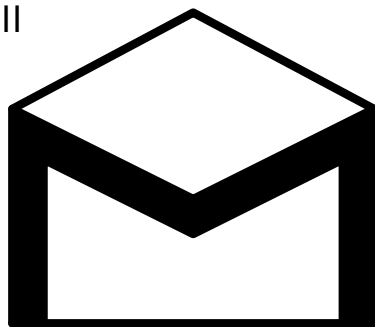
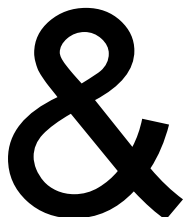
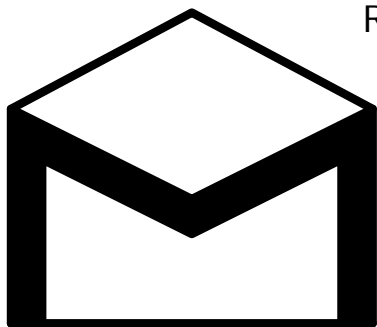


STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVIII

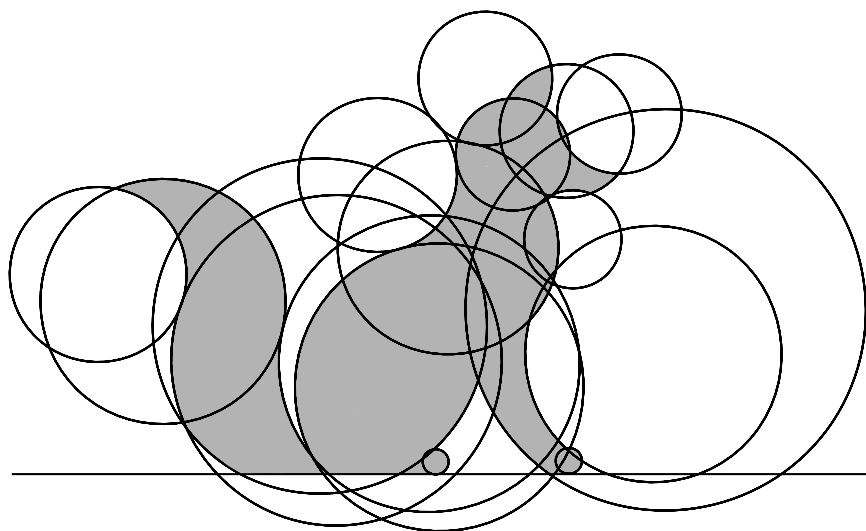
Číslo 6



MATEMATIKA

FYZIKA

INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milý řešiteli

ať čteš časopis na slunečné pláži, v horském průsmyku, v cizím městě či jen doma ve své hamace, doufáme, že si jistě zasloužené prázdniny užiješ, něco poznáš, něco nového se dozvíš či naučíš, stejně jako při řešení semináře M&M. Tento rok byl dozajista plodný a to jak počtem odevzdaných úloh, tak i počtem došlých článků.

S některými z vás jsme se potkali na podzimním a jarním soustředění. Doufáme, že tě bavila, a pokud jsi na nich nebyl, že se na nich s tebou v budoucnu potkáme.

Náš časopis je o poznávání nového a v tom si nejlépe vedli Dr.^{MM} Daniel Skýpala, Doc.^{MM} Martin Fof, Dr.^{MM} Zdeněk Mareš a Dr.^{MM} Jiří Polách, kteří obsadili první čtyři místa. V soutěži o nejlepší článek vyhrál článek k tématu Oware, Dr.^{MM} Daniel Skýpala – Popis vítězného agenta, který tímto získává slibovaný dort.

Gratulujeme a všem ostatním děkujeme za účast, bez ní by časopis nemohl fungovat. Pokud znáš někoho, komu by se časopis mohl líbit, zkus ho také k řešení dovést. Zamyslete se spolu nad nějakým problémem nového ročníku, či ho jen odkaž na naše webové stránky.

Jelikož časopis děláme pro vás, řešitele, potřebujeme vědět, jak se ti časopis líbil, co bychom mohli zlepšit a co máme v příštích ročnících rozhodně zopakovat. Proto budeme rádi, když nám vyplníš anketu: <https://forms.office.com/r/fYUJdiQRy9>

A nakonec nezbyvá než se s tebou rozloučit. Doufáme, že se setkáme zase po prázdninách.

Tví organizátoři



Obrázek 1: Anкета

Obsah

Téma 2 – Oware.....	3
Téma 3 – Lingvistika	8
Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře.....	18
Téma 5 – Nekonečna	28
Téma 6 – Růst monokrystalů.....	43
Téma 7 – Zmenšené modely	53

Řešení témat

Téma 2 – Oware

	Daniel	Václav	Adam	Jiří	Tomáš	Martin	Pořadí	Suma
Dr. ^{MM} Daniel Skýpala	X	14:6	15:5	20:0	20:0	20:0	1.	89
Dr. ^{MM} Václav Tichý	6:14	X	11:9	12:8	12:8	20:0	2.	61
Bc. ^{MM} Adam Kolník	5:15	9:11	X	10:10	16:4	20:0	3.	60
Dr. ^{MM} Jiří Kvapil	0:20	8:12	10:10	X	18:2	20:0	4.	56
Dr. ^{MM} Tomáš Flídr	0:20	8:12	4:16	2:18	X	20:0	5.	34
Dr. ^{MM} Martin Boček	0:20	0:20	0:20	0:20	0:20	X	6.	0

Tabulka 1: Výsledky turnaje

Milí řešitelé,

rok soutěžení v Oware máme za sebou a je na čase prozradit, co za triky prováděli králové, proti kterým jste hráli. Budu dosti stručný – zdrojové kódy najdete na GitHubu¹ a hlubší vysvětlení aplikovaných myšlenek bylo v předchozích dílech.

Agamemnon byl první z vašich záhadných protivníků a používal základní MiniMax algoritmus s hloubkou prohledávání 5, což se ještě spolehlivě vešlo do časového limitu. Jeho moc však byla značně omezena použitím vlastního skóre jakožto heuristiky – Agamemnon se nezdráhal nechat vás ukořistit semínka, pokud to znamenalo, že jich několik sklídí také. Jako mnohem vážnější problém se ukázala skutečnost, že vlastní skóre se typicky mění jenom během našeho tahu – sudé hloubky prohledávání tudíž nenesly žádnou výhodu a hloubka 7 se příliš často nestíhala v časovém limitu.

Bellerophon se snažil poučit z chyb svého předchůdce, a tudíž dostal mnohem pokročilejší heuristiku. Ohodnocení pozice bylo spočítáno z aktuálního skóre tak, že byla určena pravděpodobnost výhry, kdyby byly zbývající kameny náhodně rozděleny mezi oba hráče. Remízy se počítaly za půl bodu. Tedy třeba při skóre 21:23 byla šance na výhru $\frac{1}{24}$ a šance na remízu $\frac{1}{2}$, a pozice tudíž dostala ohodnocení $\frac{3}{16}$. Tato ohodnocení byla spočítána samostatným programem předem a Bellerophon pak už používal jenom předpočítanou tabulku s 625 hodnotami. Tuto ne příliš sofistikovanou heuristiku používali králové od Bellerophona až po Glauca. Všimněte si, že tato „pravděpodobnost výhry“ je číslo od 0 do 1 místo obvyklejšího mínus a plus nekonečna. Trochu to komplikovalo další vylepšení.

Cadmus představoval první pokus o alespoň trochu rozumnou umělou inteligenci. Od Bellerophona se lišil jenom přidáním (zcela neoptimalizovaného) iterativního prohlubování, které ale výrazně zlepšilo jeho schopnosti. Diomedes následně přidal alfa-beta ořezávání a trochu optimalizoval iterativní prohlubování – nově vždy začínal na hloubce 6 (což se s alfa-betou vždy stíhalo) nebo na hloubce

¹<https://github.com/JoHavel/Turnaj-v-Oware/tree/main/oware/agents>

o 3 nižší, než co nestihl dopočítat v předchozím tahu. Tento drobný kousek informace přenášený mezi tahy byl velice užitečný ke konci hry, kdy už bylo možné prohledávat i do hloubky více než dvacetí tahů. V zájmu ušetření si psaní kódu navíc králové počínají Diomedem používají NegaMax, ač tedy místo prosté negace musí počítat doplněk pravděpodobnosti.

Nebudu vám lhát, naprogramovat Erechthea byl nelehký úkol. V zájmu zamezení tomu, aby každá hra probíhala prakticky stejně, bylo přidáno zkoušení možných tahů v náhodně vybraném z 720 možných pořadí. Trochu překvapivě to vedlo i k zlepšení výsledků. Ta složitá změna ale byla implementace memoizace, kdy pro každý stav hry bylo ukládáno heuristické ohodnocení pro každou hloubku a seznam bezprostředně následujících stavů hry. Jelikož tato data byla zachována napříč tahy, tak jsem navíc začal využívat inicializace agenta k tomu, abych ještě před zahájením hry mohl vteřinu počítat.

Moje implementace ukládání ohodnocení spoléhala na jednu nuanci fungování Pythonu. Ohodnocení byla ukládána do `list()`, který je možné měnit na místě. Ukládání dat tudíž mohlo fungovat pomocí standardního dekorátoru `@lru_cache`, který sice pro daný stav pokaždé vrací ty samé informace, ale v nich obsažený seznam ohodnocení se mohl v čase vyvíjet dle potřeby.

Ukládání bezprostředně následujících pozic pak bylo významné zrychlení, kdy už nebylo potřeba počítat výsledek téhož tahu vícekrát. Vzhledem k potřebě používat v cache „zmražený“ stav hry jsem se tím vyhnul spoustě rozmrazování a mražení. Kolem tohoto ukládání pak byli stavění i poslední dva králové.

Foroneus začal využívat toho, že nejen ohodnocení, ale i následující pozice jsou uloženy v `list()`. Při každém prohledávání daného stavu pak byl nejvýhodnější nalezený tah přesunut na začátek seznamu. Tím bylo alespoň částečně implementováno řazení tahů zmiňované ve čtvrtém čísle a stoupla efektivita alfa-beta ořezávání.

Před programováním Glauca jsem si všiml, že pokročilejší algoritmy králů mají problém konkurovat složitějším heuristikám, které někteří z vás používají. Byl jsem si dost jist, že je někde něco špatně a při bližším prozkoumání jsem si všiml, že Erechtheovi i Foroneovi během inicializace podezřele často dojde čas při počítání výsledku tahu `Game`. Tato primitivní forma statistického profilování kódu byla následována skutečným profilováním a zjištěním, že implementace `Game` je zbytečně pomalá. Glaucus proto používá vlastní zjednodušenou implementaci hry, která pracuje rovnou se zmraženými stavy.

Každopádně vám všem patří díky, že jsem díky vám měl motivaci oprášit svoje znalosti umělé inteligence. Vaše algoritmy byly často velice zajímavé a doufám, že jste si soutěžení užili alespoň tolik, co já.

Matej; lieskovsky.matej+mam@gmail.com

PS: Tohle tématko vzniklo tak, že jsem přemýšlel o tom, jaké typy deskových her vlastně existují. Mankalové hry jsem ještě před cca rokem a půl vůbec neznal a velice mě zaujaly. Když jsem pak objevil informaci, že Oware je (prý) vyřešené,

tak jsem usoudil, že by tato hra mohla mít obtížnost vhodnou pro tématko. Pokud tedy chcete o Oware zjistit něco více, tak možná se v budoucnosti objeví další informace na <https://48stones.com/>.

Popis vítězného agenta

15b

Dr.^{MM} Daniel Skýpala

Samotný agent je postavený na prohledávání stromu všech pozic, a proto využívá koncepty popsané ve třetím čísle:

- NegaMax
- Iterativní prohlubování
- Alfa-beta ořezávání

A co dalšího můj agent obsahoval?

Heuristika

Nejdříve v rychlosti nahlédneme do tajů heuristiky. Určitě budeme chtít, aby veškerá ohodnocení splňovala pravidlo NegaMaxu, totiž že ohodnocení obou hráčů se sečte na nulu.

Potom si stanovme ohodnocení pro pár základních stavů:

- Výhra $+\infty$ (aktuální hráč má alespoň 25 bodů)
- Remíza 0 (oba hráči mají 24 bodů)
- Prohra $-\infty$ (protivník má alespoň 25 bodů)

Pro ostatní pozice bude skóre vyhodnocováno z částí:

- Ze skóre aktuálního hráče s_1 a protihráče s_2 :
 - Rozdíl skóre: $r_s = s_1 - s_2$
 - Kvadratický rozdíl skóre: $r'_s = s_1^2 - s_2^2$
(Ke konci hry je výrazně horší vzdávat se kamenů, protože stačí jen malá chyba a hra je dohraná.)
- Z pozičních výhod:
 - Rozdíl největšího dolíku $p_m = \max(\text{pits}_1) - \max(\text{pits}_2)$
(Za tímhle stojí trochu experimentace.)
 - Počet možných tahů: $p_t = \sum_{p \in \text{pits}_1} (p > 0) - \sum_{p \in \text{pits}_2} (p > 0)$
(Víc tahů znamená víc možností, tedy jedna z nich by mohla být lepší.)

- Ohrožené kameny p'_t : Pro každý náš dolík se podíváme, kde by skončil poslední kámen, pokud bychom se rozhodli jej vybrat. Pokud je to na naší půlce, přiřadíme p'_t hodnotu -1 , pokud na soupeřově, ale nic mu nevezmeme, přiřadíme hodnotu 0 , jinak přiřadíme to, co bychom vzali.

Celkové ohodnocení pozice se počítá jako: $o = 3r_s + 2r'_s + 0.1p_m + 0.5p_t + p'_t$. (Konstanty jsem ladil experimentálně.)

Quiescence search

Dalším z triků je tzv. Quiescence search, který je velmi populární u šachových algoritmů. Myšlenka je jednoduchá – pokud při prohledávání vezmeme nějaké kameny těsně před tím, než dojdeme do hloubky, kdy bychom měli pozici vyhodnotit heuristikou, tak místo okamžitého použití heuristiky aktuální pozici prohledáme do trochu větší hloubky. Tím se snažíme zabránit tomu, abychom „nevyměnili královnu za krále“, tedy pokud vezmeme nějaké množství kamenů, zjistíme, jestli jsme tím nedali soupeři více.

Transpoziční tabulky

V průběhu naší hry se může stát, že narazíme na pozice, které jsme již prohledali. (Třeba jinou posloupností tahů, nebo tím, že jsme ji vyhodnotili při počítání předchozího tahu.) Pokud si výsledky prohledání těchto pozic budeme ukládat, jsme schopni ušetřit nějaký čas. Půjdeme na to tak, že si vždy uložíme výsledek a hloubku, do které jsme danou pozici prohledali a když ji chceme prohledat znovu se stejnou nebo menší hloubkou, tak jen vrátíme výsledek. V opačném případě pozici znovu prohledáme, a výsledek s hloubkou aktualizujeme.

Bestfirst

Dalším trikem je řadit prohledání dalších tahů podle jejich ohodnocení. Všimneme si, že když najdeme dostatečně velký vrchol, tak alfa-beta prořezávání vše zbylé ořeže, čímž ušetříme drahocenný čas.

GameLight

Kromě toho jsem i implementoval vlastní `gameobject`, jak bylo doporučeno ve pátém čísle.

Předvýpočty

Kniha otvírání

První, co člověka napadne, je spočítat si nejlepší tahy pro prvních x pozic, do kterých se lze dostat. Když ale spočítáme tah pro nějakou pozici, tak ho vždy budeme hrát a nepotřebujeme počítat tahy pro pozice, do kterých se nedostaneme. Tímto dosáhneme toho, že se strom rozdělí v každé druhé hloubce (tedy té, kde hraje soupeř), což přináší masivní časové i paměťové zlepšení. Dále jsem pro pozice

dále od začátku postupně snižoval hloubku prohledávání, aby výpočty dobehly v rozumném čase.

I proto jsem si u každé pozice ukládal i reálnou hloubku, ze které byl tah spočítán. To zabraňuje tomu, že agent použije tah z knihy otvírání, i když je schopen spočítat tah pro větší hloubku.

Kniha koncovek

Dále jsem spočítal tahy pro koncovky s nejvíce 8 kameny. Zde jsem si zavedl jiné ohodnocení pro konečné pozice (výhra/prohra/remíza). Rozhodl jsem se, že budu preferovat tahy, ve kterých vyhraju dříve / prohraju později, abych využíval limit 180 tahů ke svému prospěchu. Skóre pro výhru tedy bude $t \times c$, kde t je počet tahů, za které hra skončí a c konstanta, která je vždy větší než nejlepší heuristické ohodnocení, které lze dosáhnout při nedohrané hře. Nesmíme také zapomenout změnit hodnocení dohraných her u standardního prohledávání.

Vzhledem k tomu, že koncovky jde prohledat do hloubky 180, tak je budeme používat vždy.

Komprese pozic

Aby se nám všechny pozice vešly do souboru, musíme je nějak ukládat. Nabízí se vzít skóre obou hráčů, za to přidat dolíky a to dát do tuplu. Tím se dá indexovat slovník s nejlepšími tahy.² Všimneme si ale, že každé číslo zabírá 2 až 3 znaky (pozor na čárku). Vzhledem k tomu, že tyto čísla jsou nejvýše padesát, jsme schopni je překódovat na znaky a tím dostaneme 1 znak na číslo, což nám dává výrazné zlepšení.

Existovaly by i lepší způsoby – např. by se dalo číslo uložit v 51-soustavě a potom převést na řetězec (to je jen další soustava). Nicméně potom už jsem tahy nestíhal spočítat a ani paměťové zlepšení by nebylo tak výrazné.

Zkoušení jen do konce

Posledním trikem na seznamu je zkusit vzít konec hry ještě o krok dál. Po celou hru si budeme udržovat zbývající počet tahů, a jakmile dojdeme při iterativním prohlubování do této hloubky, víme že už nemá smysl prohledávat hlouběji. Proto provedeme místo dalších prohledávání už jen jedno prohledávání, kde nebudeme používat koncovky a koncové vrcholy budeme vyhodnocovat jako `tournament.py` – vyšší skóre vyhrává.

²Pozn. red.: Slovník je uložen přímo jako kód, proto se dále zaobíráme délkou „textového vyjádření“. Možná ještě lepší by bylo použít nějakou knihovnu na ukládání objektů v Pythonu, například `pickle`.



Téma 3 – Lingvistika

Řešení 2. dílu

V druhém čísle jsme si lehce připomněli chetitštinu z prvního čísla a věnovali jsme se různým typům zápisu jazyka.

Úloha 1

Zadání:

Na obrázku 2 se nacházejí česká slova zapsaná v chetitštině s pomocí klínového písma. Přeložte do chetitštiny tato slova a запиšte je s pomocí klínového písma:

1. pojd
2. zub
3. modrá
4. jsou

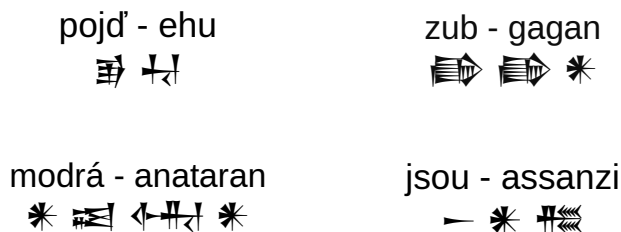
V minulém díle se občas objevily zdvojené souhlásky ve stejné slabice jako 11, tak ty se počítají jako jedna souhláska 1. Podobně se vyskytly různé samohlásky s přehláskou apod. Ty také zjednodušíme a přehlásky nebudeme vůbec uvažovat, tedy a budeme považovat za to samé jako ā.

žije (on)	otec	matka
dorazil (on)	posel	cizinci
jelen	králi	hranice
žhavý	dům	

Obrázek 2: Úloha 1

Řešení od Mgr.^{MM} Pavly Šimové:

Když si slova z obrázku přeložím do chetitštiny a rozdělím je na slabiky, mohu tyto slabiky snadno přiřadit jednotlivým znakům. Potom si slova přeložím a rozdělím je na slabiky. Jelikož už známe symbolu pro různé slabiky, tak stačí jen přiřadit.



Obrázek 3: Řešení k 1. úloze

Problematický byl pouze zub (gagan), kde v přeložených slovech se vyskytovala jak slabika ga, tak slabika an, ale žádná, která by umožňovala přesně popsat obě slabiky slova. Vyřešila jsem to neumělým zápisem pomocí tří slabik, ve kterém je však dvakrát za sebou samohláska a

Jelikož jsme už v prvním díle trochu zjednodušili chetitštinu, tak se vyskytly některé problémy, na které se dalo přistoupit různě, např. zmíněná zdvojená samohláska *a*. Toto řešení nám přišlo zajímavé, protože si autorka pomohla, aniž by nějak podstatně změnila znění slova, maximálně prodloužila znění jedné hlásky. Úplně správné řešení kvůli našemu zjednodušení neexistuje, ale nejvíce se mu blíží právě toto.

Úloha 2

Zadání:

Na obrázku 4 naleznete následující věty zapsané v mykénském písmu.

1. Unikáme pořá(d) na zápa(d).
2. Doma je zakázáno utíkat.
3. Mykény okupují (K)rétu.
4. Domů je náro(č)ná (t)rasa.
5. Je nu(t)né se (v)rátí(t).

Pokuste se ke každé větě přiřadit její zápis. Zkuste svoji volbu alespoň stručně zdůvodnit. Zapisovat češtinu v lineárním písmě B úplně nejde. Věty uvažujte bez diakritiky a pokud se ve větách vyskytuje písmeno v kulatých závorkách, tak není vůbec zapsáno (nepatří do žádné slabiky).



የጌ ጸ ቶፀቶሠፍ ቶፈፀ

ጸ ቶሆ ፍ ሌፈ

የዞ ጸ ሃተሃ ሌሃ

ሃፍሃ ለጵፍፍ ሃፍ

ቶሃፀሃ ልፌ ሃ ቶቶ

Obrázek 4: Úloha 2

Řešení od Mgr.^{MM} Jana Škopka:

Slovo „je“ se jako jediné opakuje ve třech latinkou zapsaných větách. Pokusíme se tedy najít takový symbol, který se jako samostatný vyskytuje ve třech větách. Tím je symbol, který mě osobně připomíná „bezhlavého stickmana“ ve větách 1, 2 a 3. Před tímto symbolem jsou ve větách 1 a 3 dva symboly, z nichž první je vždy stejný. Tyto dvě věty tedy budou latinkou zapsanými větami 2 a 4. Vylučovací metodou tedy zjišťujeme, že 2. věta v lineárním písmu je 5. věta latinkou. Předposledním symbolem v 2. a 3. větě lineárním písmem je „L s kroužkem“. Díky tomu, že máme druhou větu přiřazenou, tak víme, že tento symbol reprezentuje slabiku „ra“, která se na tomto místě vyskytuje i ve 4. větě latinkou. Díky tomu k sobě přiřadíme 4. větu latinkou a 3. větu lineárním písmem a vylučovací metodou také 2. větu latinkou a 1. lineárním písmem. Zbývají nám tak už jen dvě poslední věty. Předposlední se skládá jen ze tří skupin slabik (tedy 3 slov) a bude tak odpovídat větě 3 latinkou a zbývá nám tak k sobě věta 5 lineárním písmem a věta 1 latinkou. Tento postup pak lze ověřit i porovnáním počtu slabik

1. Unikáme pořád na západ. – věta v 5. řádku
2. Doma je zakázáno utíkat – věta v 1. řádku
3. Mykény okupují Krétu – věta ve 4. řádku
4. Domů je náročná cesta – věta ve 3. řádku
5. Je nutné se vrátit – věta ve 2. řádku

Úloha 3

Zadání:

Podívejte se na text na obrázku 5 zapsaný pomocí gótských run. Zkuste tento text přepsat do latinky jen se znalostí run anglosaských. Text je v češtině, takže by vám mělo vyjít něco smysluplného.



Obrázek 5: Úloha 3

Řešení:

Řešení tohoto problému nebylo vůbec složité. Uvnitř druhého dílu se vyskytovala tabulka anglosaských run, které mají s gótskými runami společného předka. Pak už stačilo jen porovnat stejné/podobné znaky a případné neznalosti doplnit z kontextu věty, která vyšla:

Budeme rádi, pokud nám řešení pošlete ve formátu PDF, bude to od vás hezké



Řešení 4. dílu

Ve čtvrtém čísle jsme přešli k fonetice a věnovali se zápisu lidských zvuků.

Problém 1

Zadání:

Minimální pár jsou dvě slova, která se od sebe liší pouze jednou hláskou. Kupříkladu „los“ a „les“. Nalezněte slovo či slova, která mají v češtině co nejvíce minimálních párů.

Řešení:

Přišla nám různá slova se spoustou minimálních párů. Nejvíce systematicky se k problému postavil Doc.^{MM} Martin Fof, který se rozhodl si řešení naprogramovat. Jako sadu dat si zvolil slovník spisovné češtiny³ a příručku českého jazyka⁴. Vyšlo mu, že nejvíce minimálních párů má slovo *len* a to 35.

ben	fen	sen	ven	lin	leč	lech
lem	let	lev	gen	zen	lín	led
cen	hen	žen	lun	den	jen	lan
lůn	lej	lep	leť	lez	ten	lán
leg	lek	lež	ken	lén	leh	les

Ještě upozorním, že minimální páry se musí lišit v právě jedné hlásce. Proto třeba homonyma, slova, která stejně znějí, ale mají různý význam, nejsou minimální páry. Důležité u tohoto je vyslovování slov.

Úloha 2

Zadání:

Pokud budete číst tabulku 2 shora zleva ve směru doprava a dolů, tak si můžete všimnout, že hlásky jsou uspořádané podle nějakých vlastností. Podle kterých vlastností jsou uspořádané? Má nějaké uspořádání i naše abeceda? Pokud ne, jak by se daly souhlásky uspořádat?

[p]	[p ^h]	[b]	[b ^h]	m
[t]	[t ^h]	[d]	[d ^h]	n
[t̪]	[t̪ ^h]	[d̪]	[d̪ ^h]	[ɳ]
[c]	[c ^h]	[j]	[j ^h]	[ɲ]
[k]	[k ^h]	[g]	[g ^h]	[ŋ]

Tabulka 2: Sanskrt⁵

³<https://ssjc.ujc.cas.cz/>

⁴<https://prirucka.ujc.cas.cz/>

⁵[p^h] můžete vyslovovat jako [p] s přídechem

Řešení od Mgr.^{MM} Ládi Vávry:

Myslím si, že tabulka má uspořádání. Shora dolů je to po řádcích podle místa výslovy v puse, použití rtu a jazyka. Například p t c k → při nich mám otevřenou pusu, jazyk dávám nahoru, použiju trošku dechu „takové tch“. Zleva doprava mi přijde, že je to méně ostré a využívám spíše vzduch. Například u „P“ je to takové ostré, výrazné, používám hodně rty s otevřenou pusou, ale postupně se tato „síla“ zmenšuje, a „M“ je spíše – neotevřu moc pusu, ale nepoužívám tak silně rty, jazyk ani tolik vzduchu – je to takové méně „silné“.

Myslím, že na řazení české abecedy má určitý vliv historický vývoj. Ovšem mám myšlenku, že první písmenka abecedy používají otevřenější pusu, ze začátku nepoužívají příliš ani jazyk, nos či další možnosti. Pouze je to o tom, že bránicí udělám nějaký zvuk, a ten následně pomocí tvaru pusu doladím do potřebného písmene (Á,Bé,Cé,Dé,É), následně je F, a znovu, tentokrát už ale více používají i jazyk a překážky, stále však poměrně otevřenou pusu (Gé,Há,Chá,Í,Jé,Ká) a přechází do „tvrdsích“ písmen, která již nemají tak otevřenou pusu při jejich vyslovování, ale spíše zavřenější, pracují s jazykem a patrem (eL,eM,eN), rychle prostřídání písmeny podobnějšími těm předchozím (Ó,Pé,Qé), znovu více krátká, střídá (eR,eS), jemnější (Té,Ú,Vé).

Ke konci písmena, která jsou nějak všehochuť – X: využívá pusu, jazyk, patro, dech; Y, Z a případně jeho změkčená varianta Ž.

Můj návrh je tedy: A,B,C,D,E,G,H,CH,I,J,K,O,P,Q,T,U,V, a to by byla zprvu ty jemnější, a následovala by F,L,M,N,R,S,X,Y,Z,V,W

Úloha 3**Zadání:**

Pojďme spojit předchozí informace a zůstaňme pro jednoduchost u češtiny. Už jsme tu nakousli změnu hlásek při znělosti a neznělosti. Pokuste se ji vyjádřit jako pravidla s pomocí zápisu v množinách.

- *znělé: b, v, d, z, g, h, ž, d'*
- *neznělé: p, f, t, s, k, ch, š, t'*

Řešení:

Pojďme si označit znělé souhlásky jako Z a neznělé jako N. Pro češtinu nám pak stačí následující pravidla.

Pro samohlásky, které jsou na konci slov, platí:

$$[Z] \rightarrow [N]/_ \#$$

Pokud se samohlásky vyskytují okolo jiných samohlásek, tak platí následující

$$[Z] \rightarrow [Z]/ZZ$$

$$[N] \rightarrow [Z]/ZN$$



$$[N] \rightarrow [N]/NN$$

$$[Z] \rightarrow [N]/ZN$$

Úloha 4

Zadání:

Pokud bychom pro popis samohlásek použili stejné vlastnosti jako pro souhlásky a navíc otevřenost, tak by nám jedna vlastnost trochu přebývala. Která? A hlavně proč?

Vlastností, které při vyslovování samohlásek nevyužíváme, je více, speciálně pokud se zaměříme pouze na českou abecedu, která je velmi omezená. V češtině u samohlásek třeba nevyužíváme přídech nebo nepoužíváme nos. Hlavně ale všechny samohlásky vznikají již nízko v hrdle. Přebývající vlastnost tedy byla místo (vzniku), protože všechny vznikají na stejném místě. Přijímali jsme ale i jiné odpovědi.

Řešení 5. dílu

A v posledním díle jsme se zůstali u fonetiky a pokusili se zrekonstruovat znění malé skupiny jazyků, které vypadaly, že by mohly mít něco společného.

Úloha 1

Slovo	A	B	C	D	E
jedna	taha	tasi	tafi	kahi	tahi
dva	ua	lua	rua	lua	rua
tři	tolu	tolu	toru	kolu	toru
čtyři	fa	fa	fa	ha	fa
pět	nima	lima	rima	lima	rima
moře	tahi	tai	tai	kai	tai

Tabulka 3: Množina slov jazyků A–E

Zadání:

Utvořte množinu podobných hlásek pro tabulku 3 a rozřadte jazyky do menších skupin podle toho, jak moc společné podobnosti mají.

Řešení od Dr.^{MM} Zdeňka Mareše:

Podle tabulky 4 bych do jedné skupiny zařadil jazyky C a E, protože se liší pouze změnou [h] → [f] (z jazyka E do C – slovo jedna – „tahi“ x „tafi“).

Do druhé skupiny bych zařadil jazyky B a D, které se od sebe liší pouze změnou hlásek [t] → [k], [s] → [h] a [f] → [h]. Jsou od sebe vzdálenější než jazyky C a E. Jazyky B, C, D, E jsem takto rozdělil hlavně kvůli výrazné odlišnosti [l] a [r] (u slov dva, tři, pět). Úplně nejvzdálenějším jazykem od ostatních, a proto ho vyčleňuji mimo ostatní skupiny, se mi jeví jazyk A

Změna	Z jazyka	Do jazyka
l → r	B, D	C, E
s → h	B, D	D, A, E
h → f	B	A, C, E
s → f	D	C
a (na konci slova) → i	A	B, C, D, E
k → t	D	A, B, C, E
l/r → n	B, C, D, E	A

Tabulka 4: Pozorování změn hlásek podle Dr.^{MM} Zdeňka Mareše

Úloha 2

Zadání:

Zrekonstruuje jazykovou rodinu jazyků A–E. S postupem zakreslete i strom jazykové rodiny.

Řešení:

Podobnou tabulku si udělal i Mgr.^{MM} Láďa Vávra, který se spíše věnoval podobnosti slov napříč jazyky, a s její pomocí si spojil vlastnosti jednotlivých jazyků.

Řešení od Mgr.^{MM} Ládi Vávry:

Poznatky z tabulky:

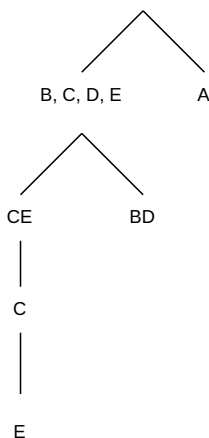
2. slovo mají jazyky B, D společné. Také jazyky C, E mají společné druhé slovo.
3. slovo mají jazyky A, B společné. Také jazyky C, E mají společné druhé slovo, jazyk B by mohl mít podobnou výslovnost, takže by z těchto jazyků mohl vycházet.
4. mají všechny jazyky až na D společné
5. slovo mají C, E a B, D společné, A je nejspíše, ze skupiny C, E
6. slovo mají jazyky B, C, E společné.

Tedy

- C a E se vyvíjely spolu, nejspíše i jazyk D, který se oddělil.
- Vypadá to, že jazyky B, C, E byly spolu, díky 6. slovu. Jazyky B, D se pak ještě oddělili.
- Jazyk A má hodně podobného, nejspíše u něj došlo k posunu dozadu, jelikož ale až na 3. slovo nemá moc společného, hádám, že se první oddělil od C a shoda ve 3. slově je spíš náhodná.



Jedním problémem porovnávací metody je to, že je dost subjektivní. Při rekonstrukci jazyků závisí hodně na autorovi, který je rekonstruuje. Tato poznámka platí, jak pro první, tak i pro druhou úlohu pátého čísla. Dalo se na to přistoupit různě, ale nejšikovnější bylo si sestrotit tabulku změn mezi jazyky, případně si změny zaznamenat jinak. Následně hledat podobně znějící hlásky, které se by mohly zaměnit a tady nastává ten problém se subjektivitou, proto vám mohly vyjít různé stromy. Podle mého nejpravděpodobnější strom vývoje by byl ten na obrázku 6



Obrázek 6: Strom vývoje jazyků

Problém 4

Zadání:

Komparativní metoda sice dojde k nějakému výsledku, který ale úplně neodráží realitu. Jaké mohou být problémy při použití této metody?

Řešení od Veroniky Menšíkové:

Pomocí komparativní metody vlastně posuzujeme podobnost významu a znění některých slov. To, zda jsou si slova podobná, je ale dost subjektivní. Když tou samou metodou bude více lidí prozkoumávat nějaké jazyky, mohou lehce dojít k různým závěrům, a tudíž je zřejmé, že některý je špatně. Spoléhat se na intuici při rekonstrukci původního fenoménu také může vést k řadě omylů. Například je člověk již zvyklý na nějaké časté změny (jako například změna znělosti) a pak se snadno může dopustit omylu, že právě tato změna nastala, i když to není pravda. A kdyby na tuto změnu nebyl zvyklý, možná by si všiml při delším zkoumání té pravé. Zároveň může člověk narazit na nějaká dvě slova, které zní podobně a mají i podobný význam a ve skutečnosti si nejsou vůbec příbuzné. Při komparativní metodě je ale pravděpodobně za příbuzná

označí. Problém je i v tom, že jazyk se v čase nějak vyvíjí. Sice se při tom řídí jistými pravidly, která ale vždy nemusí být stoprocentní a opět můžeme za tohoto předpokladu dojít k chybě.

Honza; jan@piroutek.eu
Lucka; lucy.kuncarova@gmail.com





Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře

Vzorová řešení 4. série

Úloha 1

Zadání:

Trajektorie paprsku ovlivněného astronomickou refrakcí na první pohled vzbuzuje dojem analogie se šikmým vrhem v gravitačním poli a možnost svrchního zrcadlení tento dojem ještě podporuje. V souvislosti s tím se nabízí otázka, zda není možné najít analogii také v podobě existence kosmických rychlostí. Příliš strmě stoupající paprsek opustí atmosféru, málo strmý paprsek prodělá svrchní zrcadlení a putuje zpět k zemskému povrchu. Je přípustný nějaký mezípřípad, kdy paprsek „zůstane na oběžné dráze“, jako je tomu v analogii gravitace?

Řešení:

Výsledkem úlohy 3 v 1. sérii bylo, že trajektorie paprsku ve sférické atmosféře je popsána rovnicí

$$nr \sin(\alpha) = \text{konst}, \quad (1)$$

kde n je index lomu atmosféry v bodě, kde se paprsek právě nachází, r je vzdálenost paprsku od středu Země (nadále „výška“) a α je úhel mezi paprskem a kolmicí k zemskému povrchu.

Zvolme kladná čísla n_0 , r_1 , r_2 , δ a ξ taková, že $r_1 < r_2$ a $\xi < 1$. Ve výšce $r \in (r_1 - \delta, r_1]$ nebo $r \in (r_2, r_2 + \delta]$ necht' je index lomu vzduchu $n(r) = n_0$. Ve výšce $r \in (r_1, r_2]$ necht' je index lomu vzduchu $n(r) = \frac{n_0 r_2}{\xi r}$.

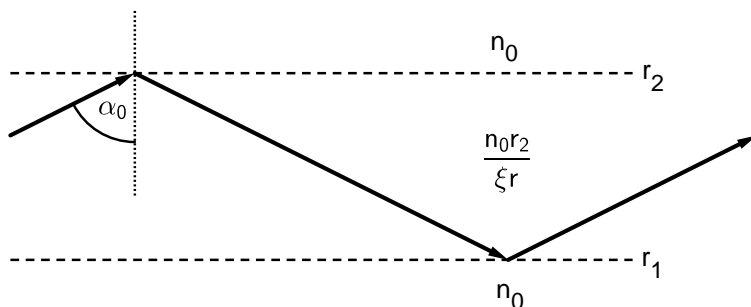
Uvažujme světelný paprsek, který se nachází ve výšce $r \in (r_1, r_2]$ a svírá úhel $\alpha_0 > \arcsin(\xi)$ s kolmicí k zemskému povrchu. Tento úhel se během pohybu zachovává, protože

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\text{konst}}{\frac{n_0 r_2}{\xi r}} = \frac{\xi \cdot \text{konst}}{n_0 r_2} \neq f(r). \quad (2)$$

Ve výšce r_2 paprsek dopadá na rozhraní mezi prostředím s indexem lomu $n(r) = \frac{n_0}{\xi} > n_0$ a prostředím s indexem lomu $n(r) = n_0$. Na rozhraní dopadá pod úhlem α_0 , který je větší než mezní úhel, protože $\sin(\alpha_0) > \xi = n_0/n_1$. Ve výšce r_2 proto vždy dochází ke svrchnímu zrcadlení.

Ve výšce r_1 je $n(r) = \frac{n_0 r_2}{\xi r_1} > n_0$. Dochází zde vždy ke spodnímu zrcadlení. Při svrchním i při spodním zrcadlení zůstává zachován úhel α_0 . Uvažovaný paprsek v popsané atmosféře proto nikdy neopustí interval $(r_1, r_2]$ (viz obrázek 7).

Popsanou situaci není zcela správné nazývat analogií ke kosmickým rychlostem. Zatímco kosmické rychlosti jsou zprostředkovány čistě gravitační interakcí, udržení paprsku v atmosféře vyžaduje kombinaci ohybu a odrazu na rozhraních. Paprsek navíc při průchodu atmosférou podléhá nenulovému útlumu, takže v dané pozici určitě nemůže obíhat donekonečna. Další problém řešení spočívá v tom, zda



Obrázek 7: Schéma hypotetické atmosféry, ve které paprsek nikdy neopustí výškový interval $[r_1, r_2]$. V intervalu $[r_1, r_2]$ je index lomu $\frac{n_0 r_2}{\xi r}$, tj. závislý na souřadnici r . Mimo interval $[r_1, r_2]$ je konstantní index lomu n_0 . Úhel mezi paprskem a kolmicí k povrchu Země je vždy α_0 . Při dopadu na rozhraní ve výšce r_2 paprsek prodělá svrchní odraz. Při dopadu na rozhraní ve výšce r_1 paprsek prodělá spodní odraz.

je popsanou atmosféru vůbec možné fyzikálně uskutečnit, taková otázka však přesahuje rámec tohoto tématka. Na základě všech relevantních informací lze říct, že paprsek může skutečně zůstat na oběžné dráze.

Úloha 3

Zadání:

- Odvoďte závislost střední volné dráhy paprsku na koncentraci molekul, tj. funkcí $\lambda(n)$.*
- Odhadněte závislost koncentrace molekul na výšce, tj. funkci $n(y)$. Můžete k tomu využít 1. termodynamický zákon $pV = Nk_B T$ a buďte dohledané závislosti $p(y)$, $T(y)$, nebo třeba i vlastní výsledky získané při řešení problému 4.2.*
- Veličiny $\Delta\lambda$ a Δl se vztahují k nějakému neurčitému, velmi malému časovému posuvu Δt a samy o sobě je nelze vyčíslit. Navrhněte, jak podmínky $\Delta\lambda \ll \Delta l$ a $\Delta\lambda \gg \Delta l$ přepsat pomocí známých měřitelných veličin, jako je sklon paprsku nebo rozměry molekul vzduchu. Využijte k tomu závislosti nalezené v krocích a) a b).*
- Odhadněte, v jakých výškách je splněna podmínka $\Delta\lambda \gg \Delta l$, tj. v jakých výškách lze mluvit o jakési analogii molekulárních podmínek.*

Řešení:

- V úloze 1 ve 3. sérii byla počítána střední volná dráha jedné částice v prostředí jiných částic se známým poloměrem R a známou objemovou koncentrací n . Tato úloha je odlišná pouze v tom, že namísto částice je uvažován paprsek světla. Ten se pohybuje rychlostí světla c . Částice atmosféry konají*

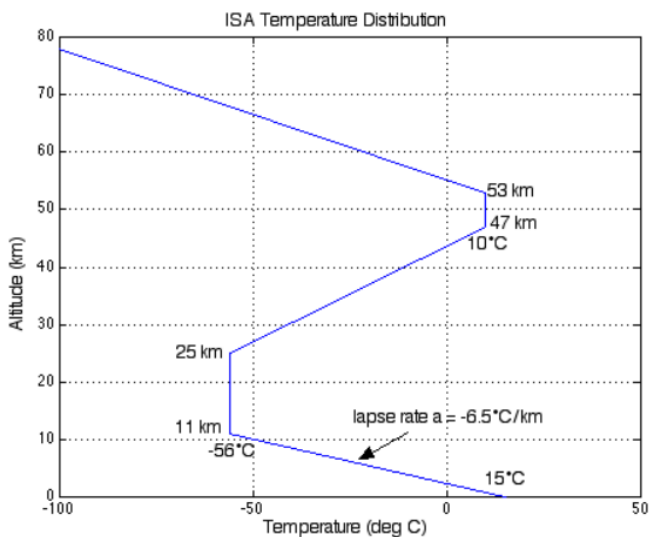
jistý termální pohyb, jejich rychlost je však při pokojové (nebo nižší) teplotě zanedbatelná v porovnání s c . Poloměr paprsku považujeme za zanedbatelný v porovnání s poloměrem částic atmosféry. Střední volná dráha paprsku v atmosféře je podle řešení úlohy 1 ze 3. série rovna

$$\lambda = \frac{c\tau}{n\pi R^2 c\tau} = \frac{1}{n\pi R^2}. \quad (3)$$

- b) Zdroj [1] uvádí empirický vztah mezi atmosférickým tlakem p a nadmořskou výškou h v [m n. m.]

$$p = 101325(1 - 2,25577 \cdot 10^{-5}h)^{5,25588} \text{ Pa}. \quad (4)$$

Závislost teploty T na nadmořské výšce h je podle zdroje [2] po částech lineární (viz obrázek 8).



Obrázek 8: Teplota vzduchu v závislosti na nadmořské výšce. Obrázek je přejat z [2].

Vydeme z 1. termodynamického zákona

$$p = nk_B T, \quad (5)$$

kde n je objemová koncentrace částic a k_B je Boltzmannova konstanta.

Objemovou koncentraci částic vzduchu v závislosti na nadmořské výšce lze vyjádřit analyticky na základě (3)-(5). Pro potřeby této úlohy stačí však závislost vykreslit (viz obrázek 9a).

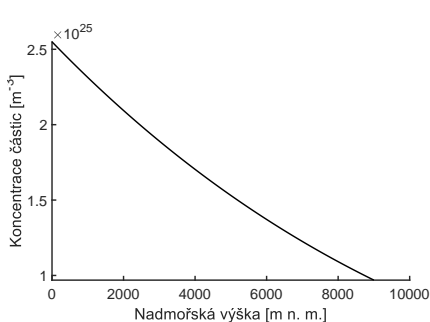
- c) Necht' je α úhel mezi paprskem a kolmicí k zemskému povrchu. Když paprsek urazí malou vzdálenost Δl , ve vertikálním směru se posune o

$$\Delta h = \cos(\alpha)\Delta l. \quad (6)$$

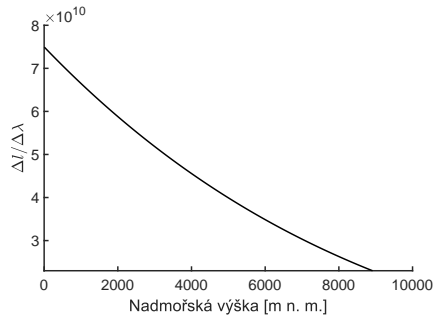
Okolní koncentrace částic vzduchu se tím změní o Δn . Při daném α a Δl lze hodnotu Δn odečíst z obrázku 9a.

Dosažením hodnot z obrázku 9a do (3) lze získat závislost střední volné dráhy na nadmořské výšce $\lambda(h)$. Poloměr molekul vzduchu se pohybuje okolo $R = 0,3$ nm [3]. Pro dané α a Δl ze závislosti dostáváme $\Delta\lambda(h)$. Hodnoty Δl a $\Delta\lambda$ mají stejný rozměr, můžeme je proto porovnat.

- d) Z definice platí $\Delta l \gg \Delta\lambda$ právě tehdy, když $\Delta l/\Delta\lambda \geq 10$, a $\Delta l \ll \Delta\lambda$ právě tehdy, když $\Delta l/\Delta\lambda \leq 0,1$. Veličinu $\Delta l/\Delta\lambda$ vykresleme v závislosti na nadmořské výšce (viz obrázek 9b). Ve všech výškách, kde λ dovedeme vyčíslit, je $\Delta l/\Delta\lambda \gg 1$. V uvažovaném intervalu nadmořské výšky podmínka $\Delta l \ll \Delta\lambda$ není nikdy splněna.



(a) Koncentrace částic vzduchu v závislosti na nadmořské výšce. Závislost byla počítána podle (3)-(5).



(b) Veličina $\Delta l/\Delta\lambda$ v závislosti na nadmořské výšce. Závislost byla počítána na základě vztahů (3), (6) a hodnot z obrázku 9a.

Obrázek 9: Ilustrace k řešení úlohy 3.

Nemusí to znamenat, že by z hlediska paprsku prolétávajícího vesmírem nikdy nenastávaly molekulární podmínky. Znamená to jen, že podmínka $\Delta l \ll \Delta\lambda$ zavedená v textu 4. čísla je příliš silná. Vyplývá z ní doslova to, že „paprsek v žádném konečném čase nepotká žádnou částici“. Standardní definice molekulárních podmínek přitom vyžaduje jen to, aby se částice nepotkávaly „příliš často“.



Úloha 4

Zadání:

Nechť $a = 1/b$. Změní-li se b o malou hodnotu $\Delta b \ll b$, na a se to projeví změnou o hodnotu $\Delta a \ll a$. Dokažte, že $a + \Delta a \approx \frac{1}{b} - \frac{\Delta b}{b^2}$.

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu

$$a + \Delta a = \frac{1}{b + \Delta b}. \quad (7)$$

Potom

$$\Delta a = (a + \Delta a) - a = \frac{1}{b + \Delta b} - \frac{1}{b} = \frac{b - (b + \Delta b)}{(b + \Delta b)b} \approx -\frac{\Delta b}{b^2}, \quad (8)$$

kde přibližná rovnost na konci plyne z $\Delta b \ll b$.

Úloha 6

Zadání:

Pro jaké hodnoty koeficientů odrazu a průchodu T a R bude mít k -tý řád duhy největší intenzitu?

Řešení od Dr.^{MM} Jiřího Polácha:

Potřebujeme zjistit, pro jaké R a T je intenzita největší při daném k . Jelikož se tyto dvě proměnné nachází pouze na jednom místě, a to v součinu, snažíme se najít maximum $T^2 R^{k-2}$.

$$\begin{aligned} R + T &= 1 \\ T &= 1 - R \\ T^2 R^{k-2} &= (1 - R)^2 R^{k-2} = \\ &= (1 - 2R + R^2) \frac{R^k}{R^2} = \\ &= R^k \left(\frac{1}{R^2} - \frac{2}{R} + 1 \right) = \quad (9) \\ &= R^{k-2} - 2R^{k-1} + R^k \quad (10) \end{aligned}$$

Ve výrazu (9) si můžeme všimnout, že první část nabývá maxima pokud je $R = 1$ a druhá pokud $R = 0$. V obou krajních případech bude výsledek 0 (limitně). Tento výraz tedy bude na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ růst z minima do maxima a znova klesat do minima. Abychom zjistili kde se nachází maximum použijeme derivaci výrazu (10), protože ta se v maximum bude rovnat 0.

$$\begin{aligned}
 R^{k-2} - 2R^{k-1} + R^k dR &= (k-2)R^{k-3} - 2(k-1)R^{k-2} + kR^{k-1} \\
 (k-2)R^{k-3} - 2(k-1)R^{k-2} + kR^{k-1} &= 0 \\
 R^{k-3} ((k-2) - 2(k-1)R + kR^2) &= 0 \\
 R^{k-3} (k-2 - 2kR + 2R + kR^2) &= 0 \\
 R^{k-3} (kR^2 + R(2-2k) + k-2) &= 0
 \end{aligned}$$

Musí platit, že jedna z těchto částí se rovná nule a jelikož R^{k-3} se nebude rovnat 0 nikdy, musí to být druhá část.

$$\begin{aligned}
 kR^2 + R(2-2k) + k-2 &= 0 \\
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x_{1,2} &= \frac{-(2-2k) \pm \sqrt{(2-2k)^2 - 4k(k-2)}}{2k} \\
 x_{1,2} &= \frac{-2+2k \pm \sqrt{4-8k+4k^2-4k^2+8k}}{2k} \\
 x_{1,2} &= \frac{-2+2k \pm \sqrt{4}}{2k} \\
 x_1 &= \frac{-2+2k+2}{2k} = 1 \\
 x_2 &= \frac{-2+2k-2}{2k} = \frac{2k-4}{2k} = 1 - \frac{2}{k}
 \end{aligned}$$

Zajímají nás pouze řešení, které nenáleží krajním podmínkám. Proto je řešením pouze $1 - \frac{2}{k}$. k -tý řád duhy bude mít největší intenzitu pokud bude platit $R = 1 - \frac{2}{k}$ a $T = \frac{2}{k}$.

Úloha 7

Zadání:

- a) Dokažte, že je intenzita vystupujícího světla I_k skutečně koncentrována právě do směru daného podmínkou

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{n_r^2 - 1}{k^2 - 2k}\right)}. \quad (11)$$

- b) Pro které hodnoty indexu lomu n_r je podmínka (11) platná?
 c) Popište, co se děje v situacích, kdy podmínka (11) platná není.



d) Vykreslete úhlové rozdělení intenzity vystupujícího světla v situaci, kdy podmínka (11) platná není.

Řešení:

a) Paprsek, který vystoupí z kapky po $k - 2$ vnitřních odrazech, má ve vzdálenosti r od středu kapky intenzitu

$$I_k = \frac{a^2}{4r^2} I_0 T^2 R^{k-2} \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\delta_k) \left| 1 - \frac{k-1}{n_r} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right|}, \quad (12)$$

kde a je poloměr kapky, I_0 je intenzita původního paprsku, T je koeficient průchodu na rozhraní kapky a vzduchu, R je koeficient odrazu na rozhraní kapky a vzduchu, α je úhel, pod kterým paprsek dopadá na povrch kapky, n_r je relativní index lomu kapky, β je úhel lomu na rozhraní kapky a vzduchu a δ_k je úhel, pod kterým paprsek vystupuje po $k - 2$ vnitřních odrazech v kapce.

Když platí

$$\frac{k-1}{n_r} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} = 1, \quad (13)$$

vztah (12) není definovaný, protože intenzita vystupujícího světla v okolí tohoto bodu jde do nekonečna. Pro daný index lomu n_r a počet vnitřních odrazů $k - 2$ výraz (17) představuje podmínku pro směr, do kterého kapka koncentruje vystupující světlo. Tento směr souvisí se vznikem duhy.

Podmínku (13) umocníme na druhou:

$$1^2 = \frac{(k-1)^2 \cos^2(\alpha)}{n_r^2 \cos^2(\beta)} = \frac{k^2 - 2k + 1}{n_r^2} \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{1 - \sin^2(\beta)} = \frac{k^2 - 2k + 1}{n_r^2} \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{n_r^2}} \quad (14)$$

Bylo využito vztahu $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ a Snellova zákona $\sin(\alpha) = n_r \sin(\beta)$. Vztah lze dále upravit jako:

$$n_r^2 - \sin^2(\alpha) = (k^2 - 2k + 1)(1 - \sin^2(\alpha)) = (k^2 - 2k)(1 - \sin^2(\alpha)) + 1 - \sin^2(\alpha) \quad (15)$$

$$n_r^2 - 1 = (k^2 - 2k) \cos^2(\alpha) \quad (16)$$

$$\sqrt{\frac{n_r^2 - 1}{k^2 - 2k}} = \cos(\alpha) \quad (17)$$

b) Jmenovatel ve zlomku (17) nesmí být nulový. Dostáváme podmínku $k \notin \{0; 2\}$. Protože (12) platí jen pro $k \geq 3$, žádné praktické omezení z toho neplyne.

Výraz pod odmocninou musí být nezáporný. Jmenovatel je pro $k \geq 3$ vždy kladný. Čitatel je nezáporný právě tehdy, když $n_r \geq 1$. Za běžných okolností

z toho také žádné omezení neplyne. Pro situaci, která je řešena v problému 8, ale podmínku (17) nelze splnit.

Výraz na pravé straně (17) je v absolutní hodnotě menší nebo roven jedné. To samé musí platit pro výraz na levé straně (17). Z toho plyne podmínka

$$n_r \leq k - 1. \quad (18)$$

Z toho plyne například to, že duha prvního řádu ($k = 3$) vzniká jen na kapkách kapalin s indexem lomu $n_r \leq 2$.

- c) Když podmínka (17) není splněna, výraz (12) nediverguje. Intenzita vystupujícího světla přesto vykazuje maximum. Protože je však šířka maxima výrazně větší než rozptyl lámaného světla způsobený disperzí (tj. větší než šířka duhy), známé duhové zbarvení nelze pozorovat.
- d) Na obrázku 10 je intenzita světla, které z duhy vystupuje po jednom vnitřním odrazu. Byla stanovena stejným způsobem, jaký byl použit ve vzorovém řešení úlohy 5 ve 2. sérii.

Je-li možné splnit podmínku (17), intenzita v odpovídajícím bodě diverguje (plná čára). Když podmínku (17) splnit nelze (tj. není splněna podmínka (18)), intenzita jen vykazuje maximum (přerušovaná čára). Čím víc se vzdalujeme splnění podmínky (18), tím je maximum méně výrazné (tečkovaná čára).

Problém 8

Zadání:

Rozhodněte, zda vznikne duha nebo jiný zajímavý úkaz, prochází-li světlo vzduchovou bublinou ve vodě. Své rozhodnutí podpořte úvahou, numerickým výpočtem, nebo experimentem.

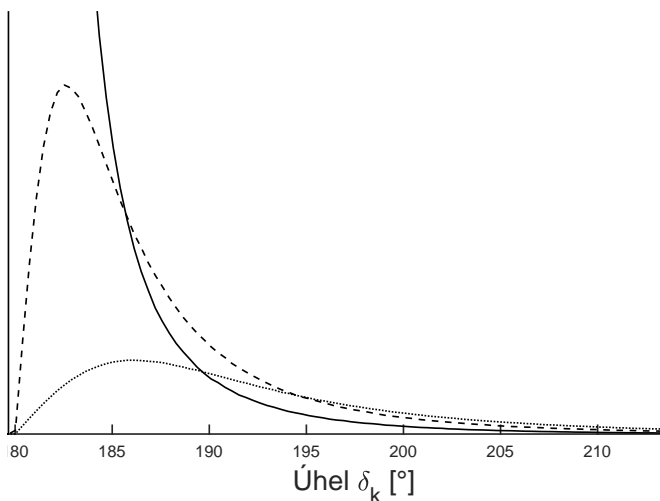
Řešení:

Tímto číslem končí 28. ročník. Protože problém 8 považujeme za zajímavý a žádná z došlých řešení na něj dosud nenašla jednoznačnou odpověď, uvádíme zde návrh jeho řešení.

Z řešení úlohy 7b víme, že podmínku (17) nelze splnit pro $n_r < 1$, protože by pod odmocninou byl záporný výraz. Intenzita vystupujícího světla počítaná podle (12) proto diverguje pouze v bodě $\delta_k = 0$. V bodě $\delta_k = 0$ intenzita diverguje také v případě kapky (viz vzorové řešení úlohy 5 z 2. série, konkrétně obrázek 7d). Znamená to, že kapka a bublina mohou fungovat jako spojné čočky, to ale nelze považovat za duhu. Podle vztahu (12) proto na bublině duha nevzniká.

Vztah (12) byl přejat ze zdroje [4], z kterého nebylo zřejmé, zda (12) platí také pro $n_r < 1$. Jistoty dosáhneme, vyjdeme-li ze vztahu

$$\delta_k = (k - 2)\pi + 2[\alpha - (k - 1)\beta], \quad (19)$$



Obrázek 10: Úhlové rozdělení intenzity světla, které vystupuje z kapky po jednom vnitřním odrazu. Plná čára odpovídá kapce s indexem lomu $n_r = 2$. Přerušovaná čára odpovídá kapce s indexem lomu $n_r = 2,2$ a tečkovaná čára kapce s indexem lomu $n_r = 2,4$.

který umíme odvodit čistě na základě odrazu a lomu světla (viz vzorové řešení úlohy 1 z 2. série). Předpokládejme, že na kapku dopadá homogenní svazek rovnoběžných paprsků. Úhlové rozdělení intenzity světla, které z bubliny vystupuje po $k - 2$ vnitřních odrazech, stanovíme následovně.

Definujme intenzitu vystupujícího světla jako $I(\delta_k) = 0$ pro každé δ_k . Dále provedme cyklus přes vzdálenost paprsku od středu kapky d . Vzdálenost d prochází hodnoty od 0 do a , kde a je poloměr bubliny. Cyklus sestává z následujících kroků:

- 1 Vypočítejme α a β jako

$$\alpha = \arcsin(d/a), \quad (20)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{n_r}\right), \quad (21)$$

kde $n_r < 1$ je relativní index lomu.

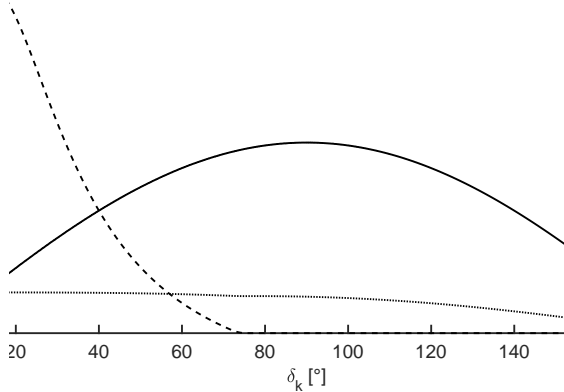
- 2 Pro $k \geq 2$ vypočítejme δ_k podle (19). Pro $k = 1$ vypočítejme δ_k jako

$$\delta_k = \pi - 2\alpha. \quad (22)$$

- 3 Hodnotu $I(\delta_k)$ přepišme na $I(\delta_k) + d$. Tento krok vychází ze skutečnosti, že množství světla, které na bublinu dopadá ve vzdálenosti d od osy, je úměrné $2\pi d$. Konstanty zanedbáváme, protože celá intenzita bude na závěr normalizována.

Výslednou intenzitu je vhodné vyhladit pomocí plovoucího průměru. Nakonec ji přenásobíme vhodnou konstantou, aby celková intenzita světla vystupujícího do všech směrů byla $I_0 T^2 R^{k-2}$ (resp. $I_0 R$ v případě $k = 1$).

Na obrázku 11 je úhlové rozdělení intenzity světla, které vystupuje z bubliny, pro $k = 1$, $k = 2$ a $k = 3$. Ani jedna z uvedených závislostí nediverguje, ke vzniku duhy proto skutečně nedochází.



Obrázek 11: Úhlové rozdělení intenzity světla po interakci s bublinou. Plná čára odpovídá odrazu na bublině, tj. $k = 1$. Přerušovaná čára odpovídá průchodu bublinou bez vnitřních odrazů, tj. $k = 2$. Tečkovaná čára odpovídá jednomu vnitřnímu odrazu, tj. $k = 3$. Závislosti byly získány výše uvedeným algoritmem s konstantami $n_r = 0,8$, $I_0 = 1$, $a = 1$, $R = 1/2 = T$.

Reference

- [1] <https://viot.us/airpressure.html>
- [2] R. T. Rajan, P. Sundaramoorthy, C. J. C. Vertegaal, A. Montage, V. Karunanithi, M. K. Verma, M. J. Bentum, C. J. M. Verkoeven: *Low-frequency observations using high-altitude balloon experiments (LOBE)*, IAC-19-A7.3.11
- [3] F. Vallejos-Burgos, F. Coudert, K. Kaneko: *Air separation with graphene mediated by nanowindow-rim concerted motion*, doi: 10.1038/s41467-018-04224-6
- [4] J. Bednář: *Pozoruhodné jevy v atmosféře*, ISBN: 80-200-0054-2

Téma 5 – Nekonečna

Vzorová řešení 4. dílu

Úloha 1

Zadání:

Ríká se, že když byl Carl Friedrich Gauss⁶ (jeden z nejslavnějších matematiků) na základní škole, otravoval svého učitele matematiky natolik, že dostal za trest sečíst čísla 1 až 100. Gauss však během chvíle přinesl správný výsledek.

K jakému číslu se malý Gauss dopočítal a jak to udělal?

Řešení od Dr.^{MM} Aleše Opla:

Gauss údajně přišel na to, že když si seřadí čísla za sebe a následně bude sčítat první s posledním, druhé s předposledním, atd., tak vždy dospěje ke stejnému součtu – číslu 101. Toto již poté snadno využil k zjištění celkového součtu. Celkem je totiž takových dvojic $\frac{100}{2} = 50$, a výsledek je tedy $101 \cdot 50 = 5050$.

Případně šlo použít vzorec pro stý částečný součet aritmetické posloupnosti s prvním členem 1 a diferencí rovnou 1:

$$s_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d, \quad s_{100} = 1 \cdot 100 + \frac{100(100-1)}{2} \cdot 1 = 100 + 4950 = 5050.$$

Úloha 2

Zadání:

Ukažte, jak odvodit vzorec pro částečné součty geometrické posloupnosti.

Řešení od Dr.^{MM} Zdeňka Mareše:

Máme geometrickou posloupnost, jejíž členy jsou $a_{n+1} = q^n a_1$, tedy platí $a_n = a_1 q^{n-1}$. Jak tedy z dané rovnice

$$1 - q^n = 1^n - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

ukázat vzorec pro částečné součty geometrické posloupnosti:

$$a_1 + \dots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}?$$

⁶https://cs.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Stačí zadanou rovnici trochu poupravit

$$\begin{aligned}
 1 - q^n &= (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) && / (1 - q) \\
 \frac{1 - q^n}{1 - q} &= (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) && \cdot a_1 \\
 a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} &= a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) && \text{roznásobení} \\
 a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} && \text{rozšíření zlomku} \\
 a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}
 \end{aligned}$$

Dostáváme tak na pravé straně rovnice součin, který je zřejmě částečným součtem členů geometrické posloupnosti od a_1 do a_n . Na levé straně dostáváme součin, který jsme chtěli získat.

Úloha 3

Zadání:

Spočítejte součet řady

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{i \cdot (i + 1)} + \dots$$

Hint: Rozložte každý zlomek na dva a vyjádřete částečné součty.

Zde byl „trik“, že zlomek $\frac{1}{i \cdot (i+1)}$ rozložíme na $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ a tak se nám všechno kromě $\frac{1}{1}$ odečte. To však nestačí, vždyť u řady $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ se nám také vše odečte, ale řada samotná součet nemá. Když si však vyjádříme částečné součty, máme hned vyřešeno.

Řešení od Lenky Poljakové:

Nejdříve se podívejme na to, jaký součet by tato posloupnost měla, kdyby byla jen konečná – uvažujme proto tuto posloupnost o n prvcích:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)}$$

Všimněme si, že všechny tyto zlomky mají v čitateli jedničku, kterou lze zapsat jako rozdíl dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Čítel i -tého zlomku tedy přepíšme na $1 = (i + 1) - i$ a náš výraz bude vypadat následovně:

$$\frac{2 - 1}{1 \cdot 2} + \frac{3 - 2}{2 \cdot 3} + \frac{4 - 3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(n + 1) - n}{n \cdot (n + 1)}$$



Každý z těchto zlomků rozdělíme na dva:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} - \frac{3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{n+1}{n \cdot (n+1)} - \frac{n}{n \cdot (n+1)} = \\ = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Jak vidíme, každý z prvků množiny $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}\}$ je v součtu obsažen se znaménky $+$ i $-$, tím pádem se „požerou“ a zbude nám výraz $1 - \frac{1}{n+1}$.

Pro konečnou posloupnost by její součet tedy vyšel $1 - \frac{1}{n+1}$. Naším úkolem je ale zjistit, jaký má součet takováto nekonečná posloupnost. Ta bude mít nekonečně velký jmenovatel zlomku $\frac{1}{n+1}$, jehož hodnota se tím pádem bude blížit k nule, z čehož již jasně víme, že budeme-li mít uvedenou nekonečnou řadu, její součet bude limitně roven $1 - 0 = 1$.

Neboli formálněji spočítáme limitu $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} \stackrel{\text{AL}}{=} 1 - \frac{1}{\infty} = 1$.

K těmto částečným součtům se však dalo dostat i jinak.

Řešení od Dr.^{MM} Martina Bočka:

Tyto částečné součty vycházejí součty: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$. Zdá se, že platí $s_n = \frac{n}{n+1}$. Dokázat to lze matematickou indukcí.

Tvrzení zjevně platí pro s_1 . Dále víme, že

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Takže pokud $s_n = \frac{n}{n+1}$, pak

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

čímž se dokazuje indukce.

Poté uděláme limitu částečných součtů.

Mgr.^{MM} Patrik Jendele dokonce objevil video⁷ o tom, že pokud budeme mít jakoukoliv aritmetickou posloupnost a_i , kde žádný člen není nula, platí

$$\frac{1}{a_0 \cdot a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{n+1}}.$$

⁷<https://youtu.be/556JVbYDJMU>

Tedy si můžeme rozmyslet, že pro rostoucí aritmetickou posloupnost a_i je

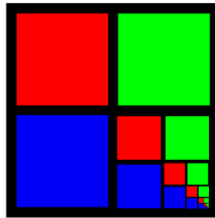
$$\frac{1}{a_0 \cdot a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}} + \dots = \frac{1}{a_0}.$$

Problém 4

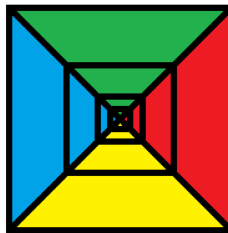
Zadání:

Vymyslete další geometrické znázornění geometrické či jiné řady.

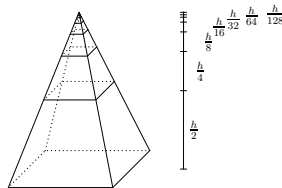
Řešení si můžete prohlédnout na obrázcích 12 až 18.



Obrázek 12: Dr.^{MM} Daniel Skýpala: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$

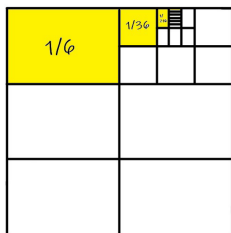


Obrázek 13: Bc.^{MM} Martin Haikl: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$

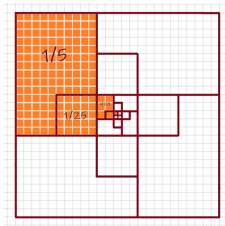


Obrázek 14: Mgr.^{MM} Patrik Jendele: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8^n} = 1$

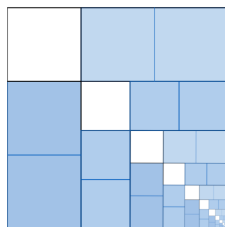
(Překresleno pro vyšší kvalitu obrázku.)



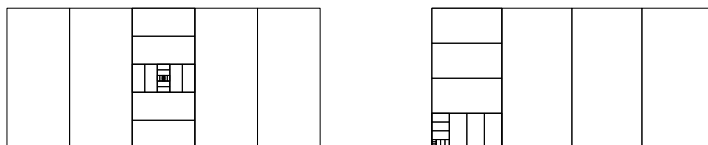
Obrázek 15: Dr.^{MM} Zdeněk Mareš: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{5}$



Obrázek 16: Dr.^{MM} Zdeněk Mareš: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$



Obrázek 17: Mgr.^{MM} Pavla Šimová: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{4}{5}$



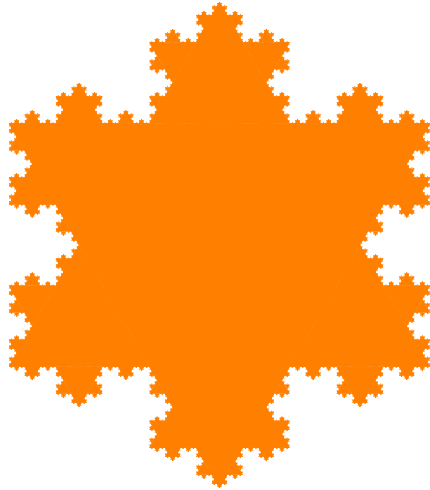
Obrázek 18: Bc.^{MM} Adéla Bejdová: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{k-1}$

(Překresleno pro vyšší kvalitu obrázku.)

Úloha 5

Zadání:

Spočítejte obsah tzv. Kochovy vločky (na obrázku 19). Ta vznikne tak, že doprostřed každé úsečky rovnostranného trojúhelníku přidáme rovnostranný trojúhelník o třetinové straně. Tím zvýšíme počet úseček na čtyřnásobek (a zkrátíme je na třetinu) a doprostřed každé přidáme trojúhelníky o třetinové straně, a tak dále.



Obrázek 19: Kochova vločka

Řešení od Dr.^{MM} Daniela Skýpaly:

Nejdříve si vyjádříme obsah rovnostranného trojúhelníku:

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

V každé iteraci se strana trojúhelníka změní na třetinu:

$$S_n = \frac{a_n^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{a_0}{3^n}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{9^n \cdot 4}$$

Zároveň přidaný trojúhelník rozdělí každou stranu na čtyři části s tím, že původně jsou tři strany:

$$\#\Delta_n = \#\Delta_1 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

(Musíme si dát pozor, pro $i = 0$ platí $\#\Delta_0 = 1$.)



Když to dáme dohromady:

$$\begin{aligned} S_{Coch_n} &= S_0 + \sum_{i=1}^n \# \Delta_i S_i = \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^n 3 \cdot 4^{i-1} \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{9^i \cdot 4} = \\ &= \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} \frac{a_0^2}{4\sqrt{3}} = \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{4} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i \frac{a_0^2}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Vezmeme limitu k nekonečnu (Pozn. redakce: za pomoci aritmetiky limit a součtu geometrické řady):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{4} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i \frac{a_0^2}{4\sqrt{3}} &= \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{4} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i \frac{a_0^2}{4\sqrt{3}} = \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{a_0^2}{4\sqrt{3}}}{1 - \frac{4}{9}} = \\ &= \frac{a_0^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{9a_0^2}{4 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot 3a_0^2 + 9a_0^2}{20\sqrt{3}} = \frac{24a_0^2}{20\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} a_0^2 \end{aligned}$$

Kde a_0 je strana originálního trojúhelníka.

Vzorová řešení 5. dílu

Úloha 1

Zadání:

Ukaž, že pro g , které nenabývá nuly na nějakém okolí vyšetřovaného bodu, je na takovém okolí tvrzení „existuje nenulové C takové, že $|f(x)| < |C \cdot g(x)|$ “, totéž, co „existuje nenulové C takové, že $|f(x)| \leq |C \cdot g(x)|$ “. (Tedy že nám nestačí v ostrém ohraničení jen zaměnit neostrou nerovnost za ostrou.)

Řešení od Ivana Žemličky:

Jedna implikace, $\exists C_1 : |f(x)| < |g(x) \cdot C_1| \implies \exists C_2 : |f(x)| \leq |g(x) \cdot C_2|$, platí, protože „použiji“ $C_2 = C_1$, když platí $<$, musí platit i „širší“ \leq .

Obrácenou implikaci, $\exists C_1 : |f(x)| \leq |g(x) \cdot C_1| \implies \exists C_2 : |f(x)| < |g(x) \cdot C_2|$, dokážu tak, že zvolím $|C_2| = |C_1| + |\Delta C|$, kde $\Delta C \neq 0$. Potom platí

$$\exists C_1 : |f(x)| \leq |g(x) \cdot C_1| < |g(x) \cdot C_1| + |g(x) \cdot \Delta C| = |g(x) \cdot C_2|.$$

Problém 2

Zadání:

Platí, že když $f(x) \ll g(x) \ll h(x)$, tak $f(x) \ll h(x)$. Pro kladná reálná čísla $a < b$ a $1 < c < d$ platí tzv. růstová škála

$$a^{-x} \ll x^{-a} \ll \ln^{-a}(x) \ll 1 \ll \ln^a(x) \ll \ln^b(x) \ll x^a \ll x^b \ll c^x \ll d^x \ll x! \ll x^x$$

pro x jdoucí do nekonečna a

$$x^b \ll x^a \ll 1 \ll x^{-a} \ll x^{-b}$$

pro x jdoucí do nuly.

Dokažte některé tyto nerovnosti.

Řešení od Ivana Žemličky:

Lemma (tranzitivita) $f(x) \ll g(x) \wedge g(x) \ll h(x) \implies f(x) \ll h(x)$.

Důkaz: Z předpokladu:

$$\forall C_1 \exists \delta_1 \forall x \in P(X_0, \delta_1) : |f(x)| < |C_1 \cdot g(x)|$$

$$\forall C_2 \exists \delta_2 \forall x \in P(X_0, \delta_2) : |g(x)| < |C_2 \cdot h(x)| \quad (\Leftrightarrow |C_1 \cdot g(x)| < |C_1 \cdot C_2 \cdot h(x)|)$$

zvolím $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, když $C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak $C = C_1 \cdot C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a C může nabývat všech hodnot v této množině

$$\forall C \exists \delta \forall x \in P(X_0, \delta) : |f(x)| < |C_1 \cdot g(x)| < |C_1 \cdot C_2 \cdot h(x)| = |C \cdot h(x)|,$$

tedy $f(x) \ll h(x)$.

Řešení od Dr.^{MM} Daniela Skýpaly:

Budeme brát vždy podíl dvou funkcí a ten vždy pošleme do nekonečna. Začneme ze začátku něčím jednoduchým:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^a(x)}{1} = +\infty$$

Takže $1 \ll \ln^a(x)$. Zároveň můžeme tohoto výsledku využít znovu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^{-a}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^a(x)}{1} = +\infty$$

Budeme pokračovat stále něčím jednoduchým:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{b-a} = +\infty^{b-a}$$

A protože $b > a$:

$$+\infty^{b-a} = +\infty$$

Všimneme si, že s logaritmy je naprosto stejná situace:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^b(x)}{\ln^a(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^{b-a}(x) = +\infty$$

Snadno můžeme pokračovat:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d^x}{c^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{c}\right)^x = \left(\frac{d}{c}\right)^{+\infty}$$

A zase, protože $d > c$, tak mocníné číslo větší než 1:

$$\left(\frac{d}{c}\right)^{+\infty} = +\infty$$

Podívejme se, co zatím máme:

$$a^{-x} ? x^{-a} ? \ln^{-a}(x) \ll 1 \ll \ln^a(x) \ll \ln^b(x) ? x^a \ll x^b ? c^x \ll d^x ? x! ? x^x$$

Pojďme začít od konce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{x!} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x-2} \cdots$$

Poznámka redakce: Zde byla v řešení chyba, jelikož první zlomek je sice roven 1 a další jsou větší než 1, ale ani součin nekonečně čísel větších než 1 nemusí být nekonečno.⁸ Můžeme si však všimnout, že „druhých“ $\frac{x}{2}$ činitelů je větších než 2. Součin nekonečně čísel větších než 2 je nekonečno. Konec poznámky.

Dále se vrhneme na:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x!}{d^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{d} \cdot \frac{2}{d} \cdots \frac{d-1}{d} \cdot \frac{d}{d} \cdot \frac{d+1}{d} \cdots$$

Zde si všimneme, že zlomků, které mají hodnotu nejvýše 1 je konečně mnoho (přesně d), zatímco těch, které mají hodnotu větší než 1 je „nekonečně“. Proto můžeme každý zlomek $\frac{l}{d}$, kde $l < d$ vynásobit se zlomkem $\frac{l \cdot d^2}{d}$:

$$\frac{l}{d} \cdot \frac{l \cdot d^2}{d}$$

(Všimněme si, že každý zlomek $\frac{l}{d}$ si vybere jiný zlomek $\frac{l \cdot d^2}{d}$, tedy žádný jsme nepoužili dvakrát.) Po takovémto roznásobení se nám zlomky rozdělí na tři skupiny:

- Roznásobené zlomky – po jejich roznásobení dostaneme hodnotu l^2 , která je určitě alespoň 1.
- Zlomek $\frac{d}{d}$, který má hodnotu 1.

⁸Pokud se budou velmi rychle blížit k 1. Můžeme si třeba všimnout, že každé číslo menší než 42 můžeme vynásobit číslem větším než 1 tak, aby výsledek byl stále menší než 42.

- Zbylé zlomky (ty, kde jmenovatel je větší než číselník, a zároveň číselník není ve tvaru $l \cdot d^2$) – ty všechny mají určitě hodnotu větší než 1 a je jich nekonečně mnoho (ze všech s hodnotou větší než 1 (nekonečná množina) jsme odebrali ty ve tvaru $\frac{l \cdot d^2}{d}$ (konečná množina), takže nám zbyla nekonečná množina).

Takže násobíme jedničky a skupinu nekonečných čísel větších než 1 (a rostoucích – pozn. redakce). A to dá výsledek $+\infty$.

Jsme tedy na:⁹

$$a^{-x} ? x^{-a} ? \ln^{-a}(x) \ll 1 \ll \ln^a(x) \ll \ln^b(x) ? x^a \ll x^b ? c^x \ll d^x \ll x! \ll x^x$$

Kromě toho se ještě pověnujme limitám do nuly:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^a|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^a} = \frac{1}{(\rightarrow 0^+)^a} = +\infty$$

Obdobně:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^{-a}|}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^a|} = +\infty$$

A také

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^a|}{|x^b|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^{b-a}|}.$$

Což je vzhledem k tomu, že $b > a$, v podstatě stejně jako první případ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^{b-a}|} = +\infty$$

A ještě jednou obdobně

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^{-b}|}{|x^{-a}|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^a|}{|x^b|} = +\infty$$

Takže

$$x^b \ll x^a \ll 1 \ll x^{-a} \ll x^{-b}$$

Úloha 3

Zadání:

Proč nám v případě Ω a ω nestačí libovolné funkce? Vždyť součet funkcí musí růst alespoň tak, jako jednotlivé funkce. Nebo ne?

⁹Pozn. redakce: zbytek už je asi dost těžký, lze ho dokázat přes vlastnosti exponenciály, ale ty tu nemáme zavedené.

Řešení od Dr.^{MM} Jiřího Polácha:

Jelikož růst funkce pozorujeme u absolutní hodnoty, nezajímá nás, jestli je funkce rostoucí či klesající, pouze jak rychle roste/klesá. Víme, že funkce roste¹⁰ alespoň stejně rychle jako $h(x)$. Může však nastat případ, kdy se tyto funkce vyruší, třeba když budou nabývat stejných $g(x)$ hodnot (nebo budou podobné) s opačným znaménkem např. funkce $g(x) = x$ a $h(x) = -x$. Součet těchto funkcí však neroste neboť je 0.

Úloha 6

Zadání:

Spočítejte následující limity pomocí symbolů zdefinovaných v 5. čísle:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \pi} - x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{(x - 4)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27} + 3}{x}.$$

Řešení od Dr.^{MM} Jiřího Polácha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4} &\in \frac{5x^4 + 2\mathcal{O}(x^3)}{3\mathcal{O}(x) + 10x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + \mathcal{O}(x^3)}{\mathcal{O}(x) + 10x^4} \subset \\ &\subset \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + o(x^4)}{o(x^4) + 10x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{o(x^4)}{x^4} + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \{0\}}{\{0\} + 10} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4} &\in \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^5 + 2\mathcal{O}(x^2)}{\mathcal{O}(x^2) + 5x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^5 + \mathcal{O}(x^2)}{\mathcal{O}(x^2) + 5x^4} \subset \\ &\subset \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^5 + o(x^4)}{o(x^4) + 5x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{o(x^4)}{x^4} + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x + \{0\}}{\{0\} + 5} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4} &\in \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\mathcal{O}(x^4) + 2\mathcal{O}(x^3)}{3x + 10\mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x^3)}{3x + \mathcal{O}(x^4)} \subset \\ &\subset \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{3x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{o(x)}{x}}{3 + \frac{o(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{0\}}{3 + \{0\}} = \frac{0}{3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4} &\in \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8\mathcal{O}(x^5) + 2x^2}{x^2 + 5\mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x^5) + 2x^2}{x^2 + \mathcal{O}(x^4)} \subset \\ &\subset \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2) + 2x^2}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{o(x^2)}{x^2} + 2}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{\{0\} + 2}{1 + \{0\}} = 2 \end{aligned}$$

¹⁰Poznámka redakce: v absolutní hodnotě.

Zbytek byl trochu chyták, jelikož pokud použijeme tento postup přímo, dostaneme $O(x) - O(x)$, s čímž je, jak jste viděli v úloze 3, problém. Je třeba první krok udělat stejně:

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - \pi} - x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \pi} - x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - \pi} + x}{\sqrt{x^2 - \pi} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \pi - x^2}{x \cdot (\sqrt{x^2 - \pi} + x)} \in \\ &\in \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x \cdot (\sqrt{\Omega(x^2)} - \pi + \Omega(x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x \cdot (\sqrt{\Omega(x^2)} + \Omega(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x \cdot (\Omega(x) + \Omega(x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x \cdot \Omega(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\Omega(x^2)} \subset \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(1)}{\omega(1)} = 0. \end{aligned}$$

Jediné, jak zde můžeme použít naši novou teorii, je ověřit, že úpravy, které děláme jsou nutné, jelikož $\sqrt{x-3} - 1 = \mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x-3} + 1}{\sqrt{x-3} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-3-1}{(x-4) \cdot (\sqrt{x-3} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27} + 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27} + 3}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27}^2 - 3\sqrt[3]{x^3 - 27} + 9}{\sqrt[3]{x^3 - 27}^2 - 3\sqrt[3]{x^3 - 27} + 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 27 + 27}{(x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 27}^2 - 3\sqrt[3]{x^3 - 27} + 9)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{27}{x^3}} - \frac{3\sqrt[3]{x^3 - 27} + 9}{x^2} \right)} \in \\ &\in \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{1-0} - \frac{3\sqrt[3]{\mathcal{O}(x^3) - 27} + 9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{3\sqrt[3]{\mathcal{O}(x^3)} + 9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{3\mathcal{O}(x) + 9}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{\mathcal{O}(x)}{x^2}} = \frac{1}{1-0} = 1. \end{aligned}$$

Úloha 7

Zadání:

Spočítejte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 42 \cdot x^2 + e \cdot \log(x) + \frac{\pi}{x} + 100 \cdot \sin(x)}{\frac{1}{666} x^x + x^{1000}}.$$

Řešení od Dr.^{MM} Zdeňka Mareše:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 42 \cdot x^2 + e \cdot \log(x) + \frac{\pi}{x} + 100 \cdot \sin(x)}{\frac{1}{666}x^x + x^{1000}}$$

$$L \in \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{O}(2^x) + 42 \cdot \mathcal{O}(x^2) + e \cdot \mathcal{O}(\log x) + \pi \cdot \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) + 100 \cdot \mathcal{O}(\sin x)}{\frac{1}{666}\mathcal{O}(x^x) + \mathcal{O}(x^{1000})} = \mathcal{L}_2$$

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{O}(2^x) + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(\log x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathcal{O}(\sin x)}{\mathcal{O}(x^x) + \mathcal{O}(x^{1000})}$$

$$\mathcal{L}_2 \subset \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{O}(2^x) + o(2^x) + o(2^x) + o(2^x) + o(2^x)}{\mathcal{O}(x^x) + o(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{O}(2^x) + o(2^x)}{\mathcal{O}(x^x) + o(x^x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(x^x) + o(x^x)}{\mathcal{O}(x^x) + o(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(x^x)}{\mathcal{O}(x^x)} = \{0\}$$

Limita (L) je v množině obsahující pouze 0, tedy musí být rovna 0.

Úloha 8

Zadání:

S použitím tzv. Taylorovy řady¹¹ pro sinus v bodě 0 vypočítejte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x^2) - 6x^2}{x^{10}} + \frac{36}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 42} \frac{\sin(x - 42)}{x - 42}.$$

Taylorova řada pro sinus v bodě nula vypadá následovně

$$\sin x \in x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot \dots \cdot 7} + \dots \pm \frac{x^{2k+1}}{2 \cdot \dots \cdot (2k+1)} + o(x^{2k+2}) =$$

$$= \sum_{n=1}^k (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2k+2}), \text{ pro libovolné } k \text{ přirozené.}$$

Mírně upravené řešení od Ivana Žemličky:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3} =$$

$$= -\frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{\Omega(x^3)} = -\frac{1}{6}$$

¹¹Taylorova řada je takový obecný postup, jak odhadnout funkci pomocí polynomu. K jejímu spočítání je však nutné znát, co je to derivace, takže se tu s ní víc zabývat nebudeme. Více o Taylorově řadě najdete na https://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_%C5%99ada, ale pozor, ne u všech lze „zbytek řady“ nahradit $o(x^n)$ jako zde.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x^2) - 6x^2}{x^{10}} + \frac{36}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 36x^4 + \frac{6^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{10} + o(x^{12})}{x^{10}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{o(x^{12})}{x^{10}} = \frac{6^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^{10})}{\Omega(x^{10})} = \frac{324}{5} = 64.8 \end{aligned}$$

Substituce $y = x + 42$ (tato funkce je spojitá, takže můžeme použít větu o limitě složené funkce):

$$\lim_{x \rightarrow 42} \frac{\sin(x - 42)}{x - 42} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + o(y^2)}{y} = 1 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{o(y)}{\Omega(y)} = 1$$

Díl 6: Závěr

Vítejte u posledního dílu nekonečen. Za celý ročník jsme si ukázali, že v matematice existuje mnoho různých (typů) nekonečen. Každému z těchto nekonečen se v matematice dal formální smysl a zkoumají se jeho vlastnosti. Pokud byste si z tohoto tématka měli odnést jednu jedinou věc, tak je to to, že když narazíme v matematice na něco, co v naší teorii na první pohled nejde (mít nekonečný počet hostů a pokojů, dělit nulou, sčítat nekonečně čísel, ...), byla by velká chyba říkat, že to nejde a že to nemá cenu zkoumat.

Téměř vždy si totiž lze daný jev nějak zadefinovat. Pokud tato definice není v rozporu s našimi dosavadními znalostmi nebo jsme schopni tento rozpor přehlédnout (například se chceme k \aleph_0 chovat jako k číslu, přičemž přehlízíme, že se přičtením nenulového čísla nezmění, jako ostatní čísla), tak nám můžou vzniknout různé teorie, které dojdou k zajímavým, i když na první pohled možná neintuitivním výsledkům.

Různé teorie mohou mít různá omezení. Například kdybychom si v limitách do reálných čísel nepřidali dvě nekonečna $+\infty$ a $-\infty$, ale pouze jedno, tak můžeme tvrdit, že $1/0$ máme vždy definované jako toto nekonečno. Pak jsme však zase ztratili informaci o tom, jestli je to tak, že se čísla zvětšují nebo zmenšují, když jdeme k nule, což vede k tomu, že si nemůžeme být jistí, že součet funkcí jdoucích do nekonečna bude nekonečno, protože jedna mohla být záporná a druhá kladná.

Mají však i různé výhody, na reálnou osu s jedním nekonečnem se lze dívat jako na kružnici (když zapomeneme, že existují vzdálenosti a budeme se dívat jen na to, která čísla jsou „vedle sebe“), jelikož v reálných číslech není rozdíl mezi „nedosažitelností“ nekonečna a „nedosažitelností“ každého jiného čísla, například nuly. Stejně jako je interval $(-1, 1)$ okolí nuly, tak je $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{\infty\}$ okolí ∞ .

Jedno nekonečno můžeme zavést i na ploše (tedy na \mathbb{R}^2 nebo komplexních číslech). V geometrii se však častěji pracuje s nekonečnem každým směrem, tedy



nespočetně mnoho nekonečny, čímž dostaneme tzv. projektivní rovinu, o tom více pojednává seriál Matematického korespondenčního semináře¹². Taková rovina má hezké vlastnosti, jako například to, že se každé dvě přímky (i rovnoběžky) protínají v právě jednom bodě, nebo že kuželosečky (parabola, hyperbola, elipsa) jsou stále „jedna a ta samá“, jenom jinak deformovaná kuželosečka.

Touto zmínkou jsme se dostali až na konec naší pouti po nekonečnech, která začala v Hilbertově hotelu, kde jsme měli *nekonečný počet* hostů, pokračovala po cestě schované za věží, která se *nekonečně blíží* k místu, kde i podle naší intuice navazuje, přestože ji nevidíme. Následně jsme museli *sečíst nekonečně mnoho* jejích nekonečně malých částí. Až jsme zjistili, jak rychle *míří do nekonečna*.

Mějte se nekonečně krásně.

Jidáš; jonas.havelka@volny.cz



¹²<https://prase.cz/archive/39/uvod1s.pdf>

Téma 6 – Růst monokrystalů

Milí řešitelé, toto je pravděpodobně poslední číslo, ve kterém vyjdou příspěvky k tématku Růst monokrystalů. Všem, kteří řešili a psali články, děkujeme a doufáme, že budete řešit další témátka v následujícím ročníku M&Mka. Velmi nás potěšila vaše iniciativa a chuť experimentovat a přemýšlet nad vaší prací. Níže najdete články od tří řešitelů, které se věnují jak experimentům, tak i rešerši na téma krystalizačních technik pro výrobu monokrystalů. Přejeme příjemné počtení!

Krystaly

7b

Bc.^{MM} Vít Faltus

Můj první pokus o vytvoření velkého monokrystalu byl spíš takový zkušební, což znamená, že jsem moc nedbal na okolní podmínky jako například na teplotu a ani můj nasycený roztok nebyl skutečně nasycený. Prostě mi šlo o to vyrůst aspoň nějaký monokrystal.

Moje aparatura experimentu se skládala ze sklenice s nasyceným roztokem NaCl a na špejli namotané niti, která měla sloužit jako krystalizační zárodek. Po přibližně 5 dnech jsem vytáhnul nit z roztoku. Na konci této nitě, který byl ponořen do roztoku, vykristalizovaly tři malé krychlové krystalky, každý o velikosti hrany přibližně 2 mm, které vypadaly jako monokrystaly. Dále se na niti vyskytoval jeden velký polykrystal v sekci nitě, která byla těsně nad hladinou (viz obrázek 20).



Obrázek 20: Výsledek krystalizace



Při bližším zkoumání sklenice jsem si všiml na dně usazených malých krystalků, pravděpodobně také monokrystalů. Avšak dno sklenice bylo poměrně malé, a proto se některé krystalky spojily.

Díky našemu fyzikáři jsem se dostal ke kamenci ($\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$), takže jsem mohl začít růst trošku větší krystaly. Z předešlých zkušeností jsem měl dvě možnosti, jak tyto krystaly vyrůst: znovu použít nit jako krystalizační jádro, nebo se pokusit růst bez jádra pouze na dně nádoby a při druhém pokusu použít krystaly z prvního růstu jako krystalizační jádra.

Rozhodl jsem se pro druhou možnost z více důvodů, například jsem diskutoval růst krystalů s lidmi, kteří tomu rozumí, měl jsem po ruce Petriho misky a chtěl jsem vyzkoušet, zda by tento způsob mohl fungovat. Nyní moje aparatura byla mnohem jednodušší než ta předchozí: Petriho miska a nasycený roztok kamence. Zato příprava byla složitější, hlavně příprava nasyceného roztoku. Řekl jsem si, že čím více budu mít roztoku, tím více možností experimentů najednou.

Nasypal jsem do půllitrové zavařovací sklenice přibližně 100 g kamence a zalil ho vodou, pak jsem se sklenicí po dva dny třepal. Po dvou dnech jsem část roztoku přefiltroval a nalil do Petriho misky. Stejným způsobem jsem si ve stejné době připravil i nasycený roztok NaCl , abych poté mohl porovnávat růst krystalů různých nasycených roztoků.

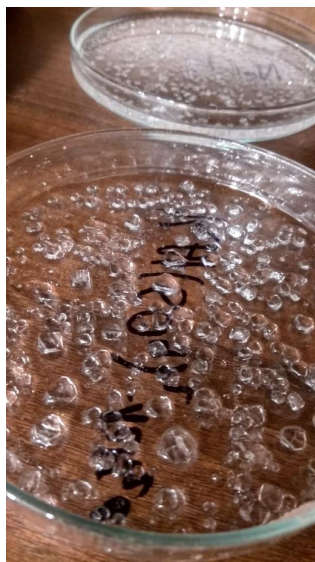
Jako zárodek u nasyceného roztoku kamence jsem použil jeden krystalek z kamence, který jsem nevyužil. U NaCl jsem použil jako zárodek obdobně krystal, ale NaCl . Bohužel se mi rozpustil, což vypovídá o mé nedokonalé přípravě nasyceného roztoku, naštěstí se mi to u kamence nestalo. Petriho misku jsem umístil do skříňky a čekal jsem.

Po jednom dni jsem začal pozorovat jemnou krystalizaci na dně. Malých krystalků bylo velmi mnoho, tak jsem se rozhodl v zájmu růstu největších krystalů jemně odhrnovat od nezdařilejších a největších kousků ty menší, aby mi náhodou nesrostly.

Počkal jsem, než se všechen roztok odpařil, a pak jsem vybral ty největší a nepovedenější krystaly a zbytek jsem znovu použil na výrobu nasyceného roztoku. Vyrostlý krystal z krystalizačního jádra se mi někde v procesu ztratil mezi menšími krystalky, takže jsem nemohl porovnat, jestli bylo výhodnější růst krystal se zárodkem nebo bez zárodku. Tipnul bych si, že krystal ze zárodku byl mnohem menší než některé největší krystaly, co jsem poprvé vyrostl. U NaCl jsem pozoroval podobné výsledky, až na to, že krystaly byly mnohem menší a měly také jiný tvar.

Konečně jsem měl pořádná krystalizační jádra, tak jsem celý postup zopakoval až na to, že jsem do Petriho misky s nasyceným roztokem umístil dva už předtím vyrostlé krystaly. Tentokrát jsem nečekal, až se mi všechen roztok vypaří, protože u pár krystalů se na povrchu, který byl už nad hladinou, vytvořily mini krystalky, nebo byly minimálně ze svrchu zamlženy. Jakmile jsem si všiml, že se jeden krystal blíží svou horní stranou hladině, tak jsem růst ukončil.

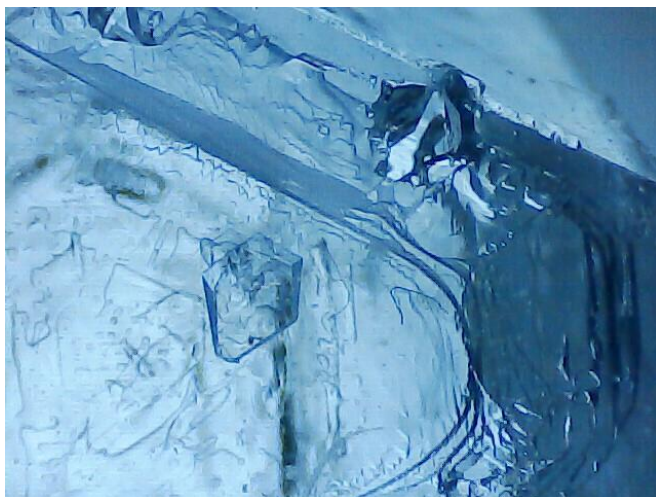
Bohužel se mi nepovedlo odstranit všechny malé krystalky v okolí růstu, takže



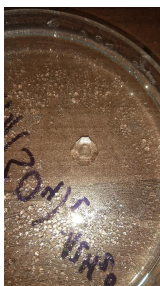
Obrázek 21: Krystaly kamence

ve finálním krystalu jsou právě vidět i tyto menší krystaly, jak je vidět na obrázku 22, který je $20\times$ zvětšený. V krystalu je také vidět krystalizační jádro, pokud ho porovnáme s obalem tohoto jádra, tak je mnohem více zakalené a hrubší.

Největší krystal, co jsem tímto způsobem vytvořil, měřil něco málo přes 10 mm (viz obrázky 23 a 24). Moje vyrostlé krystaly jsou velmi daleko od dokonalosti, v některých je prasklinka, v jiných jsou vrostlé jiné krystaly, v některých jsou vzduchové bublinky a některé jsou zakalené. Měl bych pár návrhů na zlepšení, například najít místo ke krystalizaci, kde není jen přibližně konstantní teplota, ale je i bez otřesů. Také bych se mohl zaměřit na lepší přípravu nasyceného roztoku. Na začátku jsem se pokoušel vytvořit jednoduchou míchačku pomocí magnetů a elektromotoru, aby příprava nespočívala pouze na tom, že si vzpomenu, že mám zamíchat roztok. Bohužel jsem od tohoto nápadu upustil, protože tření mezi magnety a dnem nádoby, kde byl roztok s práškem, bylo moc velké, tím pádem to můj malý elektromotor nezvládal a zahříval se. Další vadou tohoto designu byla jeho hlučnost, protože magnety v podstatě drtily jednotlivé krystalky pod sebou.



Obrázek 22: 20× zvětšená fotografie výsledných krystalů NaCl



Obrázek 23: Krystal kamence



Obrázek 24: Rozměry krystalu kamence

Příprava monokrystalů

6.5b

Dr.^{MM} Zdeněk Mareš

Czochralského metoda

Czochralského metoda je tzv. kelímková technika růstu syntetických monokrystalů. Výsledným produktem je monokrystal o přesně definované krystalografické orientaci s velmi pravidelnou krystalickou mřížkou¹³. Nejčastěji se jedná o monokrystaly křemíku, germania nebo arsenidu galitého.

Základní princip výroby křemíkového monokrystalu Czochralského metodou spočívá ve vzniku taveniny vysoce čistého polykrystalického křemíku¹⁴ a v následném tažení monokrystalu z této taveniny pomocí zárodku o přesně stanovené krystalografické orientaci v Czochralského tažičce. Mezi nejdůležitější požadavky výroby patří bezdislokační¹⁵ růst monokrystalů, kterého lze docílit vysokou čistotou vstupních surovin a prostředím.

Výhodou je vznik nejkvalitnějších krystalů pěstovaných z vlastní taveniny. Nevýhodou je možnost reakce nádoby s materiálem.

Bridgman-Stockbargerova metoda

Tato metoda je další technika růstu syntetických monokrystalů a zahrnuje dvě podobné ale odlišné techniky využívané primárně pro pěstování monokrystalických ingotů. Metody zahrnují zahřívání polykrystalického materiálu nad jeho teplotu tání a pomalé chlazení z jednoho konce jeho nádoby, kde je umístěn očkovací krystal (očkovací krystal je v tomto případě malý kousek monokrystalického materiálu, ze kterého má být vypěstován v laboratoři velký krystal, typicky stejný materiál). Na krystalu se pěstuje jediný krystal stejné krystalografické orientace jako očkovací materiál, který se postupně vytváří po délce nádoby. Proces může být prováděn v horizontální nebo vertikální orientaci a obvykle zahrnuje rotující kelímek k míchání taveniny.

Bridgmanova metoda je populární způsob výroby určitých polovodičových krystalů jako je například arsenid gallia (Czochralského metoda je pro něj obtížnější). Tento proces může spolehlivě vyrábět monokrystalické ingoty, ale nemusí nutně vést k jednotným vlastnostem v celém objemu krystalu.

Rozdíl mezi Bridgmanovou a Stockbargerovou technikou není velký. Obě metody využívají teplotní gradient a pohyblivý kelímek. Bridgmanova technika využívá relativně nekontrolovaný gradient vytvářený na výstupu z pece. Stockbargerova technika ale zavádí přepážku oddělující dvě spojené pece s teplotami nad a pod bodem mrazu. Stockbargerova modifikace Bridgmanovy techniky umožňuje lepší kontrolu nad teplotním gradientem na rozhraní tavenina-krystal.

¹³Pozn. redakce: to je ale cílem všech metod růstu krystalů, nejen Czochralského metody

¹⁴Pozn. redakce: ano, Czochralského metodou se vyrábí křemík, dá se ale použít i pro růst mnoha jiných kompozic

¹⁵Pozn. redakce: dislokace jsou čárové poruchy v krystalu

Výhodami jsou možnost uzavřít hermeticky¹⁶ kelímeček a možnost mnohonásobného růstu.

Verneuilova metoda

Verneuilova metoda je tzv. bezkelímková metoda růstu syntetických monokrystalů. Příkladem vyrobeného materiálu je Al_2O_3 (i s různými dopanty).

Princip této metody spočívá v tavbě práškového materiálu v plamenu. Prášek se rozpustí a dopadne na povrch krystalu umístěného v temperované komoře.

Výhodou je možnost vysoké koncentrace dopantů. Nevýhodou jsou však růstové podmínky vzdálené od termodynamické rovnováhy a vznik strukturních defektů.

„Studený kelímeček“

Studený kelímeček je další tzv. bezkelímková metoda růstu syntetických monokrystalů. Příkladem vyrobeného materiálu je ZrO_2 .

Studený kelímeček je metoda využívající stejnojmenné zařízení pro vysokofrekvenční indukční ohřev zaměřené na tavení. Kelímeček sestává z trubkovitých dílů, kolem kterých jsou umístěny závitky induktoru generující elektromagnetické pole, které svými vířivými proudy ohřívá materiál umístěný uvnitř kelímku. Princip spočívá v tom, že zdroj tepla je soustředěn přímo v ohřívaném materiálu a vlastní tavicí nádoba (studený kelímeček) je vnitřně chlazená vodou. Na rozhraní roztaveného materiálu a kelímku se vlivem intenzivního ochlazování vytvoří slabá, asi milimetrová křusta z vlastního taveného materiálu, která prakticky nahrazuje nádobu pro roztavený materiál.

Výhodou je, že samotný proces je velmi rychlý, jelikož teplo nevstupuje do ohřívaného materiálu jeho povrchem, ale vzniká přímo v něm. Další výhodou je skutečnost, že volbou kmitočtu generátoru můžeme volit rozložení tepla v ohřívaném materiálu. Třetí výhodou studeného kelímku je jeho bezvzdívková konstrukce, což znamená, že roztavený materiál se přímo nedotýká stěn kelímku ani jiného materiálu, který by se vlivem extrémní teploty mísil s taveninou, která proto dosahuje vysoké čistoty ve všech fázích tavy. Nevýhodou je vznik většího množství menších monokrystalů.

Růst monokrystalů

13.5b

Bc.^{MM} Radim Novák

Problém 1

Scintilace je jev, při kterém vznikají krátké záblesky světla při dopadu ionizujícího záření. Toto energetické záření je v krystalu pohlceno tzv. luminiscenčním centrem. Do krystalové mřížky se dostaly ionty cizího prvku. Tento atom pohlcuje energetické záření, excituje elektron a následně elektron „spadne“ do původního

¹⁶Pozn. redakce: možnost hermeticky uzavřít kelímeček umožňuje omezit reakci atmosféry s krystalem



energetického stavu. Při tomto zpětném procesu vyzáří v náhodném směru fotony s energií nižší než původní dopadající foton. Tohoto efektu lze využít při detekci ionizujícího záření. Při výrobě krystalů (třeba ZnS) se krystaly dopují kovem (v případě ZnS se dopují Ag). Kdybychom vzali jen polykrystalický ZnS (Ag), mohla by se pohltit jen velmi malá část záření, takže by záblesk nebyl dost silný.

Problém 2

Czochralského metoda vznikla vlastně náhodou. Polský chemik Czochralsky kdysi zkoumal vlastnosti cínu. Jednou omylem ponořil své pero do roztaveného cínu místo do kalamáře. Pero vytáhl a na peru měl jakoby „ocásek“ krystalu cínu, po troše zkoumání zjistil, že krystal cínu je monokrystal. Czochralského metoda se dodnes používá, jen už ve vylepšené formě. Krystaly vznikají tak že... Opravdu sis myslel, že budu psát o té nejnudnější a nejzákladnější metodě? Nikdy. Každopádně, floating zone method (metoda plovoucí zóny) je mnohem víc cool. Krystal roste z tzv. prekurzoru. Prekurzor se připravuje poměrně těžko, takže jen uvedu, že je to tyčinka materiálu, ze kterého rosteme. Tato tyčinka je upevněna na dvou táhlech. Zdola a shora. Krystal se roste pomocí laserů či halogenových lamp. Tato zařízení zahřívají část tyčinky, která se taví a následně tuhne – vzniká monokrystal. Zóna, která vzniká zahřátím, se nazývá floating zone a během růstu se prekurzorem hýbe, aby zkrystalizovala celá tyčinka. Tato metoda má velkou výhodu v různosti materiálů, ze kterých rosteme. Czochralského metodou lze růst jen za a) vodivé materiály nebo za b) materiály s teplotou tání menší než cca 1800 stupňů Celsia. Tato metoda žádná taková omezení nemá. U této metody naopak záleží třeba na takové drobnosti jako barva materiálu. Třeba bílé materiály se rozehřívají opravdu špatně tím, že na ně svítíte laserem.

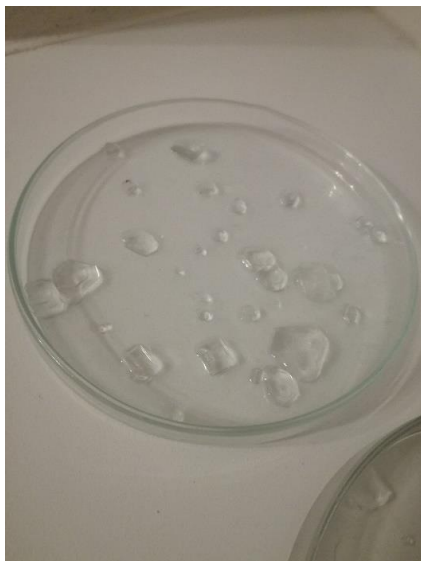
Problém 3

Krystaly jsem rostl z kamence. Vzal jsem dobře vymytou sklenici od majonézy a dal do ní asi $\frac{3}{4}$ jejího objemu vody. Zbytek jsem dosypal kamencem. Sklenici jsem uzavřel. Nasycoval jsem asi 3 dny. Když jsem si vzpomněl, sklenici jsem zatřásl. Poté jsem přes filtrační papír nalil roztok do dvou Petriho misek a čekal asi 4 dny.

Po úspěchu růstu těchto krystalů jsem krystaly kamence zkoušel dopovat ještě modrou skalicí. Nasytil jsem opět roztok kamence a stejným způsobem i roztok skalice. Poté jsem do Petriho misek slil tyto dva roztoky v poměru cca 5/6 (5/6 kamence, zbytek skalice).

Výsledek: Nejdříve zkrystalizovaly krystaly kamence a na nich pak krystaly modré skalice. Experiment se sice nepovedl, ale ukazuje to, jak je krystalizace z roztoku čistící proces.

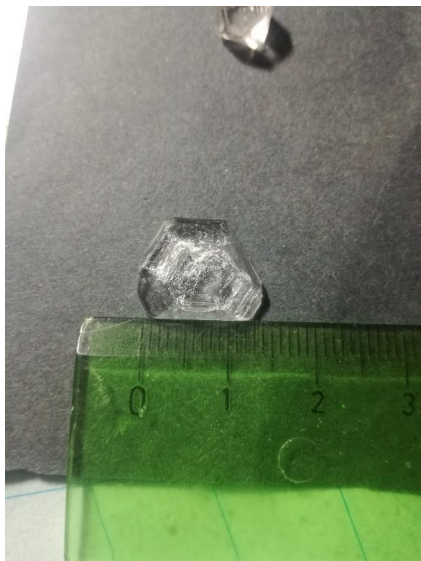
A nakonec jedna rada: Ujistěte se, že máte opravdu čisté misky, ve kterých rostete!



Obrázek 25: Po 4 dnech



Obrázek 26: Nejlepší krystal (7 mm na délku), nemá takřka žádné vady



Obrázek 27: Největší krystal

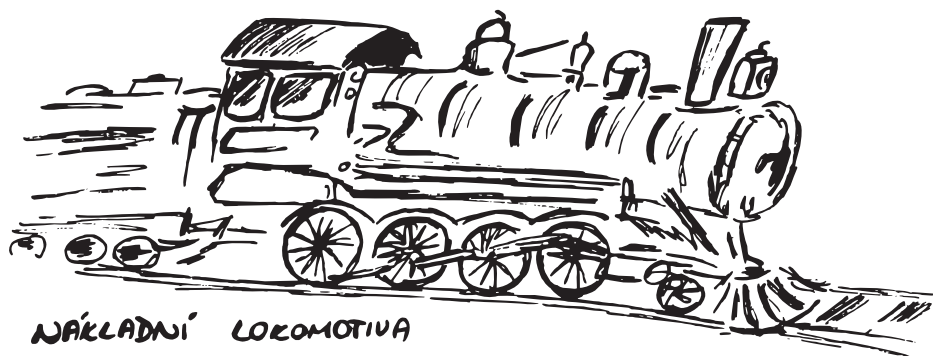


Obrázek 28: Krystaly modré skalice na krystalech kamence

Téma 7 – Zmenšené modely

I zmenšovací témátko se chýlí ke konci, a je tedy na čase jej uzavřít. V závěrečném díle shrneme některé vaše postřehy a ukážeme si řešení výtahové úlohy z minulého čísla.

Předně bych chtěl poděkovat všem, kteří témátko řešili a objevovali nástrahy vymyšlení modelů. Hned potom bych se chtěl mnohým z nich omluvit za pomalé opravování jejich řešení.



Vaše postřehy

Vesmíš jste se zabývali problémy nastíněnými v čísle. Pro jízdu lokomotivy do kopce Dr.^{MM} Václav Tichý navrhuje dát modelové lokomotivě silný motor, který bychom regulovali pro dosažení správné zmenšeného zrychlení. Mgr.^{MM} Láďa Vávra podotýká, že pokud bychom zachovali materiál, zmenšení rozměrů způsobí kubickou změnu hmotnosti.

Dr.^{MM} Jiří Polách popisuje dvě varianty, jak se zrychlením naložit:

Jelikož se u škálování mění pouze základní veličiny jako je dráha a čas, nebere se ohled na jejich mocniny. Pokud bychom čas X -krát zpomalili nebo zrychlili, zrychlení by se nechovalo jako v realitě, ale bylo by ovlivněné zmenšením/zvětšením. Za normálních podmínek platí: $s = \frac{at^2}{2}$. Když se koukneme, jak to ovlivní X -násobné škálování, dostaneme: $s \cdot X = \frac{a(t \cdot X)^2}{2}$, $a = \frac{2sX}{t^2 X^2}$, $a = \frac{2s}{t^2 X}$. Tady se vyskytuje X navíc. Pokud ho přehodíme na druhou stranu ke zrychlení, dostáváme vztah, ze kterého vyplývá, že se zrychlení X -krát zmenší/zvětší oproti realitě. Pokud by bylo cílem modelu pozorovat zrychlení, museli bychom čas zmenšit/zvětšit o odmocninu z X a dráhu o X (případně X a X^2).

Láďa a Jiří tím tedy rovnou nahlíží, že některé veličiny se škálují nelineárně. Ohledně nelinearity Láďa dodává, že i mnoho dalších veličin (objem, hybnost, hmotnost, spotřeba) se nebude škálovat lineárně při lineární změně rozměrů.



Při modelování sluneční soustavy mnozí narazili na obtíže s vyrobením modelu (gravitační působení stavitele, odpor vzduchu zpomalující planety). Dr.^{MM} Václav Tichý se zabýval zmenšením soustavy, kdy si za modelovou střední vzdálenost Země–Neptun volil 0,2 m a 5 m a došel k závěru, že při tomto zmenšení budou planety moc malé (poloměr modelového Slunce vyšel přibližně 31 μm , resp. 77 μm) a planety se budou pohybovat moc pomalu (rychlost pohybu Země 0,135 m/rok, resp. 0,105 m/rok).

Dr.^{MM} Jiří Polách opět zkoumal různé možnosti škálování. Z rovnosti gravitační a odstředivé síly došel k výrazu $\omega^2 X^2 = G \frac{m_2}{r^3}$ při X -násobném škálování hmotností a vzdáleností. To komentuje:

Naskýtají se 3 možnosti:

1. Škálovat hmotnost, konkrétně o X^2 . Model by vypadal k nerozeznání od reality, a navíc bychom mohli použít i stejné materiály. Hustota totiž závisí na 3. mocnině délky a 1. mocnině hmotnosti, tedy by se navzájem vyrušily. Proto je tato možnost asi nejlepší jako dekorace nebo pro pozorování rychlosti.
2. Škálovat délku pouze o $\sqrt[3]{X}$. V tomto modelu by se opět zachovala hustota planet. Problém by nastal při pozorování, protože skoro všechny veličiny by nebyly v měřítku.
3. Škálovat i frekvenci oběhu. Model by už nevypadal tak hezky, protože by se planety nepohybovaly podle reality.

Vzorové řešení úlohy s výtahem

Řešení úlohy o výtahu

Zadání:

Do jaké výšky nad podlahu výtahu se člověk vznese, pokud výtah do své cestovní rychlosti 3 m/s směrem dolů bude zrychlovat se zrychlením 1,2 g? Jakou rychlostí člověk dopadne na podlahu výtahu?

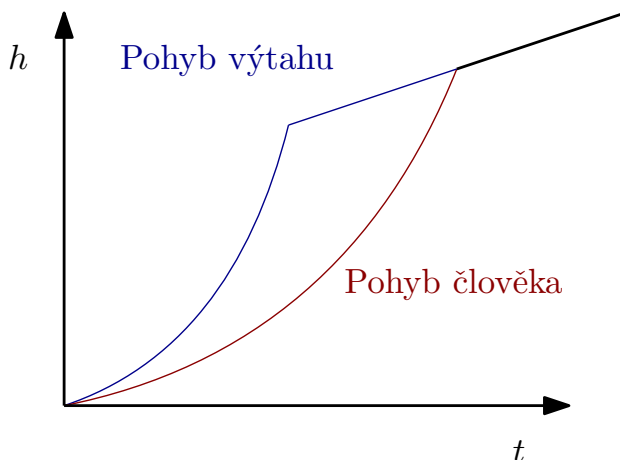
Pohyby těles

Výtah zrychluje rovnoměrně se zrychlením 1,2 g z klidu do rychlosti 3 m/s. To stihne za $t = \frac{v}{a} = \frac{3 \text{ m/s}}{1,2 \text{ g}} \approx 0,255 \text{ s}$. Poté se výtah pohybuje rovnoměrně rychlostí 3 m/s směrem dolů.

Člověk ve výtahu padá se zrychlením 1 g, až dokud nedopadne zpět na podlahu výtahu. Poté se i s výtahem pohybuje rychlostí 3 m/s.

Na počátku jsou člověk i výtah ve výšce $h = 0$.

Pro představu si načrtneme, jak se bude měnit výška v závislosti na čase. Víme, že při rovnoměrně zrychleném pohybu se mění kvadraticky („po parabole“), při rovnoměrném pohybu přibývá lineárně. Situaci znázorňuje graf na obrázku 29.



Obrázek 29: Náčrt pohybů obou těles

Výška vznesení

K výšce vznesení lze dojít několika cestami, které se liší jen tím, z jakého úhlu pohledu se na problém díváme.

Více úvahová cesta začíná následující myšlenkou: Dokud výtah zrychluje, tak ujíždí pod nohama člověku a člověk se tak od podlahy vzdaluje (se zrychlením $1,2g - 1g = 0,2g$). To znamená, že na konci zrychlování je určitě od podlahy nejdál od rozjezdu výtahu.

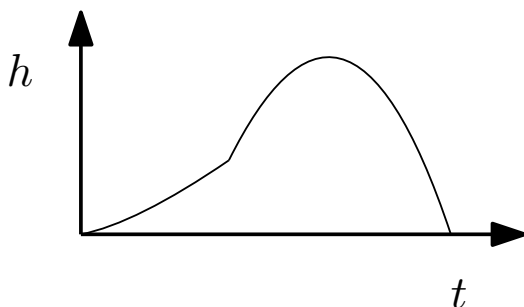
Výtah přestane zrychlovat po $0,255$ s. V tu chvíli má ale člověk rychlost $v = a \cdot t = g \cdot 0,255 \text{ s} \approx 2,5 \text{ m/s}$, takže mu výtah pořád ujíždí; ujíždět přestane v okamžiku, kdy člověk též dosáhne rychlosti 3 m/s , tedy v čase $t = \frac{v}{a} = \frac{3 \text{ m/s}}{g} \approx 0,306$ s.

Tato doba se též dá dopočítat z rychlosti výtahu, když přestane zrychlovat: Zrychlení je rovnoměrné, takže pokud člověk potřebuje zrychlit ještě o $(3 \text{ m/s} - 2,5 \text{ m/s}) \approx 0,5 \text{ m/s}$, tak to provede v čase $t = \frac{0,5 \text{ m/s}}{g} \approx 0,051$ s od konce zrychlování výtahu, tedy v čase $0,051 \text{ s} + 0,255 \text{ s} \approx 0,306$ s.

Od tohoto okamžiku se člověk začíná přibližovat k podlaze výtahu (protože na rozdíl od výtahu se jeho rychlost dál zvyšuje), takže toto je skutečně doba, po které se člověk nachází nejvýše.

Nás ale nezajímala doba, nýbrž výška vznesení. Můžeme například spočítat, v jaké výšce se nachází podlaha výtahu a v jaké člověk. Člověk je jednodušší: celou dobu se pohybuje stále stejně zrychleně, takže jeho výška je $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g \cdot (0,306 \text{ s})^2 \approx 0,459 \text{ m}$. Výtah se nejdřív rozjížděl, takže v prvních $0,255$ s dosáhl výšky $h = \frac{1}{2} \cdot 1,2g \cdot (0,255 \text{ s})^2 \approx 0,382 \text{ m}$ a následně se za zbylých $0,051$ s jeho výška zvýšila o dalších $h = v \cdot t = 3 \text{ m/s} \cdot 0,051 \text{ s} \approx 0,153 \text{ m}$, celkem tedy $0,535 \text{ m}$. Odečtením dostaneme výslednou výšku vznesení $0,076 \text{ m}$.

Alternativní cesta je počítací: Uvědomíme si, že výška člověka nad podlahou v daném čase je prostě rozdíl poloh výtahu a člověka. Tento rozdíl můžeme také načrtnout do grafu (viz obrázek 30).



Obrázek 30: Průběh výšky člověka nad podlahou výtahu

Abychom znali skutečné hodnoty v tomto grafu, potřebujeme dopočítat vyjádření všech křivek v původním grafu. To naštěstí není složité.

Začneme člověkem. Ten padá volným pádem až do dopadu na podlahu, takže jeho křivka je $h = \frac{1}{2} \cdot g t^2$. Výtah se na začátku též pohybuje podle známého vzorce $h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 g \cdot t^2$, ale pak se začne pohybovat rychlostí 3 m/s. Musíme proto dopočítat předpis této lineární funkce (přímky).

Rovnoměrnou rychlost lze popsat např. vzorcem $h = v \cdot t + h_0$ pro nějakou počáteční vzdálenost h_0 . Určitě víme, že výtah skokově nezmění polohu, takže se v čase, kdy výtah přestane zrychlovat, musí oba předpisy protnout, tedy v čase $t \approx 0,255$ s je poloha $h = \frac{1}{2} \cdot 1,2 g \cdot t^2 \approx 0,382$ m. Také víme, že rovnoměrná rychlost výtahu je 3 m/s. Jediný neznámý parametr je tedy¹⁷ h_0 . Dosazením do vzorce z úvodu odstavce dostaneme $h_0 \approx (-0,382)$ m. Celá rovnice rovnoměrného pohybu tedy je $h = t \cdot 3 \text{ m/s} + (-0,382 \text{ m})$.

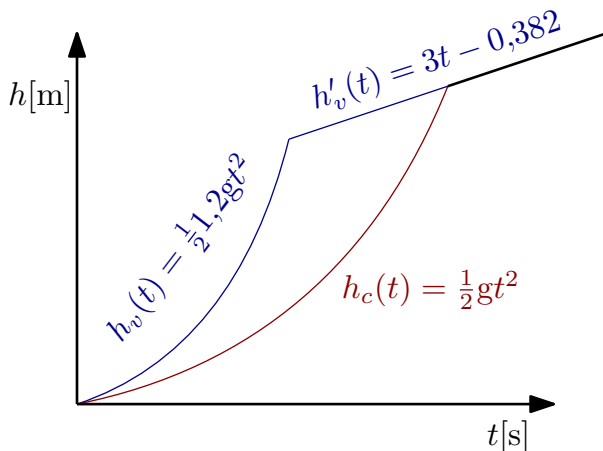
Výšku člověka nad podlahou pak pomocí těchto vzorců můžeme vyjádřit:

$$h(t) = h_v(t) - h_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 1,2 g t^2 - \frac{1}{2} \cdot g t^2 = 0,1 g t^2 & \text{pro } t \leq 0,255 \text{ s} \\ 3 \text{ m/s} \cdot t + (-0,382 \text{ m}) - \frac{1}{2} \cdot g t^2 & \text{pro } t \geq 0,255 \text{ s} \end{cases}$$

kde $h_v(t)$ je výška výtahu v čase t a $h_c(t)$ je výška člověka v čase t .

Nyní zbývá najít maximum této funkce. To též musíme udělat po částech. Pro $t \leq 0,255$ s je funkce rostoucí (tato parabola má vrchol v počátku), takže jeden bod podezřelý z maxima je pro $t \approx 0,255$ s. Dalším takovým bodem by mohl být vrchol druhé paraboly, pokud se nachází až za místem zlomu funkcí. Kvadratická funkce má vrchol v bodě $x = \frac{-b}{2a}$, kde a je koeficient jejího kvadratického členu

¹⁷Přítomnost parametru h_0 je neintuitivní, protože v našem příkladu ničemu neodpovídá. Nicméně je potřeba nějak vykompenzovat fakt, že náš pohyb neodpovídá jednoduššímu $h = vt$, protože počáteční zrychlení výtahu tuto přímku někam posunulo.



Obrázek 31: Graf pohybů obou těles se známými předpisy křivek

a b lineárního, zde tedy pro $t = \frac{-3 \text{ m/s}}{-1 \text{ g}} \approx 0,306 \text{ s} > 0,255 \text{ s}$. Hodnota výšky je tedy $h(0,306 \text{ s}) \approx 0,076 \text{ m}$.

Rychlost dopadu

Vzájemná rychlost člověka a výtahu je rozdíl jejich rychlostí. Pro výtah to tou dobou je rychlost 3 m/s , pro člověka je to rychlost podle předpisu volného pádu: $v = gt$. Potřebujeme tedy opět najít okamžik, kdy k dopadu člověka na podlahu dojde.

Pokud jsme se byli uchýlili k počítačí metodě, můžeme najít okamžik, kdy se výška nad podlahou zmenší na nulu, tedy $h(t) = 0$. To nastává v čase $t = 0$ (z horního předpisu h) a $t = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4 \cdot (-\frac{1}{2} \text{ g}) \cdot (-0,382 \text{ m})}}{2 \cdot (-\frac{1}{2} \text{ g})} \approx 0,431 \text{ s}$ (ze spodního předpisu; druhý kořen druhé kvadratické rovnice neuvažujeme, protože pro něj je $t < 0,255 \text{ s}$, a tedy jej funkce h nenabývá).

Výsledná rychlost dopadu je tedy $v_c - v_v = (g \cdot 0,431 \text{ s}) - 3 \text{ m/s} \approx 1,225 \text{ m/s}$

Pokud jsme se k počítačí metodě neuchýlili, můžeme se jí vyhnout tím, že si situaci představíme z pohledu podlahy výtahu. Víme, že když se člověk vznesl nejvyš, měl stejnou rychlost jako podlahy výtahu a byl $0,076 \text{ m}$ nad ní. Od tohoto okamžiku zrychloval směrem k podlaze volným pádem¹⁸, a tedy do podlahy narazil po čase $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,076 \text{ m}}{g}} \approx 0,125 \text{ s}$. V tento čas měl tedy člověk vůči podlaze rychlost $v = gt \approx 1,225 \text{ m/s}$.

Pavel; pavel.turinsky@matfyz.cz

¹⁸Buď si uvědomíme, že kabina výtahu tvoří inerciální vztažnou soustavu, nebo budeme uvažovat rozdíl rychlostí kabiny výtahu $v_v = 3 \text{ m/s}$ a člověka $v_c = gt + 3 \text{ m/s}$. Vidíme, že se rychlost odečte.

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Témata							\sum_0	\sum_1
				2	3	4	5	6	7			
37.	Bc. ^{MM} M. Vícha	3	19,9									7,5
38.	Mgr. ^{MM} V. Jůzková	4	58,2									7,3
39.	Bc. ^{MM} M. Valtrová	3	43,2									6,0
40.	R. Zábranská	1	5,2									5,2
41.	V. Menšíková	Z9	5,0		5,0					5,0		5,0
42.	J. Tregler	2	3,9									3,9
43.	R. Mayerová	Z9	3,0									3,0
44.	M. Plevová	3	2,2									2,2

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Výsledková listina 28. ročníku

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Číslo						\sum_1
				1	2	3	4	5	6	
1.	Dr. ^{MM} D. Skýpala	4	168,9	22,9	10,5	32,0	20,9	49,5		135,8
2.	Doc. ^{MM} M. Fof	4	325,3	9,0	36,9	52,8	11,0	4,2		113,9
3.	Dr. ^{MM} Z. Mareš	3	110,2	23,6	12,0	24,0	41,6	9,0		110,2
4.	Dr. ^{MM} J. Polách	3	109,4	36,8	3,5	26,8	19,8	22,5		109,4
5.	Mgr. ^{MM} L. Vávra	3	86,7	8,2	1,0	33,4	13,0	31,1		86,7
6.	Mgr. ^{MM} P. Šimová	1	82,0			55,7	9,5	16,8		82,0
7.	Mgr. ^{MM} J. Škopek	3	81,1	5,9	25,6	30,8	18,8			81,1
8.	Dr. ^{MM} V. Tichý	2	193,4	18,9	29,0	6,0	13,8	12,0		79,7
9.	Dr. ^{MM} A. Opl	4	110,3	42,0		25,0	4,0			71,0
10.	Dr. ^{MM} J. Kvapil	4	114,7	37,2	7,0	9,0	3,0	4,0		60,2
11.	Mgr. ^{MM} P. Jendele	3	69,1	16,8	1,0	14,0	22,5	2,5		56,8
12.	Mgr. ^{MM} K. Petrlíková	4	94,6	39,1		7,0				46,1
13.	Bc. ^{MM} A. Kolník	3	37,0	12,0	12,0	6,0	4,0	3,0		37,0
14.	Mgr. ^{MM} P. Hladík	4	75,1	10,1	7,0	6,0	9,0			32,1
15.	Bc. ^{MM} A. Bejdová	4	31,9			16,7	11,0	4,2		31,9
16.–17.	Dr. ^{MM} T. