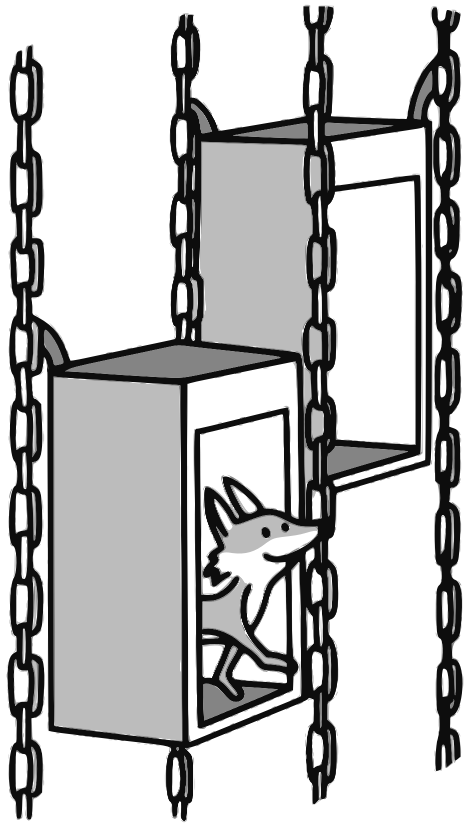
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIX
Číslo 2

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

víte, k čemu jsou dobré derivace? Pokud ne, můžete si to přečíst v dalším dílu Derivací a integrálů! Nejprve se v rámci témátka dozvíte, jak je použít při zkoumání funkcí, a pak se můžete ponořit do článku od Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Terezy Kubínové o derivacích kolem nás.

Co dalšího vás v tomto čísle čeká? Výtahy již máte od minula důkladně rozmyšlené, tak se tentokrát můžete pustit do jejich simulování. V Akustice se podíváte na zoubek hluku. Nebo si jej spíš poslechnete?

Čas dělání hluku kolem táboráku, letního cestování a stanování nás sice s podzimními ranními mrazíky opouští, ale s novým témátkem se již můžeme začít těšit na příští rok či dobrodružné zimní výpravy. Pustíme se do zkoumání outdoorových vařičů a vybírání toho nejlepšího.

A když už jsme u těch dobrodružných zimních výprav, již dnes si můžete zapsat do kalendáře termín Vánoční víkendovky M&M. Víkendovka proběhne od 9. do 11. prosince. S dalšími informacemi se ozveme, až se tento čas přiblíží.

Na závěr bychom vám chtěli poděkovat za ohromnou záplavu skvělých řešení a přivítat všechny nové řešitele. Jen tak dál! Těšíme se na vaše další příspěvky a na viděnou s některými z vás na soustředění.

Vaši organizátoři

P.S. Obnovujeme ponožkovou soutěž! Získáte pár stejně barevných ponožek? Přečtěte si níže, jak na to.

Soutěž o ponožky

Za každé číslo, ve kterém získáte alespoň π bodů, dostanete ponožku v jedné ze čtyř barev. Ano, čtete správně, ponožku – jednotné číslo. Jak tedy získat pár stejněbarevných ponožek? Na to už jste možná přišli z Dirichletova principu[1]. Abyste měli jistotu, že budete mít dvě ponožky stejné barvy, musíte řešit každé z pěti čísel!

[1] Pokud nevíte, o co se jedná, nelekejte se vznešeného názvu, nejde o nic komplikovaného, vizte například `https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichlet%C5%AFv_princip`.

Obsah

Zadání a řešení témat

1. deadline: 8. listopadu 2022 | 2. deadline: 6. prosince 2022

Téma 1 – Matematické pohádky

Máme radost z počtu došlých řešení a moc za ně děkujeme. Doufáme, že vás řešení tohoto tématka baví. Některé pohádky, které jste nám poslali, budeme postupně vydávat na webu a poté i v číslech časopisu.

V tomto čísle vám toto tématko sice nenabízí nové úlohy a problémy k řešení, můžete nám však stále posílat vaše matematické pohádky k řešení problému 7 z minulého čísla.

Problém 7 (29.1): *Zkuste napsat podobný příběh, rádi si ho přečteme.*

Příjemné počtení!

Dláža; `pohadky-mam@gadurek.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 2 – Akustika

Díl 2: Zvuk nebo hluk

V minulém čísle jsme se bavili o úvodu do fyzikální akustiky a o tom, jak funguje jednotka decibel. Také jsme se bavili o tom, co zvuk je či jak se liší od hluku. Na toto téma nám přišlo mnoho řešení, děkujeme za ně! Všichni správně odpověděli, že definice hluku je subjektivní. Například Doc.^MM Václav Tichý jako příklad uvedl zvonkohru z kláštera, který slyší z místa, kde bydlí: „Zvonkohra má příjemnou melodii, ale když si člověk chce po obědě na chvilku zdřímnout, melodie je najednou otravná a zvony mají nepříjemný tón.“ Teorii z minulého čísla si rozšíříme dnes ještě o pojem kmitočet a ukážeme si, co je váhová korekce zvukoměru.

Rádi bychom ještě na chvilku navázali na Úlohu 3 z minulého čísla. Jedním ze základních principů akustiky je energetický součet, tedy že neplatí
$1 + 1 = 2$. Dva vysavače běžící zároveň nemají hladinu akustického tlaku 140 dB, nýbrž pouze o 3 dB více, než když by běžel jen jeden. Na to správně poukázali téměř všichni, kdo se pokoušeli o řešení úlohy. Nejjednodušší způsob, jak sčítat hladinu akustického tlaku dvou zdrojů, je pomocí logaritmického součtu (říkáme tomu také sčítání hladin či energetický součet). To funguje následovně: máme zdroje zvuku $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Jejich výsledná hladina akustického tlaku je dána vztahem:

$$L = 10 \cdot \log\left(10^{0,1L_1} + 10^{0,1L_2} + \cdots + 10^{0,1L_n}\right).$$

Z toho numericky vyplývá, že sečteme-li dvě stejné hladiny, dostaneme hladinu o 3 dB vyšší.

Kmitočet

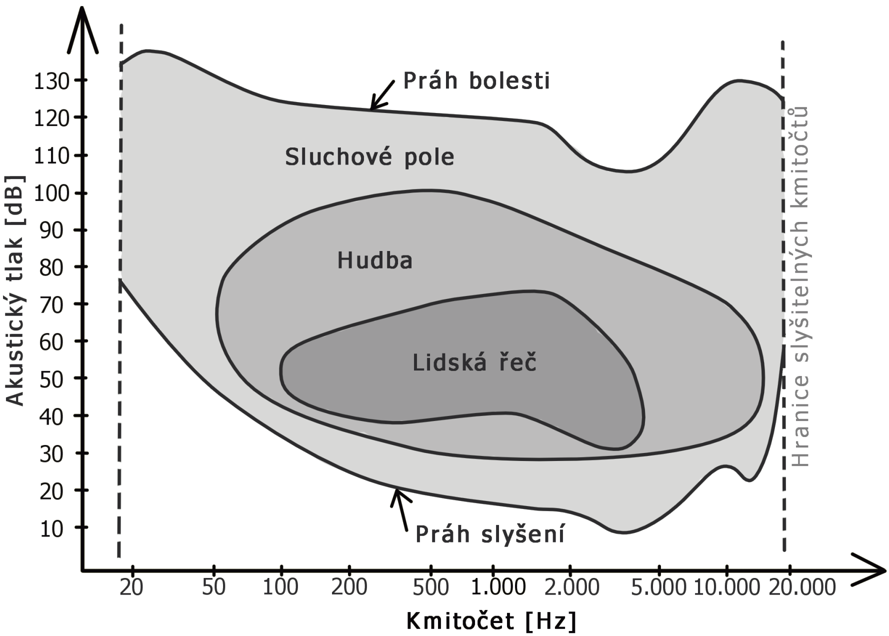
Kmitočet zvuku je počet periodických změn akustického tlaku za sekundu, značíme jej f [Hz]. Subjektivně to vnímáme jako výšku tónu. Další veličina je vlnová délka – to je dráha, kterou urazí vlna během jednoho kmitu. Vlnovou délku značíme λ [m]. Mezi těmito veličinami platí vztah:

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f},$$

kde c $[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$ je rychlost zvuku. Rychlost zvuku ve vzduchu se nepatrně mění s teplotou; pro technické výpočty se však používá hodnota $c_0 = 340\,\mathrm{ms^{-1}}$, která odpovídá teplotě asi 14°C.

Důležitou vlastností zvuku je jeho kmitočtové složení. Skutečné zvuky v reálném světě jsou tónové (neboli harmonické) jen málokdy, příkladem jsou hudební nástroje nebo nepříjemné pískání brzdícího vlaku. Většinou mají běžné zvuky spojité spektrum různých kmitočtů, ze kterých se skládají.

Abychom se ale mohli bavit o praktických aplikacích akustiky, je opět třeba zohlednit člověka a jeho citlivost. V minulém čísle jsme psali, že citlivost člověka na různou hlasitost zvuku je různá, a proto používáme pro akustický tlak jednotku decibely a pracujeme s jeho intenzitou logaritmicky. Podobně i citlivost na různé kmitočty u člověka není stejná. Evolučně je lidské ucho nejvíce citlivé na kmitočty v intervalu od 200 do 5000 Hz. I práh slyšení je jiný pro různé kmitočty.



