STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIX
Číslo 3

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

konec podzimu přinesl první sníh a adventní výzdoba a světýlky rozsvícené ulice nám připomínají, že Vánoce se nezadržitelně blíží. Organizátoři M&Mka však ani v tomto čase nelení. Po návratu ze říjnové soustřeďkové cesty časoprostorem, která nám umožnila společně navštívit dávný Egypt, jsme se pustili do opravování vašich řešení, tvorby třetího čísla, které právě čtete, a přípravy vánoční víkendovky. Doufáme, že jste si soustředění užili stejně jako my. Zavzpomínat na něj můžete díky naší fotogalerii.[1] Nezapomeňte sepsat a poslat výsledky svých konfer, a podělit se tak o své poznatky s ostatními řešiteli.

Pokud jste se soustředění nezúčastnili, tak nezoufejte! Již teď pro vás připravujeme další, tentokrát jarní, soustředění, které proběhne 25. března – 2. dubna 2023. Zapište si datum do svých kalendářů. Už teď se na vás těšíme.

Současný příval řešení, kterými nás zahrnujete, nám dělá radost. Důkazem budiž to, že v tomto díle najdete vámi inspirovaná vzorová řešení úloh a řešitelský článek Mgr.[MM] Jolany Štraitové o využití derivací ve fyzice. Pusťte se tedy do čtení tohoto čísla a zkraťte si dlouhou chvíli při čekání na Ježíška a vánoční pohádky.

Čas pohádek M&Mko provází v průběhu celého tohoto ročníku. Stále nám můžete posílat své matematické příběhy a pohádky. S jejich tvorbou vám mohou pomoci vzorová řešení úloh prvního dílu.

Co kromě vašich příspěvků a vzorových řešeních najdete v tomto čísle? V akustickém tématku se podrobněji dozvíte, na jakém principu fungují reproduktory a mikrofony. Máme pro vás připraveno zamyšlení nad účinností reproduktorů a výběrem správného mikrofonu.

V tématku Výtahy jsme si pro vás připravili krátké opakování z minulého dílu a další zábavu se simulátorem. S řízením výtahů vám nově pomohou přechodové funkce.

Pokud vám současné chladné počasí kazí náladu, nalistujte si tématko Outdoorové vařiče. Při praktickém měření se jistě i trochu zahřejete. Nezapomeňte si však předtím přečíst souhrn poznatků sestavený mimo jiné i z vašich řešení, která jste poslali k prvnímu deadlinu druhého čísla.

Samozřejmě nesmíme zapomenout ani na tématko Derivace a integrály. V něm poznatky o derivacích z minulého dílu využijete k řešení diferenciálních rovnic.

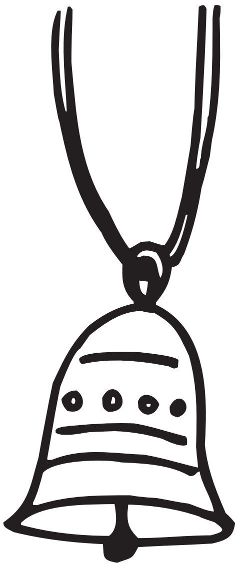
Na závěr bychom vám chtěli popřát příjemné prožití adventního období a následných vánočních svátků. Nezapomeňte příchod nového roku oslavit řešením M&Mka. Známé rčení totiž praví: „Jak na Nový rok, tak po celý rok!“

Vaši organizátoři

---

[1] `https://mam.mff.cuni.cz/soustredeni/53/fotogalerie/592/`

Obsah



Zadání a řešení témat

1. deadline: 3. ledna 2023 | 2. deadline: 31. ledna 2023

Téma 1 – Matematické pohádky

Vzhůru do správných řešení

V současném díle nevyjde žádný nový text a ani nebude zadána nová úloha. Kvůli velkému množství řešení a podobnosti chyb jsem se rozhodl neposílat zpětnou vazbu všem. Pokud byste si však mysleli, že vám za úlohu náleží více bodů či byste měli jakýkoliv další dotaz, neváhejte napsat.

Řešení úloh prvního dílu

Úloha 1

Zadání:
Může být meč ze železa? Jaký kov byste Honzovi doporučili?

Řešení:
Správnou úvahou bylo zjištění, že hlava s indexem i chrlí plamen s žárem $i \cdot 256\,°\mathrm{C}$. Tím pádem poslední hlava chrlí $1792\,°\mathrm{C}$, tedy více než je bod tání železa. Stačilo pak navrhnout jiný kov s vyšším bodem tání, třeba wolfram.

Úlohu měla většina z vás správně.

Úloha 2

Zadání:
Zkuste příběh zapsat bez negací.

Řešení:
Cílem úlohy bylo identifikovat a přepsat dva výroky s negací. Za každý z nich bylo možné získat až jeden bod.

$$\{h \in \text{hlavy} : h\,\neg\text{upadla}\} = \emptyset \implies \text{drak}\,\neg\text{živý}$$

byl ten těžší. Správným řešením bylo využít obměny implikace. Tedy pokud $A \implies B$, tak $\neg B \implies \neg A$.

Tato úprava se může zdát neintuitivní, ale dává smysl. Mějme výrok: „Pokud je pták bílý, pak je to vrána.“ Všimněme si, že výrok nezakazuje černé vrány. Pokud použijeme obměnu, získáme výrok: „Pokud pták není vrána, není bílý.“ To dává smysl, protože pokud by pták byl bílý, musel by být vránou.

Pak:

$$\text{drak živý} \implies \exists k \in \{h \in \text{hlavy} : h\,\neg\text{upadla}\}.$$

Všimněme si, že negací výroku „Množina je prázdná.“ je „Množina obsahuje prvek.“

Nyní se potřebujeme zbavit negace z množiny. Všimneme si, že výrok na pravé straně implikace je pravdivý právě tehdy, pokud existuje hlava, která není v množině hlav, které upadly, tedy $\exists h \in (\text{hlavy} \setminus \{k \in \text{hlavy} : k\,\text{upadla}\})$. Dosadíme a získáme:

$$\text{drak živý} \implies \exists h \in (\text{hlavy} \setminus \{k \in \text{hlavy} : k\,\text{upadla}\})$$

Slovy bychom mohli říci: „Pokud drak žije, má alespoň jednu hlavu.“

Toto však není jediná cesta, jak daného výsledku dosáhnout. Někteří řešitelé využili faktu, že $|hlavy| = 7$, (tedy množina hlavy má 7 prvků) a pak lze zkonstruovat řešení:

$$\text{drak živý} \implies |\{\text{hlavy} : h\,\text{upadla}\}| < 7.$$

Je však dobré si všimnout, že takové řešení je trochu problematické. V případě, že bychom množině hlavy změnili počet prvků, tak by už nefungovalo.

Úpravou by mohlo být:

$$\text{drak živý} \implies |\{\text{hlavy} : h\,\text{upadla}\}| < |\text{hlavy}|.$$

Můžeme si ale také všimnout, že takové řešení nefunguje pro všechny možné množiny hlavy, protože očekává, že počet množiny prvků hlavy je konečný. Častou chybou bylo používání $<$ na množiny. $A < 7$ není definováno a je potřeba používat mohutnosti množin, tedy správně je to $|A| < 7$.

Některá řešení se snažila zadání obejít tím, že $\neg$upadla přepsali na neupadla. To je sice možné, ale negaci skryla pouze do slova. Taková řešení si odnesla 0 bodů.

Druhý výraz s negací byl jednodušší.

$$\neg\exists h \in \text{hlavy} : h\,\neg\text{upadla}$$

Tedy „neexistuje taková hlava, že neupadla“ můžeme přepsat na „všechny hlavy upadly“.

$$\forall h \in \text{hlavy} : h\,\text{upadla}$$

Většina z vás zde neměla chybu.

Úloha 3

Zadání:
Co přesně stojí na magickém meči?

Řešení:
Úloha měla dvě části. V první bylo potřeba rozklíčovat:

$$\forall \text{osoba} \in \text{království} : (\text{kletba}_{\text{meč}} \subset \text{budoucnost}_{\text{osoba}}) \implies \text{smůla}_{\text{osoba}}$$

Tedy, že bude-li mít osoba v království kletbu meče, bude mít i někdy v budoucnosti smůlu.

$$\nexists ž \in \mathbb{R} : ž > 0 \land \text{vzdálenost}_{\text{meč od osoby}} > ž \implies \text{kletba}_{\text{meč}} \subset \text{budoucnost}_{\text{osoba}}$$

Druhý výraz byl složitější. Zkusme se podívat na dva případy. Pokud vzdálenost meče od osoby je větší než 0, tak určitě existuje ž větší než 0, takové že je menší než ona vzdálenost. V takovém případě bude výraz v levé části implikace nepravdivý. Pokud ale vzdálenost bude 0 nebo menší, tak žádné takové ž nenalezneme. Kletba meče tedy postihne toho, kdo se dotkne meče.

Tedy na meči stojí: „Kdo se dotkne magického meče, na toho dopadne kletba, jež mu v budoucnosti přivodí smůlu."

Řešení, která přepsala výrazy do nějaké jednoduché věty, dostala plný počet bodů. Pokud řešení pouze bezmyšlenkovitě přeložila jednotlivé predikáty, získala jeden bod.

Úloha 4

Zadání:
Jak příběh dopadl? Zapište vlastními slovy.

Řešení:
Správný konec měl obsahovat následující tři eventy. Smrt draka, rozhodnutí princezny opustit sluj a následná svatba s hrdinou a nakonec i kletbu meče. Za zmínění každého z eventů byl jeden bod a za hezký příběh až 1 bonusový bod.

Čím byly jednotlivé eventy způsobeny? Smrt draka vyplývá z druhé úlohy.

$$(\exists!\text{drak} : \text{drak} \in \text{sluj}) \land \exists\text{princezna} : (\text{drak} : \text{živý} \implies \text{princezna} \in \text{sluj})$$

Přečteme-li si příběh pořádně, zjistíme, že pokud drak žije, je princezna ve sluji. Implikace však nic neříká o tom, co se stane, když drak je mrtvý. Tedy bylo nutné zmínit, že se princezna rozhodla sluj opustit. Nakonec bylo nutné okomentovat, jak to dopadlo s kletbou, kterou na sebe Honza přivodil tím, že použil magický meč.

Nejkratší dokončení pohádky za tři body tak mohlo znít následovně: Po useknutí poslední hlavy drak zemřel. Jelikož měl Honza smůlu, princezně se ve sluji líbilo tak moc, že ji nikdy neopustila. Král tedy nebyl nucen hrdinovi dát princeznu za ženu. A tak tam žili šťastně až do smrti.

Úloha 5

Zadání:
Jak moc hloupý je Honza? Proč?

Řešení:
Z následujícího výroku: $(\text{muž} \neq \text{Honza} \land (\text{mozek}_1 \subset \text{muž}) \land (\text{mozek}_2 \subset \text{Honza}) \land \land (\text{mozek}_1 \leq \text{mozek}_2))$ se dalo zjistit, že neexistuje muž v království, který má menší nebo stejně velký mozek jako Honza. Tedy Honza má nejmenší mozek v království a také platí, že větší mozek implikuje chytřejšího muže. Honza tedy musel být hloupější než všichni ostatní muži v království.

Úloha 6

Zadání:
Jak lze draka zabít?

Řešení:
V úloze 2 jsme zjistili, že drak nebude žít, upadnou-li mu všechny hlavy. Následně se podíváme na výrok

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,7\} : (h_i \cap \text{meč} \neq \emptyset) \implies h_i \text{ upadne}$$

Tedy pokud se nějaké hlavy dotkneme mečem (meč a hlava budou mít nenulový průnik), hlava upadne. Stačí se všech hlav dotknout mečem a drak již nebude žít.

Dláža; `pohadky-mam@gadurek.cz`

Téma 2 – Akustika

Díl 3: Reproduktory a mikrofony

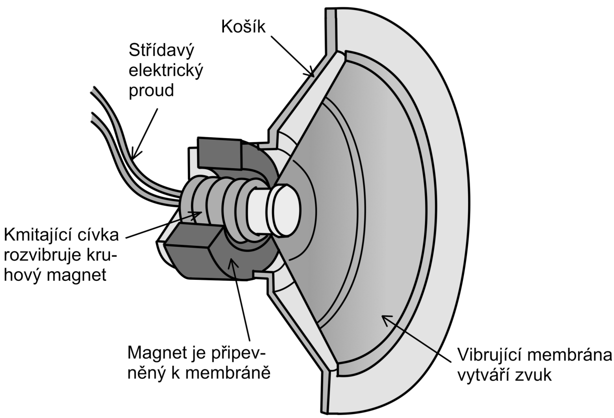
V minulých dílech jsme se zvuku věnovali hodně teoreticky. V rámci experimentů jsme se zaměřili na šíření zvukových vln a jejich interakci s materiály. K těmto experimentům jsme potřebovali zařízení, které zvuk generovalo, a zařízení, které jej zaznamenávalo. Právě těmito zařízeními, nejčastěji nazývanými jako reproduktory a mikrofony, se budeme nyní podrobněji zabývat. Nejprve si popíšeme základní principy, na kterých fungují, a potom se krátce zmíníme o několika zajímavostech.

Reproduktory

Na úvod bychom měli upřesnit, že reproduktor není jen tak ledajaké zařízení, které je schopné generovat zvuk. Podle této definice by totiž bylo reproduktorem prakticky všechno, co nás obklopuje. Reproduktory se od ostatních zdrojů zvuku liší hlavně tím, že na mechanickou energii zvuku přeměňují elektrickou energii. Dělíme je primárně podle principu fungování, sekundárně podle frekvenčního rozsahu. Kromě nejrozšířenějších elektrodynamických reproduktorů existují ještě například reproduktory plazmové a piezoelektrické. Těmi se ale podrobněji zabývat nebudeme.

Princip fungování elektrodynamického reproduktoru

Princip fungování reproduktoru je poměrně jednoduchý. Cívkou umístěnou v magnetickém poli permanentního magnetu protéká střídavý elektrický proud. Ten způsobuje, že se cívka rozkmitá a společně s ní začne kmitat i pružná membrána, která je k cívce upevněná. Membrána rozkmitá okolní vzduch, což potom vnímáme jako zvuk.



Obrázek 1: Schéma reproduktoru

Cívka musí být dostatečně tuhá, aby se nedeformovala, a zároveň lehká, aby nebránila vysokofrekvenčním kmitům membrány. Magnety se používají feritové, výjimečně neodymové. Membrána může mít různé tvary. Nejtypičtějším tvarem je kužel, ale často se setkáváme i s mezikružím, zejména u reproduktorů schopných reprodukovat velký rozsah frekvencí.

Už vás někdy napadlo, proč se reproduktory většinou nachází v bedýnkách? Takzvané ozvučnice, bedýnky, do kterých se reproduktory montují, rozhodně neslouží jen pro uchycení jednotlivých komponent. Jsou naprosto klíčové k tomu, aby reproduktor správně fungoval. Když se totiž membrána reproduktoru rozkmitá, na jedné straně vzniká přetlak a na druhé podtlak, respektive dvě zvukové vlny s opačnou fází, které mají tendenci se vyrušit. Pokud bychom reproduktor vymontovali z ozvučnice, reprodukovaný zvuk by byl sotva slyšitelný. Zvukotěsná ozvučnice brání šíření opačné zvukové vlny a výrazně zvyšuje výslednou hlasitost. Možná jste si už někdy všimli, že většina ozvučnic má v sobě takovou divnou díru. Této díře se říká bassreflex a slouží ke kompenzování tlaku uvnitř reproduktoru ozvučnicí. Tvar bassreflexu se počítá na míru pro každou ozvučnici. Bassreflex výrobcům mimo jiné umožňuje z levnějších, méně kvalitních materiálů vyrobit ozvučnici, která zní díky kompenzaci pomocí bassreflexu stále dobře.

Basy a výšky

Existují velmi specifické aplikace, kdy nás zajímá jen reprodukování určitého úzkého frekvenčního rozsahu. Většinou je ale naším cílem vyrobit reproduktor, který by zvládl reprodukovat všechny slyšitelné frekvence od přibližně 20 Hz až do 20000 Hz. Tohoto cíle lze ale u jednoho měniče dosáhnout jen velice obtížně a většinou to s sebou nese řadu ústupků, například v podobě různé maximální hlasitosti pro různé frekvence nebo určitého zkreslení reprodukovaného zvuku. Důvodem jsou v podstatě protichůdné požadavky, které na membránu klade reprodukování vysokých a nízkých frekvencí. Zatímco k reprodukování vysokých frekvencí potřebujeme, aby byla membrána co nejlehčí, nízké frekvence vyžadují membránu co možná největší.

