STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIX

Číslo 1

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milý řešiteli, současný a možná i budoucí,

zrovna čteš první číslo studentského časopisu M&M. Možná se ptáš, co přesně tvé prsty vlastně třímají. Dovol mi, abych ti vše osvětlil. Jsme korespondenční seminář určený pro všechny středoškoláky, tedy nevadí, jestli jsi zrovna v prvním ročníku a nebo budeš za chvíli maturovat. Jak to vlastně funguje? V čísle najdeš texty k daným tématům a k nim vždy sadu úloh. Ty vyřešíš a pošleš nám je. My ti je opravíme a pokud si povedeš úspěšně, pozveme tě na týdenní soustředění (nejbližší se koná v říjnu a na soustředění zveme i nejlepší řešitele prvního čísla, teď máš stále šanci). Více se dozvíš na `https://mam.mff.cuni.cz/jak-resit`.

Jaká témata tě čekají tento rok?

Možná jsi někdy zatoužil(a) střetnout se tváří v tvář s těmi, jejichž jména se vyslovují jen s obavami a úctou, s mocnými integrály. Možná by ses ve skrytu duše rád(a) vydal(a) do hlubin oceánu vědění, kde se snoubí inženýrství s informatikou, či bys možná rád(a) uslyšel(a) o tom, kterak se chránit před hlukem a jeho hrozivými důsledky. A možná bys rád(a) pronikl(a) do tajuplných značek a symbolů, které se vyskytují v knihách nabitých matematikou. To vše a mnoho dalšího ti nabídnou jednotlivá témata. Odlož své obavy a zkus nějakou tu úlohu vyřešit a poslat.

Červnová víkendovka

Bohužel jsme se spolu nemohli potkat na vánoční víkendovce a tak se bude konat 24. až 26. června letní víkendovka v Kostelci nad Orlicí. Tímto jsi srdečně zván(a). Můžeš přijít nejen ty, ale i tvoji kamarádi, kteří ještě neřeší. Tak se neboj a zkus s sebou někoho vzít. Pokud by ses chtěl(a) přihlásit, nebo měl(a) jakékoliv dotazy ohledně víkendovky, můžeš napsat Tomášovi Domesovi na e-mail `domestomas+vikendovka22@gmail.com`.

Články, body, Discordy

I tento rok pokračuje ponožková motivace. Tedy za každou sérii, ze které získáš alespoň π bodů, získáš jednu ponožku. Dokážeš sestavit pár stejné barvy?

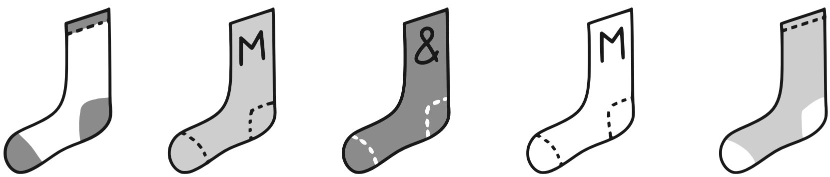
A samozřejmě ani články nezůstanou neodměněny. A tak tradičně, kromě kopy bodů, autor nejlepšího článku získá i dort. Tak neotálej a nějaký článek sepiš, můžeš se třeba inspirovat článkem Jana Treglera o Ramseyových hrách, který najdeš na konci tohoto čísla.

Nově můžeš mimo bodů získat i nějaké ty sociální kredity a to na našem Discordu `https://discord.gg/MxPjKsDFWG`. Určitě se ti tam podaří narazit i na nějakého organizátora.

Závěrem nezbývá než ti popřát hodně zdaru do nového školního roku.

Tví organizátoři

Obsah



Zadání témat

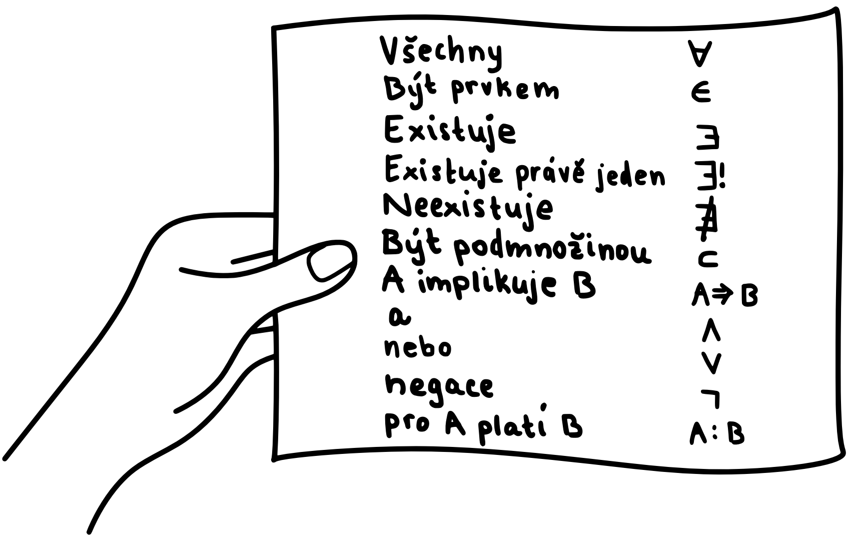
1. deadline: 20. 9. 2022 | 2. deadline: 11. 10. 2022
Řešení odevzdaná do 20. 9. se započítají pro účast na soustředění.

Téma 1 – Matematické pohádky

Příběhy pro ∀: O Drakovi a Honzovi

Prolog

Vnučka: Mami, proč máš tak krásné šaty?
Maminka: To abych tátu lépe okouzlila, když s ním jdu dneska do divadla.
Vnučka: Já tu nechci být sama.
Maminka: Však nebudeš, za chvíli přijde babička a ta tu s tebou bude.
Vnučka: Když ona občas mluví strašně divně.
Babička: Ťuky, ťuk dobrý večer vám $\forall$ osoba $\in$ místnost. $\exists$ osoba $\in$ místnost?
Maminka: No, já si nemyslím, že to bude tak hrozné. Tady máš lísteček s tím jejím nářečím a ahoj, opatruj se.



A nakonec babička jako vždy začala vyprávět pohádku.

Příběh

Bylo, nebylo, za $n \in \{7\}$ horami a $m \in \{7\}$ řekami jedno překrásné království. A v něm, milé děti, žila, byla princezna, a nejenom ona, ale i mladý a nadějný jinoch, kterého všichni kolem znají jako Honzu. A že byl silný, vysloužil si přídomek hloupý.

Jednoho dne přiletěl drak a princeznu unesl. Jelikož:

$$(\forall \text{rytíř} \in \text{království}) : \text{ztratil meč} \vee \text{nepřevzal poštu} \vee \text{pes mu snědl brnění},$$

král byl nucen vyvěsit po všech lampách následující výnos:

$$(\exists! \text{drak} : \text{drak} \in \text{sluj}) \wedge \exists \text{princezna} : (\text{drak} : \text{živý} \implies \text{princezna} \in \text{sluj}),$$

$$\text{princezna} \notin \text{sluj} \iff \exists \text{manželství} : \forall i \in \{\text{hrdina}, \text{princezna}\} : i \in \text{manželství},$$

$$(\text{princezna} = \text{manželka}_{\text{hrdina}} \implies \text{hrdina} = \text{král})$$