Obrázek 1: Sluchové pole

Proto když měříme zvuk v nějaké relevanci k samotnému člověku (například řešíme, jestli lze v blízkosti hlučné železnice postavit bytový dům, aby jeho obyvatelé nebyli příliš rušeni hlukem provozu), je vždy potřeba se na naměřené čistě fyzikální veličiny kouknout skrze „brýle“ lidského vnímání. Hodně „hlasitý“ zvuk v neslyšitelném spektru není problém, zatímco relativně tiché, avšak vytrvalé pištění nějakého spotřebiče v domácnosti může být k zbláznění. Je-li tento zvuk na vysokém kmitočtu (třeba staré zářivky) či na nízkém kmitočtu (ventilátor v koupelně), stále se to však bude ignorovat lépe, nežli zvuk na kmitočtu podobném lidskému hlasu – třeba dětský pláč nebo štěkot psa v sousedním bytě. Na zbavení se tohoto nesouladu mezi měřením a vnímáním zvuku je pak třeba aplikovat tzv. váhové (korekční) filtry, které v souladu s citlivostí lidského sluchu upravují citlivost zvukoměru. Pro stanovení těchto filtrů bylo historicky několik metod, z nichž se nejvíce ujala metoda „A“, kterou následně přijaly i české normy jako standardizovanou. Podle toho jednotlivé korekční hodnoty pro jednotlivá pásma kmitočtů označujeme K_A (= *korekce dle metody A*). Ta funguje následovně:

1. Zvukoměr měří hladinu akustického tlaku L současně na jednotlivých kmitočtových pásmech.

2. Ke každé změřené hodnotě přičteme korekci váhového filtru K_A [dB].

3. Takto upravené hodnoty teprve poté sečteme (energetický součet skrze logaritmy, viz Úloha 3 v minulém čísle časopisu).

V takovém součtu je vliv některých kmitočtů potlačen, jiných zesílen – každé pásmo má tak jinou váhu – podle přidělených korekcí. Korekce dle metody A jsou níže v tabulce.

f [Hz]	16	31,5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000	16000
K_A [dB]	-56,7	-39,4	-26,2	-16,1	-8,6	-3,2	0,0	+1,2	+1,0	-1,1	-6,6

Tabulka 1: Korekce dle metody „A“

Tímto postupem vzniká veličina, je označována L_A [dB] a nazývá se *hladina akustického tlaku A*. Velké písmeno A je součástí názvu i zkratky této veličiny, podle metody korekce „A“.

Hlasitost

Nakolik složitě celý postup zní, hladina akustického tlaku A je ve skutečnosti právě ta veličina, podle které jako lidé vnitřně posuzujeme, jestli něco je hlasité nebo ne, jelikož samotná naměřená hladina intenzity akustického tlaku nereprezentuje to, jak citlivě lidé vnímají různé zvuky. Jedná se proto o klíčovou veličinu, kterou chceme používat v akustických výpočtech, pokud nás alespoň trochu zajímá výsledek v kontextu lidských uší.

Náznak existence takové veličiny jsme předpovídali již v minulém čísle, kde jsme upozorňovali, že hladina intenzity (určena energií přenášenou akustickým vlněním) by neměla být zaměňována za hlasitost, byť to k tomu svádí. Připomeňme si, jak jsme v minulém čísle definovali hladinu intenzity zvuku L:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$

kde I je intenzita a I_0 odpovídá nejnižší intenzitě, kterou je ještě lidské ucho schopné rozpoznat při frekvenci 1 kHz za dokonalých podmínek (sluchový práh).

Když zapíšeme výše popsaný postup získání intenzity akustického tlaku A do vzorce, získáme:

$$L_A = 10 \cdot \log \sum_{i=1}^{n} 10^{0,1(L_i + K_{Ai})},$$

kde n je počet zvuků o konkrétní frekvenci. Při výpočtu L_i nezapomínejte používat Tabulku 1.

Energetický průměr

Nicméně, to ještě není vše. U reálných zvuků jejich hladina akustického tlaku A výrazně fluktuuje – kdybychom nahráli nahrávku, jak někdo mluví, v jistých momentech naměříme 20 dB, protože zrovna ukončil větu a slyšíme jen šum v pozadí, zato sekundu na to můžeme naměřit i třeba 80 dB, protože zněle začne říkat novou větu. Abychom mohli sebevědomě říct, jak hlasitá je třeba lidská řeč, nebo jak moc je apartmán obtěžován hlukem blízké silnice, potřebujeme zavést nějaký způsob, jak hladinu akustického tlaku A chytře zprůměrovat. Použijeme k tomu tzv. energetický průměr, který je reprezentován veličinou *ekvivalentní hladina akustického tlaku A*, která se značí $L_{Aeq,T}$ a udává se v decibelech. Ta je vždy vztažena k době trvání t, řešíme „jaký byl průměrný hluk zdroje za posledních 60 sekund“, například. Vzorec pro výpočet vychází z klasického průměru, akorát se pohybujeme opět v logaritmech:

$$L_{Aeq} = 10 \cdot \log \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \sum_{i=1}^{n} \left(t_i \cdot 10^{0,1 L_{Ai}} \right) \right],$$

kde n je počet dílčích intervalů. V i-tém intervalu délky t_i [sekund, minut, hodin] působila hladina L_{Ai} [dB]

Příkladem použití ekvivalentní hladiny akustického tlaku A v praxi jsou limity pro hodnocení hluku v pracovním prostředí či limity pro hodnocení nerušeného prostředí pro spánek. V práci může být zaměstnanec vystaven maximálně $L_{Aeq,\text{směna}} = 85\,\text{dB}$; průměr je zde vztažen k trvání směny. Pokud by byla hodnota vyšší, musí mu zaměstnavatel zajistit ochranné pomůcky proti hluku a pracoviště je hodnoceno jako rizikové. Pracovníci v prostředí rizikovém z hlediska hluku musí pravidelně docházet na lékařské prohlídky, kde by se případně včas rozeznala nadcházející ztráta sluchu, která v takovém prostředí hrozí. Navíc mají pracovníci v takovém prostředí nařízené speciální tiché přestávky v místě, kde hluk nepůsobí.

Pro ochranu spánku se pak pracuje s hodnotou $L_{Aeq,8\,\text{h}} = 35\,\text{dB}$. Během nejhlučnější hodiny nočního klidu je limit $L_{Aeq,1\,\text{h}}$ zvýšen až na 40 dB. K tomuto číslu se pak mohou přičítat korekce, které dělají limity přísnější. Například pokud se jedná o nemocniční lůžko (v takovém případě energetickým součtem přičteme hodnotu $-15\,\text{dB}$ z norem). O korekcích jsme psali o kousek výše, existují korekce nejen pro pásma různých kmitočtů, ale i pro různá prostředí či situace, kde je hluk lidmi subjektivně vnímán ještě hůře, například když leží v nemocnici. A ještě pro zajímavost: elektronicky zesilovaná hudba na koncertech a diskotékách se řídí limitem $L_{Aeq,4\,\text{h}} = 100\,\text{dB}$.

Úloha 1 [3b]: *Jaké různé korekce ještě existují? Dokážeš najít nějaké zákonem citované okolnosti, kde je limit pro hluk naopak méně přísný, tedy se zde aplikuje kladná korekce?*

Úloha 2 [1b]: *Jsou nějaké jiné situace a prostředí, kde by Tobě dávalo smysl limity na hluk udělat méně či více přísné? Proč bys to v konkrétním případě řešil(a)?*

Proč to celé vlastně řešíme? Protože lidé na zvuk nějak reagují a v případě hluku reagují zpravidla negativně. Typickou negativní reakcí je (hormonální) stres, o kterém dnes víme, že může zkracovat život jedince i o deset let. Další typickou reakcí je rozmrzelost či rezignace, méně často se setkáváme s psychosomatickými obtížemi. Ze zdravotního hlediska je nutné lidi chránit před hlukem.

Stanovení výše popsaných limitů hluku komplikuje fakt, že každá osoba je na hluk různě citlivá, dokonce jedna osoba může být mnohem více citlivá na určitý typ hluku, ale jiný typ hluku zase v pohodě snášet. Statisticky bylo zjištěno, že citlivost na konkrétní typ hluku není ve společnosti rozdělena rovnoměrně, nýbrž se obyvatelé spíše řadí do dvou táborů: méně citliví a více citliví na tento konkrétní typ zvuku. Od bezpečnostních limitů nelze očekávat dokonalou ochranu celé populace proti potížím způsobeným nadměrným hlukem, jelikož by pak nastalo mnoho nepřekonatelných patových situací (například ještě stále nejsme v době, kdy by se dala všechna povolání v nadměrně hlučných podmínkách jen tak automatizovat). Cílem je chránit většinu obyvatel, takže limity jsou stanoveny na základě statistických údajů o snášenlivosti hluku. Výše zmíněný limit $L_{Aeq,8\,\mathrm{h}} = 35\,\mathrm{dB}$ pro ochranu spánku nezaručuje (a ani není schopen zaručit) perfektní a nerušený spánek úplně všech obyvatel.

Problém 3: *Napadá tě, jak se lze doma v bytě bránit hluku, který pochází z venku? Lze nějaká opatření udělat přímo venku, aby se hluk od zdroje šířil co nejméně? Jakými způsoby může architekt či projektant budovy snižovat akustickou zátěž obyvatel bytového domu? A jak by šlo se bránit hluku vznikajícímu uvnitř budovy? Ve všech otázkách předpokládáme, že zdroj hluku nelze odstranit.*

Problém 4: *Jak by šlo vytvořit co největší rámus? A jaké jsou tam fyzikální limity?*

Viktor Materna; `viktor.mat@seznam.cz`
Tereza Agnes Pokorná; `tereza.tter.hladikova@gmail.com`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 3 – Výtahy

Vzorové řešení 1. dílu najdete ve 3. čísle.

Díl 2: Simulátor výtahů

Na začátku tohoto tématka jsme se na řízení výtahů dívali pouze teoreticky. Krátce jsme prolétli kolem teorie automatů. Nyní se s využitím simulátoru podíváme na celou věc prakticky.

Návod k instalaci a použití našeho simulátoru výtahů najdete na GitHubu:

`https://github.com/bsaid/ElevatorSimulator/blob/main/README_CZ.md`

Tento simulátor má jednu speciální vlastnost. U běžných programů jste pravděpodobně zvyklí na to, že napíšete nějakou funkci, řekněme třeba `main()`. Tato funkce se po spuštění jednou provede, a následně program skončí. Náš simulátor ale funguje tak, že vámi vytvořenou funkci vykonává ve smyčce stále znovu v každém kroku simulace. Jinými slovy, vámi naprogramovaná funkce představuje přechodovou funkci automatu. Na začátku si musíte zjistit, v jakém stavu se výtahy nacházejí, a potom spočítat, jaké proměnné chcete změnit, tedy do jakého stavu se chcete přesunout. Detaily včetně příkladů najdete v návodu zmíněném výše.

Úloha 1 [2b]: *Vytvořte konfiguraci dvou výtahů ve formátu JSON, kde platí:*

- *Budova má 5 nadzemních pater, přízemí a 2 podzemní patra.*
- *První výtah zastavuje pouze v přízemí a v 5. patře.*
- *Druhý výtah jezdí mezi všemi patry.*
- *První výtah umí jezdit dvakrát rychleji než druhý.*
- *Oba výtahy mají stejné zrychlení.*
- *Ostatní parametry si můžete zvolit libovolně.*

Úloha 2 [2b]: *Vytvořte libovolnou konfiguraci výtahů ve formátu JSON, která se v simulátoru zobrazí stejně jako na obrázku 2.*

Pro úlohy 1 a 2 odevzdávejte pro každou jeden soubor ve formátu JSON. Pokud chcete přidat nějaký komentář, můžete tak učinit přímo v souboru JSON například takto:

```
{
    "_comment" = "Vas komentar."
    ...
}
```

Obrázek 2: Zadání úlohy 2

Pokud potřebujete sepsat delší text nebo přiložit nějaký obrázek, můžete odevzdat druhý soubor ve formátu PDF.

Úloha 3 [4b]: *Vytvořte simulaci výtahu ve třípatrovém domě, který funguje podobně jako páternoster. Tento výtah nebudeme ovládat žádnými tlačítky. Výtah bude automaticky pomalu přejíždět z přízemí do třetího patra. Ve třetím patře se zastaví a za chvíli se opět vydá pomalým tempem do přízemí, kde opět na chvíli zastaví. Tento proces se opakuje donekonečna. Pro pomalou jízdu stačí funkci* `e.speedUp()`, *respektive* `e.speedDown()` *zavolat jen jednou.*

Úloha 4 [4b]: *Vytvořte simulaci výtahu, který jezdí z přízemí na rozhlednu a zpátky. Výtah můžeme ovládat tlačítky* `nahoru`, `dolu` *a* `stop`. *Tlačítko* `stop` *zastaví výtah v aktuální pozici. Tlačítka* `nahoru` *a* `dolu` *odvezou cestující na rozhlednu respektive do přízemí.*

Pro úlohy 3 a 4 odevzdávejte kromě JSON konfigurace ještě soubor s příponou `.py`. Pokud budete mít více souborů k odevzdání, zabalte je prosím do jednoho ZIP archivu.

Béďa; bedrich.said@gmail.com
Odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 4 – Derivace a integrály

Řešení 1. dílu

Úloha 1

Zadání:
Ukažte, že $(a\cdot f)' = a\cdot f'$ (derivace násobku) za použití vztahů $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ (derivace součinu) a $c' = 0$ (derivace konstanty), kde f a g jsou funkce a kde a, c jsou konstanty.

Řešení od Bc.^MM Martina Břízy:

$$(a\cdot f)' = a'\cdot f + a\cdot f' = 0\cdot f + a\cdot f' = a\cdot f'$$

Úloha 2

Zadání:
Ukažte, že pro přirozené n je $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$.

Tuto úlohu lze řešit dvěma hlavními postupy: rozepsáním (viz první řešení) nebo matematickou indukcí (viz druhé řešení).

Řešení od Bc.^MM Daniely Strnadové:

$$(x^n)' = (x\cdot x\cdot \ldots \cdot x)' = x'\cdot x\cdot x\cdot \ldots + x\cdot x'\cdot x\cdot \ldots + \ldots = 1\cdot x^{n-1} + 1\cdot x^{n-1} + \ldots = n\cdot x^{n-1}$$

Řešení od Bc.^MM Vojtěcha Štěpána:

Vztah dokáži pomocí matematické indukce.
Pro $n = 1$

$$x' = 1 = 1\cdot x^0$$

Indukční předpoklad je $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$.
Pro $n+1$

$$\left(x^{n+1}\right)' = (x^n\cdot x)' = (x^n)'\cdot x + x^n\cdot x' = n\cdot x^{n-1}\cdot x + x^n = n\cdot x^n + x^n = x^n\cdot(n+1)$$

Q. E. D.[2]

[2] Zakončení matematického důkazu QED je zkratkou pro latinské *quod erat demonstrandum* neboli *což mělo býti ukázáno*. Často se značí pouze □. Neplést s fyzikálním významem zkratky QED – kvantová elektrodynamika.

Problém 3

Zadání:
Derivaci podílu funkcí f a g lze také vyjádřit vzorcem, a to

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Odvoďte ho (například pomocí derivace součinu, derivace složené funkce a derivace x^r, ale fantazii se meze nekladou).

Řešení od Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Jana Škopka:

Chceme-li zderivovat podíl $(f/g)'$, jde o totožnou operaci, jakou je derivace součinu $\left(f \cdot g^{-1}\right)$. Tento výraz tedy můžeme zderivovat podle pravidel pro součin, jen si musíme dát pozor na to, že funkce g^{-1} je funkcí složenou. Její derivace tedy je:

$$\left(g^{-1}\right)' = g' \cdot \left(-1 \cdot g^{-2}\right)$$

A nyní již můžeme provést běžným postupem derivaci součinu:

$$\left(f \cdot g^{-1}\right)' = f' \cdot g^{-1} + f \cdot g' \cdot (-1) \cdot g^{-2} = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

To bylo řešení, které bylo napovídané v zadání. Přišla však i další zajímavá řešení využívající úpravu rovnic, a dokonce i řešení využívající logaritmus:

Řešení od Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Polácha:

$$h = \frac{f}{g}$$

$$h = \left(\frac{f}{g}\right)'$$

$$f = g \cdot h$$

$$f' = (g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

$$g \cdot h' = f' - g' \cdot h$$

$$g \cdot h' = f' - \frac{g' \cdot f}{g}$$

$$h' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

Řešení od Bc.^MM Martina Hanáka:

Nejdříve zavedeme následující výraz $y = \frac{f}{g}$, a dále logaritmujeme a využíváme základní znalosti o logaritmech.

$$\ln y = \ln \frac{f}{g} = \ln f - \ln g$$

Dále derivujeme obě strany dle základních vzorců:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

tedy

$$y' = y \cdot \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)$$

a opět můžeme provést substituci za y, které jsme si již na začátku definovali výrazem $y = \frac{f}{g}$ a členy roznásobíme:

$$y' = \frac{f}{g} \cdot \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2}$$

následně převedeme na stejného jmenovatele, čímž dokončíme náš důkaz:

$$y' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Úloha 4

Zadání:

Zderivujte (podle x)

$$5x^4 - 3x^2 + \pi, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x, \qquad \sqrt{x}, \qquad e^{-3x},$$

$$\frac{3x^3 + 42x}{7x^2 + 2x}, \qquad (\sin(5x))'' = ((\sin(5x))')', \qquad \ln(\tan x).$$

Řešení od Petra Slonka:

1. $(5x^4 - 3x^2 + \pi)' = \left(5x^4\right)' - \left(3x^2\right)' + (\pi)' = 5 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 2x = 20x^3 - 6x$

2. $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)' = \left(\cos^2 x\right)' + \left(\sin^2 x\right)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' + 2\sin x \cdot (\sin x)' = -2\cos x \cdot \sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$