V praxi se tento problém řeší osazením více reproduktorů do jedné ozvučnice, přičemž každý je specializovaný na reprodukování určité části cílové šířky pásma frekvencí. Rozhodování o tom, jaký reproduktor bude reprodukovat danou frekvenci, je ponecháno na elektronice. S několika reproduktory pro různá frekvenční pásma se nemusíme setkat jen u klasických bedýnek. Podobnou konfiguraci nalezneme například i u dražších sluchátek a obecně kdekoliv, kde se není nutné absolutně podřídit tlakům na minimální cenu a maximálně efektivní využití prostoru.

Směrová charakteristika a účinnost

Reálné reproduktory nikdy nevydávají zvuk do všech směrů stejně. K popisu závislosti hladiny intenzity zvuku na směru v nějaké fixní vzdálenosti od reproduktoru se používá koncept směrové charakteristiky. V uzavřených místnostech nemusí být rozdíl v hlasitosti v různých směrech od reproduktoru tak výrazný jako v otevřeném prostoru.

Úloha 1 [4b]: *Vyberte si nějaký reproduktor, u kterého předpokládáte velké rozdíly ve vyzařování do různých směrů, a změřte jeho směrovou charakteristiku. Bude plně dostačující, pokud směrovou charakteristiku změříte pouze v rovině.*

Dalším faktorem, který nás může u reálných reproduktorů zaskočit, je poměrně nízká účinnost přeměny elektrické energie na mechanickou energii zvuku. Tu u reproduktorů udává takzvaná charakteristická citlivost. Vyjadřuje, jakou hladinu intenzity zaznamenáme ve vzdálenosti jednoho metru od reproduktoru při příkonu 1 W. Účinnost lze ale samozřejmě udat také přímo v procentech, akorát to není u reproduktorů tak obvyklé.

Úloha 2 [4b]: *Najděte si na webu nějaký existující model bezdrátových sluchátek a spočítejte, jakou mají účinnost přeměny elektrické energie na mechanickou energii zvukových vln.*

Úloha 3 [2b]: *Proč si myslíte, že reproduktory mají tak nízkou účinnost?*

Problém 4: *Zkuste účinnost spočítat pro co nejvíce různých druhů reproduktorů a navzájem je porovnejte. Mají vyšší účinnost přenosné Bluetooth reproduktory, bezdrátová sluchátka anebo klasické bedny, které používáte například u svého počítače? Nezapomeňte ve svém řešení uvést názvy reproduktorů a zdroje dat, které jste použili.*

Mikrofony

Mikrofony slouží k převádění mechanické energie zvuku na elektrický signál. Fungují tedy na přesně opačném principu než reproduktory. Potýkají se i s podobnými problémy. Na rozdíl od reproduktorů ale typicky používáme jediný mikrofon k zaznamenávání celého frekvenčního rozsahu, který nás zajímá (obvykle 40 Hz až 16000 Hz nebo 20 Hz až 20000 Hz). Neznamená to však, že by byl mikrofon automaticky stejně citlivý na všechny zaznamenávané frekvence. To, jak mikrofon slyší jednotlivé frekvence, popisuje frekvenční odezva. Mikrofony dnes používají při nejběžnějších aplikacích dvě hlavní technologie (dynamické a kondenzátorové mikrofony), z nichž každá má své výhody a nevýhody, a proto se zatím nezdá, že by jedna byla vytlačována druhou.

Dynamické mikrofony

Dynamické mikrofony by šlo zjednodušeně popsat jako obrácené elektrodynamické reproduktory. Zvuk rozechvívá membránu, která je spojená s cívkou. Cívka se pohybuje společně s membránou v magnetickém poli permanentního magnetu, což generuje elektrický proud. Potřebují silný předzesilovač, protože se jedná o pasivní obvod. Dynamické mikrofony nedisponují žádným externím zdrojem energie a membrána je rozechvívána výhradně zvukem.

Dynamické mikrofony jsou v porovnání s kondenzátorovými mikrofony méně citlivé. To ale automaticky neznamená, že by byly horší. Menší citlivost naopak může být výhodou, pokud například nemáme vyřešenou akustiku v místnosti a nechceme, aby byly v mikrofonu slyšet zvuky ozývající se ze sousední místnosti. Menší citlivosti využívají například také zpěváci nebo reportéři při natáčení živých reportáží, kde je důležité, aby byl slyšet pouze jeden člověk, a ne hluk okolo.

Kondenzátorové mikrofony

Kondenzátorové mikrofony fungují na mírně odlišném principu v porovnání s dynamickými mikrofony. Opět se zde nachází membrána, ale ta není spojená s cívkou a místo toho slouží jako jedna z desek kondenzátoru v obvodu s externím fantomovým napájením. Fantomové napájení je stejnosměrné napájení přes symetrický audio konektor, které mikrofon potřebuje ke své činnosti. Zvuk rozechvívá membránu, což mění kapacitu kondenzátoru, a tyto změny charakteristiky obvodu jsou převáděny na elektrický signál.

Díky fantomovému napájení mají kondenzátorové mikrofony silnější výstupní zvuk, který je také obvykle v porovnání s dynamickými mikrofony přirozenější. Souvisí to s vyšší citlivostí kondenzátorových mikrofonů. Tyto na první pohled skvělé vlastnosti ale můžou občas hrát proti nám. Pokud se nenacházíme ve studiovém prostředí s vyřešenou akustikou, tak je dost pravděpodobné, že bude kondenzátorový mikrofon zaznamenávat kdeco.

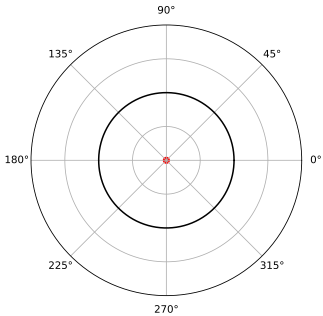
Úloha 5 [1b]: *Plánujete streamovat na Twitchi hraní své oblíbené online hry. Pořídíte si dynamický nebo kondenzátorový mikrofon? Proč? Bude vaše rozhodnutí nějak záviset na vašem rozpočtu?*

Směrová charakteristika

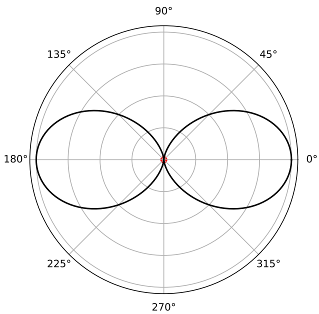
Stejně jako reproduktory mají i mikrofony směrovou charakteristiku. Mikrofony s různou směrovou charakteristikou se využívají pro různé situace. Například mikrofony se směrovou charakteristikou ve tvaru osmičky lze použít pro nahrávání podcastu nebo obecně rozhovoru, kde lidé sedí naproti sobě. Pokud do mikrofonu mluví jen jeden člověk, hodí se kardioidní zvuková charakteristika – ve stručnosti to znamená, že mikrofon snímá hlavně zvuk z jedné strany a nezaznamenává díky tomu odezvu. Existují i mikrofony s kulovou směrovou charakteristikou. Ty můžeme upotřebit třeba pokud na domácí videokonferenci chceme zaznamenávat hlas všech lidí v místnosti. Musíme ale počítat s tím, že v takovém mikrofonu bude opět slyšet prakticky všechno včetně zvuků, které slyšet nechceme.

Viktor Materna; viktor.mat@seznam.cz
Tereza Agnes Pokorná; tereza.tter.hladikova@gmail.com
odevzdávejte do odevzdávátka

Kulová; r = konst.

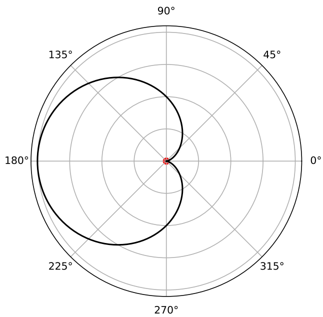


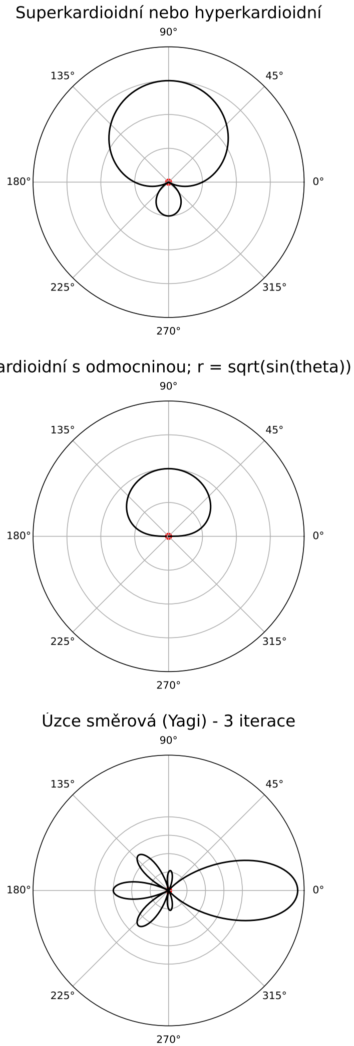
Osmičková; r = sin(theta*2)+1



Směrová se záporným zesílením; r = abs(sin(theta))

Kardioidní; r = 1-cos(theta)





Obrázek 2: Ukázky směrových charakteristik

Téma 3 – Výtahy

Řešení 1. dílu

Problém 1

Zadání:
Jaké podmínky bezpečného provozu výtahu vás napadají?

Řešení:
K tomuto problému přišlo mnoho rozličných nápadů. Převážně jste se zabývali podmínkami na pohyb dveří a na chování v nouzových stavech.

Dveře jsou asi nejvýraznějším bezpečnostním prvkem výtahu. Již v zadání bylo zmíněno, že by se kabina výtahu neměla pohybovat, když jsou dveře otevřené. Dále většinu z vás napadlo, že nechceme dveře zavřít, pokud v nich něco překáží, k zajištění této podmínky jste často navrhovali buď optické závory, nebo mechanická čidla tlaku proti dveřím.

Často jste též zmiňovali, že by výtah měl otevírat dveře jen v patrech a mimo ně buď nezastavovat vůbec, nebo alespoň neumožnit otevření dveří.

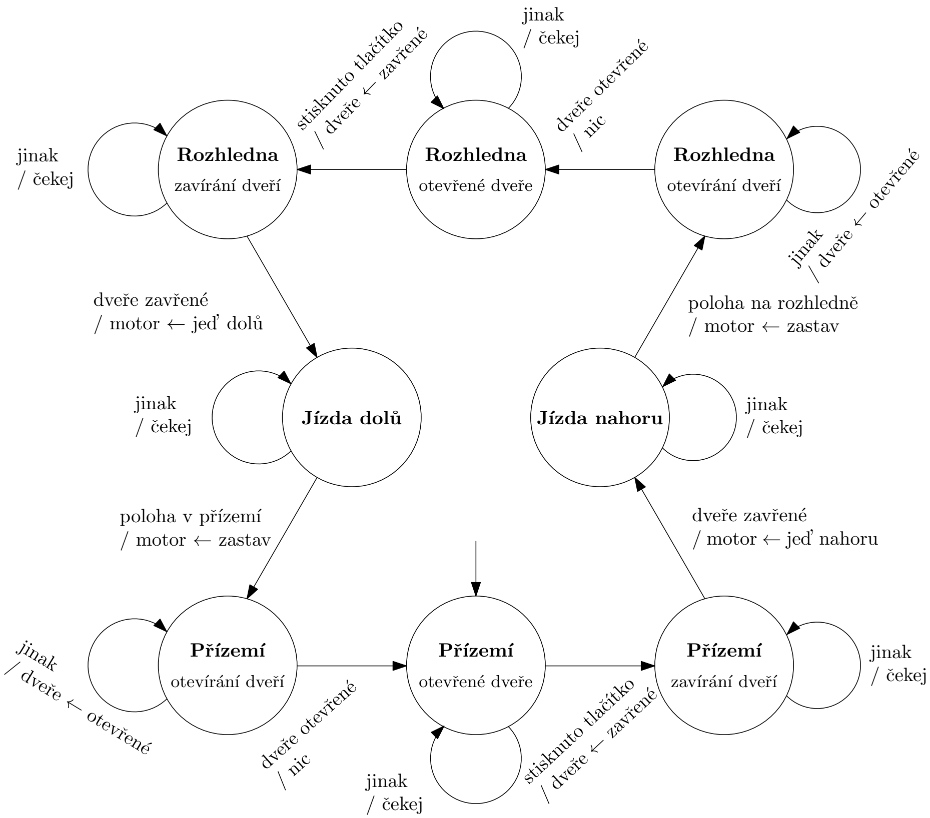
Je též žádoucí, aby se výtah pohyboval jen ve vymezeném prostoru a jen určenými směry – neměl by se snažit pohybovat vodorovně, mimo šachtu, sjet pod nejnižší podlaží nebo naopak vznést se nad nejvyšší. Další nápady požadovaly, aby se výtah pohyboval pouze přiměřenou rychlostí a s přiměřeným zrychlením. Někteří z vás si nepřáli být přivoláni i s kabinou někým zvenčí.

V neposlední řadě jste se pokoušeli zajistit, aby byl výtah vybaven pro případy nouze, ať už nouzovým osvětlením, tlačítkem zvonku pro přivolání pomoci zvenčí, protipožární ochranou či manuálním ovládáním ze strojovny. Osazení nouzových brzd pro případ přetržení nosného lana též bezpečnosti neuškodí.

Konečně, výtah by měl znát své vlastní limity, zejména znát svoji nosnost a vynucovat ji, ale i přesto být naddimenzován, aby mírné překročení nosnosti nemohlo mít katastrofální následky.

Problém 2

Zadání:
Uvažujme nejjednodušší variantu výtahu, který vozí cestující na rozhlednu. Takový výtah jezdí pouze mezi dvěma patry – přízemím a rozhlednou. Rozmyslete, jaké senzory a tlačítka tento výtah potřebuje pro svůj bezpečný provoz. Jak bude výtah po stisknutí každého vámi definovaného tlačítka reagovat? V jakých stavech se bude tento výtah nacházet? Který z těchto stavů byste zvolili jako počáteční? Jaké výstupy bude elektronika tohoto výtahu ovládat? Rozmyslete, jak bude řídicí jednotka tyto výstupy řídit v závislosti na jejím vnitřním stavu a informacích ze senzorů a tlačítek. (Nezapomeňte na podmínky z Problému 1.)



Obrázek 3: Automat pro řízení výtahu z Problému 2

Řešení:

Uvnitř kabiny nám v tomto případě stačí jen jedno tlačítko, kterým dáváme pokyn k přesunu. Vždy máme k dispozici jen jedno patro, do kterého se můžeme přesunout, protože v tom druhém právě stojíme. Podobně vně kabiny nám stačí v každém patře jedno tlačítko pro přivolání výtahu. Dále jste diskutovali přídavná tlačítka, například pro otevírání nebo zavírání dveří, která zvyšují komfort nebo bezpečnost cestujících během přepravy.

Výtah potřebuje minimálně senzor polohy kabiny výtahu, abychom věděli, jestli jsme už dorazili do požadovaného patra. (V pozdějších úlohách zaměřených na simulace někteří z vás odhadovali polohu výtahu na základě měření času. V našem simulátoru toto řešení funguje, ale v reálném světě je příliš málo robustní. Nikde není zaručeno, že kabina výtahu se bude vždy přesunovat stejně dlouhou dobu.) Pomocí senzoru polohy můžeme číst i rychlost výtahu. Dále se nám budou hodit senzory pro detekci otevřených dveří a případně další bezpečnostní prvky, o kterých jste se zmiňovali ve vašich řešeních.

Na výstupu potřebujeme minimálně řídit motor výtahu a ovládat otevírání a zavírání dveří. V rámci tohoto řešení budeme předpokládat, že motor dokážeme zastavit okamžitě, zatímco otevření či zavření dveří vyžaduje nějaký čas. Opět můžeme najít další výstupy, které nejsou k samotnému provozu kriticky nutné, jako například ovládání osvětlení prostoru uvnitř kabiny.

Automat reprezentující řídicí elektroniku tohoto výtahu najdete na obrázku 3.

Všimněte si, že na rozdíl od 3. úlohy potřebujeme samostatný stav pro jízdu. Zde nemáme přesun mezi patry zadefinovaný jako atomickou operaci, takže potřebujeme zrychlování a zpomalování kabiny výtahu řídit ručně. Stejně tak potřebujeme rozlišit, jakým směrem se kabina pohybuje, abychom věděli, kdy začít brzdit. Podobně potřebujeme v samostatném stavu čekat, než se zavřou nebo otevřou dveře výtahu. Přechody mezi jednotlivými stavy obsahují pouze pokyny, které máme k dispozici. Pokud máme například k dispozici jen pokyn pro rozjezd nebo zastavení kabiny výtahu, tak nemůžeme použít příkaz „přesun do patra Y“.