Protože

$$\nexists \text{muž} \in \text{království} :$$

$$(\text{muž} \neq \text{Honza} \wedge (\text{mozek}_1 \subset \text{muž}) \wedge (\text{mozek}_2 \subset \text{Honza}) \wedge (\text{mozek}_1 \leq \text{mozek}_2))$$

$$\wedge (\text{větší mozek} \implies \text{chytřejší muž}),$$

hned poté, co si nechal přečíst královský výnos jeho kamarádem Kozlem, vydal se na draka. Vždyť jednou máchne mečem, bude po drakovi a už v životě nebude muset nic dělat. Pak mu to došlo. Co když není jediný, kdo jde na draka? Měl by sebou rychle hodit, aby mu tu krásku někdo nevyfoukl. Co se ale nestane, v tom všem spěchu a kvapu Honza zakopne a praští sebou na zem. Rychle vstane, oprášÍ se a začne zkoumat, proč ho tak bolí palec. Tu si všimne starého meče, na němž je napsáno:

$$\forall \text{osoba} \in \text{království} : (\text{kletba}_{\text{meč}} \subset \text{budoucnost}_{\text{osoba}}) \implies \text{smůla}_{\text{osoba}}$$

$$\nexists \text{ž} \in \mathbb{R} : \text{ž} > 0 \wedge \text{vzdálenost}_{\text{meč od osoby}} > \text{ž} \implies \text{kletba}_{\text{meč}} \subset \text{budoucnost}_{\text{osoba}}$$

„Ha, meč“, vykřikne Honza. A jelikož neumí číst, kletby, nekletby, zvedne ho a vsune za opasek. Už jen pár stovek metrů si to bude náš hrdina vykračovat, než ucítí drakův hnilobný puch.

„A babi, je pravda, že

$$\exists! \text{hlavy} : (\text{hlavy} \subset \text{drak})$$

$$\forall \text{hlavy} \subset \text{drak} : |\text{hlavy}| = 7$$

$$\{h \in \text{hlavy} : h \neg \text{upadla}\} = \emptyset \implies \text{drak} \neg \text{živý}$$

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,7\} : (h_i \in \text{hlavy}) \wedge h_i \text{ chrlí plameny teploty } t_i = (256 \cdot i)\,{}^\circ\text{C}$$

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,7\} : (h_i \cap \text{meč} \neq \emptyset) \implies h_i \text{ upadne?“}$$

„Ano, máš pravdu,“ odpoví babička a pohladí vnučku po vláskách.

„Jak to vlastně bylo dál?“

„Honza sekal a sekal až

$$\neg\exists h \in \text{hlavy} : h \,\neg\text{upadla}.$$

A zazvonil zvonec a pohádky je konec.“

„Babi, jak to bylo s princeznou? Babi, pověz mi to.“ Bohužel zpět se ozývalo jen chrápání. A ty čtenáři nezoufej. Jestli jsi pozorně poslouchal, určitě správnou odpověď již znáš.

Úloha 1 [1b]: *Může být meč ze železa? Jaký kov byste Honzovi doporučili?*

Úloha 2 [2b]: *Zkuste příběh zapsat bez negací.*

Úloha 3 [2b]: *Co přesně stojí na magickém meči?*

Úloha 4 [3b]: *Jak příběh dopadl? Zapište vlastními slovy.*

Úloha 5 [1b]: *Jak moc hloupý je Honza? Proč?*

Úloha 6 [1b]: *Jak lze draka zabít?*

Problém 7: *Zkuste napsat podobný příběh, rádi si ho přečteme.*

Dláža; `gadurekvojtech@outlook.com`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 2 – Akustika

Díl 1: Jak hlasitá je krabice?

Historie a význam akustiky

V tomto tématku se budeme několik následujících čísel zabývat akustikou. Začneme krátkým fyzikálním úvodem a navážeme aplikacemi, zejména pak aplikacemi ve stavebnictví.

Akustika je podobor mechaniky. Kromě již zmíněné fyzikální a stavební akustiky se dále dělí na hudební, lingvistickou a fyziologickou akustiku. Základy akustiky byly položeny již ve starověku, když lidé začali zkoumat hudbu a akustické vlastnosti staveb. Mnohem později se podařilo nalézt matematický popis šíření zvuku a akustika se stala klasickou součástí fyziky. V moderní době je ústředním tématem aplikací akustiky architektura a nahrávání a následná reprodukce zvuku.

Možná si v tomto okamžiku kladete otázku, proč věnovat svůj čas právě studiu akustiky. Hlavním důvodem je jednoznačně všudypřítomnost jejích aplikací. Prakticky každá větší stavba musí být navrhována právě s ohledem na její budoucí akustické vlastnosti. Lidé bydlící v okolí dálnice nesmí být vystaveni nadměrné úrovni hluku. V divadelním sálu by mělo být dobře slyšet herce v každém místě hlediště, ale zároveň by neměla být slyšet ozvěna. V opačném případě by bylo představení spíše utrpením než obohacujícím kulturním zážitkem. A ani při návrhu obyčejné trochu větší místnosti, například školní třídy, nemůžou být její akustické vlastnosti zcela ignorovány, aby se učitel a jeho žáci navzájem dobře slyšeli.

S dalšími aplikacemi akustiky se setkáme při stanovení a následné implementaci limitů na úroveň hluku či hladinu neprůzvučnosti konkrétních konstrukcí. Musí být zajištěno, aby hluk způsobený jedním obyvatelem bytového domu nebyl příliš slyšet do ostatních bytů. Právě proto jsou důležité limity pro minimální hladiny neprůzvučnosti zdí a podlah, aby byli obyvatelé budovy chráněni před zvukem z ostatních bytových buněk. Limity pro hluk se pak liší podle toho, jestli se jedná o dlouhodobé či krátkodobé vystavení osob hluku, důležité je ale i jestli je odhlučněné místo určené pro klidný spánek či pro práci, proto takové limity vypadají jinak u bytu než u pracoviště.

Historicky byla neprůzvučnost stavebních konstrukcí typicky zajištěná samotnou jejich masivností – lidé stavěli tlusté zdi z materiálů s vysokou akustickou pohltivostí, například z pálených cihel nebo z vepřovic.[1] Právě protože budovy byly inherentně odhlučněné z podstaty jejich materiálového řešení, dlouho se akustika v budovách nemusela řešit. Až když jsme postupně v Evropě v minulém století začali masivně využívat například tenké prefabrikované betonové díly, protože se technologicky již umělo vyrobit stěnu tenkou, začala být najednou akustika problém, se kterým se nepočítalo. To je také důvod, proč je v panelácích z padesátých

[1] Vepřovice jsou nepálené cihly.

až osmdesátých let akustika tak špatná, že se sousedé navzájem slyší splachovat nebo chodit po schodech. Do té doby se to řešit nemuselo a pak zase třicet let trvalo, než se řešení odhlučnění v bytech stalo standardem a stanovily se dané akustické limity pro neprůzvučnost konstrukcí.

Samostatnou kapitolou je hluk vydávaný různými přístroji, které si kupujeme do domácnosti. Zajisté nechceme, aby byla zapnutá mikrovlnka slyšet až u sousedů, nebo aby hluk větráků počítače obtěžoval svého uživatele při práci.

Stručný úvod do fyzikální akustiky

Teď, když už víme, čím je akustika důležitá, bychom se měli alespoň krátce ponořit do studia teoretických základů. Celá fyzikální akustika se točí kolem akustických vln. Studuje jejich vznik, šíření a interakce s materiály a prostředím. Akustická vlna by se dala definovat jako změna tlaku v konkrétním místě v prostoru, která se šíří prostředím, tedy molekulami vzduchu, vody nebo jiného materiálu. Akustické vlnění je charakteristické svou frekvencí a hladinou intenzity.

Frekvence udává počet vln, které po sobě následují během jedné sekundy. Pokud jsou vlny jednoduchá sinusoida, jedná se o vlnění monofrekvenční, jelikož můžeme snadno při pohledu na vlnu určit, v jaké frekvenci se opakuje. Běžné zvuky kolem nás, jako náš hlas nebo naše oblíbená hudba, však monofrekvenční nejsou, jejich tvar není pravidelný, nýbrž je složený z různých frekvencí. U akustického vlnění, které není monofrekvenční, se různé obsažené frekvence podílí na výsledném sluchovém vjemu.

Jednotkou frekvence je hertz (značíme Hz). Akustické vlnění, jehož frekvence se nachází v rozpětí 20 až 20 000 Hz, nazýváme zvuk. Právě tyto frekvence jsou rozpoznatelné lidským uchem. Akustické vlnění s nižšími frekvencemi se nazývá infrazvuk a vyšším frekvencím říkáme ultrazvuk. Tyto frekvence člověk neslyší, což ale neznamená, že jimi nemůže být ovlivněn, zvláště pokud mají vysokou hladinu intenzity.

Intenzita zvukové vlny reprezentuje množství energie, které vlna nese a které za sekundu projde nějakou pomyslnou plochou v prostoru kolmou na směr šíření vlny.

Hladina intenzity je určena energií přenášenou akustickým vlněním. Neměla by být zaměňována za hlasitost, která popisuje subjektivní vnímání hladiny intenzity lidským uchem. Jednotkou hladiny intenzity je decibel (značíme dB). Hladina intenzity je definována jako

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$

kde I je intenzita a I_0 odpovídá nejnižší intenzitě, kterou je ještě lidské ucho schopné rozpoznat při frekvenci 1 kHz za dokonalých podmínek (sluchový práh). Ve fyzice slovem hladina zpravidla označujeme veličiny, které mají logaritmické jednotky. Logaritmus používáme, protože z psychofyziky vyplývá, že člověk fyzikální vjemy vnímá logaritmicky vzhledem k jejich intenzitě – tedy že si lidé všímají zvýšení intenzity až při změně o cca 26 % (odpovídá 1 dB) téměř bez ohledu na to, jaká byla výchozí hodnota.

Horní fyziologický limit existuje rovněž u hladiny intenzity. Zvuky s hladinou intenzity vyšší než 130 dB (práh bolesti) jsou pro lidské ucho nebezpečné a expozice takovému zvuku může vyústit až v úplnou a trvalou ztrátu sluchu.

K šíření akustických vln prostředím by se ještě slušelo na závěr zmínit, že má konečnou rychlost, která je závislá na konkrétním prostředí.

Dosud jsme se zabývali jen šířením akustických vln a zcela jsme vynechali jejich vznik a interakci s materiály. Akustické vlny typicky vznikají při úderech, rychlých pohybech, proudění vzduchu kolem hrany. S materiály interagují v zásadě dvojím způsobem: dochází buďto k odrazu, nebo k částečnému pohlcení. Oba způsoby mohou být užitečné, pokud chceme v nějakém místě snížit hladinu intenzity zvuku. Podrobněji se těmito interakcemi budeme zabývat v dalších dílech tématka. Zmíníme se také o interakcích zvukových vln s prostředím.

Úloha 1 [7b]: *Vytvořte si uzavřený prostor s dostatečným útlumem*[2] *(například z kartonových krabic a dalších izolačních materiálů) a změřte pro něj závislost koeficientu absorpce na frekvenci. Koeficient absorpce je definován jako poměr energie absorbované prostředím/stěnami a celkové energie emitované zvukovým zdrojem. Nezapomeňte popsat svou aparaturu a podmínky, za kterých jste experiment prováděli. Ke generování různých frekvencí můžete použít například nějakou volně dostupnou webovou aplikaci. Doporučuji například aplikaci „Zvukoměr“ a nebo „Sound Meter“ – ale nemyslím si, že jsou mezi nimi nějaké kvalitativní rozdíly. Doporučuje se použít bezdrátový reproduktor a umístit jej do uzavřeného prostoru. Tuto materiálovou charakteristiku by mělo být snadné změřit i s pomocí obyčejného chytrého telefonu, na kterém bude nainstalovaná libovolná aplikace pro měření hladiny intenzity.*

Problém 2: *Jak se změní výsledky experimentu, pokud změníme některý z jeho relevantních parametrů, například to, jestli jej provádíme venku, nebo uvnitř? Nebo když použijeme jiný reproduktor s výrazně odlišnými parametry? Můžete vyzkoušet i několik různých izolačních materiálů, pro které výše zmíněnou závislost změříte.*

Zvuk nebo hluk?

Na závěr si v tomto čísle položíme otázku, co je to vlastně hluk. Už víme, že jako zvuk nazýváme ty akustické vlny, které jsou slyšitelné lidským uchem. Třebaže je každý sluchový aparát trochu jiný a navíc se sluch postupně zhoršuje s věkem, není složité přesně stanovit horní i dolní hranici. S hlukem je to mnohem těžší, neboť ten je obecně definován jako zvuk, který je pro člověka nepříjemný, rušivý nebo zdraví škodlivý. Můžeme tedy například říct, že hlukem je i sotva slyšitelné

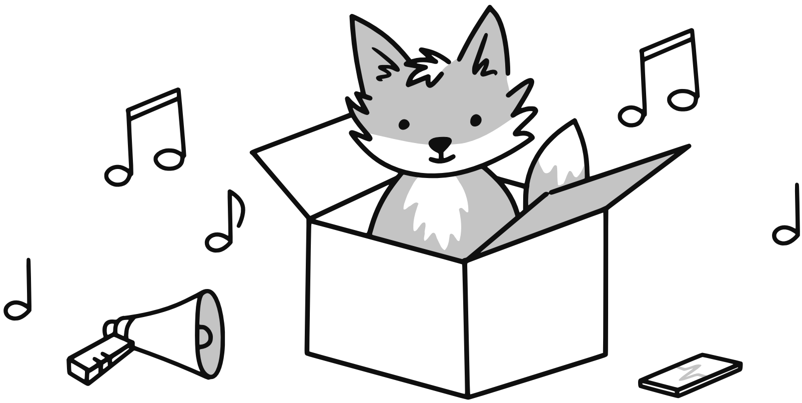
[2] Útlum je míra toho, jak moc materiál zabraňuje šíření zvukové vlny po průchodu daným materiálem dál do prostoru.

tikání budíku, pokud se zrovna snažíme usnout a tikání nás ruší. Naopak ani velmi hlasitá hudba nemusí být hlukem, pokud se jí nevystavujeme příliš a zároveň jsme jejími dobrovolnými posluchači. Hluk je tedy velmi subjektivní pojem. Posledním úkolem v tomto čísle proto bude pokusit se o subjektivní definici.

Úloha 3 [1b]: *Spuštěný vysavač má hladinu intenzity zvuku 70 dB. Jak vysokou hladinu způsobí spuštění dvou takových vysavačů zároveň?*

Úloha 4 [2b]: *Pokuste se na základě svých dosavadních zkušeností zpřesnit, co pro vás subjektivně znamená hluk. Nebojte se uvést konkrétní příklady.*

Viktor Materna; viktor.mat@seznam.cz
Tereza Hladíková; tereza.tter.hladikova@gmail.com
odevzdávejte do odevzdávátka

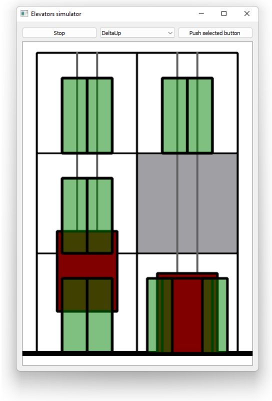


Téma 3 – Výtahy

Díl 1: Výtahy jako Mealyho stroje

Abychom pochopili, jaké problémy doprovázejí vývoj autonomního metra nebo obecně autonomních vlaků, lodí, letadel, či dokonce aut, musíme začít u těch nejjednodušších autonomních strojů. V tomto tématku jsem vybral výtah jako vhodného reprezentanta autonomního stroje pro přepravu osob.