   Je také podstatně snazší cesta jak dosáhnout tohoto výsledku, a to uvědomit si, že $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

4. $\left(e^{-3x}\right)' = e^{-3x} \cdot (-3x)' = -3e^{-3x}$

5. $\left(\frac{3x^3+42x}{7x^2+2x}\right)' = \frac{\left(3x^3+42x\right)'\cdot\left(7x^2+2x\right)-\left(3x^2+42x\right)\cdot\left(7x^2+2x\right)'}{(7x^2+2x)^2} =$
$= \frac{\left(9x^2+42\right)\cdot\left(7x^2+2x\right)-\left(3x^3+42x\right)\cdot(14x+2)}{49x^4+28x^3+4x^2} = \frac{21x^4+12x^3-294x^2}{49x^4+28x^3+4x^2} = \frac{21x^2+12x^1-294}{49x^2+28x^1+4}$

6. $((\sin 5x)')' = (5\cos 5x)' = -25\sin 5x$

7. $(ln(\tan x))' = \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)' = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$

Výsledek sedmého příkladu lze zapsat v různých tvarech:

$$\frac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{cotan} x}{\cos^2 x} = \operatorname{cotan} x \cdot \sec^2 x = \csc x \cdot \sec x$$

V druhém, čtvrtém, šestém a sedmém příkladu se použije derivace složené funkce. V pátém pak derivace podílu (pozor na to, i zlomek je funkce, nelze ho ignorovat a derivovat čitatel a jmenovatel zvlášť), případně můžete začít zkrácením x, čímž lze ušetřit nějaké to x při počítání.

Nakonec chválím ty, kteří zderivovali $\cos^2 x + \sin^2 x$ a navíc si všimli, že je to jednička, takže můžeme lehce ověřit výsledek derivace $(1' = 0)$.

Problémy 5 a 6

Nejvíce vzorců pro derivace (problém 5) dokázala Mgr.$^{\text{MM}}$ Tereza Kubínová, která dokázala i vzorec pro derivování e^x. Jelikož ale limity nejsou tématem tohoto tématka, přikládáme pouze odkaz na hezky sepsané důkazy základních vzorců od Bc.$^{\text{MM}}$ Ondřeje Kašpárka:
`https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/29-1-4-kasparek.pdf`.[3]

Mgr.$^{\text{MM}}$ Tereza Kubínová také řešila problém 6. Její článek si můžete přečíst a inspirovat se jím na konci tématka.

Díl 2: Praktické použití derivací

V minulém díle jsme si řekli, že derivace vyjadřuje, jak se mění daná funkce. Také jsme si ukázali, jak takovou derivaci počítat pro většinu funkcí, se kterými se setkáme.

Co jsem možná zapomněl zdůraznit, je, že vypočtená derivace je opět funkce. Když do této derivace *dosadíme*, dostaneme, jak se původní funkce mění v tomto bodě.

[3] Jenom pro úplnost chci připomenout, že kdybychom chtěli opravdu formálně dokázat tyto vzorce, měli bychom ověřit podmínky, protože při dokazování používáme aritmetiku limit a spojitost funkcí. To se však dá ukázat z existence konečných derivací a pro naši představu o tom, proč naše vzorce platí, má ověřování těchto podmínek pramalý význam.

A správně je limita rodu ženského, tedy např. bez limity a bez limit, nikoliv bez limitů.

Úloha 1 [3b]: *Pro trénink zderivujte funkce*

$$x^2 - 4x + 4$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$2\sin(x)\cos(x)$$

K čemu ale taková derivace je kromě přímého použití jako rychlost ve fyzice? To, jak se funkce mění, dost vypovídá o tom, jak funkce „vypadá“ (tzv. průběh funkce), a my tak díky znalosti derivace můžeme zjistit, kde funkce roste, kde klesá, kde má největší hodnotu, kde nejmenší, atd. Podle toho, že „analyzujeme“ funkce, je vlastně pojmenována celá část matematiky, která se zabývá derivacemi (a integrály) – matematická analýza.

Monotonie

Jak jsem již zmínil, z derivace zjistíme, zda je v daném bodě[4] funkce rostoucí či klesající. Obecně totiž platí, že pokud je derivace v daném bodě *kladná*, tak je funkce rostoucí, pokud je *záporná*, tak klesající. Pozor, pokud je *nulová*, je to složitější (viz dále), a pokud „neexistuje“, tak to nedokážeme určit pomocí derivací.

Úloha 2 [3b]: *Kde funkce $x^2 - 4x + 4$ roste a kde klesá? Body, kde je derivace nula, zatím neřešte. Načrtněte také graf.*

A co funkce $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$? A $2\sin(x)\cos(x)$? (Hint: u poslední funkce chcete použít vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu.)

Extrémy

S největší (maximum) a nejmenší (minimum) hodnotou funkce je to o trochu složitější. Maximum a minimum totiž může být globální (tj. pokud dosadíte do funkce cokoliv, funkce už větší/menší nebude) nebo lokální, (tj. je to největší/nejmenší funkční hodnota na nějakém okolí). Můžeme si to představit tak, že pokud stojíme na Sněžce, tak široko daleko není vyšší hora, tedy jsme v lokálním maximu výšky nad mořem. Pořád ale existují vyšší hory, takže nejsme v globálním maximu. (Stejně tak můžeme stát na vrcholku libovolného kopečku a i když po ujití kroku směrem dolů už narazíme na úpatí Mount Everestu, tak dokud jsme na vrcholku, tak jsme v lokálním maximu.)

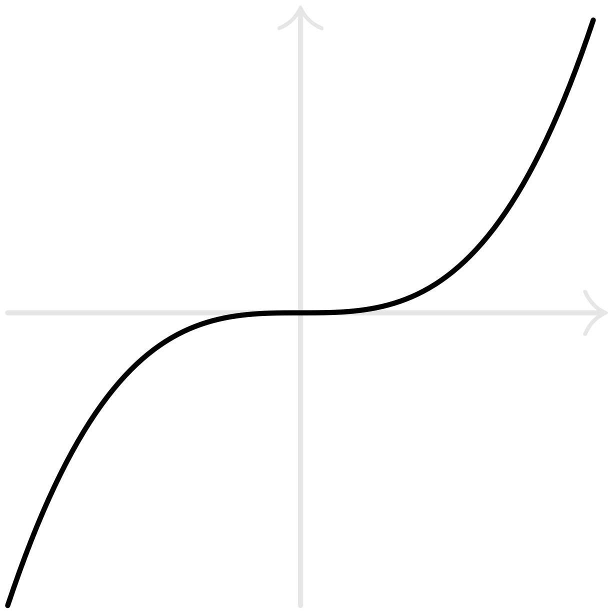
Dále můžou být extrémy (lokální i globální) ostré nebo neostré podle toho, zda používáme ostrou či neostrou nerovnost. Tedy vrchol Mount Everestu je ostré maximum, protože stejně vysokou horu už nemáme. Naopak (geomorfologický) hřeben je neostré maximum, protože po něm můžete jít po rovince, přestože po

[4] Formálně na nějakém okolí daného bodu, protože rostoucí/klesající je vlastnost funkce definovaná na intervalu, ne v bodě.

Pro zopakování: Funkce je rostoucí na intervalu I, pokud pro všechna $x, y \in I$, kde $x < y$ platí $f(x) < f(y)$. Klesající, pokud $f(x) > f(y)$.

stranách už terén klesá. Může se dokonce stát, že dojdete po rovince k dalšímu stoupání. Navíc místo na rovině je neostré maximum i minimum, protože celé okolí je nejvýše i nejméně tak vysoko.

Co však všechny tyto extrémy mají společné, je to, že pokud v nich existuje derivace, tak je nulová. Tedy všechny extrémy najdeme tak, že zjistíme, kde je derivace *nulová* nebo *neexistuje*. Tím jsme ale našli i body, které extrémy nejsou, například 0 v x^3 (viz obrázek 3). Pokud se podívá od bodu, kde je derivace nulová, k vyšším hodnotám na ose x a funkční hodnoty rostou a zároveň při pohledu doleva k menším hodnotám klesají, tak zde není lokální extrém (nebo naopak – doprava klesají a zároveň doleva rostou). Navíc nevíme, co z toho je maximum, co minimum, co globální, lokální, ostrý, neostrý extrém.



Obrázek 3: Funkce x^3, která má v bodě nula derivaci $3 \cdot 0^2 = 0$, ale nemá zde extrém (ani lokální)

Pro jednoduchost předpokládejme, že derivace existuje ve všech nalezených bodech, protože tam, kde neexistuje, se musíme na problém dívat úplně jinak, k tomu nám derivace nepomůže. V takovém případě je nejjednodušší rozhodnout, jestli je extrém neostrý nebo ostrý. Neostrý lokální extrém totiž bude v místě, kde je nulová derivace na nějakém intervalu. (Neostrý globální je, když jich je víc.)

Maximum je v bodech, do kterých funkce neklesá a ze kterých neroste. Obdobně minimum. Naopak v bodech, do kterých funkce roste a ze kterých také roste, nebo do kterých funkce klesá a ze kterých klesá je bod, kde funkce roste, resp. klesá, tedy to není extrém.

Nakonec globální maximum je největší z maxim a analogicky pro minimum, ale musíme si dát pozor, že funkce může být „extrémnější“ i v místech, kde extrém nemá, například pokud roste do nekonečna, nebo pokud ji řešíme jen na nějakém intervalu, tak musíme zahrnout do zkoumání i hodnotu v krajních bodech.

Pro nalezení globálních extrémů tedy najdeme body, kde je lokální extrém, a krajní body. Do všech těchto bodů „podezřelých z globálního extrému“ dosadíme a největší hodnota pak je globální maximum, nejmenší hodnota je globální minimum.

Úloha 3 [3b]: *Nalezněte všechny extrémy funkcí $x^2 - 4x + 4$, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ a $2\sin(x)\cos(x)$ a určete, jaké jsou.*

Ještě malá poznámka k tomu, proč nevykoukáváme tyto věci (např. ostrost nebo globálnost) z grafu: Představte si, že máte nějakou složitou funkci a chtěli byste k ní načrtnout graf. To, co uděláte, je, že o ní zjistíte všechny informace, o kterých jsme si říkali v dnešním díle, a následně *podle nich* načrtnete graf, ne opačně!

Problém 4: *Blížíme se ke konci dílu, tak zase můžeme „otevřít okna“, podívat se do „reálného světa“ a najít, kde bychom teorii z tohoto dílu mohli použít. Najděte použití hledání extrémů nebo monotonií.*

Můžete se zaměřit třeba na hledání vrcholu paraboly, výšek různých hodů, nejlepší úhel výstřelu z děla či dokazování nerovností (dokážete pro jednu hodnotu a pak ukážete, že je funkce správně rostoucí/klesající).

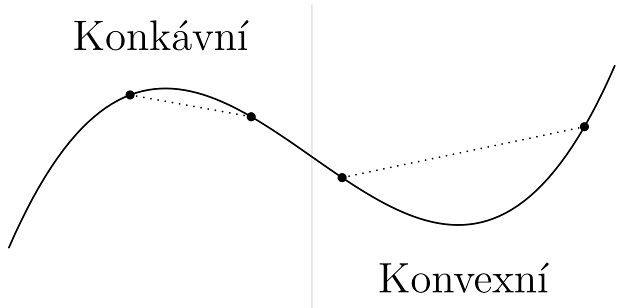
Stále také můžete hledat výskyty derivace jako takové (nebo do hloubky rozebrat nějaký výskyt v článku Mgr.^MM Terezy Kubínové na konci tématka):

Problém 5 (29.1): *Derivace je „okamžitá“ změna funkce. S takovými změnami se často setkáváme ve fyzice. Například rychlost je změna polohy v čase. Najděte nějaké použití derivace (ve fyzice i kdekoliv jinde).*

Bonus: Konvexita

Pomocí druhé derivace lze zjistit, jestli je funkce konvexní (víc jako údolí) nebo konkávní (víc jako kopec), neboť to je přesně to, co říká druhá derivace – kterým směrem se funkce stáčí. Pokud je tedy druhá derivace kladná, je funkce konvexní – více jako údolí (a při nulové první derivaci je pak v daném bodě minimum). Pokud je druhá derivace záporná, je funkce konkávní – více jako kopec (a při nulové první derivaci je zde tedy maximum). Kromě nalezení minima/maxima se tato informace dá využít i při kreslení grafu. A platí, že spojnice dvou bodů takovéto funkce bude nad/pod ní – tzv. Jensenova nerovnost.

Úloha 5 [1b]: *Než se lidi dobře seznámí s pojmi konvexní a konkávní, často se jim plete, který pojem je který. Zkuste zjistit, proč se jmenují zrovna takhle, nebo třeba vymyslet nějakou pomůcku, na lepší zapamatování.*



Obrázek 4: Konvexní a konkávní část funkce ($x^3 - 0.7x$), Jensenova nerovnost: spojnice bodů je pod funkčními hodnotami (konkávní) nebo nad funkčními hodnotami (konvexní)

To je z dnešního dílu vše. Dále si všímejte, kde na vás derivace vyskakuje při řešení různých problémů, a nebojte se ji použít!

Jidáš; jonas.havelka@volny.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

Derivace kolem nás

13b

Mgr.^MM Tereza Kubínová

Úvod

Jsou derivace užitečné v reálném životě? Důležité je si uvědomit, že derivace nám pomáhá pochopit funkce a jejich budoucí vývoj, je okamžitou změnou funkce a v praxi ji tedy například můžeme používat k plánování investic v ekonomii, ale také v různých fyzikálních výpočtech nebo dokonce i k předpovídání počasí. Mým cílem bylo najít použití derivací v reálném životě, kde budou mít praktické využití v některých povoláních nebo díky nim lze popsat skutečné fyzikální jevy. V následujícím textu uvedu příklady, kdy využití derivací přesahuje do jiných oborů než pouze matematiky.

Fyzika

Derivace podle času/polohy – kinematika

Ve fyzice se derivace používají často v souvislosti s časovou proměnnou. Jednoduchým příkladem derivace podle času je rychlost, což je derivace polohy podle času – „okamžitá změna polohy". Tímto způsobem můžeme vlastně říci, že zrychlení je druhou derivací a ryv třetí derivací polohy podle času, protože se vlastně jedná o „rychlost změny rychlosti" a „rychlost změny zrychlení". Použití derivací podle času je velké množství, například i v termice, ale všechny tyto příklady jsou si velmi podobné, jsou založené na stejném principu.

$$v'' = a' = j$$

(v – rychlost, a – zrychlení, j – ryv)

Příklad (velmi zjednodušený) toho, že zrychlení je derivace rychlosti podle času, představuje hledání gravitačního zrychlení ve volném pádu: Víme, že na předmět působí tíhová síla o velikosti $F_{gravitace} = m \cdot g$, naopak proti ní působí odpor prostředí, který však pro zjednodušení našeho výpočtu zapíšu jako $F_{odpor} = x \cdot v$, kde v je rychlost a x nám určuje zbylé vlivy jako velikost a tvar předmětu, které nám také určují odpor prostředí. Celkově podle zákona síly na předmět působí síla $F = m \cdot a$, kde a je zrychlení, takže můžeme říci:

$$m \cdot g - x \cdot v = m \cdot a$$

Díky tomu, že a je derivace rychlosti podle času, si to můžeme přepsat jako:

$$m \cdot g - x \cdot v = m \cdot v'$$

Nyní stačí už jen upravit rovnici:

$$m \cdot g = m \cdot v' + x \cdot v$$

$$g = v' + x/m \cdot v$$

Příkladem použití derivace podle času při výpočtu je okamžitá rychlost, což je rychlost předmětu v daném okamžiku, který je vlastně nekonečně malý – zde používáme derivaci zase k vyjádření nekonečně malého časového úseku, protože jsou derivace definovány limitami. Obdobně se počítá okamžité zrychlení a okamžitý ryv.

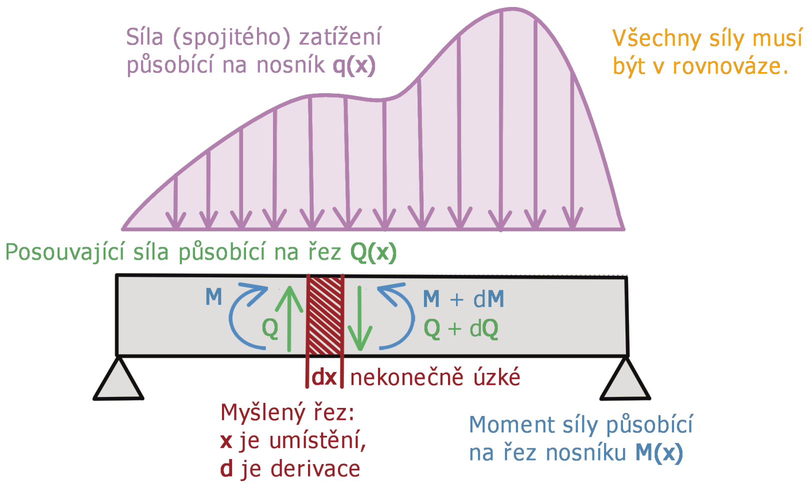
Okamžitá rychlost se nám například ukazuje na tachometru auta. Zajímavým použitím okamžité rychlosti v chemii je při reakci, kde se okamžitá rychlost používá k odhadu koncentrace reaktantů a produktů – jak rychle se přeměňují látky.

Schwedlerova věta – statika

Schwedlerova věta nám popisuje vztahy mezi momentem (M), posouvající sílou (Q) a zatížením (q) na nosníku. V praxi díky ní dokážeme vypočítat ze zatížení posouvající sílu a ohybový moment nebo naopak. Tato věta pracuje s „myšleným řezem“, pro který platí podmínka rovnováhy a který můžeme zapsat jako nekonečně úzký pomocí derivací díky skutečnosti, že jsou definovány limity (podobně jako u okamžité rychlosti s časem).

Schwedlerova věta se běžně používá k projektování různých staveb, kde jsou používané nosníky k podpírání konstrukce. Jedná se tedy o velmi praktický příklad použití derivace.

$$(M + dM) - M - Qdx + q\frac{dx^2}{2} = 0$$



Obrázek 5: Popis Schwedlerovy věty na nosníku. Pozn.: Zde jsem se pokusila zjednodušeně načrtnout síly, které působí kolmo na nosník – je zde spojité zatížení.

Biologie (demografie)

Oproti většině předchozích příkladů v jiných oborech včetně biologie používáme derivace spíše k předpovídání a tvoření modelů budoucího vývoje. S modely tvořenými pomocí derivací jste se už bohužel jistě setkali například během pandemie Covidu-19, kdy byly používány k modelaci očekávaného šíření epidemie. V demografii jste se zase mohli setkat třeba s modely příbytku obyvatel nebo migrace. Tyto modely jsou pro nás důležité z důvodu pochopení kroků, které musí provádět vlády, aby nedošlo například k přelidnění.

Populační dynamika v přírodě

Populační dynamika je věda zabývající se měnící hustotou populace dané skupiny živočichů či jiných organismů. Uvědomění si důležitosti studia populační dynamiky je klíčové k pochopení funkce predátorů a kořisti. Populační dynamika za pomoci zjednodušených modelů předpovídá budoucí růst populace druhu ze znalosti například kapacity prostředí, konkurence ostatních druhů nebo množství predátorů.

Určitě jste slyšeli o exponenciálním přírůstku druhu, ale tento model je dosti nepřesný a lze s ním dobře pracovat pouze v dobrých podmínkách s jednoduchými organismy – jako prvoky:[5]

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x$$

O něco lepší model je logistický, který počítá již s některými regulačními faktory, ale je i spousta dalších lepších modelů:[6]

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Musíme však vést v patrnosti, že se jedná jen o orientační data a není moc pravděpodobné, že se s nimi vše povede vždy předpovědět perfektně. Fungují spíše jako náš lepší odhad.

---

[5] Pozn. redakce: x je počet jedinců v závislosti na čase (označeném t), je to tedy funkce $x(t)$. k je pak konstanta udávající, jak rychle se druh množí.

Řešením takovéto tzv. diferenciální rovnice (derivace funkce = něčemu) je pak funkce, která tuto rovnost splňuje. Zde je to $x(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ pro libovolné C, neboť opravdu $x' = C \cdot k \cdot e^{k \cdot t} = k \cdot x$.

Proto se tomuto přírůstku říká exponenciální (řešením je exponenciální funkce).

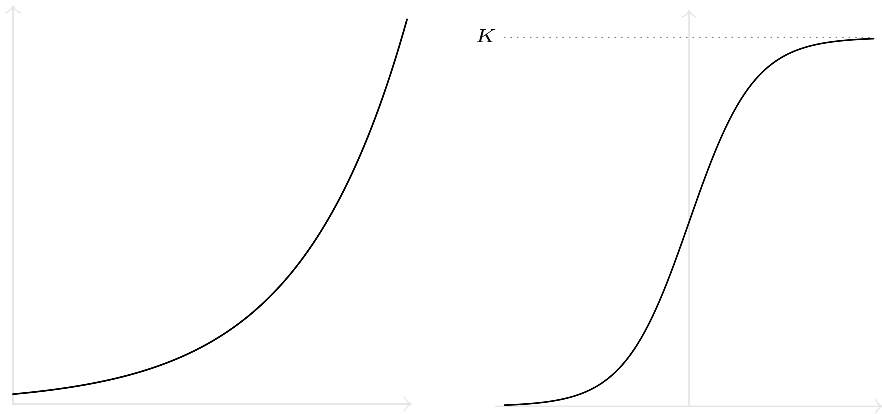
[6] Pozn. redakce: x je počet jedinců v závislosti na čase (označeném t), je to tedy funkce $x(t)$. r je pak konstanta udávající, jak rychle se druh množí, a K je konstanta, které se říká kapacita (tj. kolik nejvíce jedinců může přežívat současně).

Řešením této diferenciální rovnice je $x(t) = K \cdot \frac{1}{1+C \cdot e^{-r \cdot t}}$ pro libovolné kladné C, neboť

$$x' = K \cdot C \cdot (-r) \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \left(-\frac{1}{(1 + C \cdot e^{-r \cdot t})^2}\right) = r \cdot \left(K \cdot \frac{1}{1 + C \cdot e^{-r \cdot t}}\right) \cdot \left(\frac{C \cdot e^{-r \cdot t}}{1 + C \cdot e^{-r \cdot t}}\right) =$$

$$= r \cdot \left(K \cdot \frac{1}{1 + C \cdot e^{-r \cdot t}}\right) \cdot \left(\frac{1 + C \cdot e^{-r \cdot t}}{1 + C \cdot e^{-r \cdot t}} - \frac{1}{C \cdot e^{-r \cdot t}}\right) = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Proto se tomuto přírůstku říká logistický (řešením je speciální případ tzv. logistické funkce).



(a) Exponenciální přírůstek

(b) Logistický přírůstek s kapacitou K

Obrázek 6: Náčrty přírůstků přidané redakcí

Lékařství

Mezi odvětví lékařství, která se velmi zabývají statistikami a vytvářením modelů, rozhodně patří epidemiologie.

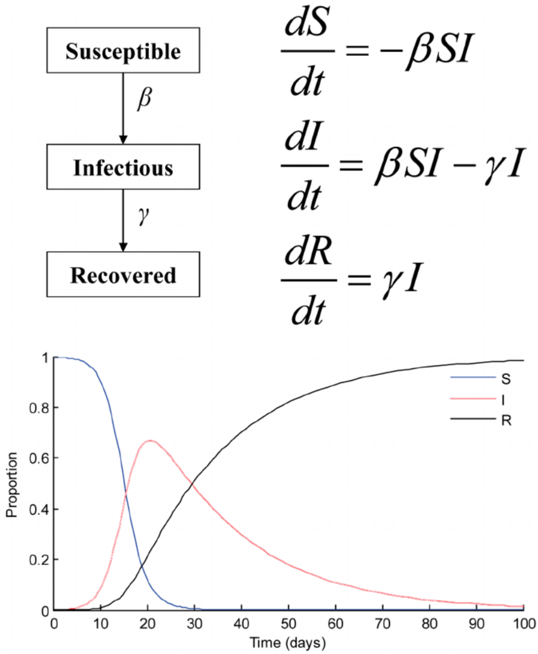
Epidemiologie se zabývá důvody, které ovlivňují vznik a šíření chorob. Mezi používané epidemiologické modely musíme zařadit model SIR (nenakažení (náchylní), nakažení, „uzdravení“), který se často používá k modelování epidemií. Tento model má také několik další variací.

Další poněkud zajímavé použití derivací můžeme najít ve spirometrii nebo ve spojitosti s měřením rychlosti průtoku krve. Spirometrie je vyšetření, které měří vitální kapacitu plic (největší množství vzduchu, které dokážeme vydechnout) pomocí spirometru. Tento přístroj dokáže zaznamenat objem nádechu a výdechu. Pomocí toho dokážeme poměrně jednoduše modelovat objem vzduchu v plicích v čase a dále i vypočítat vitální kapacitu plic. Vzorec pro výpočet vitální kapacity:[7]

$$V = \int_{t_1}^{t_2} q_v dt$$

Rychlost průtoku krve lze docela dobře zjednodušeně vypočítat, protože se jedná vlastně o laminární proudění (lze použít pokud kapalina putuje v relativně malé rychlosti), kde pokud přemýšlíme o krevních cestách jako o malých válcích, tak lze podle Hagen-Poiseuilleova zákona přijít na objemový tok – průtok krve

[7]Pozn. redakce: q_v je okamžitý průtok spirometrem. $\int$ je tzv. integrál, k tomu se dostaneme v nějakém z dalších dílů. Zjednodušeně se ale jedná o opak derivace, tedy když máme derivaci (rychlost, průtok) v každém bodě (čase), tak pomocí integrálu umíme zjistit hodnotu původní funkce (polohu, objem) v každém bodě (čase)



https://www.researchgate.net/profile/Claudio-Struchiner-2/publication/47676805/figure/download/fig1/AS:306073627054080@1449985047049/SIR-model-Schematic-representation-differential-equations-and-plot-for-the-basic-SIR.png

Obrázek 7: Příklad SIR modelu, β – normální počet lidí, s kterými jsme v kontaktu za další jednotku času, γ – šance infikování náchylného za další jednu jednotku času Pozn. redakce: S = nenakažení (náchylní), I = nakažení, R = „uzdravení“, na tyto hodnoty se díváme jako na funkce v čase, rovnice výše pak udávají, čemu se v konkrétním čase rovnají derivace těchto funkcí, a když najdeme funkce, pro které tyto rovnice platí, dostaneme obrázek níže (pro nějaká β a γ).

nebo i rychlost průtoku krve v:

$$v = \frac{P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

r – poloměr válce

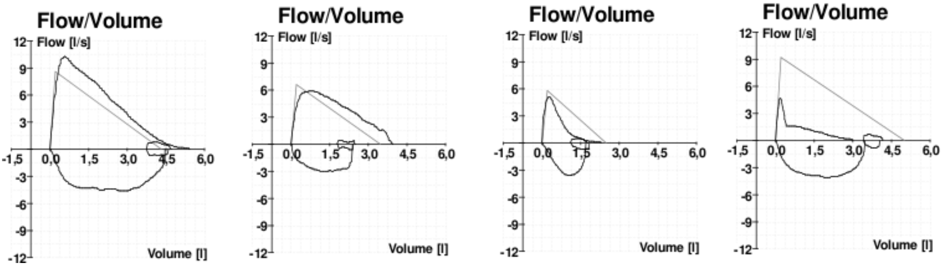
L – délka válce

η – viskozita

R – konkrétní bod vzdálenosti od kraje[8]

P – tlak

[8] Pozn. redakce: V původním textu „radius of the specific point inside the blood vessel that we want to know“, tedy spíše vzdálenost zkoumaného bodu od středu.



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Spirometry.png
Pozn. redakce: Odkaz i s právy užití je https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spirometry.png

Obrázek 8: Ukázky grafů ze spirometrie

Většinou chceme vědět okamžitou rychlost (rychlost v daném místě), proto použijeme derivaci:

$$v' = \frac{P}{4\eta L}(0 - 2r) = \frac{-2rP}{4\eta L}$$

Ekonomie

Marginalismus

Proč jsou diamanty dražší než voda? Vždyť bez vody se neobejdeme a je pro nás životně důležitá, tedy celkový užitek má pro nás větší.

V ekonomii se můžeme setkat s termínem marginalismus, což je ekonomická teorie, která je hlavně založena na mezním užitku. Podle této teorie lidé oceňují produkt spíše podle toho, jaký jim přinese užitek další jednotka produktu, než jaký je celkový užitek daného produktu, tedy například jaký užitek přinese danému člověku další sklenice vody, když už má čtyři sklenice vody, než jaký užitek má sklenice vody celkově samostatně. Protože má většina lidí již přístup k vodě a mezní užitek tedy už z ní je tedy pro většinu lidí již velmi nízký, vyberou si spíše komoditu, ke které přístup nemají.

To také znamená, že mezní užitek postupem s každou další zakoupenou jednotkou klesá, protože při každé další zakoupené jednotce již máme větší množství daného předmětu a má pro nás tedy menší cenu (za předpokladu neomezeného přístupu ke zdroji). Zde hraje roli ještě naše spotřeba daného produktu.

Mezní užitek, podle kterého se rozhodujeme a dokážeme díky němu pochopit lidské chování, jestli daný předmět zakoupíme, spočítáme pomocí derivace z celkového užitku. Vzorec pro mezní užitek:[9]

$$MU = \frac{\Delta TU}{\Delta Q}$$

Závěr

Mým cílem bylo nalézt příklady derivací v reálném životě. Popravdě jsem si myslela, že se mi zde povede popsat většinu použití, ale ve skutečnosti jsem si pouze uvědomila fakt, že derivace nejsou jen součástí matematiky a fyziky, ale jejich užití se vztahuje i na obory, které se na první pohled zdají matematice velmi vzdálené.

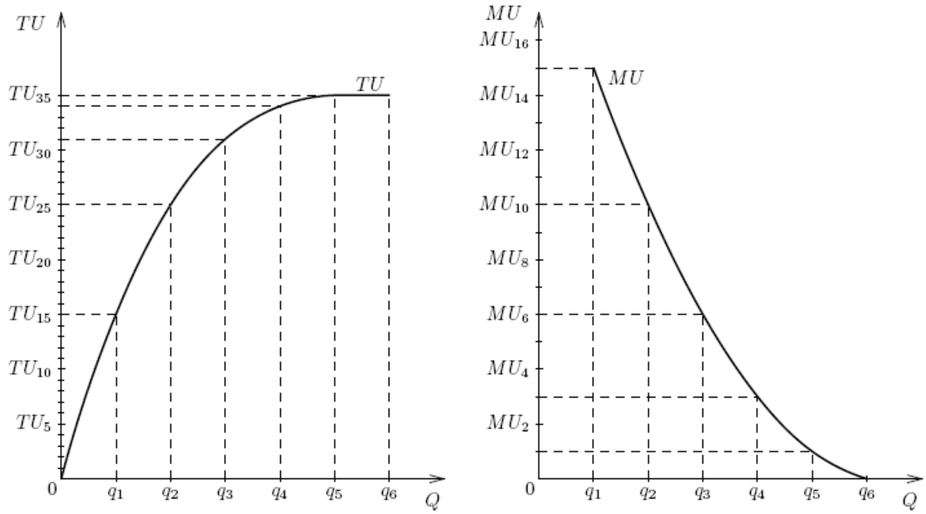
Zdroje informací (během psaní jsem používala jen internetové podklady):

Pozn. redakce: Celé odkazy naleznete ve webové verzi čísla: `https://mam.mff.cuni.cz/cislo/29.2/`. Zdroje jsou aktuální k datu 11.10.2022.

- Co je marginalismus v mikroekonomii a proč je důležitý? (investopedia.com)
- Derivative application in medical and biology (slideshare.net)

[9] Pozn. redakce: MU je mezní užitek (marginal utility), TU je celkový užitek (total utility) a Q je množství.

Celkový užitek při určitém množství většinou známe (např. víme, jak moc nám bude užitečných 10 l vody a že 101 l vody nám bude přibližně stejně užitečných jako 100 l vody), takže z něho (právě pomocí derivace) můžeme spočítat mezní užitek.



Celkový užitek v čase

Mezní užitek v čase

https://th.bing.com/th/id/R.4b262b9f62d34c175e1b7e1284dba564?rik=m0oORP7f%2blarMA&riu=http%3a%2f%2fcgi.math.muni.cz%2fkriz%2fprevod_mikro%2fobrazky%2fobr5_1.png&ehk=gcSYFghSGbL%2fIH9IkJ7tNi5ZFHHZiLfZy5tBl9mEDbA%3d&risl=&pid=ImgRaw&r=0

Obrázek 9: Porovnání celkového užitku a mezního užitku (zákon klesajícího mezního užitku)

- Teorie mezního užitku – Sociologická encyklopedie (cas.cz)
- Co je Mezní užitek | Peníze.cz (penize.cz)
- Chování spotřebitele a formování poptávky – Mikroekonomie – Miras.cz/Seminárky
- Spirometrie: průběh vyšetření a hodnoty spirometrie – Zdraví.Euro.cz
- Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra fyziky, chemie a odborného vzdělávání Derivace a její aplikace ve fyzice Bakalářská práce (muni.cz)
- Spirometrie – Wikipedie (wikipedia.org)
- (PDF) Mathematical modeling of blood flow (researchgate.net)
- Laminární proudění – Wikipedie (wikipedia.org)
- SIR Modeling (wku.edu)
- Model SIR – matematickabiologie.cz
- Using a Differential Pressure Sensor as Spirometer (inria.fr)

- Populační dynamika – Wikipedie (wikipedia.org)
- Populační dynamika (sovaro.cz)
- Co je to demografie? – Přírodovědecká fakulta UK (cuni.cz)
- Schwedlerova věta – Wikipedie (wikipedia.org)
- Schwedlerovy věty – jak na grafy VVÚ | Onlineschool.cz
- Posouvající síla – Wikipedie (wikipedia.org)
- Pružnost a pevnost 1 – Přednáška 9 – Youtube
- VÝUKA – PP1 – Úvod do nosníků, Schwedlerova věta – Youtube
- Rychlost a zrychlení rovnoměrného pohybu po kružnici, dráha, numerický výpočet derivace a integrálu, tečné a normálové zrychlení (cuni.cz)
- Jak vypočítat okamžitou rychlost, vzorec pro okamžitou rychlost – Lambda Geeks
- Rychlost – Wikipedie (wikipedia.org)
- Derivace ve fyzice – FYZIKA 007 (google.com)
- Zrychlení – Wikipedie (wikipedia.org)
- Ryv – Wikipedie (wikipedia.org)
- 8 Examples of Derivatives in Real Life – The Boffins Portal

Téma 5 – Outdoorové vařiče

Milí řešitelé, vítám vás u prvního dílu tématka, jehož cílem je hledání toho nejlepšího outdoorového vařiče.[10] Naší hlavní metodou jak tohoto cíle dosáhnout bude experiment. Budeme tedy měřit různé parametry outdoorových vařičů. Jak ale praví matfyzácké přísloví, třikrát přemýšlej, jednou měř. Nyní si tedy pouze rozmyslíme, co přesně a jakým způsobem bychom chtěli měřit a do samotného měření se pustíme až příště.

Relevantní parametry

Bylo by naivní si myslet, že máme každý stejnou představu o nejlepším vařiči. Někdo rád chodí na výlety nalehko a jde mu hlavně o hmotnost vařiče. Někdo je zase netrpělivý a chce hlavně rychle uvařené jídlo a někdo třetí má hluboko do kapsy a řeší hlavně cenu paliva. Musíme se tedy dobře zamyslet, které všechny parametry vařiče můžou být relevantní, aby se podle našeho měření mohl každý rozhodnout, který vařič je pro něj ten skutečně nejlepší.

Problém 1: *Zvol relevantní parametry problému testování vařičů. Svou volbu stručně zdůvodni.*

Metodika měření

Outdoorových vařičů existuje mnoho druhů (na plyn, na benzín, na tuhý i tekutý líh, dřívkáče…) a navíc, i dva vařiče stejného typu od různých výrobců se jistě mohou velmi lišit. Abychom v našem tématku dokázali pokrýt široké spektrum vařičů, musíme být schopni porovnávat vařiče, které měřili různí řešitelé. Je tedy zásadní zvolit metodiku měření tak, aby byla co nejvíce univerzální (aby ji mohl využít každý), a poté ji přesně popsat (aby ji všichni pochopili stejně).

Problém 2: *Pro každý relevantní parametr přesně popiš metodiku měření.*

Sepsání řešení

Při sepisování se držíme pravidel tří *S*: *Stručně*, *Srozumitelně* a *Spisovně*. Pozor, první *S* neříká, že musí být řešení krátké, ale že v něm nesmí nic důležitého chybět, ani nic zbytečného přebývat. Hotový text si po sobě pečlivě přečteme, abychom odhalili případné chyby. Můžeme také o totéž poprosit někoho dalšího – mimo jiné si tím ověříme, zda se nám podařilo splnit druhé *S*.

Prosba na závěr

Závěrem bych vás chtěl poprosit, abyste svá řešení posílali nejlépe již k prvnímu deadlinu, abychom mohli ve třetím čísle časopisu zveřejnit vaši volbu relevantních parametrů a metodiku, podle kterých budeme následně provádět měření.

To je pro tento díl vše, těším se na vaše řešení!

Tom; `domestomas+varice@gmail.com`
odevzdávejte do odevzdávátka

[10] Outdoorový vařič je takový vařič, který si nosíme v batohu na výlet a vaříme na něm v přírodě.

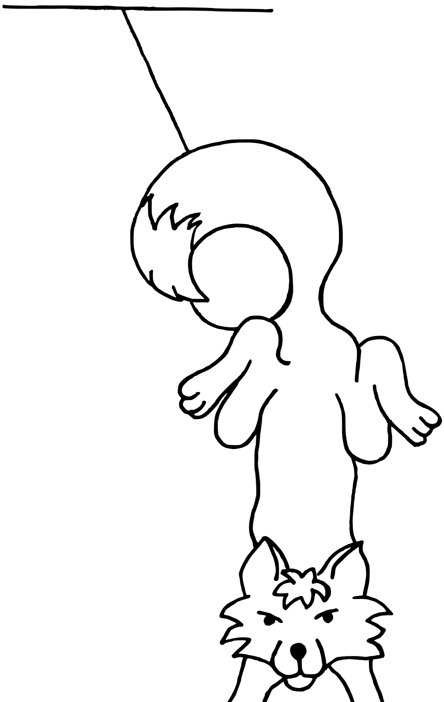
Výsledková listina 1. deadlinu 1. čísla

				Témata						
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**Ostatní**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Kubínová	Z9	56,3	8,3	8,0		40,0		56,3	56,3
2.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Pokorný	3	46,1	6,1	15,0	7,0	18,0		46,1	46,1
3.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Koten	3	35,5	6,5	3,0	3,0	23,0		35,5	35,5
4.–5.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Zůnová	2	35,1	12,6	7,0	4,5	11,0		35,1	35,1
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Urbanová	Z9	35,1	12,6	16,0	6,5			35,1	35,1
6.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Jarvis	1	32,8	7,0		13,8	12,0		32,8	32,8
7.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ N. Burzová	1	32,7	10,2	5,0	7,5	10,0		32,7	32,7
8.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Tichý	3	223,6	11,3	6,0	12,9			30,2	30,2
9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Růžička	4	29,0	12,5	3,0	7,5	6,0		29,0	29,0
10.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Švanda	4	28,5	5,5	14,0		9,0		28,5	28,5
11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Löwenhöffer	2	28,2	11,2	3,0	7,5	6,5		28,2	28,2
12.–13.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Ulumbekov	1	28,0		3,0	4,0	21,0		28,0	28,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Nevěřil	1	28,0	7,0	3,0	9,0	9,0		28,0	28,0
14.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Škopek	4	108,9	7,8			20,0		27,8	27,8
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Menšíková	1	31,0	8,0	3,0	4,0	11,0		26,0	26,0
16.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Hanák	3	25,6	7,1	3,0		15,5		25,6	25,6
17.–18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Šimová	4	23,3	6,6		3,8	12,9		23,3	23,3
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Šimová	2	105,3	6,6		3,8	12,9		23,3	23,3
19.–21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Štraitová	4	23,0	11,0			12,0		23,0	23,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Bříza	4	23,0	7,0			16,0		23,0	23,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Mišičko	1	23,0				23,0		23,0	23,0
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Nedvěd	1	22,6	7,7	1,5	9,4	4,0		22,6	22,6
23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ D. Strnadová	2	22,2	7,2			15,0		22,2	22,2
24.–27.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ F. Janošík	3	22,0	11,0			11,0		22,0	22,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Tregler	3	25,9				11,0	11,0	22,0	22,0
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Boček	4	102,5	3,0			19,0		22,0	22,0
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Čtvrtečka	3	150,1	8,0	3,0		11,0		22,0	22,0
28.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Štěpán	4	21,8	9,8			12,0		21,8	21,8
29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Sedláček	2	21,0		10,0		11,0		21,0	21,0
30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kotlas	1	20,8	4,3	6,0	4,5	6,0		20,8	20,8
31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Kašpárek	2	20,0				20,0		20,0	20,0
32.	M. Jursová	3	19,5	6,5			13,0		19,5	19,5
33.	J. Savula	3	19,0	1,0	3,0		15,0		19,0	19,0
34.–35.	M. Púll	3	18,6	3,6			15,0		18,6	18,6
	A. Mikulič	1	18,6	5,1	3,0	4,5	6,0		18,6	18,6
36.	P. Slonek	4	18,2	8,2			10,0		18,2	18,2

				Témata						
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**Ostatní**	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	M. Joly	4	17,8	4,3	3,0	4,5	6,0		17,8	17,8
38.	J. Buben	1	17,5	7,5	1,0		9,0		17,5	17,5
39.	N. Pippal	1	17,1	7,1	3,0	7,0	0,0		17,1	17,1
40.–41.	Bc.^{MM} L. Poljaková	3	26,9	7,0	1,0		8,5		16,5	16,5
	R. Materna	3	16,5	7,5			9,0		16,5	16,5
42.–43.	J. Klicnar	Z9	16,0	2,4	4,0	2,5	7,1		16,0	16,0
	Bc.^{MM} V. Bartáková	3	24,0		3,0		13,0		16,0	16,0
44.	Dr.^{MM} J. Polách	4	124,5	3,1			12,0		15,1	15,1
45.	Bc.^{MM} R. Novák	3	40,7				15,0		15,0	15,0
46.	E. Turbová	1	14,6	5,8	2,8		6,0		14,6	14,6
47.	B. Szotkowská	2	13,6	6,6	5,0		2,0		13,6	13,6
48.	V. Čábelka	3	13,1	4,1			9,0		13,1	13,1
49.	Mgr.^{MM} P. Jendele	4	82,1		3,0		10,0		13,0	13,0
50.	A. Čechová	3	12,2	3,6			8,0		11,6	11,6
51.–52.	J. Hampl	3	11,0	11,0					11,0	11,0
	M. Plachý	4	11,0	3,0	0,0		8,0		11,0	11,0
53.	Bc.^{MM} M. Smrčka	3	33,6				10,0		10,0	10,0
54.	Bc.^{MM} M. Steinhauserová	Z9	20,6	9,1					9,1	9,1
55.–60.	L. Koucký	Z9	9,0	6,0			3,0		9,0	9,0
	J. Uglickich	1	9,0	1,0			8,0		9,0	9,0
	V. Humlová	1	9,0	9,0					9,0	9,0
	J. Lepič	4	9,0	9,0					9,0	9,0
	F. Zápotocký	4	9,0	6,0		3,0			9,0	9,0
	H. Muchová	1	9,0				9,0		9,0	9,0
61.–62.	K. Tomáš	Z9	8,0	8,0					8,0	8,0
	J. Zajíc	3	8,0	8,0					8,0	8,0
63.	K. Menšíková	Z9	7,5	7,5					7,5	7,5
64.	K. Vomelová	3	7,2	7,2					7,2	7,2
65.	S. Teodorovičová	2	7,1	7,1					7,1	7,1
66.	M. Taufer	3	7,0				7,0		7,0	7,0
67.	J. Kučera	2	6,5				6,5		6,5	6,5
68.	K. Plchová	3	6,3	6,3					6,3	6,3
69.	J. Klementová	1	6,1	6,1					6,1	6,1
70.	M. Radimský	2	6,0				6,0		6,0	6,0
71.	Bc.^{MM} V. Faltus	3	30,8				4,0		4,0	4,0
72.	L. Votrubová	2	3,9	3,9					3,9	3,9
73.	L. Chmelíková	2	3,4	3,4					3,4	3,4

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	4	Ostatní	$\sum_0$	$\sum_1$
74.	K. Maxera	2	3,0	3,0					3,0	3,0
75.	R. Mayerová	1	5,0	2,0					2,0	2,0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v těchto deadlinech a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M