Úloha 3

Zadání:
Mějme výtah se čtyřmi stanicemi: suterén, přízemí, 1. patro a 2. patro. Rozmyslete, jaká tlačítka tento výtah potřebuje k provozu. Nakreslete MS, který popisuje reakce na jednotlivá tlačítka. Zde můžete předpokládat, že elektronika výtahu je chytré zařízení, které zná tyto povely:

- *přesun do n-tého patra*
- *otevření dveří v n-tém patře*
- *zavření dveří v n-tém patře*

Elektronika tohoto výtahu automaticky ukládá stisk každého tlačítka (uvnitř i vně kabiny) do fronty. Váš Mealyho stroj umí z této fronty popořadě číst a také umí detekovat, zda je fronta prázdná.

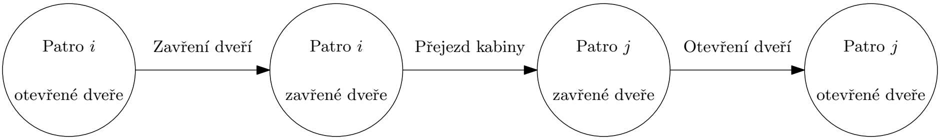
Řešení:
Provedeme několik zjednodušujících předpokladů:[2] Výtah se bude ovládat jen tlačítky (dveře bude potřeba explicitně zavřít), výtah jezdí do pater v pořadí dle fronty (přestože by třeba mohl zastavit po cestě a urychlit tím cestu některých lidí) a tlačítka uvnitř výtahu se budou chovat stejně jako tlačítka vně.

Určitě potřebujeme přivolávací tlačítko v každém patře a také tlačítko pro každé patro uvnitř kabiny. Jeden možný přístup si s těmito tlačítky vystačí: pro otevření dveří v aktuálním patře stačí stisknout tlačítko aktuálního patra, pro zavření naopak tlačítko jiného patra.[3]

[2] Řešit by šlo i nezjednodušenou úlohu, často za cenu zmnohonásobení počtu stavů, což není na závadu, ale znesnadnilo by to pochopení.

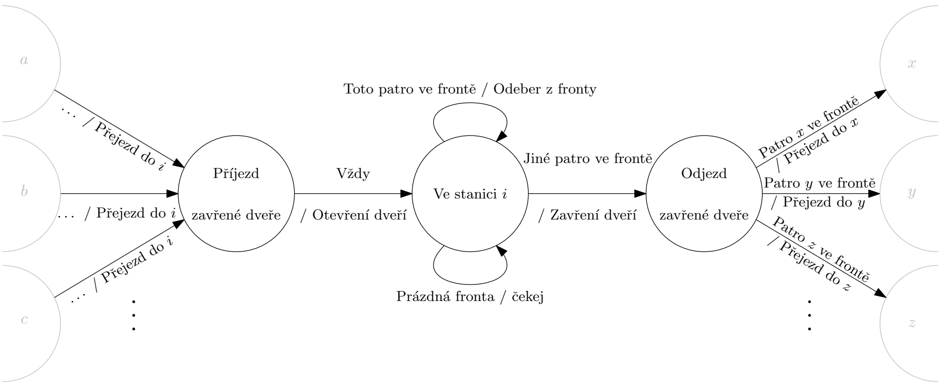
[3] Pokud bychom chtěli dveře zavírat pouze zavíracím tlačítkem, museli bychom se umět vypořádat se stavem, kdy otevřený výtah někdo bude přivolávat z jiného patra. Praktickým řešením by bylo přidat si časovač na automatické zavření dveří. Naše řešení by to mírně zkomplikovalo, pro jednoduchost to nebudeme dělat.

Pro rozmyšlení stavů si představme, jak by měl vypadat přejezd z jednoho patra do druhého. Nejprve má výtah otevřené dveře, měl by je zavřít. Po zavření dveří se má přesunout a po dojetí dveře otevřít v novém patře. Schématicky to můžeme vyjádřit jako na obrázku 4.



Obrázek 4: Postup přejíždění mezi patry i a j

Během přejíždění mezi patry už víme, co má výtah provést, nepotřebujeme tedy v tuto dobu reagovat na frontu zmáčknutých tlačítek a příslušný přesun uděláme vždy. Na tlačítka budeme reagovat tedy jen ve stavu, kdy výtah stojí ve stanici s otevřenými dveřmi. Samotná reakce bude jednoduchá: pokud je ve frontě aktuální patro nebo je prázdná, neděláme nic; když se ve frontě objeví jiné patro, tak do něj přejedeme. Lokálně tedy stroj pro výtah vypadá jako na obrázku 5.



Obrázek 5: Část MS pro obsluhu patra i

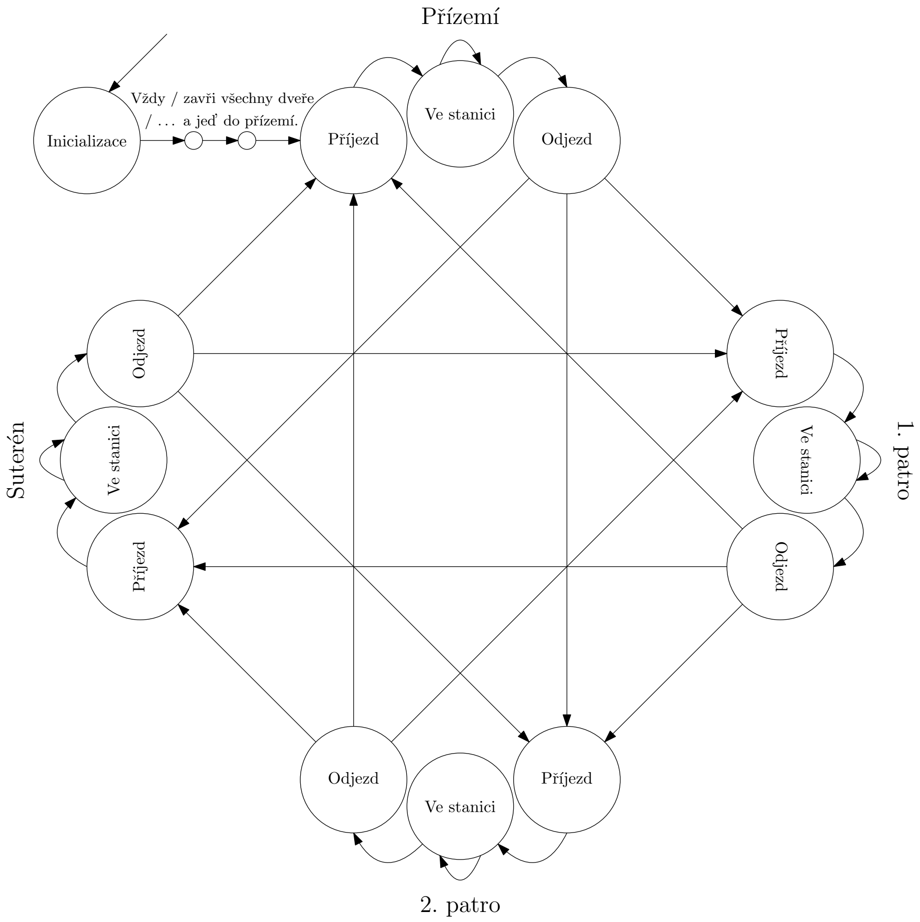
Poslední, co zbývá určit, je počáteční stav. Pokud nám výrobce dá záruku, že zkonstruoval výtah se všemi dveřmi zavřenými, můžeme si vybrat třeba stav příjezdu do přízemí, v opačném případě provedeme na začátku inicializaci, při které všechny dveře zavřeme a výtahem do přízemí dojedeme.[4] Inicializaci bychom ale měli provést v každém případě, abychom tak předešli případným problémům

[4]Při inicializaci si musíme dát pozor na to, že na jednom přechodu by měl být jen jeden výstup. Protože tady chceme dát elektronice víc signálů, přechod rozdělíme pomocí pomocných stavů, což nám umožní poslat více výstupů.

například ve chvíli, kdy se po servisní odstávce nebo po výpadku proudu nebude výtah nacházet v počátečním stavu. Pro ukázku kreslíme variantu s inicializací.

Celý stroj je rozkreslený na obrázku 6.

Toto je samozřejmě jen jedno z možných řešení, mnoho jiných přístupů funguje taky.

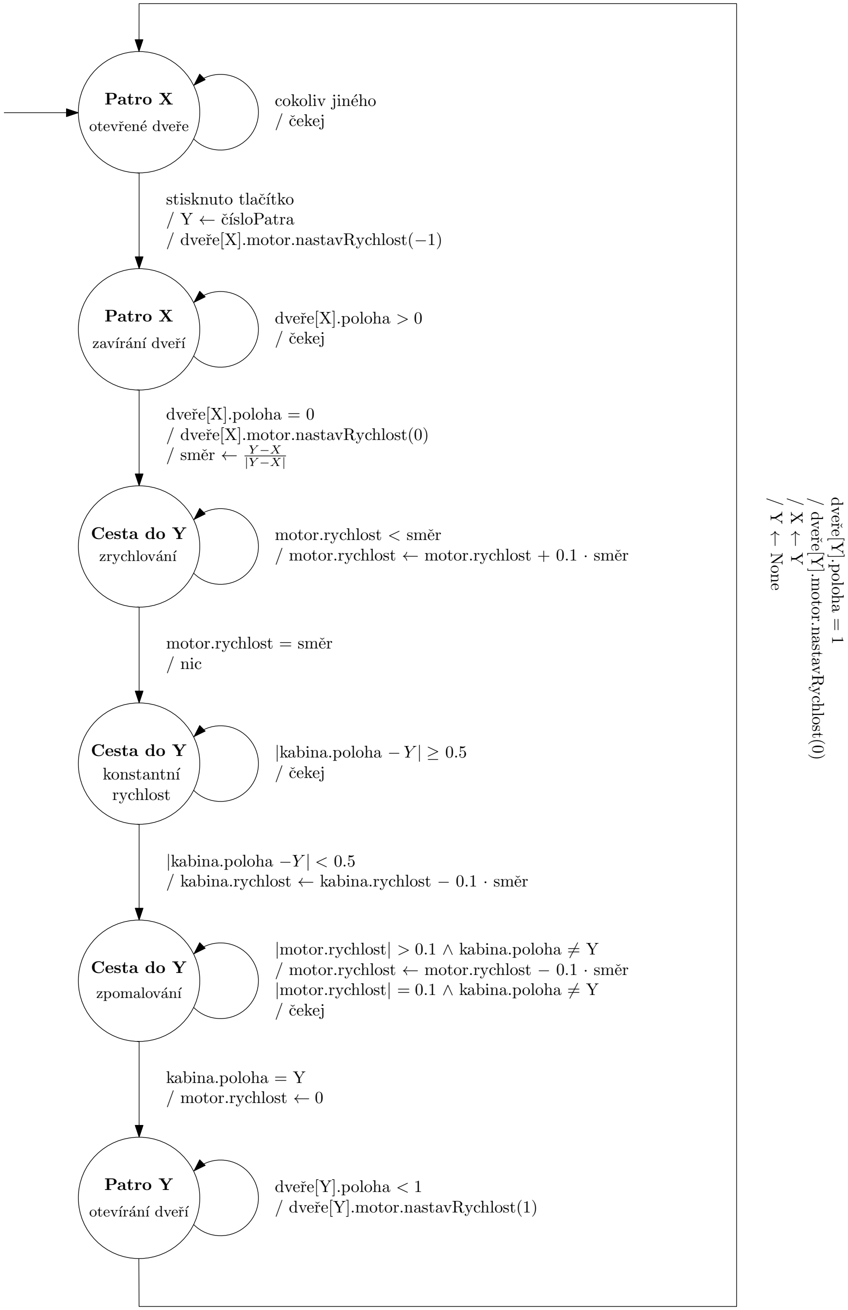


Obrázek 6: Celý MS pro čtyřpodlažní budovu. Pro popis přechodů a stavů vizte obr. 5.

Problém 4

Zadání:
V tomto problému se na rozdíl od úlohy 3 zaměříme na zpracování signálů ze senzorů a „nízkoúrovňové“ ovládání výtahu. Uvažujme cestu z patra X do patra Y. Navrhněte a popište MS, který bude řídit jednotlivé součásti výtahu. Výtah má motor, kterému můžete v každém kroku zvýšit nebo snížit rychlost o 0,1. Motor má senzor rychlosti otáčení, kde nulová rychlost reprezentuje stojící výtah a kladná stoupající výtah. Rychlost +1 nebo -1 reprezentuje maximální rychlost výtahu. Dále je u motoru senzor absolutní polohy výtahu, který nám vrací číslo patra, ve kterém se kabina nachází. Pokud je výtah na cestě mezi dvěma patry, potom tento senzor vrací desetinné číslo udávající polohu mezi těmito patry. Například hodnota 1,9 říká, že výtah téměř dorazil do druhého patra. Důležitou součástí výtahu jsou dveře, které se nachází v každém patře jedny. Samotná kabina výtahu pro jednoduchost žádné dveře nemá. Každé dveře mají senzor, který nám říká, jak moc jsou tyto dveře otevřené. Hodnota 0 reprezentuje zavřené dveře, hodnota 1 plně otevřené dveře a ostatní hodnoty mezi nulou a jedničkou říkají, jak moc už se tyto dveře stihly otevřít nebo zavřít. Jaké stavy bude mít MS, který řídí tento výtah? Kdy se mezi těmito stavy bude přecházet? Jak bude MS ovládat motor a dveře?

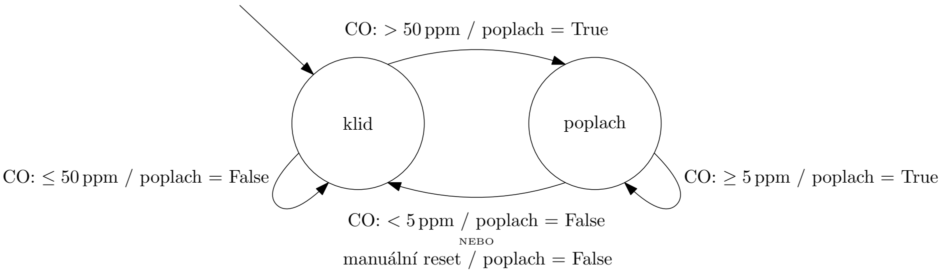
Řešení:
Zadání tohoto problému trochu napovídalo tomu, na co se máme zaměřit při řešení Problému 2. Jedno z možných řešení tohoto problému ukazuje Mealyho stroj na obrázku 7. Náš stroj předpokládá, že změnit rychlost z plné na nulovou či naopak vždy stihneme za vzdálenost poloviny patra. Pokud by to nebyla pravda, tak bychom mohli například omylem přejet cílové patro. Je tedy důležité tuto konstantu správně nastavit podle reálných vlastností výtahu. Pokud je u některého přechodu více příkazů, tak to znamená, že se všechny mohou vykonat paralelně. Například nechceme, aby se ve stejný okamžik, kdy se začnou zavírat dveře, začala rozjíždět i kabina výtahu. Tím pádem bychom nikdy neměli v jednom přechodu použít zároveň příkaz k zavírání dveří a příkaz k rozjíždění kabiny výtahu.



Obrázek 7: Příklad MS pro řízení výtahu z Problému 4.

Úloha 5

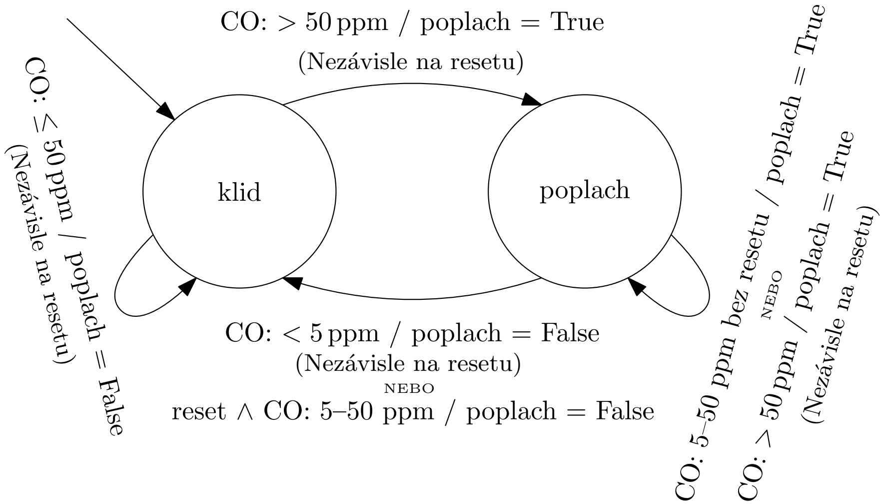
Zadání:
Čidlo CO na obrázku 8 není dobře definovaný stroj, protože některé přechody nedefinuje (např. co se stane, pokud je čidlo ve stavu „klid“, koncentrace CO je 42 ppm a někdo mačká reset). Dokreslete do obrázku všechny chybějící přechody mezi stavy.