V průběhu tohoto ročníku se zamyslíme nad tím, co všechno je potřeba vyřešit při stavbě výtahového komplexu. Některé příklady budeme později modelovat a programovat na jednoduchém simulátoru výtahů. Simulátor si můžete už teď prohlédnout na adrese:
`https://github.com/bsaid/ElevatorSimulator/blob/main/README_CZ.md`



Obrázek 1: Ukázka zmíněného simulátoru výtahů

V tomto dílu ale zatím nic programovat nebudeme. Podíváme se nejprve na to, jaké podmínky musí takový výtah splňovat, aby bylo jeho používání bezpečné. Například je asi intuitivní, že výtah by měl nejprve zavřít dveře, a až potom se může dát do pohybu.

Problém 1: *Jaké další podmínky vás napadají?*

Popis řízení výtahu Mealyho strojem

Protože je výtah poměrně složité zařízení, bude se nám hodit popsat řízení pomocí jednoduššího *modelu*. To nám umožní o výtazích jednodušeji přemýšlet, vyslovovat a ověřovat různá tvrzení a dávat nějaké záruky.

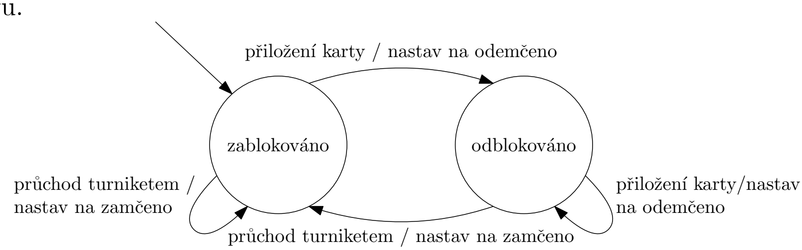
Vhodným modelem řídící jednotky výtahu je *Mealyho stroj* (MS)[3]. Takový

[3] Existuje také *Moorův stroj*, který funguje velmi podobně. Jediný rozdíl je v tom, že Moorův stroj nastavuje své výstupy pouze na základě vnitřního stavu řídicí elektroniky, kdežto Mealyho stroj nastavuje výstupy na základě vnitřního stavu a hodnot na vstupu.

stroj má nějaké *vnitřní stavy*. Obsah vnitřní paměti tohoto stroje definuje, v jakém stavu se řídicí elektronika právě nachází. Stroj mezi těmito stavy *přechází* v reakci na své *vstupy*. Vstup je n-tice drátů s binární hodnotou napětí. Součástí vstupu může být například jeden drát připojený ke tlačítku nebo osmice drátů reprezentující číslo od 0 do 255. Mealyho stroj se na začátku nachází v *počátečním stavu*.[4] Mealyho stroj také při každém přechodu mezi stavy nastaví nový *výstup*. Výstup je opět k-tice drátů, pomocí které můžeme například řídit motor nebo zavírat dveře. Ukažme si to na příkladu turniketu:

Uvažujme turniket, třeba ve vstupu do budovy. Ve výchozím stavu má průchod zablokovaný a nejde projít. Pokud přiložíme přístupovou kartu, turniket se přesune do odblokovaného stavu, otáčení se odblokuje a projít jde. Nicméně turniket detekuje otočení a poté, co někdo projde, se opět zablokuje a dostane se tak do výchozího, zablokovaného stavu. Turniket v zablokovaném stavu při zjištění otočení stav nezmění, stejně tak přiložení karty k odblokovanému turniketu nic nezmění. Turniket má tedy dva stavy (zablokovaný a odblokovaný) a v zablokovaném stavu začíná. Jako vstup dostáváme signál o otočení a o přiložení (správné) karty.[5] V tomto případě existuje jediný výstup, který odblokuje nebo zablokuje otáčecí mechanizmus turniketu.

Jedna z možností, jak MS vyjádřit, je obrázkem. Kolečka reprezentují stavy, šipky mezi nimi reprezentují přechody. U každého přechodu je napsané, za jakých podmínek nastane, za lomítkem pak je výstup tohoto přechodu. Stavů i podmínek smí být jen konečně mnoho. Počáteční stav se značí šipkou „odnikud“ do tohoto stavu.



Obrázek 2: Mealyho stroj popisující chování turniketu

Zatím nám bude stačit Mealyho stroj definovat intuitivně obrázkem, nicméně na straně 14 si ukážeme i formální definici.

Problém 2: *Uvažujme nejjednodušší variantu výtahu, který vozí cestující na rozhlednu. Takový výtah jezdí pouze mezi dvěma patry – přízemím a rozhlednou. Rozmyslete, jaké senzory a tlačítka tento výtah potřebuje pro svůj bezpečný provoz. Jak bude výtah po stisknutí každého vámi definovaného tlačítka reagovat? V jakých stavech se bude tento výtah nacházet? Který z těchto stavů byste zvolili*

[4] Za začátek budeme uvažovat např. stav, kdy zařízení zapojíme do elektřiny. Jinak počáteční stav není ničím výjimečný, nebudeme mu proto věnovat téměř žádnou speciální pozornost.

[5] Pro jednoduchost předpokládáme, že nemohou přijít oba signály současně.

jako počáteční? Jaké výstupy bude elektronika tohoto výtahu ovládat? Rozmyslete, jak bude řídicí jednotka tyto výstupy řídit v závislosti na jejím vnitřním stavu a informacích ze senzorů a tlačítek. (Nezapomeňte na podmínky z Problému 1.)

Úloha 3 [3b]: *Mějme výtah se čtyřmi stanicemi: suterén, přízemí, 1. patro a 2. patro. Rozmyslete, jaká tlačítka tento výtah potřebuje k provozu. Nakreslete MS, který popisuje reakce na jednotlivá tlačítka. Zde můžete předpokládat, že elektronika výtahu je chytré zařízení, které zná tyto povely:*

- *přesun do n-tého patra*
- *otevření dveří v n-tém patře*
- *zavření dveří v n-tém patře*

Elektronika tohoto výtahu automaticky ukládá stisk každého tlačítka (uvnitř i vně kabiny) do fronty. Váš Mealyho stroj umí z této fronty popořadě číst a také umí detekovat, zda je fronta prázdná.

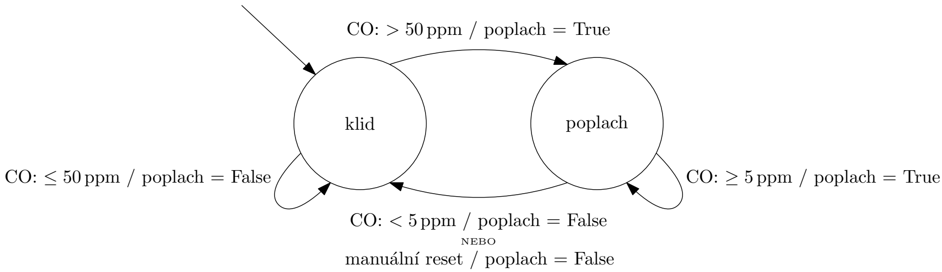
Práce s čísly

Někdy bychom chtěli, aby pravidla pro přechod mezi stavy závisela na nějakých číselných hodnotách. Počet stavů a přechodových pravidel ale může být jen konečný. Musíme proto nějak omezit podmínky, které můžeme v závislosti na dané hodnotě vyhodnocovat. Typické jsou dva přístupy:

- *Konečně mnoho čísel*: Pokud se všechny možné hodnoty dají vyjmenovat, můžeme je použít přímo. Příklady: zbytky po dělení nějakým číslem, zařazené převody v autě nebo na kole, patra výtahu, ...
- *Seskupení hodnot a určení mezí*: Řekneme, že se hodnoty v nějakém rozsahu budou chovat stejně, a takovými rozsahy rozdělíme všechny možné hodnoty. Pro lepší představu přidáváme příklad:

Představme si poplašné čidlo hlídající koncentraci oxidu uhelnatého (viz obrázek 3). Vlastní senzor dává hodnotu (v ppm), hlásič má dva stavy: poplach a klid. Chceme, aby se poplach spustil při koncentraci alespoň 50 ppm a utichl buď v případě manuálního resetu, nebo pokud se koncentrace vrátí pod 5 ppm.

Problém 4: *V tomto problému se na rozdíl od úlohy 3 zaměříme na zpracování signálů ze senzorů a „nízkoúrovňové“ ovládání výtahu. Uvažujme cestu z patra X do patra Y. Navrhněte a popište MS, který bude řídit jednotlivé součásti výtahu. Výtah má motor, kterému můžete v každém kroku zvýšit nebo snížit rychlost o 0,1. Motor má senzor rychlosti otáčení, kde nulová rychlost reprezentuje stojící výtah a kladná stoupající výtah. Rychlost +1 nebo -1 reprezentuje maximální rychlost výtahu. Dále je u motoru senzor absolutní polohy výtahu, který nám vrací*



Obrázek 3: Čidlo CO jako „Mealyho stroj“

číslo patra, ve kterém se kabina nachází. Pokud je výtah na cestě mezi dvěma patry, potom tento senzor vrací desetinné číslo udávající polohu mezi těmito patry. Například hodnota 1,9 říká, že výtah téměř dorazil do druhého patra. Důležitou součástí výtahu jsou dveře, které se nachází v každém patře jedny. Samotná kabina výtahu pro jednoduchost žádné dveře nemá. Každé dveře mají senzor, který nám říká, jak moc jsou tyto dveře otevřené. Hodnota 0 reprezentuje zavřené dveře, hodnota 1 plně otevřené dveře a ostatní hodnoty mezi nulou a jedničkou říkají, jak moc už se tyto dveře stihly otevřít nebo zavřít. Jaké stavy bude mít MS, který řídí tento výtah? Kdy se mezi těmito stavy bude přecházet? Jak bude MS ovládat motor a dveře?

Nedefinované přechody stroje

Mealyho stroj musí mít definováno, do jakého stavu se má přesunout, pro všechny kombinace vstupů a aktuálního stavu. Při návrhu Mealyho stroje na to tedy musíme myslet a žádnou kombinaci nesmíme zanedbat.

V praxi víme, že v některých stavech nemohou některé kombinace vstupních hodnot nastat a tyto situace necháváme nedefinované. Reálně se řídicí elektronika může na takovýto zakázaný vstup zachovat libovolně – říkáme nedefinovaně. Jiná praxe zase definuje speciální chybový stav, do kterého se řídicí elektronika přesune pokaždé, když nastane nějaká nedefinovaná situace.

Úloha 5 [2b]: *Čidlo CO na obrázku 3 není dobře definovaný stroj, protože některé přechody nedefinuje (např. co se stane, pokud je čidlo ve stavu „klid“, koncentrace CO je 42 ppm a někdo mačká reset). Dokreslete do obrázku všechny chybějící přechody mezi stavy.*

Formální definice

Dosud nám stačilo popsat Mealyho stroj obrázkem, ale pokud chceme implementovat či zkoumat Mealyho stroje do hloubky, není obrázkový přístup moc praktický. Proto si MS nadefinujeme jako *šestici*:

- Množina všech stavů, typicky se značí Q.

- Množina všech *vstupních symbolů* Σ. Za vstupní symboly považujeme všechny hodnoty, které se mohou objevit na vstupních vodičích.
- Množina *výstupních symbolů* Λ, tedy všechny hodnoty, které může stroj nastavit na výstupních drátech.
- *Přechodová funkce* δ, která pro každou kombinaci aktuálního stavu a vstupního symbolu vrátí následující stav (tedy stav, do kterého se máme přesunout; může to být i aktuální stav). Formálně zapsáno: $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
- *Výstupní funkce* λ_M, která opět pro každou kombinaci aktuálního stavu a vstupního symbolu určuje, jaký symbol se objeví na výstupu. Formálně: $\lambda_M : Q \times \Sigma \to \Lambda$.
- Počáteční stav $q_0 \in Q$

Stroj M bychom pak zapsali jako $M = (Q, \Sigma, \Lambda, \delta, \lambda_M, q_0)$.

Pro názornost si formálně rozepišme příklad s turniketem: Množina stavů je $Q = \{\text{zablokováno}, \text{odblokováno}\}$, vstupní symboly jsou $\Sigma = \{\text{přiložena správná karta}, \text{turniket se protočil}\}$, výstupní symboly jsou $\Lambda = \{\text{otáčení zamčeno}, \text{otáčení odemčeno}\}$, počáteční stav je $q_0 = \text{zablokováno}$ a přechodovou a výstupní funkci δ a λ_M definuje následující tabulka[6]:

Aktuální stav	Symbol	Nový stav	Výstupní symbol
zablokováno	průchod turniketem	zablokováno	zamčeno
odblokováno	průchod turniketem	zablokováno	zamčeno
zablokováno	přiložení karty	odblokováno	odemčeno
odblokováno	přiložení karty	odblokováno	odemčeno

Úloha 6 [3b]: *Popište MS z Problému 2 formálně.*

Problém 7: *V jednom hotelu mě zaujal komplex tří výtahů. První a druhý výtah jezdil mezi všemi patry hotelu, ale uživatel musel pípnout kartou od svého pokoje, aby ho výtah poslechl. Třetí výtah jezdil pouze mezi přízemím, prvním patrem s restaurací a nejvyšším patrem s bazénem na střeše. V tomto výtahu jste nepotřebovali žádnou kartu. V přízemí bylo bohužel jen jedno tlačítko na přivolání výtahu. Občas se tedy stalo, že návštěvníkovi bez karty přijel výtah, ve kterém bylo nutné pípnout kartou od svého pokoje. Jak byste vymysleli systém tlačítek pro tuto strukturu výtahů? Jak se bude u vaší implementace chovat řídicí elektronika tohoto výtahového komplexu?*

Béďa, Pavel a Matej; `bedrich.said@gmail.com`
odevzdávejte do odevzdávátka

[6] V matematice si budete funkce definovat obecněji jako zobrazení. Tady máme výhodu v tom, že mluvíme pouze o množinách s konečným počtem prvků, které můžeme v tabulce všechny vyjmenovat. Pro obecnou definici funkce ale tabulku použít nemůžeme. Třeba funkci *odmocnina* nad kladnými reálnými čísly tabulkou opravdu nenadefinujeme.

Téma 4 – Derivace a integrály

V minulém ročníku M&M probíhalo tématko Nekonečna (na které navazujeme jen volně a vůbec není potřeba ho znát), kde jsme se zabývali mimo jiné součty nekonečného počtu čísel. V tomto tématku se podíváme na ještě obecnější sčítání, kterým budeme např. schopni sečíst body v útvaru, abychom zjistili jeho obsah, tzv. integrál.

To bude ale až v druhé části tématka. Nejprve se podíváme na jednodušší věc. Bude nás zajímat, jak rychle funkce roste. Ne jak rychle roste, když půjdeme do nekonečna, ale jak rychle roste přímo v nějakém konkrétním bodě. Neboli jak se změní, když změníme její parametr („když se posuneme o kus vedle"). Tuto změnu budeme nazývat derivace (funkce f) (podle parametru x) a značit ji f', pokud je jasné, co je parametrem, nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. (Případně ještě $\dot{f}$, jestliže parametrem je čas, nejčastěji tedy ve fyzice.)

Jak takovou věc zjistit? Podíváme se „o kus vedle" (tj. trochu zvětšíme parametr) a spočítáme rozdíl funkčních hodnot. Čím blíž se ale podíváme, tím menší změnu funkční hodnoty pozorujeme. Proto ještě změnu funkčních hodnot vydělíme změnou parametru, aby nám to vůbec dávalo nějakou informaci. Tedy pro nějaké malé d (čím menší tím lepší, jak je vidět na pravé části obrázku 4), funkci f a bod x máme výraz

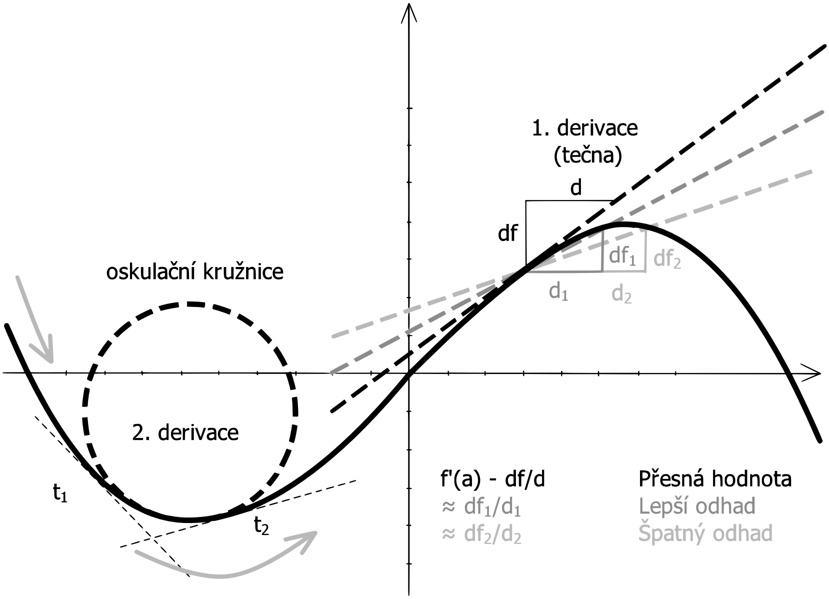
$$\frac{f(x+d)-f(x)}{(x+d)-x} = \frac{f(x+d)-f(x)}{d}, \text{ občas značeno: } \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Ve fyzice nám to stačí, často se k lepšímu výsledku ani neumíme dostat, například rychlost jako derivaci polohy měříme tak, že změříme svoji polohu teď a za chvíli a pak vydělíme změnu polohy časem (rozdílem časů), který mezi měřeními uplynul. Samozřejmě čím kratší doba uplyne, tím přesněji (až na chyby měření) dostaneme aktuální rychlost.

V matematice nám to ale nestačí. Tam chceme mít změny opravdu nekonečně malé, takže derivaci definujeme za pomocí limit (d pošleme k nule). V našem tématku však limity vůbec nebudeme potřebovat, spolehneme se na to, že je už spočítal někdo před námi. A na derivaci se budeme dívat opravdu jen jako na změnu funkce.

Derivace také vyjadřuje směr tečny, tedy směr přímky, která se v daném bodě nejvíce podobá dané funkci. (Druhá derivace, tedy derivace derivace – změna změny, pak v jistém smyslu[7] vyjadřuje převrácenou hodnotu poloměru tzv. oskulační kružnice, tedy kružnice, která je v tomto bodě nejpodobnější dané funkci. Tedy tomu, jak funkce „zatáčí".)

[7] Je ji třeba ještě znormovat vydělením $(\sqrt{1+derivace^2})^3$. Hodnota po vydělení se pak nazývá křivost křivky (funkce) v tomto bodě.



Obrázek 4: Znázornění první a druhé derivace

Díl 1: Kuchařka

Derivování je jedna z prvních věcí, se kterou se v matematice (fyzice, dokonce i informatice) setkáváme na vysoké škole. Jelikož se definuje za pomocí limit, tak většinou působí jako něco záhadného, těžkého, nepřístupného, hlavně pro čerstvě nastoupeného vysokoškoláka. To však nemůže být dále od pravdy.

Zderivovat většinu funkcí, se kterými se setkáme, je snadné. Stačí se bez přemýšlení držet jednoduchých cca pěti vzorců pro derivace a také mít u sebe tahák, nebo vědět, jak zderivovat základních nejvýše deset funkcí. Na rozdíl od většiny matematických úloh, kde je třeba se zamýšlet přímo nad konkrétní úlohou, má derivování výhodu, že na něj existuje obecný postup, a zvládla by ho tak i „cvičená opice“ nebo počítač.

V následujících pěti odstavcích se snažím vysvětlit, jaká je intuice za těmito vzorci. Není potřeba pro další počítání, můžete přeskočit rovnou na seznam vzorců.

Derivace součtu: Asi vás nepřekvapí, že pokud sečteme funkce f a g, tak se sečtou i jejich změny. Můžeme si to představit tak, že máme dvě nádoby, do kterých přitéká voda, takže se objem vody mění s přitékající vodou. Když tyto nádoby spojíme, objem vody se viditelně mění součtem přítoků. Tak dostáváme $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$. Totéž platí pro rozdíl.

Derivace násobku: Stejně tak pokud funkci naškálujeme nějakým *konstantním* koeficientem, tak se stejně naškáluje i její změna. Tedy pokud je a reálné číslo a f funkce, pak $(a \cdot f)' = a \cdot f'$.

Derivace součinu: Můžeme si změnu derivace součinu $f \cdot g$ představit tak, že ji složíme ze změny způsobené f, tedy kde uvažujeme g konstantní, ze změny způsobené g, tj. f konstantní, a nakonec ze změny způsobené tím, že se mění zároveň. O poslední lze dokázat, že derivaci neovlivňuje. Tedy $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

Derivace složené funkce: Pokud máme funkci $f(g(x))$ a chceme ji zderivovat, tak ve výsledku určitě bude derivace f v bodě $g(x)$, protože i když $g(x)$ není x, stejně se mění. Musíme ale vzít v potaz, že $g(x)$ se mění jinak než x. Víme ale jak, vždyť máme derivaci. Tedy $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Někdy se tento vzorec nazývá řetízkové pravidlo, většinou se pak zapisuje jako $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$, což dává větší vhled do toho, proč vzorec vypadá tak, jak vypadá. Navíc se v tomto tvaru dá snadno rozepsat na derivaci funkce složené z funkce a funkce složené z funkce a funkce složené …

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}f_1}\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2}\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}f_3}\cdots\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}.$$

Toho se hojně využívá v informatice ve strojovém učení (speciálně v neuronových sítí), kde potřebujeme zjistit závislost výsledku na parametrech, na které jsme aplikovali mnoho funkcí, než jsme dospěli k výsledku.

Derivace inverzní funkce: Všimněte si, že když si nakreslíme graf funkce a zobrazíme ho podle osy $x = y$ (tj. prohodíme osy), tak dostaneme graf inverzní funkce a zároveň se nám prohodí přírůstky v jednotlivých osách, čímž dostaneme převrácený zlomek. Tedy derivace inverzní funkce k funkci f, značíme f^{-1}, v bodě x je $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Seznam vzorců pro derivování: Pro zopakování (berte to jako popis postupu derivování: „dostal jsem součet, použiji vzorec pro součet; dostanu součin, použiji vzorec pro součin“, atd.)

