, \quad \int \sin x dx \stackrel{C}{=} -\cos x, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \stackrel{C}{=} \tan x,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \stackrel{C}{=} -\cotan x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{C}{=} \arcsin x \stackrel{C}{=} -\arccos x,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{C}{=} \arctan x \stackrel{C}{=} -\operatorname{arccotan} x.$$

Úloha 1 [6b]: *Vypočítejte neurčité integrály:*

$$\int 42 dx, \quad \int 5 \sin x + \frac{6}{\cos^2 x} dx, \quad \int \int 6x dx dx.$$

Vypočítejte určité integrály:

$$\int_0^1 x dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin x dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Úloha 2 [3b]: *Spočítejte, jakou vzdálenost urazí těleso při volném pádu za t sekund, pokud je zrychlení (druhá derivace výšky) g . (Zanedbejte odpor vzduchu.)*

Za jak dlouho spadne a s jakou rychlostí dopadne předmět spadlý ze špičky Petřínské rozhledny⁹ (58,7 m)? (Všimněte si, že bez odporu nezáleží na hmotnosti.)

Připomínám, že zrychlení je druhá derivace výšky a tíhové zrychlení v ČR je přibližně $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$.

⁹https://cs.wikipedia.org/wiki/Petřínská_rozhledna, navštíveno 28. prosince 2022.



Těžší vzorce

Vzorec pro derivování složené funkce $((F(G(x)))' = F'(G(x)) \cdot G'(x))$ můžeme také použít při výpočtu integrálů. Přidáme integrály:

$$F(G(x)) \stackrel{C}{=} \int (F(G(x)))' dx = \int F'(G(x)) \cdot G'(x) dx.$$

Používá se tzv. substitucí: Například chceme spočítat $\int 2x \cdot \sin x^2 dx$, ale neumíme počítat integrál $\sin x^2$, pouze $\sin x$. Takže zavedeme substituci $y = x^2$, to je naše G , potom $G' = y' = 2x$. F' je pro nás \sin . Tudíž náš integrál je roven integrálu na pravé straně rovnosti výše a stačí nám tak najít $F = \int F'$, jelikož výsledek pak bude levá strana, tj. $F(G(x))$:

$$\int \sin y dy \stackrel{C}{=} -\cos y \quad \dots \quad \int 2x \sin x^2 dx \stackrel{C}{=} -\cos x^2.$$

Nefornálně můžeme postupovat: z $? dx = dy$ „vydělením dx “ dostaneme $? = \frac{dy}{dx}$ a derivace $y = x^2$ podle x je $2x$, tedy $2x dx = dy$:

$$\int 2x \sin x^2 dx = \int \sin x^2 (2x dx) = \int \sin y (dy) \stackrel{C}{=} -\cos y = -\cos x^2.$$

Připomínám, že $\int f(x)dy$, $\int f(y)xdy$, ... kde x i y jsou proměnné (které na sobě závisí, např. $y = x^2$) nemůžeme počítat tím, že na x zapomeneme / díváme se na x jako na konstantu a integrujeme pouze část s y . Takhle to bohužel nefunguje.



Úloha 3 [2b]: *Spočítejte integrály*

$$\int \frac{1}{e^x} dx, \quad \int_0^2 x e^{-x^2} dx.$$

Nakonec můžeme využít i vzorec pro derivaci součinu, $(FG)' = F'G + G'F$, jelikož když přidáme integrál, dostaneme

$$F(x)G(x) \stackrel{C}{=} \int (F(x) \cdot G(x))' dx = \int F'(x) \cdot G(x) dx + \int G'(x) \cdot F(x) dx$$

$$\int F'(x) \cdot G(x) dx \stackrel{C}{=} F(x)G(x) - \int G'(x) \cdot F(x) dx.$$

Tedy při označení $f = F'$ a $g = G'$ máme (tzv. integraci per partes)

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x)G(x) - \int g(x) \cdot F(x) dx.$$

Takže funkci, kterou chceme integrovat, rozložíme na součin funkce, kterou umíme integrovat (f), a funkce, kterou umíme derivovat (G), a dosadíme. To, jak funkci

rozdělíme na $f \cdot G$, je čistě na nás a většinou musíme vyzkoušet různá rozdělení, protože některá nás dostanou dál a některá ne.

Typickým příkladem je $\int x \cdot \cos x \, dx$, kde umíme oba činitele derivovat i integrovat, ale integrování x nikam nevede, tedy zvolíme $G = x$ a $f = \cos x$, tedy $g = 1$ a $F = \sin x$:

$$\int x \cdot \cos x \, dx \stackrel{C}{=} x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx \stackrel{C}{=} x \cdot \sin x + \cos x.$$

Úloha 4 [4b]: *Spočítejte*

$$\int x \cdot e^x \, dx, \quad \int \ln x \, dx, \quad \int \cos^2 x \, dx.$$

Hint: Ve druhém případě se funkce vynásobí 1, ve třetím případě je třeba provést per partes chytře (tak abychom nedostali to, co na začátku) dvakrát a pak upravit vzniklou rovnici.

Problém 5: *Najděte použití integrálů (ať už určitých nebo neurčitých). Hledejte využití, která ještě nezazněla v tomto ročníku.*

Stále také můžete hledat užítí derivací, hledání extrémů (např. v dokazování nerovností) nebo diferenciálních rovnic. Obzvláště budeme rádi za hezké simulace získané jejich numerickým řešením.

Tím jsme se dostali na konec tohoto dílu, ve dvou zbývajících dílech si ukážeme, jak využít integrály na počítání obsahu a objemu a podíváme se, co dělat, když primitivní funkce neexistuje, tedy nemůžeme použít Newtonův integrál, ale musíme použít jiný (např. Riemannův či Lebesgueův).

Zbývají už jen články od Mgr.^{MM} Ondřeje Sedláčka (Využití hledání extrémů a monotonii) a Mgr.^{MM} Radima Nováka (Kyvadla) reagující na problémy v minulých dílech, dobře se bavte.

Jidáš: jonas.havelka@volny.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

Ještě úloha z následujícího článku:

Úloha 6 [2b]: *Majitel restaurace chce oplotit svůj obdélníkový pozemek přimykající se jednou stranou k budově restaurace. Plocha pozemku je 800 m^2 . Jaký by měl pozemek mít rozměry, aby majitele oplocení vyšlo co nejlevněji, tj. aby délka plotu byla co nejmenší?*



Využití hledání extrémů a monotonií

11b

Mgr.^{MM} Ondřej Sedláček

Protože hledání extrémů a monotonií je jeden ze základů diferenciálního počtu, podobně jako diferenciální počet se využívá v mnoha oborech. Zde si ukážeme využití v několika z nich a využití v několika příkladech uvedených v zadání.

Ekonomie

Protože při dostatečné abstrakci jsme schopni příjem a náklady vyjádřit jako funkci s jednou neznámou, můžeme samozřejmě hledat její extrémy, a tím maximalizovat zisk či maximalizovat příjem.

Nejdříve věnujeme pozornost maximalizaci příjmu. Protože pro ziskovou funkci $PR(q)$, nákladovou funkci $C(q)$ a příjmovou funkci $R(q)$, kde q je množství prodaného zboží, platí [12] [5]:

$$PR(q) = R(q) - C(q)$$

Pak platí:

$$PR'(q) = R'(q) - C'(q) = 0$$

$$R'(q) = C'(q)$$

A poněvadž mezní příjem¹⁰ $MR(q) = R'(q)$ a mezní náklady $MC(q) = C'(q)$, odvodili jsme za pomoci derivací jedno z ekonomických pravidel [10] [5], a to že při maximalizaci výroby se mezní příjmy rovnají mezním nákladům.

Pokud však místo výrobků prodáváme třeba lístky nebo licence, mezní náklady budou nulové. Ale zase samozřejmě se může měnit poptávka se změnou ceny, tudíž při maximalizaci příjmu se pokoušíme zjistit takovou cenu, kdy bude příjem nejvyšší. V tomto případě bude příjem roven součinu ceny a množství. [12] [5]

Oboje si teď ukážeme na příkladech:

Příklad 1. *Společnost vyrábějící mluvící robůtky na kolečkách pro děti má nákladovou funkci $C(q) = q^2 + 10q + 100$ a příjmovou funkci $R(q) = 900q$. Určete množství q , při kterém bude zisk maximalizován.*

Řešení.

Víme, že extrémy se nachází v bodech, kdy $R'(q) = C'(q)$. Tudíž musíme jako první zjistit derivace.

$$R'(q) = 900 \cdot (q)' = 900$$

$$C'(q) = (q^2)' + (10q)' + (100)' = 2q + 10$$

¹⁰Pozn. redakce: Mezní příjem a mezní náklady říkají, jak rychle se zvyšují příjmy (resp. náklady) s množstvím. Tj. mezní příjem je derivace příjmu podle množství a mezní náklady jsou derivací nákladů podle množství.

Když dosadíme, vyjde nám:

$$R'(q) = C'(q)$$

$$900 = 2q + 10$$

$$890 = 2q$$

$$q = 445$$

Teď si ověříme, že to není minimum. Protože v intervalu $(-\infty; 445)$ zisková funkce $\pi(q) = R(q) - C(q)$ roste a v intervalu $(445; +\infty)$ klesá, musí se jednat o maximum. Proto výsledek bude $q = 445$.

Příklad 2. *Cena licence softwaru na úpravu fotografií je definována v eurech jako $p(q) = 200 - 0,01q$. Určete množství q , při kterém bude příjem $R(q)$ maximalizován.*

Řešení.

Zde bude příjem roven $R(q) = p(q) \cdot q$. Proto jako první dosadíme funkci $p(q)$ do $R(q)$ a pak zderivujeme.

$$R(q) = p(q) \cdot q = (200 - 0,01q) \cdot q = -0,01q^2 + 200q$$

$$R'(q) = (-0,01q^2)' + (200q)' = -0,01 \cdot 2q + 200 = -0,02q + 200$$

Následně najdeme extrémy:

$$R'(q) = -0,02q + 200 = 0$$

$$200 = 0,02q$$

$$q = 10000$$

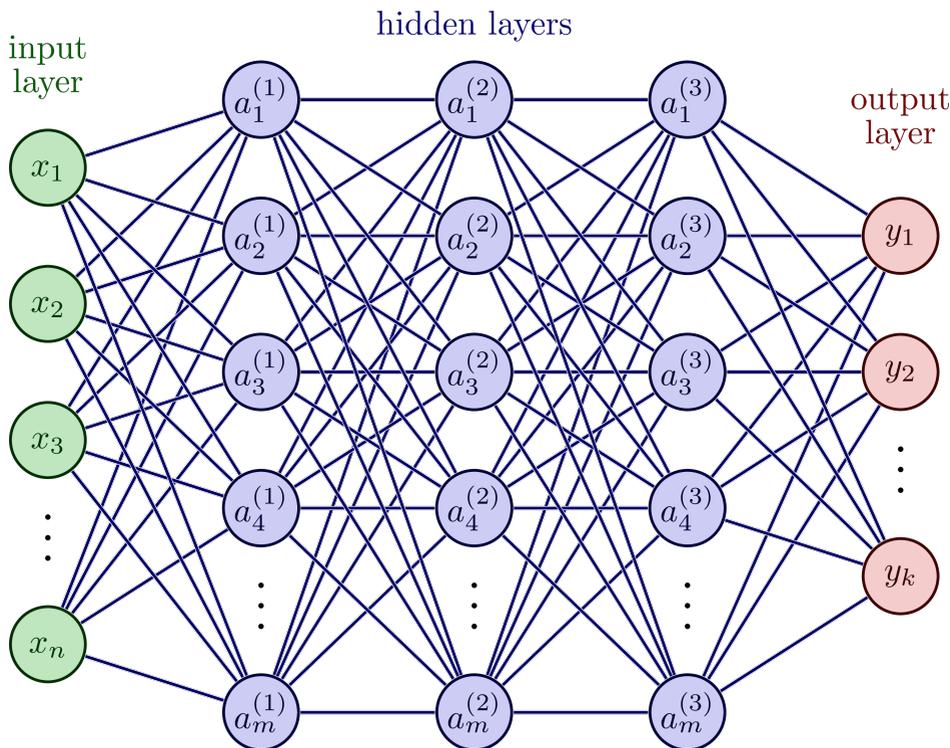
Zde příjmová funkce v intervalu $(-\infty; 10000)$ roste a v intervalu $(10000; +\infty)$ klesá, tudíž se jedná o maximum. Proto $q = 10000$.

Umělá inteligence

Další odvětví, kde se využívá znalostí matematické analýzy o hledání extrémů, je umělá inteligence. Přesněji nahlédneme do fungování strojového učení a ukážeme si, kde se hledání extrémů v něm využívá.

Nejdříve si však stručně vysvětlíme fungování jednoho ze základních typů neuronových sítí, kde se tento algoritmus používá. Na obrázku vidíte, že jednotlivé neurony jsou uspořádány do vrstev¹¹ – vstupní vrstvy, skrytých vrstev a výstupní vrstvy. Každý neuron je spojený s každým neuronem v předchozí vrstvě, každý ten spoj má určitou váhu a každý neuron má určitou konstantu „bias“. Tyto

¹¹Pozn. redakce: Na obrázku každá z pěti svislých skupin. Účelem rozdělení na vrstvy je, aby hodnota jednoho neuronu nezávisela (ani přes další neurony) na něm samotném.



Obrázek 17: Příklad neuronové sítě (zdroj: https://tikz.net/wp-content/uploads/2021/12/neural_networks-004.png)

hodnoty jsou zásadní pro to, aby neuronová síť vrátila správný výsledek. Avšak nejdříve musíme tyto hodnoty zjistit. [1]

Na začátku se tyto konstanty určí náhodně. Pak se opakuje následující postup. Nejdříve se dosadí vstupní hodnoty do vstupní vrstvy. Pak se určují hodnoty dalších neuronů tak, že se vypočítá vážená suma hodnot neuronů v předchozí vrstvě, od ní se odečte „bias“ a to celé se pak vloží do funkce sigmoidy, což je logická funkce s oborem hodnot $(0; 1)$. [9] [1] Jakmile jsou vypočteny hodnoty neuronů ve výstupní vrstvě, vypočítá se hodnota chybové funkce C jako suma čtverců odchylek od správného výsledku. Tato funkce má váhy a biasy jako proměnné a vstup jako parametr. A protože chceme, aby byla chyba co nejmenší, musíme najít její minimum. Ale poněvadž máme až příliš mnoho proměnných, můžeme jediné najít sklon dané funkce a pak se posunout směrem k minimum. [2]

Tomuto postupu se říká gradientní sestup, protože najde gradient v daném bodě a pak jde opačným směrem proti němu. Na tomto postupu je založený důležitý algoritmus strojového učení „algoritmus zpětného šíření chyby“ (anglicky backpropagation) – podle hodnoty chybové funkce postupně vrstvu po vrstvě mění

hodnoty jednotlivých konstant. Bohužel lze tímto postupem najít jen lokální minimum, což ale je často postačující. [2]

Statistika

Ještě chci zmínit jednu centrální metodu matematické statistiky a to metodu maximální věrohodnosti.

Předpokládejme, že máme určitý statistický soubor dat, třeba EQ (emoční kvocient) obyvatel, a chceme být schopni odhadnout, jak častí budou obyvatelé s EQ, který neměl nikdo v daném vzorku obyvatelstva. Pak budeme muset vybrat určité rozdělení, které bude nejlépe odpovídat danému souboru. Mezi ně patří normálové (jehož tvar je Gaussova křivka, pro tento typ dat nejpravděpodobnější), exponenciální či gama rozdělení. Avšak funkce těchto rozdělení mají parametry, které mění tvar daného rozdělení. Zde pak přichází na radu zmiňovaná metoda. [11]

Jejím cílem je najít takový parametr θ , pro který je pravděpodobnost, že pozorované hodnoty pocházejí z předpokládaného rozdělení, maximální. [4] [6]

Nechť funkce sdružené hustoty $f(x_1, \dots, x_n | \theta)$ je definován jako:

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

Kde $f(x|\theta)$ je funkce rozdělení. Pak se parametr θ určuje u spojitého rozdělení hledáním extrému za pomoci derivace věrostonní funkce $\mathcal{L}(\theta|x_1, \dots, x_n)$, která je s funkcí sdružené hustoty totožná až na prohozené proměnné a parametry. [4] [6]

Bohužel se při výpočtu pracuje s nekonečnými sumami a produkty, což by dle mého názoru přesáhlo rámeček tohoto textu. Proto pokud máte zájem o nějaký příklad, jeden můžete najít na české Wikipedii (https://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_maximální_věrohodnosti).

Užití na příkladech ze zadání

Jako poslední tu ukáži využití hledání extrémů a monotonii na dvou příkladech ze zadání pro ty, kteří tento problém neřešili nebo chtějí vidět řešení někoho jiného, přesněji na hledání vrcholu paraboly a vrhu šikmého.

Hledání vrcholu paraboly

Pro hledání vrcholu paraboly ani nemusíme použít derivace, pokud známe vrcholový tvar kvadratických funkcí [7]:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

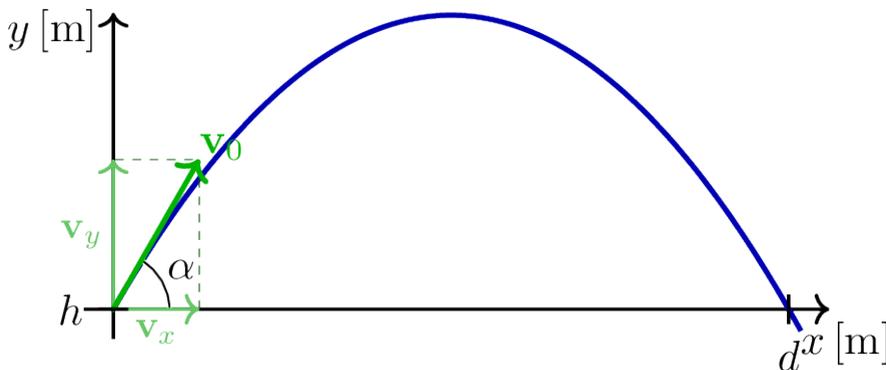
A víme, že na ose x se bude vrchol nacházet v $x = -\frac{b}{2a}$. Ale pokud chceme použít metody matematické analýzy, pak stačí kvadratickou funkci zderivovat,



pak najít, kdy se derivace protíná s osou x , a ověřit si, že se jedná o globální extrém.¹²

Vrh šikmý

Další příklad je vrh šikmý. Pro ten budu zanedbávat odpor a jeho trajektorie bude začínat v počátku.



Obrázek 18: Náčrt vrhu šikmého (zdroj původního obrázku: https://tikz.net/kinematics_trajectory2/)

Protože vrh šikmý je pohyb složený z pohybu rovnoměrného přímočarého a volného pádu, můžeme jednoduše za pomoci obrázku 18 určit vztah pro x a pro y [8]:

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

V těchto rovnicích máme dvě neznámé – čas t a úhel α , tudíž ty funkce nemůžeme rovnou zderivovat. Avšak času t jsme se schopni zbavit dosažením z jiného vztahu.

Začneme nejdříve u maximální výšky y_m . Protože při dosažení maximální výšky je okamžitá rychlost v_y nulová, platí:¹³

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t = 0$$

$$v_0 \sin \alpha = g t$$

¹²Pozn. redakce: Podrobně byl tento vzorec odvozen v čísle 29.3 na straně 36.

¹³Pozn. redakce: $v_y = \frac{dy}{dt}$ je okamžitá rychlost ve směru osy y .

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Když dosadíme toto do vztahu pro y , dostaneme maximální výšku:

$$y_m = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

U dostřelu zase bude platit, že souřadnice y bude nulová, proto bude platit:

$$y_d = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$v_0 \sin \alpha = \frac{gt}{2}$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Po dosazení do vztahu pro x získáme dostřel:

$$d = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Teď už můžeme jak maximální výšku y_m , tak dostřel d zderivovat:

$$y'_m = \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right)' = \frac{v_0^2}{2g} \cdot (\sin^2 \alpha)' = \frac{v_0^2}{2g} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$$

$$d' = \left(\frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)' = \frac{2v_0^2}{g} \cdot (\sin \alpha \cos \alpha)' = \frac{2v_0^2}{g} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha$$

Protože se derivace každé z nich musí rovnat nule, vyplývá z toho, že nulové hodnoty pro maximální výšku jsou 0° a 90° a pro dostřel 45° . Když vyřadíme úhel 0° , protože při něm hmotný bod nikam nedoletí, pak máme řešení.

Závěr

Jak jste si mohli všimnout, v naprosté většině případů se hledání extrémů a monotonií pojí s optimalizací. To se také ukazuje na mnoha slovních úlohách, mezi které patří například tato [3]:

„Majitel restaurace chce oplotit svůj obdélníkový pozemek přimykající se jednou stranou k budově restaurace. Plocha pozemku je 800 m^2 . Jaký by měl pozemek mít rozměry, aby majitele oplocení vyšlo co nejlevněji, tj. aby délka plotu byla co nejmenší?“

Po přečtení jsem si celkem jistý, že tuto úlohu budete schopni vyřešit, jako jsem si jistý, že pokud jste o smysluplném využití hledání extrémů a monotonií pochybovali, už o tom nepochybujete.



Zdroje

- [1] 3Blue1Brown. *But what is a neural network? | Chapter 1, Deep learning*. 5. říj. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=aircAruvnKk> (cit. 06. 11. 2022).
- [2] 3Blue1Brown. *Gradient descent, how neural networks learn | Chapter 2, Deep learning*. 16. říj. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=IHZwWFHwa-w> (cit. 06. 11. 2022).
- [3] Michaela Jelínková. “Aplikační úlohy z diferenciálního počtu jedné proměnné”. In: (2013), s. 65. URL: https://theses.cz/id/776duo/Aplikan_lohy_z_diferencilneho_potu_jedn_promnn.pdf.
- [4] *Matematická biologie učebnice: Metoda maximální věrohodnosti*. URL: <https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickyh-a-biologickyh-dat--biostatistika-pro-matematickou-biologii--bodove-a-intervalove-odhady--metoda-maximalni-verohodnosti> (cit. 06. 11. 2022).
- [5] Jiří Mazurek. *Matematika v ekonomii: pro prezenční i kombinovanou formu studia*. OCLC: 897870316. Karviná: Slezská univerzita v Opavě, Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné, 2013. ISBN: 978-80-7248-837-7.
- [6] *Metoda maximální věrohodnosti*. In: *Wikipedie*. Page Version ID: 21307647. 21. květ. 2022. URL: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Metoda_maxim%C3%A1ln%C3%AD_v%C4%9Brohodnosti&oldid=21307647 (cit. 06. 11. 2022).
- [7] Oldřich Odvárko a Miloš Jirsa. *Matematika pro gymnázia. Funkce*. 2. vyd., 1. vyd. v nakl. Prometheus. OCLC: 39569705. Praha: Prometheus, 1994. ISBN: 978-80-85849-09-7.
- [8] Realisticky.cz. “Vrh šikmý”. In: (), s. 6. URL: <http://www.realisticky.cz/ucebnice/02%20Fyzika%20S%C5%A0/01%20Mechanika/06%20Gravita%C4%8Dn%C3%AD%20pole/06%20%C5%A0ikm%C3%BD%20vrh.pdf>.
- [9] *Sigmoid function*. In: *Wikipedia*. Page Version ID: 1118893984. 29. říj. 2022. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sigmoid_function&oldid=1118893984 (cit. 06. 11. 2022).
- [10] *Slovníček pojmů - Zlaté pravidlo maximalizace zisku - BusinessCenter .cz*. URL: <https://businesscenter.podnikatel.cz/slovnicek/zlate-pravidlo-maximalizace-zisku/> (cit. 06. 11. 2022).
- [11] StatQuest with Josh Starmer. *Maximum Likelihood, clearly explained!!!* 31. čvc. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=XepXt19YKwc> (cit. 06. 11. 2022).
- [12] Martina Zahradníčková. “Ekonomické aplikace diferenciálního a integrálního počtu”. In: (2009), s. 65. URL: https://is.muni.cz/th/nmf4k/Bakalarska_prace.pdf.

Kyvadla

12b

Mgr.^{MM} Radim Novák

Úvod

Harmonický oscilátor a matematické kyvadlo jsou velmi důležité modely ve fyzice. Jistě jste již o nich někdy slyšeli, ale stejně je v rychlosti představím. Oscilátorem nazýváme systém vykonávající kmitavý pohyb. Kmitavý pohyb charakterizujeme jako pohyb, při kterém systém opakovaně prochází rovnovážnou polohou. Harmonickým oscilátorem pak nazýváme oscilátor, jehož výchylky z rovnovážné polohy v závislosti na čase lze popsat sinusoidou.

Jedním případem harmonického oscilátoru je matematické kyvadlo. Matematické kyvadlo lze popsat jednoduše: Uvažujme hmotný bod zavěšený na laně o zanedbatelné hmotnosti a objemu, kde druhý konec lana je nepohyblivý.

V tomto článku bych se chtěl zaměřit na matematické kyvadlo a konkrétně na počítačovou simulaci takového kyvadla.

Matematické kyvadlo

Abych mohl simulovat nějaký systém, ne nutně fyzikální, potřebuji znát nějaké zákonitosti, kterými se řídí. Konkrétně potřebuji znát rovnici nebo rovnice popisující systém, který simuluji. Pokud se snažím simulovat systém, který se nějak mění, je velmi užitečné využívat jako model diferenciální rovnice. Diferenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých se vyskytuje derivace. Výsledkem takové rovnice je pak funkce. Je dobré se zamyslet nad tím, proč jsou diferenciální rovnice u měnících se systémech tak užitečné, ale to ponechám čtenáři.

Abych tedy simuloval nějaké kyvadlo, potřebuji znát rovnici, podle které se kyvadlo chová. Vzhledem k tomu, že kyvadlo je systém, který mění polohu v čase, vím, že taková rovnice bude pohybová rovnice. O pohybových rovnicích by se dal napsat samostatný článek, takže zde jen uvedu, že nejjednodušší způsob nalezení takové rovnice je přes Newtonův druhý zákon. Z něj dostávám pohybovou rovnici matematického kyvadla:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0, \quad (1)$$

kde φ je funkce úhlu, který svírá lanko kyvadla s polohou lanka v rovnovážné poloze a $\ddot{\varphi}$ je úhlové zrychlení, tedy $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Tato rovnice bohužel nemá analytické řešení, proto se k jejímu vyřešení často používá tzv. aproximace malého úhlu, tedy $\sin(\varphi) = \varphi$. Naštěstí pro nás existují i numerické metody řešení, které jsou v dnešní počítačové době velmi užitečné. Ve své simulaci matematického kyvadla jsem použil Eulerovu metodu.

Eulerova metoda

Pomocí numerických metod řešení diferenciálních rovnic jsme schopni aproximovat hodnoty hledané funkce, jediné co potřebujeme jsou známé počáteční podmínky a samozřejmě rovnice, jejíž výsledek aproximujeme. V této sekci vám chci představit tzv. Eulerovu metodu. Eulerova metoda je jedna z nejstarších numerických metod, poprvé uvedena Leonhardem Eulerem v roce 1768. Je to metoda prvního řádu, což znamená že error¹⁴ po jednom kroku je úměrný čtverci velikosti kroku.

Základní myšlenka je jednoduchá. Mějme rovnici:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (2)$$

s počáteční podmínkou:

$$y(x_0) = y_0 \quad (3)$$

Předpokládejme, že rovnice je moc složitá, než abychom ji uměli analyticky vyřešit. Naštěstí pro nás máme velmi důležitou informaci. My totiž víme, jak se funkce $y(x)$ bude měnit v bodě $[x_0, y_0]$: na to nám stačí dosadit do funkce $F(x, y)$ x_0 a y_0 tedy dostaneme $F(x_0, y_0)$, což nám říká hodnotu derivace $y(x)$ v tomto bodě. Pokud chceme aproximovat další hodnotu, víme jakým směrem se z bodu $[x_0, y_0]$ vydat, protože známe derivaci v tomto bodě. Udělejme tedy malý krok tím směrem. Dostáváme nový bod $[x_1, y_1]$. Z rovnice přímky pak:

$$y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0), \quad (4)$$

kde k je sklon, tedy $k = F(x_0, y_0)$. Označme $(x_1 - x_0) = h$. Vyjádříme y_1 :

$$y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0) \quad (5)$$

Proces můžeme opakovat, obecně platí:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n), \quad (6)$$

kde $x_n = x_0 + h \cdot n$. Konstantě h říkáme krok, je to v podstatě krok na x-ové ose. Pokud je h dostatečně malé, dostáváme dobrou aproximaci s malým errorem.

Simulace

Ted, když máme numerickou metodu na aproximaci diferenciálních rovnic a i samotnou rovnici, musíme udělat ještě jeden krok, než můžeme psát simulaci. Můžete si všimnout, že Eulerova metoda aproximuje pouze diferenciální rovnice prvního řádu,¹⁵ zatímco naše rovnice je druhého řádu. Tento problém má ale jedno-

¹⁴Pozn. redakce: Errorem, česky chybou, se zde myslí horní odhad na absolutní hodnotu rozdílu numericky vypočítané hodnoty a reálné hodnoty (většinou ještě vydělený reálnou hodnotou pro relativní vztah) po jednom kroku. Závisí tedy na použité numerické metodě a délce kroku. Pomocí erroru se tak dají porovnat numerické metody – čím více klesá s klesající délkou kroku tím je metoda lepší (dává přesnější výsledky). Vztah může být např. lineární, pak s n -krát menším krokem máme n -krát menší error, nebo kvadratický (úměrný čtverci), pak s n -krát menším krokem máme n^2 -krát menší chybu.

¹⁵Pozn. redakce: Řád rovnice je nejvyšší derivace, která se v ní nachází.

duché řešení. Přepíšeme naši jednu rovnici druhého řádu na soustavu dvou rovnic prvního řádu, kde můžeme použít Eulerovu metodu. Zavedeme proměnou u jako $u = \dot{\varphi}$ dále $\dot{u} = \ddot{\varphi}$. Dostaneme:

$$\dot{u} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi) \quad (7)$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{u} \quad (8)$$

V praxi pak ve svém programu máte dvě funkce, jednu, která aproximuje první rovnici a druhou, která aproximuje druhou rovnici.

Moji vlastní simulaci si můžete vyzkoušet zde:

<https://github.com/Radim123/pendulum/blob/main/pendulum.py>

Nebo simulaci kyvadla na kyvadle, jejíž popis se sem úplně nevešel:

<https://github.com/Radim123/pendulum/blob/main/pendulum2.py>

Zdroje

Eulerova metoda (doporučuji se kouknout):

https://www.youtube.com/watch?v=Pm_JWX6DI1I





Téma 5 – Outdoorové vařiče

Úvod

Milí řešitelé, vítám vás u třetího dílu témátka! Pro ty, kteří předchozí díly nečetli, připomínám, že cílem témátka je měřit parametry různých outdoorových vařičů a získat tak co nejpřesnější podklady pro spotřebitele, který by si chtěl podle svých preferencí nějaký vařič pořídit.

Přišla nám již dvě řešení experimentálních problémů, díky moc za ně! V dnešním díle si tedy nejdříve stručně zmíníme jisté potíže, na které jsme při měření narazili, poté bude následovat shrnutí toho, co a jak měříme (abychom nemuseli hledat informace ve starších číslech časopisu), a závěrem znovu otiskujeme zadání problémů a komentář k řešením, která dorazila.

Do příštího čísla již plánuji připravit veřejnou tabulku, ve které budou přehledně shrnuta naměřená data od všech řešitelů. Tak vzhůru do měření, ať tu tabulku máme čím zaplnit!

Nečekané potíže

První, méně podstatný problém se týká hmotnosti samotné kartuše u plynových vařičů. Já jsem v předchozím dílu navrhoval připočítat ji k hmotnosti vařiče, což má svůj důvod (kartuše se nespotebovává), někdo ji ale naopak řadí k palivu (pokud totiž chci hodně paliva, musím nést více kartuší). Tento problém asi nejde nějak objektivně rozhodnout, ale pro zachování kompatibility dat bude nejvýhodnější *udávat hmotnost prázdné kartuše zvlášť*, aby bylo možné ji později přičíst k čemukoliv dle uvážení.

Druhý problém se opět týká plynových vařičů a dá se shrnout do jedné věty: Výkon vařiče výrazně klesá s množstvím plynu v kartuši. To nám dělá čáru přes rozpočet, protože výsledky našich měření závisí na tom, s jak plnou kartuší měříme. Pojdme se tedy domluvit, že *pro každé měření budeme udávat nejen spotřebované množství paliva, ale i množství paliva v kartuši na začátku měření*.

Kromě toho tedy zbývá otázka, co uvažovat u plynového vařiče za skutečnou rychlost vaření. Nabízí se počítat s hodnotou při poloprázdné kartuši. Takovou hodnotu nemusíme pro každý vařič znát, ale pokud budeme mít dostatek dat o chování problému, mohli bychom umět tuto hodnotu dopočítat z měření pro jiný stav kartuše.

Je také otázkou, zda tento problém nastává u všech plynových vařičů a zda podobný jev platí například i pro benzinový vařič nebo vařič na tekutý líh.

Metodika měření

Následuje shrnutí metodiky měření, pro podrobnější rozbor a zdůvodnění vizte prosím předchozí díl témátka.¹⁶

¹⁶https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/29/29-3.pdf#section*.20

- Měříme *cenu, hmotnost, objem a rychlost vaření* vaříče a *cenu, hmotnost a objem* paliva podle metodiky popsané níže (aby byly výsledky vzájemně kompatibilní).
- Všechny parametry paliva vztahujeme k tomu, kolik ho potřebujeme na uvaření jednoho litru vody.
- Pokud je to možné, parametry měříme sami, nespolehneme se na data od výrobce.
- U složitějších měření náchylných k chybám je nutné měření opakovat vícekrát a spočítat odchylku. V našem případě je to hlavně měření rychlosti vaření a spotřeby paliva.
- Pokud nám to funkce vaříče a naše časové možnosti dovolí, provedeme níže popsaná měření opakovaně pro různý výkon vaříče (například pro minimální, prostřední a maximální). V opačném případě budeme měřit pouze při maximálním výkonu.
- Jistě se často stane, že má měřený vaříč nějaké významné vlastnosti (ať už pozitivní či negativní), které se nedají jednoduše objektivně změřit, ale přesto je považujeme za významné a nechtěli bychom o ně spotřebitele ochudit. Můžeme tedy k našemu měření přidat stručný slovní soupis takových vlastností (např. „Vaříč působí velmi nestabilně a během měření se mi třikrát překlopil.“).
- Vřele doporučuji měřit alespoň ve dvou lidech, je to větší zábava!¹⁷
- Při měření si pečlivě a systematicky zapisujeme dosažené výsledky, *v žádném případě si výsledky nevyjmýšlíme ani s nimi nijak nemanipulujeme.*

Cena vaříče

Chceme zjistit nejnižší cenu, za kterou lze daný vaříč v ČR pořídit, nejlépe ke konkrétnímu datu (nechť je to 30. listopadu 2022). K tomu můžeme využít srovnávač cen Heureka¹⁸), na kterém většinou lze najít i historický vývoj minimální ceny výrobku.

Hmotnost vaříče

Vážíme vaříč včetně potřebného příslušenství (pokud takové existuje), bez nádobí. Použijeme váhu s přesností na gramy či lepší (měla by stačit běžná kuchyňská). V případě vaříčů s kartuší zvážíme kartuši zvlášť.

¹⁷Pokud budete na řešení problému spolupracovat, sepište prosím pouze jedno řešení. Každý z n autorů řešení poté získá $\frac{3b}{n+2}$ bodů, kde b je počet bodů které by řešením získalo, pokud by mělo jen jednoho autora. Toto platí v rámci celého M&M, nejen v tomto tématku.

¹⁸<https://www.heureka.cz>



Objem vařiče

Vařič složíme do co nejkompaktnějšího stavu, obalíme ho potravinářskou fólií a poté ho ponoříme do zcela plné nádoby s vodou o známém objemu. Vařič vytlačí množství vody o stejném objemu jako je objem vařiče, dále tedy stačí změřit objem zbylé vody a odečíst ho od objemu nádoby. Vařič obalíme co nejtěsněji (aby výsledek odpovídal místu zabranému v batohu) a pro lepší srovnání můžeme i přiložit fotku obaleného vařiče.

Rychlost vaření

Budeme měřit rychlost uvaření jednoho litru vody o počáteční teplotě 20 °C. Měříme v závětří a zaznamenáme si teplotu vzduchu. Použijeme typický ešus, tedy kovovou nádobu tvaru válce o průměru přibližně 15 cm s tenkými stěnami bez pokličky. Měření ukončíme, až teplota vody dosáhne 95 °C. Teplotu měříme uprostřed objemu vody (tedy ne u hladiny, u stěny ani u dna).

U plynových vařičů rovněž změříme a uvedeme počáteční množství plynu v kartuši (viz vysvětlení výše).

Hmotnost spotřebovaného paliva

Vařič i s palivem zvážíme před a po testu rychlosti vaření – tím získáme hmotnost spotřebovaného paliva. Tato metodika je jistě vhodná např. pro benzín, tekutý líc či plyn, pro pevná paliva může být vhodné použít jinou metodiku.

Objem spotřebovaného paliva

Změříme objem i hmotnost většího množství paliva a z hustoty spočítáme objem paliva spotřebovaný na uvaření litru vody. Některé typy paliv (například plyn) je ale nutné uchovávat v nádobě, která svůj objem nemění. V takovém případě počítáme průměrnou hustotu – tedy hustotu v případě poloprázdné nádoby.

Cena spotřebovaného paliva

Použijeme stejnou metodiku jako při určování ceny vařiče. Cenu poté přes hmotnost či objem přepočteme na cenu za uvaření litru vody.

Zadání problémů

Primárně prosím řešte problém 1, abychom získali dostatek dat o vařičích.



Problém 1: *Sežeňte si jeden či více outdoorových vařičů (včetně paliva) a změřte jejich parametry podle metodiky výše. Výsledná data včetně spočítaných odchylek odevzdejte nejlépe jako tabulku (.ods, .xlsx, ...) s případným komentářem vysvětlujícím formát dat (zkrátka aby bylo zcela jasné, co která čísla znamenají).*

Data by měla být doplněna textem ve formátu PDF, ve kterém stručně a výstižně popíšete metodiku měření (nemusíte opakovat informace otištěné v tomto čísle) a shrnete dosažené výsledky.

Zároveň může váš text obsahovat krátký komentář ohledně dalších vlastností vařiče (jak bylo zmíněno v sekci o parametrech), rady a tipy pro další řešitele, návrhy souvisejících problémů, které vás napadly nebo vyustaly při měření, řešení těchto problémů. . .

Při vaření příliš malého množství vody se většina energie vařiče spotřebuje na zahřátí nádoby (takže pro rychlost vaření budou klíčové parametry nádoby), naopak při příliš velkém množství vody se kvůli odvodu tepla do okolí voda nikdy vařit nezačne.

Problém 2 (bonusový): *Zkuste změřit čas uvaření vody pro různá množství a výsledky zaneš do grafu, který bude mít na x-ové ose množství vody a na y-ové ose poměr množství vody a času vaření spotřebovaného paliva. Můžete zkusit tuto křivku zjistit pro různé vařiče, případně s různými nádobami. Dejte si pozor na metodiku měření (počáteční teplotu vody i nádoby, definici varu. . .) a na odchylky.*

K dalšímu bonusovému problému podotýkám, že je jistě nutné nějak brát v úvahu preference konkrétního spotřebitele.

Problém 3 (bonusový): *Navrhněte způsob, jak ze změřených dat určit, který vařič je pro daného spotřebitele nejlepší.*

Komentář k došlým řešením

Anežka Stará a Doc.^{MM} Václav Tichý odevzdali společné řešení problémů 1 a 2. Možná nejzásadnějším výsledkem jejich měření je vlastnost plynových vařičů, kterou jsme rozebírali na začátku tohoto textu. Tedy to, že výkon vařiče výrazně klesá s množstvím paliva v kartuši. Zároveň ale podle výsledků jejich měření podobný jev neplatí pro spotřebu paliva – ta zůstává konstantní.

V rámci problému 1 dále Anežka s Vaškem porovnali dva vařiče a došli k závěru, že přestože mají vařiče srovnatelnou spotřebu, jeden z nich je výrazně rychlejší. Autoři si dále upravili problém 2 tak, že místo rychlosti vaření měřili spotřebu paliva. To by mělo být v původním modelu ekvivalentní, vzhledem ke klesání výkonu by ale tato metoda mohla být, jak autoři podotýkají, přesnější. Já s touto myšlenkou souhlasím a proto jsem příslušně upravil zadání problému 2. Pro množství vody od 0,25 do 0,75 litru autoři nepozorovali žádnou anomálii, závislost spotřeby paliva na množství vody vycházela lineární.

Zato Mgr.^{MM} Ondřej Nevěřil, autor druhého odevzdaného řešení, došel k jinému závěru – v rozsahu 0,25 až 1 litr jeho měření ukazují, že větší množství vody se vařilo efektivněji. Může to být ale způsobené zmíněným problémem s klesajícím výkonem vařiče. Pro nějaký jednoznačnější verdikt si ještě budeme muset počkat na další naměřená data, která budou třeba zahrnovat i podstatně větší rozsah objemů. Ondřej rovněž řešil problém 1 pro jeden vařič, ale stejné množství vody vařil pouze jedenkrát, nemohl tedy pozorovat tentýž jev jako zbylí dva autoři. Jinak ale mezi naměřenými výsledky z problému 1 není vidět žádný rozpor.



Konference Travná 2022

Určování sentimentu filmových recenzí

8b

Doc.^{MM} Václav Tichý

Pokud jste byli na letošním podzimním soustředění, víte doufám, o co jde. Ostatním to ale asi nic moc neříká, že? Jednoduše řečeno, během naší konfery jsme se snažili vytvořit algoritmus, který bude umět určit, zda je anglicky napsaná recenze na film pozitivní, nebo negativní.

Z čeho určit?

Na stránce HuggingFace¹⁹ jsme si stáhli 50 000 recenzí, u kterých byl uveden jejich sentiment (zda jsou pozitivní, či negativní). Recenze jsou napsané převážně bez překlepů a vždy bez sprostých slov (nejspíše politika HuggingFace). Tento dataset jsme následně rozdělili na tři části následovně:

- trénovací set (25 000 recenzí) – soubor dat, ze kterých se náš program učí,
- validační set (15 000) – algoritmus optimalizujeme tak, aby na validačním setu dosáhl co největší úspěšnosti,
- testovací set (10 000) – testovací set používáme jen na konci práce, abychom neoptimalizovali pro něj (na to používáme validační set). Jako úspěšnost algoritmu se bere výsledek na testovacím setu.

Jak náš algoritmus pracuje s trénovacími recenzemi?

Nejdříve každou recenzi rozseká na slova, zahodí interpunkci, velká písmena změní na malá a duplicitní slova z recenze bude počítat jenom jednou. U každého slova zaznamenává, v kolika recenzích se objevilo celkově a v kolika pozitivních recenzích se objevilo. Z těchto dvou údajů lze jednoduše pro každé slovo vypočítat, na kolik procent je pozitivní – jaká je šance, že je recenze pozitivní, pokud se v ní objevilo právě toto slovo.

Formálněji bychom tuto „pozitivitu slova i “ $w_p(i)$ mohli zapsat následovně:

$$w_p(i) = \frac{w_count_p(i)}{w_count(i)},$$

kde w_count_p říká, kolikrát bylo slovo v pozitivních recenzích; w_count_n kolikrát bylo v negativních recenzích a w_count celkový počet výskytů slova, tedy $w_count_p + w_count_n$.

Pokud chceme zjistit, co si o neznámé recenzi myslí náš algoritmus, stačí mu ji předat a on provede následující – opět recenzi rozseká na slova, zahodí interpunkci,

¹⁹<https://huggingface.co/datasets/imdb>

atd. Následně se u každého slova podívá na pravděpodobnost, s jakou se slovo vyskytuje v pozitivní recenzi, čísla upraví vážicí funkcí (kterou definujeme dále) a zprůměruje je. Pokud je výsledek větší než 0,5, je recenze pozitivní. Výsledek se vždy pohybuje mezi 0 a 1, čím je číslo menší, tím je recenze negativnější a naopak. Neutrální recenze mají hodnotu okolo 0,5.

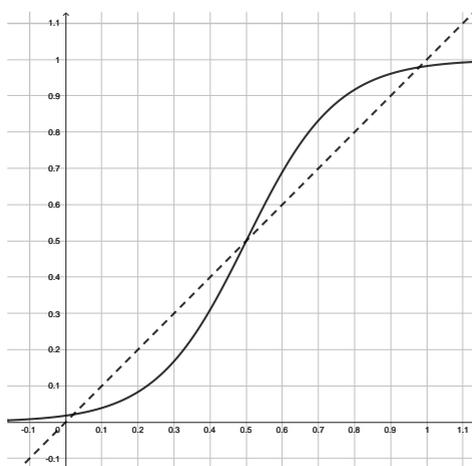
Opět formálněji zapíšeme pozitivitu recenze r_p jako

$$r_p = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(w_p(r_i))}{n},$$

kde r_i je slovo v recenzi, n počet slov v recenzi, f zmíněná vážicí funkce a w_p dříve definovaná pozitivita slova.

Vážicí funkce a stopwords

Vážicí funkci jsme přidali, abychom slovům dále od 0,5 dali extrémnější hodnoty, jelikož jsme si o nich jistější, že jsou pozitivní (resp. negativní). Např. slovo „beautiful“ s hodnotou 0,9 bude mít váhu zhruba 0,95. Nejlépe je vše vidět na obrázku 19. Lineární funkce $y = x$ (čárkovaně) představuje původní hodnoty a křivka $f(x) = \frac{\tanh(4 \cdot (x-0,5))+1}{2}$ (plnou čarou) je vážicí funkce.



Obrázek 19: Vážicí funkce.

Některá slova, jako třeba „the“, nenesou žádný význam a říká se jim stopwords, proto jsme je při výpočtech odstranili.²⁰

Nevyřešené problémy

Bohužel na konferenci je náš čas velmi omezený, a tak jsme se spoustou problémů nemohli zabývat, i když by to náš algoritmus určitě vylepšilo. I tak mám pocit, že je potřeba je zde alespoň trochu zmínit.

²⁰Konkrétně jsme použili seznam stopwords z knihovny `nltk`.

Yokai problém

Yokai je démon v japonském folklóru. Jelikož náš dataset byl velmi malý a vyrobený na základě skutečných filmů, slovo „yokai“ se vyskytuje v 17 recenzích a všechny jsou kladné (film byl asi vážně dobrý). Bohužel si náš algoritmus teď myslí, že „yokai“ je pozitivní slovo a dává ho na stejnou úroveň jako např. „marvelous“. Stejný problém nastává i u jmen jako John nebo Sinatra.

Další problémy zpracování jazyka

Asi není žádné překvapení, že pracovat v počítači s lidským jazykem není nic jednoduchého. Např. kdybychom si nevybrali angličtinu, museli bychom navíc řešit skloňování. Na první pohled to nemusí být vidět, ale i negace je velký problém, objeví se na začátku věty a změní význam posledního slova. Ironie nám taky hodně pomůže. A mnohoznačnost slov jako „koruna“ a „sick“ jen příkládá do ohně. Nyní stačí dorazit lahvi petroleje v podobě preklpu a máme pěkný táboráček.²¹

Závěr

Na závěr se můžete vžít do počítače a rozhodnout o sentimentu recenze:

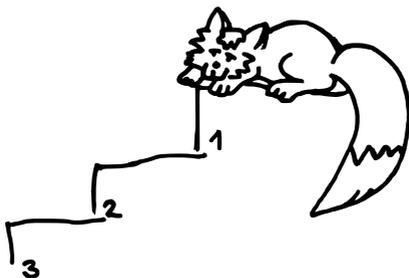
Film was really sick but I didn't enjoy it!

Nebo tuto recenzi rovnou vložit do našeho programu, který je dostupný na GitHubu.²²

I přes všechny jazykové překážky se nám podařilo vytvořit algoritmus, který má 83% úspěšnost při určování sentimentu anglicky psaných recenzí, což je výrazně více než 50 %, kterých bychom dosáhli při tipování.

Na této konferenci jsem spolupracoval s Mgr.^{MM} Michaellem Jarvisem a Bc.^{MM} Michaelem Ulumbekovem pod skvělým vedením Borka Požára.

A kdybyste přeci jenom měli nějaké dotazy, můžete se na mě obrátit na discordovém serveru M&M.²³ ;)



²¹Pozn. red.: Drobné chyby, které do tohoto odstavce autor pro ilustraci zanesl, jsme v něm záměrně nechali.

²²https://github.com/ticvac/konfera_2022_recenze

²³Pro připomenutí odkaz: <https://discord.gg/MxPjKsDFWG>

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Témata					O	\sum_0	\sum_1
				1	2	3	4	5			
74.	Bc. ^{MM} V. Faltus	3	42,3							15,5	
75.	M. Hradil	1	15,3							15,3	
76.	T. Hebauer	1	15,2		4,5			5,9		10,4	
77.	M. Čouza	2	15,0							15,0	
78.	E. Turbová	1	14,6							14,6	
79.	R. Petit	1	14,4			3,5	8,3			11,8	
80.	T. Ferbas	1	13,5		7,0					7,0	
81.	V. Čábelka	3	13,1							13,1	
82.	A. Freyová	1	12,6		4,0		2,6			6,6	
83.	A. Čechová	3	12,2							11,6	
84.	K. Menšíková	Z9	11,5		1,0		3,0			4,0	
85.–87.	J. Hampl	3	11,0							11,0	
	Š. Mikéska	4	11,0							11,0	
	M. Plachý	4	11,0							11,0	
88.	P. Šimeček	1	10,8							10,8	
89.	V. Mašíčková	1	10,5							10,5	
90.–92.	Bc. ^{MM} M. Smrčka	3	33,6							10,0	
	V. Jiříčková	3	10,0							10,0	
	V. Janáček	1	10,0							10,0	
93.–97.	J. Lepič	4	9,0							9,0	
	Bc. ^{MM} M. Haikl	4	36,9							9,0	
	H. Muchová	1	9,0							9,0	
	L. Koucký	Z9	9,0							9,0	
	V. Humlová	1	9,0							9,0	
98.	Bc. ^{MM} J. Křimská	4	44,1				8,3			8,3	
99.–100.	K. Tomáš	Z9	8,0							8,0	
	J. Zajíc	3	8,0							8,0	
101.	M. Kadlec	1	7,5							7,5	
102.	K. Vomelová	3	7,2							7,2	
103.	S. Teodorovičová	2	7,1							7,1	
104.	M. Taufer	3	7,0							7,0	
105.	J. Kučera	2	6,5							6,5	
106.–108.	M. Stýskala	2	6,0				6,0			6,0	
	M. Radimský	2	6,0							6,0	
	J. Boula	1	6,0							6,0	
109.	A. Stýskala	3	5,5				4,5			4,5	
110.	O. Brož	2	4,8							4,8	

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Témata					O	\sum_0	\sum_1
				1	2	3	4	5			
111.	L. Votrubová	2	3,9								3,9
112.	L. Chmelíková	2	3,4								3,4
113.–114.	K. Maxera	2	3,0								3,0
	M. Glasnák	Z9	3,0								3,0
115.	R. Mayerová	1	5,0								2,0

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v těchto deadlinech a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupec **O** symbolizuje **Ostatní**, obvykle příspěvky za články. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK E-mail: mam@matfyz.cz
 Ke Karlovu 3 Web: mam.matfyz.cz
 121 16 Praha 2 FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