Obrázek 8: Čidlo CO z úlohy 5

Řešení:
Přechody ze stavu poplach jsou vyřešeny úplně – zohledňují všechny kombinace koncentrace a mačkání resetu. Jediný problém tedy je se zohledněním resetu v klidovém stavu. Nejjednodušší je v takovém případě v tomto stavu setrvat. To je relativně bezpečné chování, jediný problém by byl ve velké koncentraci CO, kdy by se po puštění resetovacího tlačítka okamžitě spustil poplach. Tento problém můžeme řešit například přepínačem, který tento senzor úplně odpojí od napájení.

Alternativa je rovnou zohledňovat koncentraci při resetu: Když je koncentrace vysoká, tak nezávisle na resetu spustíme poplach, když je koncentrace nízká, tak nezávisle na resetu poplach vypínáme, a jen v rozmezí mezi 5 a 50 ppm zohledníme reset. Celé řešení znázorňuje obrázek 9.



Obrázek 9: Čidlo doplněné o všechny přechody

Úloha 6

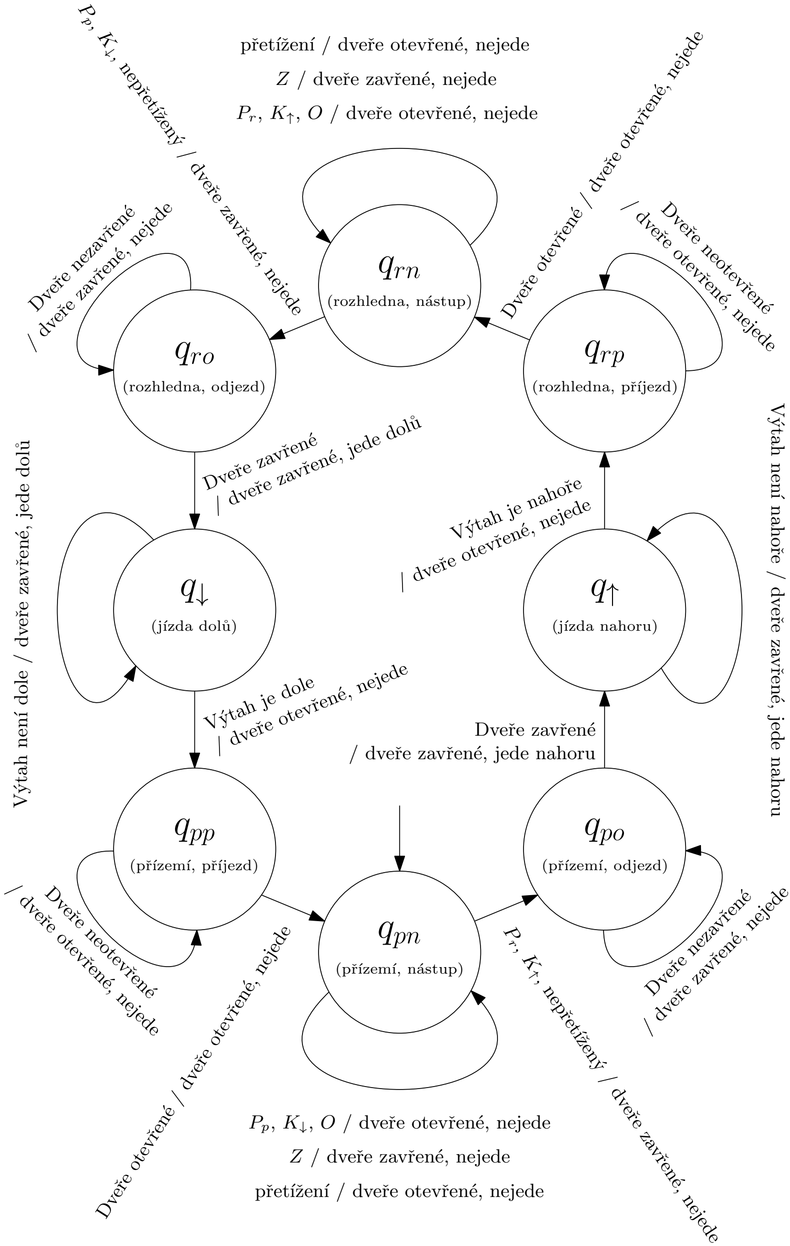
Zadání:
Popište MS z Problému 2 formálně. (Zadání Problému 2, o výtahu na rozhlednu, naleznete na straně 14.)

Řešení:
Předpokládejme, že jsme navrhli výtah následovně:

- Tlačítka: přivolávací na rozhledně (označme P_r) a v přízemí (P_p), v kabině pro jízdu nahoru ($K_\uparrow$) a dolů ($K_\downarrow$), zavření a otevření dveří (Z, O)
- Senzory: otevřenost dveří (d, 0 znamená zavřeno, 1 otevřeno), výška (h, $0 =$ přízemí, $1 =$ rozhledna), hmotnost nákladu (m, nosnost výtahu je m^*)
- Výstupy: motor, ovládání dveří

Samotný Mealyho stroj popisující[5] chování výtahu je na obrázku 10. Předpokládáme, že pokud někde není definován přechod, přejdeme do poruchového stavu, zastavujíce výtah a zavírajíce dveře.

[5]Stavy tentokrát v zájmu stručnosti nejsou okomentované, můžete si ale rozmyslet, že zhruba odpovídají stavům ve vzorovém řešení úlohy 3 výše. Pro stručnost též předpokládáme, že některé senzory v některých stavech není potřeba kontrolovat (zastavený výtah by neměl měnit výšku); tyto senzory ve formálním popisu zohledníme.



Obrázek 10: Příklad MS ovládajícího výtah na rozhlednu

Formálně tedy máme Mealyho stroj $M = (Q, \Sigma, \Lambda, \delta, \lambda_M, q_0)$, kde:

$$\begin{aligned} Q &= \{q_{pp}, q_{pn}, q_{po}, q_{rp}, q_{rn}, q_{ro}, q_\uparrow, q_\downarrow, q_{Err}\} \\ \Sigma &= \{P_r, P_p, K_\uparrow, K_\downarrow, Z, O, \emptyset\} \times \{d = 0, d \in (0,1), d = 1\} \times \\ &\quad \times \{h = 0, h \in (0,1), h = 1\} \times \{m < m^*, m \geq m^*\} \\ \Lambda &= \{\text{dveře otevřené}, \text{dveře zavřené}\} \times \{\text{jede nahoru}, \text{jede dolů}, \text{nejede}\} \\ q_0 &= q_{pn} \end{aligned}$$

Přechodovou a výstupní funkci (δ, λ_M) definujeme za chvíli, pojďme si nyní všimnout, co jsme udělali. Za množinu stavů jsme vzali všechna kolečka a přidali jsme chybový stav (q_{Err}). Počáteční stav je taktéž obkreslen z obrázku. Vstupní a výstupní symboly však tvoří *kombinace* našich tlačítek a senzorů, resp. výstupů. Vstupní symboly tedy tvoří čtveřice, kde první prvek je aktuálně zmáčknuté tlačítko (případně $\emptyset$, pokud žádné zmáčknuté není), další prvek je stav dveří (zavřené, pootevřené, otevřené), následuje výška (přízemí, mezi, rozhledna) a poslední je stav přetížení (přetíženo, nepřetíženo). Výstupní symboly pak jsou dvojice příkazu pro dveře a pro motor.

Konkrétní symboly pak píšeme do kulatých závorek, kupříkladu ($P_r, d = 0$, $h \in (0,1), m \geq m^*$) označuje symbol, kdy je stisknuto přivolávací tlačítko na rozhledně, dveře jsou zavřené, výtah se nachází někde mezi přízemím a rozhlednou a je přetížený.

Uvažování všech kombinací ve vstupní abecedě (Σ) ovšem znamená, že vstupní abeceda má $7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 126$ prvků. Protože rozbor tolika prvků se špatně vejde do tabulky, zavedeme značení, že hvězdička značí libovolnou hodnotu, např. ($P_r, *$, $h = 1, *$) označuje přivolání na rozhledně, výtah se nachází na rozhledně, senzor dveří a hmotnosti může mít libovolnou hodnotu. Hvězdičky smíme použít jen na levé straně tabulky pro přechodovou a výstupní funkci, tedy jen pro aktuální stavy a vstupní symboly.

Přechodovou a výstupní funkci určuje tabulka 1. Všimněte si, že hvězdičková notace umožnila vcelku kompaktně popsat 1134 možných přechodů a že řádky často odpovídají šipkám v obrázku. Podotkněme, že při výrobě tabulky jsme si naopak museli dát pozor, abychom žádné kombinaci stavu a vstupu omylem díky hvězdičkové notaci nepřiřadili více akcí.

Stav	Symbol	Nový stav	Výstupní symbol
q_{pn}	$(*, *, h = 0, m \geq m^*)$	q_{pn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{rn}	$(*, *, h = 1, m \geq m^*)$	q_{rn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{pn}	$(P_r, *, h = 0, m < m^*)$	q_{po}	(dveře zavřené, nejede)
q_{pn}	$(P_p, *, h = 0, m < m^*)$	q_{pn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{pn}	$(K_\uparrow, *, h = 0, m < m^*)$	q_{po}	(dveře zavřené, nejede)
q_{pn}	$(K_\downarrow, *, h = 0, m < m^*)$	q_{pn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{pn}	$(Z, *, h = 0, m < m^*)$	q_{pn}	(dveře zavřené, nejede)
q_{pn}	$(O, *, h = 0, m < m^*)$	q_{pn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{pn}	$(\emptyset, *, h = 0, m < m^*)$	q_{pn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{rn}	$(P_r, *, h = 1, m < m^*)$	q_{rn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{rn}	$(P_p, *, h = 1, m < m^*)$	q_{ro}	(dveře zavřené, nejede)
q_{rn}	$(K_\uparrow, *, h = 1, m < m^*)$	q_{rn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{rn}	$(K_\downarrow, *, h = 1, m < m^*)$	q_{ro}	(dveře zavřené, nejede)
q_{rn}	$(Z, *, h = 1, m < m^*)$	q_{rn}	(dveře zavřené, nejede)
q_{rn}	$(O, *, h = 1, m < m^*)$	q_{rn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{rn}	$(\emptyset, *, h = 1, m < m^*)$	q_{rn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{po}	$(*, d \in (0{,}1), h = 0, m < m^*)$	q_{po}	(dveře zavřené, nejede)
q_{po}	$(*, d = 0, h = 0, m < m^*)$	$q_\uparrow$	(dveře zavřené, jede nahoru)
q_{ro}	$(*, d \in (0{,}1), h = 1, m < m^*)$	q_{ro}	(dveře zavřené, nejede)
q_{ro}	$(*, d = 0, h = 1, m < m^*)$	$q_\downarrow$	(dveře zavřené, jede dolů)
$q_\uparrow$	$(*, d = 0, h \in (0{,}1), m < m^*)$	$q_\uparrow$	(dveře zavřené, jede nahoru)
$q_\uparrow$	$(*, d = 0, h = 1, m < m^*)$	q_{rp}	(dveře otevřené, nejede)
$q_\downarrow$	$(*, d = 0, h \in (0{,}1), m < m^*)$	$q_\downarrow$	(dveře zavřené, jede dolů)
$q_\downarrow$	$(*, d = 0, h = 0, m < m^*)$	q_{pp}	(dveře otevřené, nejede)
q_{pp}	$(*, d \in (0{,}1), h = 0, m < m^*)$	q_{pp}	(dveře otevřené, nejede)
q_{pp}	$(*, d = 1, h = 0, m < m^*)$	q_{pn}	(dveře otevřené, nejede)
q_{rp}	$(*, d \in (0{,}1), h = 1, m < m^*)$	q_{rp}	(dveře otevřené, nejede)
q_{rp}	$(*, d = 1, h = 1, m < m^*)$	q_{rn}	(dveře otevřené, nejede)
Všechny ostatní kombinace		q_{Err}	(dveře zavřené, nejede)

Tabulka 1: Formální přechodová a výstupní funkce pro výtah

Problém 7

Zadání:
V jednom hotelu mě zaujal komplex tří výtahů. První a druhý výtah jezdil mezi všemi patry hotelu, ale uživatel musel pípnout kartou od svého pokoje, aby ho výtah poslechl. Třetí výtah jezdil pouze mezi přízemím, prvním patrem s restaurací a nejvyšším patrem s bazénem na střeše. V tomto výtahu jste nepotřebovali žádnou kartu. V přízemí bylo bohužel jen jedno tlačítko na přivolání výtahu. Občas se tedy stalo, že návštěvníkovi bez karty přijel výtah, ve kterém bylo nutné pípnout kartou od svého pokoje. Jak byste vymysleli systém tlačítek pro tuto strukturu výtahů? Jak se bude u vaší implementace chovat řídicí elektronika tohoto výtahového komplexu?

Řešení:
K tomuto problému jste posílali velmi odlišná řešení a některá z nich byla opravdu originální. Z praktického pohledu se mi nejvíce líbila varianta, kdy v patrech, kde zastavují oba výtahy, umožníme uživateli volbu cílového patra ještě před příjezdem kabiny. V praxi to znamená, že v některých patrech budeme mít několik tlačítek na přivolání výtahu. Každé tlačítko bude reprezentovat patro nebo skupinu pater, do kterých se chceme přesunout. Podobné řešení s více tlačítky pro přivolání můžeme vidět například tehdy, kdy si můžeme zvolit směr, kterým chceme jet, už stisknutím vhodného tlačítka pro přivolání výtahu.

Díl 3: Jak na přechodovou funkci

Na začátku se vám musím omluvit za chybku, která se nám dostala do 2. čísla. Na konci stránky 10 jsem psal, jak přidávat komentáře do souboru JSON, ale syntaxe v ukázce je špatně. Správně bychom měli komentáře přidávat stejně jako jakékoliv jiné klíče:

```
{
  "_comment": "Vas komentar bez diakritiky a specialnich znaku.",
  "buttons": [
    {"id": "openDoors", "symbol": "<>"}
  ],
  "elevators": [
    {"id": "A", "floors": [0,3], "maxSpeed": 1.0, "speedStep": 0.1}
  ]
}
```

Kód 1: Ukázka syntaxe souboru ve formátu JSON.

V minulém díle jsme se seznámili se simulátorem výtahů a vyzkoušeli jsme si základní interakci s ním pomocí jeho API (application programming interface). Nyní se podíváme na to, jak v tomto prostředí psát přehlednější, srozumitelnější a lépe udržitelný kód pomocí funkcí.

Opakování z minulého dílu

Pro spuštění simulace potřebujeme soubor ve formátu JSON, který obsahuje informace o tom, jak naše struktura simulovaných výtahů vypadá. Simulátor importujeme jako modul do našeho Python kódu a spustíme pomocí procedury `elevators.runSimulation()`:

```python
import elevators

def prechodovaFunkce(e):
    pass

elevators.runSimulation('elevators.json', prechodovaFunkce)
```

Kód 2: Šablona kódu pro spuštění simulace

Klíčové slovo `pass` funguje podobně jako prázdný řádek. Používá se většinou tam, kde chybí kousek kódu. Tady chybí implementace funkce `def prechodovaFunkce(e)`. Kdybychom nepoužili klíčové slovo `pass`, tak bychom obdrželi `IndentationError` za chybějící odsazení na tomto řádku.

Detailní popis API včetně návodu na ovládání simulátoru najdete na GitHubu: `https://github.com/bsaid/ElevatorSimulator`

Proč přechodová funkce

Když budeme chtít, aby výtah neustále zrychloval, stačí k tomu napsat jednoduchou přechodovou funkci:

```python
def prechodovaFunkce(e):
    e.speedUp('id_vytahu')
```

Kód přechodové funkce se spouští opakovaně v každém kroku simulace. Po prvním spuštění se výtah rozjede pomalu nahoru, po druhém spuštění se opět trochu zrychlí směrem nahoru, atd. V určité chvíli bychom chtěli toto zrychlování zastavit, což je problém, který jste pravděpodobně řešili v rámci úloh minulého dílu.

V běžných programech bychom mohli zrychlování zabalit do cyklu `while`, který se ukončí při dosažení určité rychlosti. Tuto filozofii bohužel nemůžeme aplikovat při implementaci přechodové funkce automatu.

Výpočet uvnitř přechodové funkce musí být rychlý, aby se stihl v rámci jednoho kroku simulace. To ale neznamená, že kód nesmí například obsahovat cykly, jen musíme jako programátoři zaručit, že výpočet doběhne v časovém limitu pro libovolná vstupní data. Důležité také je, že přechodová funkce musí být opravdu (v matematickém smyslu) funkce aktuálního stavu a tudíž nemůžeme třeba přenášet vnitřní stav mezi časovými kroky.

Pro zajímavost zmíním, že tento problém se před příchodem RTOS (real-time operating system) řešil asi u všech programovatelných strojů reagujících v reálném čase. Reagovat v reálném čase znamená, že stroj musí stihnout zareagovat v rámci nějakého časového limitu. Kdyby například autopilot nestihl zavčas zareagovat na detekovaný poryv větru, tak by nejspíš došlo k nehodě. Podobný problém bychom řešili, kdyby výtah nestihl zavčas reagovat na detekovanou překážku v zavírajících se dveřích.

Všechny programovatelné stroje reagující v reálném čase v kódu obsahují *hlavní smyčku* (*main loop*). V dobách, kdy neexistoval žádný RTOS, musela jedna hlavní smyčka obsloužit všechny úlohy, které daný stroj řešil. Například hlavní smyčka našeho simulátoru se dělí na vámi implementovanou funkci `prechodovaFunkce()` (v příkladech na GitHubu je pojmenovaná jako `elevatorSimulationStep(e)`) a mnou implementovanou funkci, která počítá samotnou „fyziku“ simulace a vykresluje aktuální stav do grafického okna.

V tomto tématku se nebudeme detailněji věnovat operačním systémům reálného času (RTOS). Pokud vás zajímají podrobněji, můžete se podívat například na mou přednášku na YouTube: `https://www.youtube.com/watch?v=wvQ1RcWSpd0`

Jak na funkce

Vraťme se zpět k problému urychlení výtahu na zadanou rychlost. Zkusme si vytvořit funkci `nastavRychlost()`, která se bude periodicky volat s každým voláním přechodové funkce a bude vracet `True` nebo `False`. `True` vrátí vždy, když se výtah pohybuje zadanou rychlostí, v opačném případě vrátí `False`.

```python
def prechodovaFunkce(e):
    stavDosazen = nastavRychlost(1.5)
    if stavDosazen:
        print('Vytah dosahl zadane rychlosti.')
    else:
        print('Vytah stale upravuje rychlost.')
```

Kód 3: Ukázka použití funkce `nastavRychlost()`.

Jak implementovat funkci `nastavRychlost(...)`? Pojďme si slovně popsat, co musíme v každé iteraci udělat: „Pokud výtah jede rychleji než zadanou rychlostí, zpomalíme a vrátíme `False`. Pokud jede pomaleji, než zadanou rychlostí, tak zrychlíme a vrátíme `False`. Pokud jede správnou rychlostí, pouze vrátíme `True`."

Pojďme si tento slovní popis převést do Python kódu:

```python
ODCHYLKA_SENZORU = 0.05

def nastavRychlost(e, idVytahu, rychlost):
    if e.getSpeed(idVytahu) > rychlost + ODCHYLKA_SENZORU:
        e.speedDown(idVytahu)
        return False
    elif e.getSpeed(idVytahu) < rychlost - ODCHYLKA_SENZORU:
        e.speedUp(idVytahu)
        return False
    else:
        return True
```

Kód 4: Definice funkce `nastavRychlost()`.

Všimněte si, že jsme museli přidat dva argumenty funkce `nastavRychlost(...)`. První parametr `e` potřebujeme pro interakci se simulátorem a druhý parametr `idVytahu` pro identifikaci výtahu, se kterým pracujeme.

Úloha 1 [1b]: *Ukázka kódu 4 používá konstantu `ODCHYLKA_SENZORU`. Vysvětlete, proč se tato konstanta v kódu nachází a co by se mohlo stát, kdybychom ji nepoužili.*

Úloha 2 [2b]: *Napište funkci `closeAllDoors(e, idVytahu)`, která zajistí zavření všech dveří a připraví tak výtah k jízdě. Podobně jako v ukázce výše bude tato funkce vracet `True` pouze tehdy, když jsou všechny dveře dovřené.*

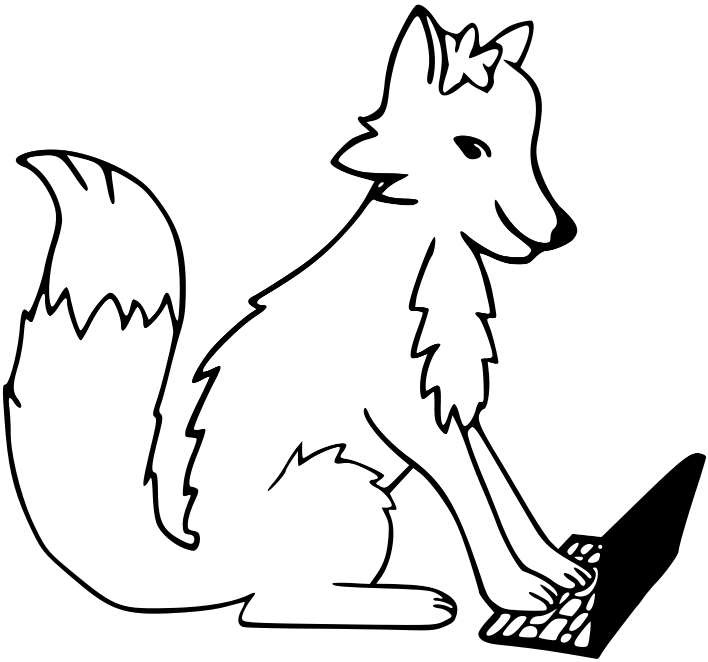
Úloha 3 [3b]: *Napište funkci `goToFloor(e, idVytahu, floorNumber)`, která přesune kabinu výtahu do zadaného patra a zajistí úplné zastavení kabiny. Opět funkce vrací `True` pouze tehdy, když výtah stojí v zadaném patře, jinak vrací `False`.*

Problém 4: *Co se stane, když použiju následující přechodovou funkci?*

```
def prechodovaFunkce(e):
    idVytahu = 'Vytah1'
    goToFloor(e, idVytahu, 2)
    goToFloor(e, idVytahu, 0)
```

Uvažujte různé implementace funkce `goToFloor(...)`, nikoliv jen tu vaši z úlohy 3.

Abychom mohli jednotlivé funkce kombinovat, potřebujeme vědět, v jakém stavu se výtah aktuálně nachází. K tomu potřebujeme globální proměnnou. Globální proměnná je definovaná mimo tělo funkce a její obsah se nezapomíná po opuštění těla funkce. V příkladu 5 na GitHubu je příkladem takové proměnné třída `GlobalData`.



Jak reagovat na tlačítka

V následující ukázce můžete vidět použití globální proměnné (v tomto případě třída `GD`), ve které si uchováváme informace o aktuálním stavu výtahu. Zároveň můžeme vidět, jak zjistit, které tlačítko bylo stisknuto, a jak využít frontu událostí (stisknutých tlačítek) implementovanou přímo v simulátoru. Když se na tento kód podíváme blíže nebo si ho spustíme na simulátoru, tak zjistíme, že výtah reaguje na tlačítka tří pater a po stisknutí každého tlačítka se přesune do správného patra.

```python
class GD: # zkráceně GlobalData
    id = 'Vytah1'
    stav = 'ceka'
    cilovePatro = 0

def prechodovaFunkce(e):
    if GD.stav == 'jede':
        if goToFloor(e, GD.id, GD.cilovePatro):
            GD.stav = 'ceka'
            print('Vytah dorazil do ' + str(GD.cilovePatro) + '. patra.')
    elif GD.stav == 'ceka' and e.numEvents() > 0:
        event = e.getNextEvent()
        if event == 'prizemi':
            GD.cilovePatro = 0
            GD.stav = 'jede'
        elif event == '1.patro':
            GD.cilovePatro = 1
            GD.stav = 'jede'
        elif event == '2.patro':
            GD.cilovePatro = 2
            GD.stav = 'jede'
        else:
            print('Stisknuto nezname tlacitko.')
        # Ano, tato struktura if ... else jde udělat jednodušeji,
        # pokud místo 'přízemí' použijeme '0',
        # místo '1.patro' použijeme '1', atd.
```

Kód 5: Reakce na eventy generované stiskem tlačítek.

Úloha 5 [2b]: *Upravte tuto ukázku tak, aby výtah otevíral a zavíral dveře. Když výtah stojí v patře, tak má otevřené dveře, dokud není stisknuté tlačítko pro přesun do jiného patra.*

Problém 6: *Jak byste řešili optimalizaci pořadí stisknutých tlačítek? Když výtah stojí v přízemí a například stiskneme v pořadí patra 3, 1 a 2, tak chceme, aby výtah zastavil postupně v patrech 1, 2 a 3, nikoliv v původním pořadí 3, 1 a 2. Toto zadání nevyžaduje programování, ale jen teoretické zamyšlení a slovní popis vašeho řešení.*

Problém 7: ***Výzva na napsání řešitelského článku:*** *Pravděpodobně jste se již setkali s více různými simulátory. Některé z nich mohou být složité aplikace* *nebo hry jako třeba letecký simulátor. Jiné jsou jen několik řádků kódu spouštěného přímo v internetovém prohlížeči. Setkali jste se někdy s opravdu zajímavým simulátorem, o který byste se rádi podělili s ostatními? Napište nám o něm článek a my vám ho otiskneme v některém z dalších čísel.*

Béďa; `bedrich.said@gmail.com`
Odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 4 – Derivace a integrály

Řešení 2. dílu

Úloha 1

Zadání:
Pro trénink zderivujte funkce

$$x^2 - 4x + 4$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$2\sin(x)\cos(x)$$

Řešení od Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Kláry Plchové

$$(x^2 - 4x + 4) = (x^2)' - (4x)' + 4' = 2x - 4$$
$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)' = (x^3)' - (6x^2)' + (12x)' - 8' = 3x^2 - 12x + 12$$
$$(2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)) = (\sin(2x))' = 2\cos(2x)$$

Poslední funkci šlo zderivovat i bez použití vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu:
Řešení od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Michaela Jarvise

$$\begin{aligned}
y &= 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\
y' &= (2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x))' && \text{derivace součinu} \\
y' &= 2(\sin'(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos'(x)) \\
y' &= 2(\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x))) \\
y' &= 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) && \text{vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu} \\
y' &= 2\cos(2x)
\end{aligned}$$

Úloha 2

Zadání:
Kde funkce $x^2 - 4x + 4$ roste a kde klesá? Body, kde je derivace nula, zatím neřešte. Načrtněte také graf.

A co funkce $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$? A $2\sin(x)\cos(x)$? (Hint: u poslední funkce chcete použít vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu.)

Řešení od Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Marka Jolyho, Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Adama Mikuliče a Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Kotlase

Funkce f roste, když $f' > 0$. Funkce f klesá, když $f' < 0$.

$$\begin{aligned} f_1' = 2x - 4 &< 0 \\ 2x &< 4 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Funkce f_1 klesá, je-li $x < 2$.

$$\begin{aligned} f_1' = 2x - 4 &> 0 \\ 2x &> 4 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Funkce f_1 roste, je-li $x > 2$.

$$\begin{aligned} f_2' = 3x^2 - 12x + 12 &< 0 \\ 3(x-2)^2 &< 0 \\ (x-2)^2 &< 0 \\ x &\notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funkce f_2 nikdy neklesá.

$$\begin{aligned} f_2' &= 3x^2 - 12x + 12 = 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} \\ x_{1,2} &= 2 \end{aligned}$$

Funkce f_2 roste, platí-li, že $x \neq 2$.

$$f_3' = 2\cos(2x) < 0$$
$$\cos(2x) < 0$$
$$270^\circ + 360^\circ \cdot n > 2x > 90^\circ + 360^\circ \cdot n \qquad n \in \mathbb{Z}$$
$$135^\circ + 180^\circ \cdot n > x > 45^\circ + 180^\circ \cdot n \qquad n \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n > x > \frac{1\pi}{4} + \pi \cdot n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Funkce f_3 klesá, platí-li, že $\frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n > x > \frac{1\pi}{4} + \pi \cdot n$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

$$f_3' = 2\cos(2x) > 0$$

$$\cos(2x) > 0$$

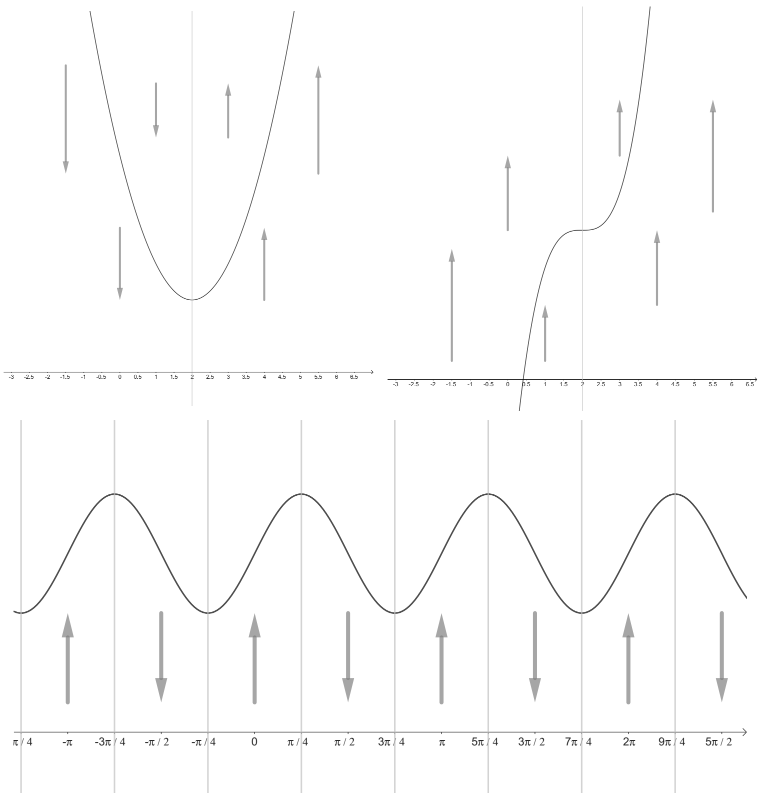
$$270^\circ + 360^\circ \cdot n < 2x < 450^\circ + 360^\circ \cdot n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$135^\circ + 180^\circ \cdot n < x < 255^\circ + 180^\circ \cdot n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n < x < \frac{5\pi}{4} + \pi \cdot n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Funkce f_3 roste, platí-li, že $\frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n < x < \frac{5\pi}{4} + \pi \cdot n$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

Jenom drobné upozornění, v minulém díle bylo psáno „Pokud je derivace větší (menší) nule, pak je funkce rostoucí (klesající)“. Nic to neříká o bodech, kde je derivace nulová nebo neexistuje. Tedy například f_2 je rostoucí na celém $\mathbb{R}$. (Ale ano, v zadání bylo, abyste neřešili body s nulovou derivací. Jen říkám, že nesmíme tvrdit, že tam funkce rostoucí není.)



Obrázek 11: Náčrtky grafů podle toho, co víme (znaménko derivace)

Úloha 3

Zadání:
Nalezněte všechny extrémy funkcí $x^2 - 4x + 4$, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ a $2\sin(x)\cos(x)$ a určete, jaké jsou.

Řešení od Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Marka Jolyho, Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Adama Mikuliče a Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Kotlase

Pro derivaci funkce f_1 platí, že pokud $x = 2$, tak $f_1' = 0$. Pokud $x < 2$, tak $f_1' < 0$, a pokud $x > 2$, tak $f_1' > 0$. $\rightarrow$ Funkce f_1 do bodu $x = 2$ pouze klesá, z bodu $x = 2$ pouze roste. $\rightarrow$ Funkce f_1 má globální ostré minimum v bodě $x = 2$.

Pro derivaci funkce f_2 platí, že $f_2' \geq 0$. Pokud $x = 2$, tak $f_2' = 0$. $\rightarrow$ Funkce f_2 roste od $x = -\infty$ do $x = 2$, odtud opět roste do $x = \infty$. $\rightarrow$ Funkce f_2 nemá žádný extrém.

Pro derivaci funkce f_3 platí, že $f_3' = 0$, když $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$, kdy $n \in \mathbb{Z}$. Funkce f_3 vždy klesá do bodů $x = \frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n$ a roste do bodů $x = \frac{5\pi}{4} + \pi \cdot n$. $\rightarrow$ Body $x = \frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n$ jsou lokální ostrá minima a body $x = \frac{5\pi}{4} + \pi \cdot n$ jsou lokální ostrá maxima.

V posledním případě se na tyto extrémy dá také dívat jako na globální neostré.

Problém 4 a pátý problém z prvního dílu

Problém 4 a pátý problém z prvního dílu byly opět o nalezení použití derivací a extrémů. To se podařilo např. Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jolaně Štraitové, jejíž článek naleznete na konci tohoto tématka.

Také se s derivacemi dá velmi rychle najít vrchol paraboly (a přiznám se, já to tak přesně dělám, protože člověk si pak nemusí pamatovat vzorec, jen derivuje):

Řešení od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jolany Štraitové

Když jsme se naučili, jak pomocí derivací zjistit extrémy funkcí, můžeme tuto teorii využít například k nalezení vrcholu paraboly (grafu kvadratické funkce), protože víme, že právě vrchol paraboly je vždy globálním extrémem kvadratické funkce (ať už minimem v případě, kdy je před kvadratickým členem záporný koeficient, nebo maximem v případě, že je koeficient před kvadratickým členem kladný).

Obecně hledáme body podezřelé z extrémů tam, kde derivace funkce neexistuje, nebo kde je rovna nule. Pro kvadratickou funkci existuje derivace v každém bodě, proto nám bude stačit se zaměřit na body, kde je nulová.

Pro kvadratickou funkci s předpisem $ax^2 + bx + c$ je derivace obecně rovna $2ax + b$. Bod podezřelý z extrému tedy najdu tak, že ji položím rovnu nule:

$$2ax + b = 0$$

Získané $x = -\frac{b}{2a}$ je potom x-ovou souřadnicí vrcholu paraboly.

Zbývající y-ovou souřadnici vrcholu získám tak, že vypočtené x dosadím do předpisu funkce:

$$y = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = c - \frac{b^2}{4a}$$

Souřadnice vrcholu paraboly jsou tedy $V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$, čímž jsem si odvodila skutečně známý vzorec.

Úloha 5

Zadání:
Než se lidi dobře seznámí s pojmy konvexní a konkávní, často se jim plete, který pojem je který. Zkuste zjistit, proč se jmenují zrovna takhle, nebo třeba vymyslet nějakou pomůcku na lepší zapamatování.

Řešení:
Nebylo těžké odhalit, že oba pojmy pochází z latiny, konkrétně ze slov *convexus* – – vypouklý a *concavus* – vydutý. Nicméně tento překlad do češtiny pro lepší zapamatování většinou nepomůže. Proto jste nám zaslali své mnemotechnické pomůcky:

- *Concavus* připomíná anglické slovo *cave* – jeskyně. Vchod do jeskyně má konkávní tvar.
- Když si rozdělíme slovo *kon-káv-ní*, získáme *kon* ~ zápor (*kontra*) a *káv* ~ káva. Tedy do konkávní křivky kávu nenalijeme.
- KonVexní křivka připomíná tvarem písmeno V, konkÁvní zase písmeno A.

Výše uvedené pomůcky jsou relativně známé a poslalo nám je hned několik z vás. Pak přišlo i několik opravdu originálních tipů:

- Mgr.$^{\text{MM}}$ Michael Jarvis:

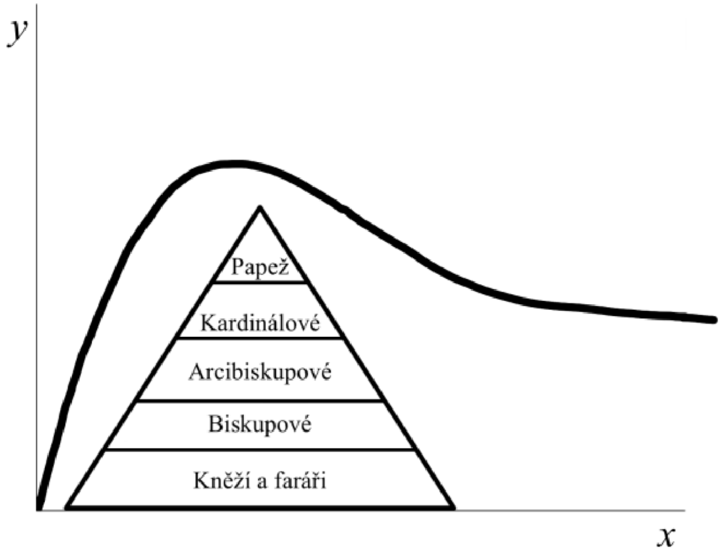
  > Pokud se podíváme na slova konkávní a konvexní, tak obě mají předponu *kon-* a příponu *-ní*. Pokud je odebereme, zbyde nám *káv* a *vex*. Část káv je skoro jako slovo *rukáv*. Pokud se podíváme na tričko a spojíme křivkou rukávy, tak dostaneme konkávní křivku.

- Mgr.$^{\text{MM}}$ Matyáš Pokorný:

  > Když si člověk dá panáka, často ho vypije „na ex“ a skleničká na panáka má zpravidla konvEXní tvar.

- Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jana Uglickich:

  Konkláve je shromáždění kardinálů, na kterém se volí papež. Kardinálové patří k nejvyšším hodnostářům římskokatolické církve, tudíž se v hierarchických pyramidách znázorňují vždy nahoru (poslední stupeň před papežem). Pokud umístíme takovou pyramidu do soustavy souřadnic, bude vzniklý obrazec připomínat tento:

  Tedy, jak je vidět, ukázkově *konkávní* část funkce se nachází u těch hodnostářů, kteří jsou s *konkláve* přímo spojeni. To, že spojnice dvou bodů takové funkce povede pod ní, už lze odvodit.

Díl 3: Diferenciální rovnice

Na začátku derivací jsme psali, že derivace jsou něco „jednoduchého", že se stačí držet pár pravidel a většinu derivaci spočítáme. U zbytku funkcí to není o moc těžší (jen to vyžaduje znalosti o limitách).

Tak v tomto díle to bude přesně naopak, obecně jsou diferenciální rovnice extrémně obtížné a obsahují spoustu otevřených (= nevyřešených) problémů včetně jednoho problému tisíciletí.[6] Tudíž si pouze řekneme, co to je, a povíme si, jak některé řešit přibližně pomocí počítače.

Jak už název napovídá, diferenciální rovnice je rovnice. Nehledáme však hodnoty neznámých, jak jsme zvyklí, nýbrž hledáme rovnou funkce, které když dosa-

[6] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Problémy_tisíciletí`

díme za proměnné, tak bude rovnice platit. A aby toho nebylo málo, diferenciální rovnice obsahují derivace (proto diferenciální). Tedy například

$$f'(x) = f(x)$$

je diferenciální rovnice, jejímž řešením je $f(x) = C \cdot e^x$ pro libovolné $C \in \mathbb{R}$, jelikož $(e^x)' = e^x$.

Stejně jako derivace i diferenciální rovnice lze zapsat různými způsoby. Předně se většinou vynechává proměnná, tedy se většinou píše

$$f' = f, \qquad \text{a ne} \qquad f'(x) = f(x).$$

Když už nepoužíváme x jako proměnnou, můžeme ji používat jako neznámou:

$$x' = x$$

V tomto tvaru už jsme dvě diferenciální rovnice viděli ve druhém čísle ve článku Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Terezy Kubínové:

$$x' = k \cdot x, \qquad x' = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

První slovně znamená „změna velikosti populace je přímo úměrná její velikosti“, druhá „změna velikosti populace je přímo úměrná její velikosti a volnému místu v prostředí“.

Velmi zjednodušeně[7] lze za diferenciální rovnici považovat i

$$dQ = dU + dW,$$

což říká „změna Q se skládá ze změny U a změny W“, tedy derivace Q je rovna součtu derivací U a W. Tento tvar najdeme např. v článku Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jolany Štraitové na konci tohoto dílu.

Najít exaktní řešení diferenciální rovnice může být velmi obtížné. Často nám ale stačí najít řešení přibližné (většinou navíc umíme dokázat, jak moc se bude od přesného řešení lišit, i když to tu rozebírat nebudeme). Konkrétně, když máme rovnici ve tvaru derivace = něco (případně soustavu takových rovnic), tak můžeme nechat počítač „to prostě spočítat s dostatečnou přesností“.[8]

Mnoho programů zaměřených na matematiku umí počítat numerické řešení, my tu ukážeme, jak ho lze spočítat v Geogebře.[9] Tu budeme ovládat pomocí příkazové řádky (příkaz vložíte do textového pole dole a zmáčknete tlačítko `Enter`).

[7] Ve skutečnosti je to tzv. diferenciál, ale to je už moc nad rámec tohoto tématu.

[8] Metod existuje více, ta nejlehčí (kterou zvládnete v libovolném tabulkovém procesoru) je vzít si nějaké (malé) číslo Δ a počáteční hodnotu funkce a pak vždy přičteme k funkční hodnotě Δ krát derivaci v aktuálním bodě a posuneme aktuální bod o epsilon.

[9] Stáhnout ji lze zcela zdarma na stránce `https://www.geogebra.org/download`, doporučujeme `GeoGebra Classic 5`.

První, co potřebujeme, je zadefinovat Geogebře naši diferenciální rovnici. To uděláme příkazem `f'(t, f) = f`, což znamená, že derivace f v bodě t (definujeme ji jako funkci proměnné t a funkční hodnoty $f = f(t)$) je rovna hodnotě $f(t)$, tedy $f'(t) = f(t)$. Pozor, na pravé straně je třeba psát `f` a ne `f(t)`, protože druhý případ bere Geogebra jako násobení $f \cdot (t) = f(t) \cdot t$.

Na pravé straně může být libovolný výraz, kde se vyskytují t a $f(t)$, například po zadání `f'(t, f) = k f` a potvrzení vyskakovacího okna nám vznikne definice $f'(t) = k \cdot f(t)$, kde k je proměnná, kterou můžeme upravovat zobrazeným posuvníkem, nebo příkazem `k = cislo`.

Máme zadefinované derivace, je čas na příkaz `NSolveODE({f'}, 0, {1}, 10)`, který vytvoří „funkci" – numerické řešení rovnice $f'(t) = \ldots$ (tu jsme Geogebře označili `f'` právě příkazem `f'(t, f) = k f`), které začíná v bodě 0 funkční hodnotou $f(0) = 1$ a končí v bodě 10.

Že našla opravdu řešení, si můžeme zkontrolovat zadáním příkazu `e^(k x)`, který vykreslí funkci $e^{k \cdot x}$, která je řešením rovnice $f' = k \cdot f$. Výsledek vypadá jako v souboru `https://mam.matfyz.cz/media/prilohy/29-3-Ukazka1.ggb`.

Úloha 1 [2b]: *Řešte numericky rovnici $x' = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$. K a r si zvolte, jak uznáte za vhodné.*

Řešit můžete v libovolném programu (např. Geogebra, tabulkový procesor, Python, SageMath, Wolfram Mathematica a další), vždy však odevzdejte i zdrojové soubory („kód"), nejen výsledek.

Co přesně dělá `NSolveODE` je detailněji popsáno na `https://wiki.geogebra.org/en/NSolveODE_Command`. My se tu ještě podíváme na poslední příklad užití z této stránky a projdeme si ho podrobněji, než je tam popsán, jelikož se nám to bude hodit při řešení následujících úloh i při oslňování kamarádů simulacemi pohybů z fyziky.

Tento příklad je simulace matematického kyvadla. První, co budeme potřebovat, jsou nějaké konstanty: `g = 9.8`, tíhové zrychlení; `l = 2`, délka kyvadla; `a = 5`, počáteční úhel kyvadla; `b = 3`, počáteční rychlost kyvadla.

Následně potřebujeme diferenciální rovnici popisující pohyb kyvadla. Taková rovnice je například

$$y_1'' = -\frac{g}{l} \sin(y_1),$$

kde y_1 je úhel kyvadla. Geogebra ale neumí druhé derivace, takže provedeme standardní trik, který se učí v diferenciálních rovnicích – nahradíme rovnici soustavou rovnic, kde přidáme $y_2 = y_1'$, čímž $y_1'' = y_2'$. Zde má dokonce tato nová funkce y_2 fyzikální význam, je to totiž úhlová rychlost.

Rovnice tedy Geogebře zadefinujeme a numericky řešíme následovně:

```
y1'(t, y1, y2) = y2
y2'(t, y1, y2) = (-g) / l sin(y1)
NSolveODE({y1', y2'}, 0, {a, b}, 20)
```

Máme dvě funkce, tedy v závorce za derivací tentokrát bude `t` i obě funkce (na pravé straně tedy můžeme mít `t`, `y1` i `y2`, i když v tomto příkladu využíváme jen jednu z funkcí). `NSolveODE` dostává jako první parametr v podstatě seznam diferenciálních rovnic, potom tedy zase začínáme v 0, funkce mají v nule hodnoty a a b, tedy $y1(0) = a$ a $y2(0) = b$. Nakonec říkáme, že končíme v bodě 20.

Tím vznikly dvě nové funkce – v Geogebře v angličtině `numericalIntegral`, v Geogebře nastavené do češtiny `numerickyIntegral`. To je řešení našich rovnic, první je funkce `y1`, druhá `y2`. Dále nás tedy zajímá pouze `numerickyIntegral1` (resp. `numericalIntegral1`), neboť to je právě úhel kyvadla.

`numerickyIntegral1` ve skutečnosti není funkce, ale seznam, takže potřebujeme zjistit, v kolika bodech Geogebra funkci odhadovala. To se dělá příkazem `len = Length(numerickyIntegral1)`. Následně chceme tyto body procházet, což uděláme vytvořením posuvníku
`c = Slider(0, 1, 1 / len, 1, 100, false, true, true, false)`.

Dále použijeme:

```
x1 = l sin(y(Point(numerickyIntegral1, c)))
y1 = -l cos(y(Point(numerickyIntegral1, c)))
A = (x1, y1)
```

Neboť potřebujeme získat polohu kyvadla. Polohu kyvadla spočteme z úhlu jako (ano, Geogebra v návodu pojmenovala stejně úhel a y-novou souřadnici)

$$x = l \cdot \sin(y1), \qquad y = l \cdot \cos(y2).$$

Jak již bylo zmíněno, `numerickyIntegral1` není úplně funkce, takže nefunguje `numerickyIntegral1(c)`, ale můžeme získat bod (dvojici souřadnic) na grafu dané funkce s x-ovou souřadnicí `c` pomocí `Point(numerickyIntegral1, c))`. Následně existují funkce `x` a `y`, které umí z bodu dostat první nebo druhou souřadnici. Tedy hodnotu `y2` v bodě `c` jsme získali jako `y(Point(numerickyIntegral1, c))`. Pak jsme spočetli souřadnice kyvadla `x1` a `y1`. Nakonec bod se tvoří jako dvě čísla v závorkách oddělená mezerou.

Pro vizuální dokonalost přidáme úsečku spojující bod otáčení (počátek) a závaží: `Segment((0, 0), A)` a příkazem `StartAnimation()` spustíme animaci. Nakonec zmáčknutím modrých bodů vlevo můžeme skrýt to, co nechceme zobrazovat. Po zadání všech příkazů byste měli dostat něco jako: `https://mam.matfyz.cz/media/prilohy/29-3-Ukazka2.ggb`.

Pro další úlohy by se vám mohlo ještě hodit, že když kliknete pravým tlačítkem na bod a v zobrazené nabídce vyberete `Stopa zapnuta`, tak příslušný bod bude zanechávat „stopu“, kudy se pohyboval (tj. při animaci se postupně vykreslí jeho trajektorie).

Toto byl takový velmi stručný návod na Geogebru, kdyby vám cokoliv nefungovalo, ozvěte se (na e-mail, na discord, ...), stejně tak, kdybyste si nevěděli rady s tím, jak v Geogebře udělat nějakou konkrétní věc, ozvěte se. Kdyby vám cokoliv nebylo jasné, ozvěte se.

Stejně jako v úloze 1 řešte další úlohy/problémy v libovolném programu a odevzdávejte i zdrojáky, nejen výsledek.

Následují dvě úlohy, které mi kdysi řekl Mgr. Martin Mareš, Ph.D. na procházce k úvodu do řešení problémů kombinatorických, matematických i jiných:

Úloha 2 [Body záleží na řešení]: *Vlk a zajíc: Z bodu* $(0, 0)$ *běží po ose* x *zajíc rychlostí* v_z*. Z bodu* $(0, 1)$ *ho pronásleduje vlk, který vždy běží přímo k zajíci rychlostí* v_v*. Jak bude vypadat křivka, po které běží vlk?*

Úloha 3 [Body záleží na řešení]: *Čtyři střely: V bodech* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ *a* $(1, 0)$ *začínají čtyři řízené střely. Každá se vždy pohybuje ve směru k další střele proti směru hodinových ručiček rychlostí* v*. Nakreslete trajektorie.*

A jedna úloha, která navádí k efektu motýlích křídel (malá změna s časem může mít velký efekt):

Úloha 4 [Body záleží na řešení]: *Dvě kyvadla aneb úvod do chaosu: Na konec kyvadla zavěsíme druhé kyvadlo (s ne nutně stejnými parametry) a necháme je se kývat. Pozorujte trajektorii druhého kyvadla. Jak se změní, když pustíme kyvadla o velmi malou vzdálenost jinde?*

Nakonec se s vámi rozloučím dvěma očekávanými problémy a slibem, že příště už se podíváme na integrály. Nyní už si vychutnejte článek od Mgr.[MM] Jolany Štraitové začínající na další straně.

Problém 5: *Vymyslete si / najděte nějakou diferenciální rovnici nebo soustavu diferenciálních rovnic a numericky ji vyřešte.*

Problém 6: *Jak už je u tohoto tématka zvykem, stále po vás chci, abyste se podívali do světa okolo a našli, kde všude se derivace / hledání extrémů / diferenciální rovnice používají.*

Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Využití derivací ve fyzice 8b

*Mgr.*MM *Jolana Štraitová*

Derivaci lze definovat jako okamžitou změnu funkce na určitém malém úseku. A právě to se nám často krásně hodí ve fyzice, kde spoustu veličin posuzujeme v závislosti na čase – někdy tedy zkoumáme změnu nějaké veličiny na malém časovém úseku. Ve svém článku se nejprve odrazím od příkladu v zadání a postupně se pokusím dostat k dalším zajímavým využitím derivací ve fyzice. Jak bylo zmíněno v úvodu do tématu o derivacích a integrálech, derivaci podle času lze značit $\dot{f}$. A derivaci jako rozdíl/změnu blížící se k nule lze značit také písmenem d (*diferenciál*, rozdílnost), čehož se budu držet já.

Rychlost jako první derivace polohového vektoru podle času

Jak zaznělo v zadání tohoto problému, rychlost je vlastně změnou polohy v závislosti na čase – tedy derivací „změny polohy“, tzn. dráhy, přesněji řečeno polohového vektoru, podle času. Toho můžeme využít například při odvozování rychlosti, příp. zrychlení, ze vzorce pro volný pád.

Při něm platí pro výšku, tzn. dráhu, vzorec $h = \frac{1}{2}gt^2$. Jestliže rychlost v je první derivací dráhy podle času, bude rovna

$$v = \frac{d(\frac{1}{2}gt^2)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 2 \cdot t = gt$$

což je skutečně známý vzorec.

Zrychlení jako druhá derivace polohového vektoru podle času

Derivovat ale můžeme dál. Uvědomme si, že okamžitou změnou rychlosti v závislosti na čase je vlastně zrychlení – rovná se tedy derivaci rychlosti podle času. A jestliže rychlost je první derivací polohového vektoru podle času, zrychlení, její derivace, bude druhou derivací polohového vektoru podle času.

Tak můžeme zkusit získat zrychlení a ze vzorce pro volný pád zderivováním získané rychlosti:

$$a = \frac{d(g \cdot t)}{dt} = g$$

a vidím, že můj postup byl skutečně správný, neboť g je opravdu zrychlení.

Zajímavější bude výpočet zrychlení jako druhé derivace dráhy podle času v druhém příkladě z tohoto problému, kde budu počítat rychlost a zrychlení pružiny, jejíž poloha v čase t je rovna $5\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\pi}{2}\right)$. Rychlost bude opět první derivací:

$$v = \frac{d\left(5\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{dt} = -5\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\pi}{2}\right)$$

A zrychlení tedy druhou derivací:

$$a = \frac{d\left(-5\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}+\frac{\pi}{2}}\right)\right)}{dt} = -5\frac{k}{m}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Zadání mě ještě nabádá k vypočtení síly pružiny F. K tomu využiji Newtonův druhý pohybový zákon, zákon síly, který lze zjednodušit na vzorec $F = m \cdot a$, kde m je hmotnost tělesa.

$$F = m \cdot a$$

$$F = m \cdot -5\frac{k}{m}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}+\frac{\pi}{2}\right) = -5k \cdot \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Newtonův druhý pohybový zákon a derivace

Newtonův druhý pohybový zákon mě však přivádí k hlubšímu zamyšlení, když si uvědomím jeho plné znění: *Časová změna hybnosti je přímo úměrná působící síle.* Jinými slovy to znamená, že příčinou (změny) pohybu je síla. Pro nás je ale zajímavé, že onu časovou změnu hybnosti p si můžeme opět vyložit jako derivaci podle času, $\frac{dp}{dt}$. Newtonův zákon síly bychom tak správně matematicky vyjádřili takto

$$F = k \cdot \frac{dp}{dt},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je koeficient přímé úměrnosti. Víme, že platí $p = m \cdot v$, a tedy $dp = d(m \cdot v)$, z čehož s využitím vzorce pro derivaci součinu získám $dp = v \cdot dm + m \cdot dv$ a po dosazení do prvního výrazu

$$F = k \cdot \left(\frac{v \cdot dm}{dt} + \frac{m \cdot dv}{dt}\right)$$

Pak, jestliže budu za jednotky síly F brát N (*newton*), mohu položit $k = 1$ a zjednodušit rovnost na

$$F = \frac{v \cdot dm}{dt} + \frac{m \cdot dv}{dt}$$

Tady vidím dvě změny veličin v závislosti na čase. Jednou z nich je $\frac{dv}{dt}$, derivace rychlosti podle času, tedy zrychlení. Z druhého sčítance tak logicky získáváme povědomý součin $m \cdot a$.

Druhou změnou je změna hmotnosti v závislosti na čase $\frac{dm}{dt}$, od které pravděpodobně většinou očekáváme, že bude nulová. V takovém případě pak skutečně dostáváme nejčastěji využívaný zjednodušený tvar Newtonova druhého zákona $F = m \cdot a$. Někdy se ale může hodit i zvyšování hodnoty síly právě pomocí změny hmotnosti – například při vystřelování raket do vesmíru – a tehdy je důležité, že se zákon týká změny *hybnosti*, tedy nejen rychlosti, ale také hmotnosti. Inu, pan Newton to zkrátka dobře vymyslel.

Proud jako změna náboje v závislosti na čase

Rychlost a zrychlení však nejsou jedinými veličinami, které se obvykle mění v závislosti na čase. Když si představíme elektrický obvod se střídavým proudem, vidíme, že hodnota proudu se vlastně také mění v závislosti na čase. Proud i (budu používat malé i, vzhledem k tomu, že jde o okamžitou hodnotu) je možné brát jako časovou změnu náboje Q a můžeme ho proto také vyjádřit derivací: $i = \frac{dQ}{dt}$.

Představme si jednoduchý elektrický obvod se střídavým proudem a kondenzátorem. Platí vzorec $Q = C \cdot U$, kde C je kapacita kondenzátoru a U je napětí. Vzhledem k tomu, že jde o střídavý obvod, budu proměnlivé veličiny označovat malými písmeny a brát v potaz jejich okamžité hodnoty, tzn. $q = C \cdot u$.

Dál vím, že pro střídavý obvod, ve kterém hodnoty proudu kmitají harmonicky, platí $u = U_{max} \cdot \sin \omega t$. To mohu dosadit do původního vyjádření proudu jako derivace a následně zderivovat:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCu}{dt} = \frac{d(CU_{max} \cdot \sin \omega t)}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_{max} \cdot \cos \omega t,$$

kde ale $U_{max} \cdot \cos \omega t$ je vlastně okamžitou hodnotou napětí u, a tedy okamžitá hodnota proudu je rovna

$$i = \omega \cdot C \cdot u$$

Z toho mohu dál vyjádřit $u = \frac{1}{\omega C} \cdot i$. A vím, že hodnota $\frac{1}{\omega C}$ se ve výpočtech obvodů se střídavým proudem a kondenzátorem opravdu využívá, jde o *kapacitanci* a obvykle se značí X_C. Logicky je její jednotkou *ohm* Ω.

Derivace v termice

Derivovat však nemusíme fyzikální veličiny jen podle času, derivaci je možné využít prakticky kdekoliv, kde se setkáváme se vztahem dvou veličin, kdy se jedna mění v závislosti na druhé (matematicky jde jednoduše o funkce). Příhodné je proto užití derivací v termice.

Už 1. termodynamický zákon nás svým zněním navádí k užití derivací: *Dodané teplo se rozdělí na změnu vnitřní energie (U) a dodanou práci (W).* Tedy vyjádřeno matematicky:

$$dQ = dU + dW$$

Víme, že dodaná práce se rovná obsahu plochy pod křivkou znázorňující funkci v pV diagramu (p na ose y, V na ose x). Pomocí derivací můžeme tento vztah vyjádřit jako $dW = p \cdot dV$ (kde p je tlak a V objem) a dosadit do vyjádření 1. termodynamického zákona:

$$dQ = dU + p \cdot dV$$

Dál můžu využít vzorec pro derivaci součinu, podle kterého pro naše konkrétní veličiny platí $d(p \cdot V) = p \cdot dV + V \cdot dp$ a tedy $p \cdot dV = d(p \cdot V) - V \cdot dp$. Rovnost tak mohu upravit:

$$dQ = dU + d(p \cdot V) - V \cdot dp$$

$$dQ = d(U + p \cdot V) - V \cdot dp$$

A jak známo, $U + p \cdot V$, tj. součet vnitřní energie systému a součinu jeho tlaku a objemu, je samostatná veličina zvaná *entalpie*. Značíme ji písmenem H a určuje tzv. tepelný obsah systému. Tedy platí $dQ = dH - V \cdot dp$.

A odvodili jsme pomocí derivací další pěkný vzoreček. Vidíme tedy, že derivace mají ve fyzice široké využití, a to jsem si při psaní svého článku vystačila vlastně jen se středoškolskými znalostmi, když jsem ukázala alespoň některé zajímavé střípky z derivování v různých kapitolách fyziky.

Téma 5 – Outdoorové vařiče

Úvod

Milí řešitelé, vítám vás u druhého dílu tématka o outdoorových vařičích. K prvnímu termínu druhé série přišla řešení od jedenácti z vás. Díky moc za každé z nich! Níže najdete soupis relevantních parametrů a metodiky jejich měření, který je souhrnem všeho, co mě a tyto nejrychlejší řešitele napadlo.

Nyní konečně nastal čas měřit. Pečlivě si tedy vše přečtěte, najděte si nejlépe nějakého kolegu či kolegyni (protože ve dvou se to lépe měří) a pusťte se směle do toho!

Parametry

Které parametry budeme měřit

Jako relevantní parametry samotného vařiče jsme společně identifikovali jeho *cenu*, *hmotnost*, *objem* a *rychlost vaření* a podobně též pro palivo do daného vařiče jeho *cenu*, *hmotnost* a *objem*. Na těchto parametrech se shodla valná většina z nás, jedinou výjimkou byl objem paliva, který zmínila pouze 4 řešení.

Palivo

Na tomto místě se hodí krátká poznámka o tom, k čemu vztahovat parametry paliva. Milan Hradil navrhuje měřit, na kolik minut vaření vystačí 10 g paliva, Mgr.[MM] Michael Jarvis naopak, kolik gramů paliva je potřeba na minutu vaření, Mgr.[MM] Jolana Štraitová by měřila, kolikrát lze na jednu „dávku“ paliva uvařit litr vody a další řešení tyto přístupy nějak kombinují (nebo otázku neřeší). Tyto možnosti jsou v principu ekvivalentní – s případným využitím již změřené rychlosti vaření je umíme na sebe vzájemně převádět. Z pohledu spotřebitele, který si vybírá vařič, ale dává největší smysl třetí přístup – jde mu o to, kolik gramů paliva si s sebou potřebuje vzít například na uvaření tří jídel, nikoliv kolik jich bude potřebovat na jednu hodinu vaření. Pojďme se tedy domluvit, že *všechny parametry paliva budeme vztahovat k jeho reálné užitnosti vařičem* – tedy, podle metodiky níže, kolik gramů či mililitrů (případně za kolik peněz) paliva potřebuji na uvaření litru vody.

Různý výkon vařiče

Doc.[MM] Václav Tichý a Anežka Stará navrhují měřit chování vařiče při různém nastavení výkonu. Ne každý vařič takové nastavení má, u těch, které ano, se to ale jeví jako dobrý nápad. Mohlo by se totiž ukázat, že v některých nastaveních vařič spotřebovává palivo efektivněji než v jiných. *Pokud nám to tedy funkce vařiče a naše časové možnosti dovolí, provedeme níže popsaná měření opakovaně pro různý výkon vařiče* (například pro minimální, prostřední a maximální). V opačném případě budeme měřit pouze při maximálním výkonu.

Které parametry měřit nebudeme

V mnohých řešeních se píše o náročnosti obsluhy či údržby vařiče, Bc.MM Klára Plchová hovoří o stabilitě vařiče, Bc.MM Lída Růžička o možnosti regulace výkonu a (spolu s Bc.MM Julií Klementovou) o bezpečnosti, Dr.MM Patrik Jendele o počtu hořáků (pro možnost paralelního vaření)… Tyto (a mnohé další) vlastnosti by se obtížně měřily, mohou být ale pro výběr vařiče významné. *Můžeme tedy k našemu měření přidat stručný slovní soupis vlastností vařiče* (ať už pozitivních či negativních), *na které bychom rádi spotřebitele upozornili* (např. „Vařič působí velmi nestabilně a během měření se mi třikrát překlopil.“).

Mnohá řešení zmiňovala životnost, odolnost či kvalitu vařiče. Tu by skutečně bylo možné měřit (např. pádem z výšky či ponořením do vody, jak psal Patrik), ale měření by bylo pro naše vařiče destruktivní, na což rozhodně nemáme rozpočet.

Používání dat od výrobce a z dalších zdrojů

Bc.MM Julie Klementová navrhuje přebrat některé informace o vařiči (hmotnost, objem kartuše, výkon) od výrobce. Nezávislé spotřebitelské testy výrobků ale ukazují,[10] že tyto informace můžou být extrémně nepřesné. Jejich využívání se tedy chceme rozhodně vyhnout a vše si raději změřit sami. Podobně Julie navrhuje použití dat o výhřevnosti paliva z tabulek. Ta ale nejsou v praxi vypovídající, protože uvedená hodnota platí za předpokladu stoprocentní účinnosti přeměny hmoty na teplo a nulové ztráty tepla do okolí. Reálná užitnost paliva bude záviset na konstrukci vařiče a na dalších parametrech, které nejsou v tabulkových hodnotách zohledněny. Opět platí, že si raději vše změříme sami.

Metodika měření

K měření obecně bych rád vypíchl čtyři věci. Zaprvé, držme se metodiky popsané níže, aby byly výsledky vzájemně kompatibilní. Zadruhé, u složitějších měření náchylných k chybám je *nutné* měření opakovat vícekrát a spočítat odchylku. Zatřetí, velmi doporučuji měřit alespoň ve dvou.[11] Zatímco piplat se sám několik hodin s měřením je často spíš otrava, ve více lidech to může být příjemně strávené odpoledne. Pokud nemáte poblíž svého bydliště kamaráda, který řeší M&M, můžete nějakého přesvědčit, aby začal. :-)

Čtvrtá věc je asi ze všech nejdůležitější. Při měření si pečlivě a systematicky zapisujte dosažené výsledky a *v žádném případě si výsledky nevymýšlejte ani s nimi nijak nemanipulujte*! Zdůrazňuji to, protože vím, že na středních školách to často bývá standard a zvyk je železná košile. Odevzdávejte prosím přesně ty výsledky, které jste skutečně naměřili, v opačném případě by toto tématko zcela ztratilo smysl.

[10] Jako příklad můžeme vzít například letošní test čelovek v časopise DTest.

[11] Pokud budete na řešení problému spolupracovat, sepište prosím pouze jedno řešení. Každý z n autorů řešení poté získá $\frac{3b}{n+2}$ bodů, kde b je počet bodů které by řešení získalo, pokud by mělo jen jednoho autora. Toto platí v rámci celého M&M, nejen v tomto tématku.

Cena vařiče

Zde většina řešení jako metodiku uvedla něco v duchu „podíváme se na cenovku“, případně „podíváme se do obchodu nebo na internet“. Podotkněme ale, že tržní cena zboží je bod, ve kterém se potkává nabídka s poptávkou. V praxi tedy chceme zjistit *nejnižší cenu, za kterou lze daný vařič pořídit*. Když budeme pro jednoduchost uvažovat pouze český trh, můžeme využít nějaký internetový srovnávač cen (v ČR nejpoužívanější je Heureka[12]), který nám nejnižší cenu zjistí.

Někdo by také mohl podotknout, že cena se v čase vyvíjí a měli bychom tedy ceny všech vařičů zjišťovat ve stejný čas. K tomu nám opět může pomoci Heureka, na které nalezneme vývoj minimální ceny výrobku v čase. Můžeme tedy cenu vždy vztahovat například ke 30. listopadu (případně k nejbližšímu zjistitelnému datu).

Hmotnost vařiče

Tady opět zdánlivě není co řešit, stačí vařič postavit na kuchyňskou váhu, přesnost na gramy je pro nás dostačující. Jak ale podotýká Milan Hradil, je potřeba *zvážit i všechno příslušenství*, které je k vařiči potřeba – speciálně například v případě plynových vařičů prázdnou kartuši. Návrh Mgr.[MM] Jolany Štraitové vážit s vařičem i nádobí bych naopak zavrhnul, protože s jedním vařičem je možno vařit v rozdílných nádobách a jejich volba je na vařiči typicky relativně nezávislá.