- $(a \cdot f)' = a \cdot f'$;
- $(f + g)' = f' + g'$, $(f - g)' = f' - g'$;
- $(f \cdot g) = f' \cdot g + g' \cdot f$;
- $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$;
- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Dále je tedy třeba znát speciální případy – derivace konkrétních funkcí. Určitě je třeba znát derivaci konstanty a derivaci x^r. Zbytek se člověk naučí tím, že je používá, nebo často má možnost podívat se do tabulek.

Derivace konstanty: Pokud funkce nezávisí na parametru, se změnou parametru se nijak nezmění, tedy derivace (změna funkční hodnoty vydělená „něčím“) je nulová, tj. $c' = 0$ pro všechna c reálná.

Úloha 1 [1b]: *Ukažte, že $(a \cdot f)' = a \cdot f'$ (derivace násobku) za použití vztahů $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (derivace součinu) a $c' = 0$ (derivace konstanty), kde f a g jsou funkce a kde a, c jsou konstanty.*

Pokud derivujeme funkci více proměnných, tak většinou tzv. parciální derivací. To znamená, že považujeme všechny proměnné kromě té, podle které derivujeme, za konstanty, tedy na ně používáme derivaci násobku a derivaci konstanty.

Derivace x^r: Funkce $f(x) = x$ má očividně derivaci 1, jelikož když libovolně zvětšíme x, tak se stejně zvětší i $f(x)$. Pokud je r přirozené, pak z vzorce pro derivaci součinu dostaneme $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$. Obdobně i pro reálné nenulové r platí $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$.

Úloha 2 [1b]: *Ukažte, že pro přirozené n je $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.*

Problém 3: *Derivaci podílu funkcí f a g lze také vyjádřit vzorcem, a to*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Odvoďte ho (například pomocí derivace součinu, derivace složené funkce a derivace x^r, ale fantazii se meze nekladou).

Další funkce:

$$\ln' x = \log'_e x = \frac{1}{x}, \qquad \exp' x = (e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = a^x \ln a,$$

$$\sin' x = \cos x, \qquad \cos' x = -\sin x, \qquad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\mathrm{cotan}' x = \frac{-1}{\sin^2 x}, \qquad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \mathrm{arccotan}' x = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

Teď již máme vše, co potřebujeme k derivování, snad jen ještě zmínit, že funkce derivaci nemusí mít, nejčastěji v jednom bodě. Především jsou to body, kde funkce není definovaná, má nějaký skok (například funkce signum[8] v 0), míří kolmo vzhůru (např. $\sqrt[3]{x}$ v 0), nebo funkce, které mají roh (např. $|x|$ v 0).

Vzorový příklad: Zderivujme (podle x)

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin x + 5x^3 - \arctan x + e^{x+2}}{x^2}.$$

Postupujeme opačným směrem než jakým bychom počítali hodnotu, kdybychom dostali konkrétní x. Poslední operací, kterou bychom v takovém případě udělali, je dělení. Tedy podle derivace podílu:

$$\left(\frac{x \cdot \sin x + 5x^3 - \arctan x + e^{x+2}}{x^2}\right)' =$$

$$\frac{(x \cdot \sin x + 5x^3 - \arctan x + e^{x+2})' \cdot x^2 - (x \cdot \sin x + 5x^3 - \arctan x + e^{x+2}) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}.$$

Derivace x^2 je jednoduchá, $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$. Zbývá tedy derivace

$$x \cdot \sin x + 5x^3 - \arctan x + e^{x+2}$$

To je především součet (poslední operace by byla, že jednotlivé členy posčítáme), tedy podle derivace součtu

$$(x \cdot \sin x + 5x^3 - \arctan x + e^{x+2})' = (x \cdot \sin x)' + (5x^3)' - \arctan' x + (e^{x+2})'.$$

$x \cdot \sin x$ je součin, tedy podle derivace součinu (a tabulkových derivací)

$$(x \cdot \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot \sin' x = \sin x + x \cos x.$$

$5x^3$ je pětinásobek x^3, tedy $(5x^3)' = 5(x^3)'$ a podle známé derivace $5(x^3)' = 15x^2$. Derivace $\arctan x$ je většinou tabulková (hlavně proto, že je pak potřeba k integrálům), ale můžeme ji spočítat[9] z derivace inverzní funkce a tabulkové derivace $\tan x$:

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Poslední funkce k derivaci je e^{x+2}. Tu přímo neznáme, ale známe derivaci e^x, tedy použijeme derivaci složené funkce (tzv. vnější funkce je e^x a vnitřní $y = x + 2$), tedy $(e^{x+2})' = (e^y)' \cdot (x + 2)' = e^y \cdot 1 = e^{x+2}$ (kde e^y derivujeme podle y).

[8] signum, nebo také znamínko je funkce, která dává -1 pro záporná čísla, nulu v nule a 1 pro kladná čísla.

[9] Ještě za pomoci vzorce $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Teď už stačí jen dát vše dohromady:

$$f'(x) = \frac{(\sin x + x\cos x + 15x^2 - \frac{1}{1+x^2} + e^{x+2}) \cdot x^2}{x^4} -$$
$$- \frac{(x \cdot \sin x + 5x^3 - \arctan x + e^{x+2}) \cdot 2x}{x^4}.$$

Úloha 4 [7b]: *Zderivujte (podle x)*

$$5x^4 - 3x^2 + \pi, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x, \qquad \sqrt{x}, \qquad e^{-3x},$$
$$\frac{3x^3 + 42x}{7x^2 + 2x}, \qquad (\sin(5x))'' = ((\sin(5x))')', \qquad \ln(\tan x).$$

Nyní byste měli být schopni spočítat skoro libovolnou derivaci, co potkáte. Tudíž jsme se dostali na konec tohoto dílu. Rádi bychom dodali ještě dvě (nebo možná tři) věci. První z nich je ještě jeden problém, respektive návrh na článek, ta druhá je formální definice derivace za pomocí limity spolu s problémem, na který není třeba znát limity.[10] V příštím díle si pak ukážeme, co dokážeme o funkci říct z jejích derivací (například kde má maximum, kde roste, jak moc roste).

Problém 5: *Derivace je „okamžitá“ změna funkce. S takovými změnami se často setkáváme ve fyzice. Co jiného je rychlost, než změna polohy. Najděte nějaké použití derivace (ve fyzice i kdekoliv jinde).*

Můžete se inspirovat například nalezením zrychlení ze vzorce pro volný pád, nebo svislý vrh. Nebo můžete zkusit zjistit rychlost, zrychlení a působící sílu pružiny, jejíž poloha v čase t je $5\cos(t \cdot \sqrt{k/m} + \pi/2)$.

Definice: Jak tu již zaznělo, derivace je změna funkční hodnoty při „nekonečně“ malé změně parametru. To zní úplně jako limita. Derivace funkce f v bodě x_0 je tedy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Problém 6: *Pokud máte rádi teorii, můžete zkusit pomocí této definice dokázat vzorce výše. Derivace násobku a derivace součtu jsou velmi jednoduché, ale už za to jistě dostanete body.*

Pro součin je třeba přičíst k čitateli $0 = f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)$.

Jidáš; jonas.havelka@volny.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

[10] Jen to, že zjednodušeně $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$ a $\lim(a \cdot f(x)) = a \cdot \lim f(x)$.