Objem vařiče

K objemu se v došlých řešeních objevují dvě základní metodiky. První je změřit nějak pravítkem výšku, šířku a délku vařiče (tedy, jinými slovy, vzít objem nejmenšího opsaného kvádru; Milan Hradil zmiňuje opsaný válec). Druhá metodika spočívá v ponoření vařiče do vody a zjištění objemu vody vytlačené vařičem.

Tuto metodiku někteří (Milan Hradil, Bc.[MM] Julie Klementová) zavrhují pro riziko poškození vařiče, Mgr.[MM] Michael Jarvis ale podotýká, že můžeme vařič před ponořením obalit fólií. Tato metoda se jeví jako nejvhodnější, protože měří objem přesně těch částí vařiče, které nás v praxi zajímají – v batohu můžeme vařič těsně obklopit dalšími věcmi, nechceme tedy započítat objem, který obsahuje navíc kvádr opsaný vařiči, zároveň ale již chceme započítat objem případných škvír a mezer ve vařiči, do kterých by nám voda natekla, pokud bychom ho fólií neobalili (do těchto mezer už se nám totiž pravděpodobně další vybavení nacpat nepodaří). Dodejme, že vzhledem k více možnostem zabalení je vhodné k naměřeným datům přiložit i fotografii zabaleného vařiče.

Michael dále přesněji specifikuje, že by vařič ponořil do zcela plné nádoby, zachytil by všechnu vodu, která po ponoření vyteče, a poté změřil její objem (hmotnost). Tento postup se jeví jako funkční, možná jednodušší na provedení však bude znát počáteční objem vody a po ponoření vařiče zvážit, kolik jí v nádobě zůstane.

[12] `https://www.heureka.cz`

Mgr.^MM Matyáš Pokorný navíc podotýká jednu (snad) samozřejmost, která by ale jistě měla zaznít – objem vařiče měříme ve složeném stavu (tedy tak, aby vyšel co nejmenší).

Rekapitulace: *Vařič složíme do co nejkompaktnějšího stavu, obalíme ho potravinářskou fólií a poté změříme jeho objem ponořením do plné nádoby s vodou.*

Rychlost vaření

Toto je ústřední část našeho měření – je asi nejnáročnější na metodiku a zároveň na samotné provedení. Naprostá většina řešení se shodla, že chceme měřit rychlost uvaření určitého objemu vody. Měření má ale mnoho různých parametrů, které si zde v bodech projdeme.

Množství vody: Došlá řešení navrhují 1 l či 0,5 l. *Domluvme se na množství 1 l*, jelikož je nutné se na nějaké konstantě shodnout a 1 l je asi rozumné množství které by mohl chtít uživatel běžně vařit.

Počáteční podmínky: Milan Hradil a Bc.^MM Julie Klementová správně upozorňují, že záleží na *počáteční teplotě vody – nechť je to 20° C*. Podobně záleží i na teplotě vzduchu. Tu si bohužel nemůžeme vždycky vybrat, domluvme se tedy, že ji *alespoň změříme a uvedeme ji* (pro případné opakování experimentu). Rychlost vaření by rovněž mohla být ovlivněna rychlostí větru, proto *měřme vždy v závětří.*

Nádoba: Několik řešení zmínilo problém s různými nádobami. Bylo by příliš složité zajistit úplně totožné nádoby, abychom ale problém alespoň částečně eliminovali, pojďme se domluvit, že se budeme snažit vařit vodu v nějakém typickém ešusu – tedy *v kovové nádobě tvaru válce o průměru přibližně* 15 cm *s tenkými stěnami.*

Anežka Stará a Doc.^MM Václav Tichý dále zmiňují uzavřenost nádoby (konkrétně navrhují měřit v uzavřené nádobě). V takovém případě by se nám ale špatně měřila teplota vody, proto prosím pro jednoduchost *vždy měřme s otevřenou nádobou.*

Ukončovací podmínka: Většina řešení navrhovala měřit „dokud se voda nezačne vařit“. To je ale velmi vágně definováno. Mgr.^MM Matyáš Pokorný navrhuje čekat na bubliny o průměru přibližně 1 cm, což je jistě lepší, i když pořád náročné na změření. Bc.^MM Julie Klementová si správně povšimla, že bod varu závisí na nadmořské výšce a navrhuje tedy nadmořskou výšku zafixovat, což je pro nás v praxi neproveditelné, proto si budeme var definovat jako *ohřátí vody na 95° C* (to je teplota, které lze na celém území ČR bezpečně dosáhnout). Julie rovněž zmiňuje pozici teploměru v rámci nádoby, což může také měření ovlivnit. Pojďme se proto domluvit, že se budeme snažit *měřit teplotu uprostřed objemu vody*, abychom se vyhnuli anomáliím u stěn, dna či u hladiny.

Hmotnost paliva

Jak již bylo řečeno, hmotnost paliva chceme vztahovat k tomu, kolik toho s ním reálně uvaříme. Jak zmiňovali Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Michael Jarvis a Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Julie Klementová, *stačí vařič i s palivem zvážit před a po testu rychlosti vaření, čímž rovnou získáme hmotnost spotřebovaného paliva.* Podotkněme, že tento postup dobře funguje například pro plynový a benzinový vařič, u jiných typů paliv využíváme palivo po částech, které nejsou dobře dělitelné (např. u vařiče na pevný líh možná nebudeme chtít již hořící kostky sfouknout a schovat si je na příště), metodika se tedy může lišit v závislosti na typu paliva.

Objem paliva

V principu nám stačí změřit objem i hmotnost většího množství paliva, spočítat hustotu a tím zjistit objem paliva spotřebovaný na vaření litru vody. Pro měření objemu můžeme použít stejnou metodiku jako v případě samotného vařiče (když už máme stejně připravenou měřicí aparaturu).

Některé typy paliv (například plyn) je ale nutné uchovávat v nádobě, která svůj objem nemění. V takovém případě počítejme průměrnou hustotu – tedy hustotu v případě poloprázdné nádoby.

Cena paliva

Použijeme stejnou metodiku jako při určování ceny vařiče. Cenu poté přes hmotnost přepočteme na cenu za uvaření litru vody.

Problém 1: *Sežeňte si jeden či více outdoorových vařičů (včetně paliva) a změřte jejich parametry podle metodiky výše. Výsledná data včetně spočítaných odchylek odevzdejte nejlépe jako tabulku (.ods, .xlsx, …) s případným komentářem vysvětlujícím formát dat (zkrátka aby bylo zcela jasné, co která čísla znamenají).*

Data by měla být doplněna textem ve formátu PDF, ve kterém stručně a výstižně popíšete metodiku měření (nemusíte opakovat informace otištěné v tomto čísle) a shrnete dosažené výsledky. Zároveň může váš text obsahovat krátký komentář ohledně dalších vlastností vařiče (jak bylo zmíněno v sekci o parametrech), rady a tipy pro další řešitele, návrhy souvisejících problémů, které vás napadly nebo vystaly při měření, řešení těchto problémů…

Bonusové problémy

Rozhodl jsem se zadat ještě dva bonusové problémy, které se v rámci tématka objevily. Primárně ale řešte prosím problém 1 výše. Budu za něj udělovat více bodů a je to hlavní část tohoto tématka.

První bonusový problém se týká určení množství vody k vaření (které jsme ad hoc stanovili na $1\,\mathrm{l}$). Při příliš malém množství vody se většina energie vařiče spotřebuje na zahřátí nádoby (takže budou klíčové parametry nádoby), při příliš velkém množství bude naopak příliš velký odvod tepla do okolí a voda se nikdy nezačne vařit.

Problém 2 (bonusový): *Zkuste změřit čas uvaření vody pro různá množství a výsledky zanést do grafu, který bude mít na x-ové ose množství vody a na y-ové ose poměr množství vody a času vaření. Můžete zkusit tuto křivku zjistit pro různé vařiče, případně s různými nádobami. Dejte si pozor na metodiku měření (počáteční teplotu vody i nádoby, definici varu…) a na odchylky.*

Druhý bonusový problém se týká interpretace naměřených dat. Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Nevěřil ve svém řešení píše o poměru ceny paliva a vařiče (při častém používání se vyplatí dražší vařič s levnějším palivem) a rovněž o poměru hmotnosti a výkonu vařiče. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Julie Klementová a Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Matyáš Pokorný navrhují vařiče v každé kategorii seřadit a pro každý vařič spočítat jeho průměrné pořadí. Milan Hradil navrhuje totéž s tím rozdílem, že pořadí v každé kategorii navíc vynásobí koeficientem důležitosti, který si zvolí spotřebitel podle svých preferencí. Přijde mi, že všechna navržená řešení mají své mouchy a problém si zaslouží hlubší zamyšlení.

Problém 3 (bonusový): *Navrhněte způsob, jak ze změřených dat určit, který vařič je pro daného spotřebitele nejlepší.*

Tom; `domestomas+varice@gmail.com`
odevzdávejte do odevzdávátka

Výsledková listina 2. deadlinu 1. čísla a 1. deadlinu 2. čísla

				Témata						
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Pokorný	3	73,4			11,3	9,0	7,0	27,3	73,4
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Štraitová	4	69,7		14,5	5,5	22,0	4,7	46,7	69,7
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Sedláček	2	67,7	7,0		18,7	21,0		46,7	67,7
4.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Tichý	3	257,6		10,0	10,5	9,0	4,5	34,0	64,2
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Jarvis	1	63,4			12,5	10,0	8,1	30,6	63,4
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Nevěřil	1	60,7		7,5	9,0	10,0	3,2	29,7	60,7
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Kubínová	Z9	56,3							56,3
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Uglickich	1	52,5	5,5	22,0	5,5	10,5		43,5	52,5
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Novák	1	50,6	2,8	10,0	8,8	29,0		50,6	50,6
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Menšíková	1	51,0	2,0			18,0		20,0	46,0
11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Strnadová	2	45,7			14,5	9,0		23,5	45,7
12.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Zůnová	2	44,1				9,0		9,0	44,1
13.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Klementová	1	39,6	2,0	6,0	8,5	7,5	9,5	33,5	39,6
14.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Jendele	4	107,6	9,0	3,5		8,5	4,5	25,5	38,5
15.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Škopek	4	118,4			3,5	6,0		9,5	37,3
16.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Koten	3	35,5							35,5
17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Urbanová	Z9	35,1							35,1
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Švanda	4	34,5		6,0				6,0	34,5
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Bartáková	3	41,0				17,0		17,0	33,0
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ N. Burzová	1	32,7							32,7
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Růžička	4	32,5			3,5			3,5	32,5
22.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Vávra	4	117,7	4,5	8,5	2,5	15,5		31,0	31,0
23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Plchová	3	30,9		5,2	1,5	15,0	2,9	24,6	30,9
24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Mišičko	1	30,5	7,5					7,5	30,5
25.–26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Mikulič	1	29,9		4,0	2,1	6,0		12,1	29,9
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Joly	4	29,9		4,0	2,1	6,0		12,1	29,9
27.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Žák	3	29,4	7,0	3,5	10,0	8,9		29,4	29,4
28.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Löwenhöffer	2	28,2							28,2
29.–30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Kaňka	1	28,0	6,5	5,0	10,5	6,0		28,0	28,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Ulumbekov	1	28,0							28,0
31.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Polách	4	136,5	2,0	1,0		9,0		12,0	27,1
32.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ R. Novák	3	52,7				12,0		12,0	27,0
33.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Těšitel	2	26,3	4,5	5,5	8,0	8,3		26,3	26,3
34.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Hanák	3	25,6							25,6
35.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Šmídová	3	25,5	5,0	6,5	6,0	8,0		25,5	25,5
36.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kotlas	1	23,8				6,0		6,0	23,8

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	4	5	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Kadlčková	2	23,7	8,5	2,5	6,5	6,2		23,7	23,7
38.–39.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Šimová	4	23,3							23,3
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Šimová	2	105,3							23,3
40.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Bříza	4	23,0							23,0
41.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Nedvěd	1	22,6							22,6
42.–45.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Boček	4	102,5							22,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ F. Janošík	3	22,0							22,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Tregler	3	25,9							22,0
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Čtvrtečka	3	150,1							22,0
46.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Štěpán	4	21,8							21,8
47.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Lukeš	2	21,5	8,5			13,0		21,5	21,5
48.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Popovský	3	47,3	7,0			14,0		21,0	21,0
49.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Pojar	3	20,6	7,0	3,0		10,6		20,6	20,6
50.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Kašpárek	2	20,0							20,0
51.	N. Pippal	1	19,6							19,6
52.	M. Jursová	3	19,5							19,5
53.	M. Hušek	2	19,3	1,8			17,5		19,3	19,3
54.	J. Savula	3	19,0							19,0
55.	O. Trinkewitz	4	18,8	2,5	5,0	2,3	9,0		18,8	18,8
56.	M. Púll	3	18,6							18,6
57.	J. Svobodník	3	18,5	5,5		6,0	7,0		18,5	18,5
58.	P. Slonek	4	18,2							18,2
59.	J. Buben	1	17,5							17,5
60.	F. Zápotocký	4	17,0	4,0	2,0	2,0			8,0	17,0
61.	F. Amin	4	16,9	6,0	0,4	2,5	8,0		16,9	16,9
62.–63.	R. Materna	3	16,5							16,5
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Poljaková	3	26,9							16,5
64.–66.	J. Klicnar	Z9	16,0							16,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Rypl	4	31,6				16,0		16,0	16,0
	M. Křížová	Z8	16,0	5,0			11,0		16,0	16,0
67.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Faltus	3	42,3			8,5	3,0		11,5	15,5
68.–69.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Steinhauserová	Z9	26,8	1,0			5,2		6,2	15,3
	M. Hradil	1	15,3	6,3				9,0	15,3	15,3
70.	V. Kučera	1	15,2	9,5	4,0	0,7	1,0		15,2	15,2
71.	M. Čouza	2	15,0	6,0	9,0				15,0	15,0
72.	E. Turbová	1	14,6							14,6
73.	B. Szotkowská	2	13,6							13,6

				Témata							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum_0$	$\sum_1$
74.	V. Čábelka	3	13,1								13,1
75.	A. Čechová	3	12,2								11,6
76.–78.	J. Hampl	3	11,0								11,0
	Š. Mikéska	4	11,0					11,0		11,0	11,0
	M. Plachý	4	11,0								11,0
79.	P. Šimeček	1	10,8		2,2	3,0	5,6			10,8	10,8
80.	V. Vybíral	1	10,6	1,5	3,5		4,7	0,9		10,6	10,6
81.	V. Mašíčková	1	10,5		6,5		4,0			10,5	10,5
82.–84.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ M. Smrčka	3	33,6								10,0
	V. Jiříčková	3	10,0					10,0		10,0	10,0
	V. Janáček	1	10,0					10,0		10,0	10,0
85.–89.	J. Lepič	4	9,0								9,0
	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ M. Haikl	4	36,9		9,0					9,0	9,0
	H. Muchová	1	9,0								9,0
	L. Koucký	Z9	9,0								9,0
	V. Humlová	1	9,0								9,0
90.	M. Rybecký	1	8,3		2,0	2,0	4,3			8,3	8,3
91.–92.	K. Tomáš	Z9	8,0								8,0
	J. Zajíc	3	8,0								8,0
93.–94.	M. Kadlec	1	7,5		7,5					7,5	7,5
	K. Menšíková	Z9	7,5								7,5
95.	K. Vomelová	3	7,2								7,2
96.	S. Teodorovičová	2	7,1								7,1
97.–98.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ V. Verner	2	30,5		2,0			5,0		7,0	7,0
	M. Taufer	3	7,0								7,0
99.	A. Stará	2	6,8					3,0	3,8	6,8	6,8
100.–101.	T. Ferbas	1	6,5			6,5				6,5	6,5
	J. Kučera	2	6,5								6,5
102.–104.	M. Radimský	2	6,0								6,0
	J. Boula	1	6,0		6,0					6,0	6,0
	A. Freyová	1	6,0		6,0					6,0	6,0
105.–106.	O. Brož	2	4,8		4,8					4,8	4,8
	T. Hebauer	1	4,8		4,8					4,8	4,8
107.	L. Votrubová	2	3,9								3,9
108.	L. Chmelíková	2	3,4								3,4
109.–110.	K. Maxera	2	3,0								3,0
	M. Glasnák	Z9	3,0		3,0					3,0	3,0

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	4	5	$\sum_0$	$\sum_1$
111.	R. Petit	1	2,6	0,1	1,5		1,0		2,6	2,6
112.	R. Mayerová	1	5,0							2,0
113.	A. Stýskala	3	1,0				1,0		1,0	1,0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v těchto deadlinech a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M