Konference Vávrovka 2022

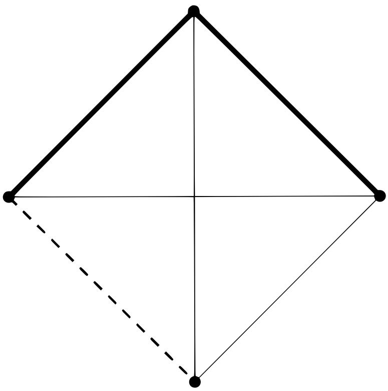
Ramseyovy hry 11b

Jan Tregler

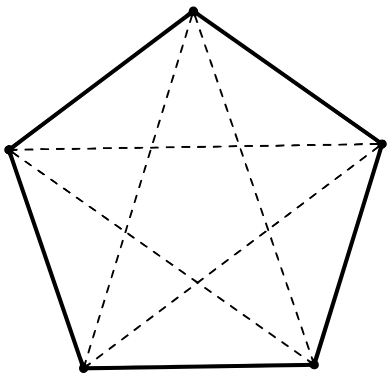
Co jsou Ramseyovy hry? Jedná se o matematické hry, ve kterých se obarvují grafy. V tomto článku se soustředím na nejjednodušší možnou variantu, článek tedy pojednává o výherní strategii při vybarvování úplných grafů (úplné grafy[11] značíme K_x, kde x je počet vrcholů) ve hře pro dva hráče, kteří se navzájem střídají po jednom tahu a každý používá jinou barvu. V této variantě je vaším cílem pomocí obarvování hran úplného grafu vytvořit jednobarevný podgraf. Tento podgraf bude úplný graf o třech vrcholech, jednoduše řečeno trojúhelník. Této variantě říkáme *ORIGINAL*.

V obrázcích značí tenká čára ještě nevybarvenou hranu, tučná čára barvu prvního hráče a přerušovaná čára barvu druhého hráče.

Prvním krokem je najít takový podgraf, ve kterém má smysl přemýšlet nad výherní strategií. Je jasné, že v grafu K_3 není možné vyhrát, protože první hráč vybarví pouze dvě hrany a druhý jednu. V grafu K_4 již je možné vyhrát, ale pouze pokud budou oba hráči spolupracovat, tedy jeden hráč druhému dovolí podgraf K_3 vybarvit.



Obrázek 5: Hra na K_4



Obrázek 6: Remíza na K_5

Pokud nechce druhý hráč prohrát, musí v tuto chvíli (viz obrázek 5) vybarvit právě jednu hranu, pomocí které by mohl první hráč vyhrát – vybarvit K_3.

To nás přivádí ke grafu K_5. Remíza zde možná je, avšak je nutná? Graf K_5 má 10 hran, to znamená, že každý hráč má maximálně 5 tahů. Remíza tedy vznikne, když oba hráči vytvoří cyklus o pěti hranách. Konec hry by pak vypadal jako na obrázku 6.

[11] Úplné grafy jsou grafy, které mají hranu mezi každou dvojicí vrcholů

Prozradím, že remíza nutná není a že první hráč má v tomto grafu, tím pádem i v každém úplném grafu o alespoň 5 vrcholech, výherní strategii.
Pro dokázání tohoto tvrzení si nyní zavedeme několik pojmů:

Hrozba: Hrozba je hodnota jakékoli neobarvené hrany. Za předpokladu, že obarvíme tuto hranu, nám hrozba říká, kolik existuje neobarvených hran, jejichž obarvením v příštím tahu vyhrajeme.

Kontaktní tah: Kontaktní tah je takový tah, při kterém vybarvíme hranu, která má alespoň jeden společný vrchol s vybarvenou hranou protihráče.

Z definice hrozby vyplývá, že pokud následujícím tahem nemůžeme vyhrát a soupeř zahrál:

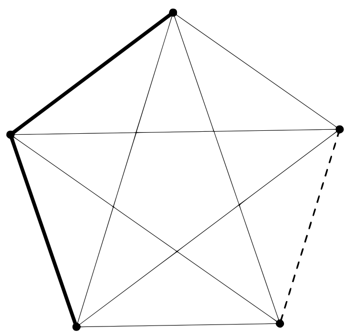
Hrozbu 1: vynuceně musíme blokovat hranu, po jejímž vybarvení by soupeř příštím tahem vyhrál.

Hrozbu 2 a více: není možné vyhrát, jelikož nemůžeme jedním tahem obarvit všechny hrany, jejichž obarvením soupeř v příštím tahu vyhraje.

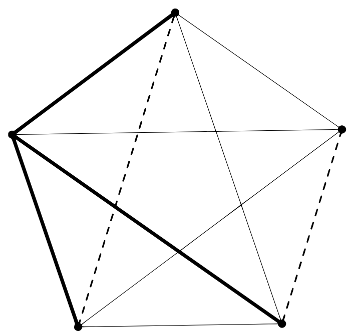
Nyní si můžeme ukázat výherní strategii. Výhry se tedy první hráč dopracuje takto:

První tah není důležitý, díky symetrii úplného grafu ho můžeme zahrát na jakoukoliv hranu. Druhý tah, tedy tah protihráče, může být buď kontaktní, nebo nekontaktní. Prvně se podíváme na nekontaktní tah.

Druhý tah nekontaktní (viz obrázek 7): Třetí tah musí být také nekontaktní. První hráč musí zahrát hrozbu jedna a tím nutit druhého hráče zahrát jediný možný tah – obarvit hranu mezi jedinými obarvenými hranami prvního hráče. Jelikož druhý i třetí tah byl nekontaktní, čtvrtý, nyní vynucený, tah nemůže mít žádnou hrozbu (hrozba 0), tím pádem může první hráč zahrát v pátém tahu hrozbu 2 a v sedmém tahu vyhrát.



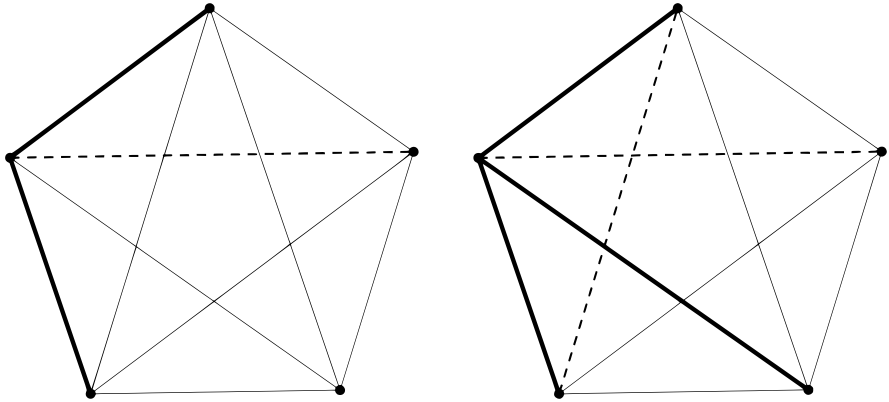
(a) Třetí tah



(b) Pátý tah

Obrázek 7: Hra poté, co hráč 2 zahraje bezkontaktně

Druhý tah kontaktní (viz obrázek 8): Třetí tah bude také kontaktní. Myšlenka je úplně stejná jako u druhého tahu nekontaktního – všechny tři obarvené hrany vychází z jednoho vrcholu, tudíž vynucený čtvrtý tah, obarvení hrany mezi dvěma jinými vrcholy, nebude mít žádnou hrozbu. V pátém tahu zahraje první hráč hrozbu 2 a v sedmém tahu hra opět končí vítězstvím prvního hráče.



(a) Třetí tah **(b)** Pátý tah

Obrázek 8: Hra poté, co hráč 2 zahraje kontaktně

Tento článek vznikl díky jarnímu soustředění M&M, kde jsem společně s Julií Krejčí a Martinem Fofem pracoval na tomto skvělém tématu v rámci konfery, kterou připravil Jan Piroutek.

Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`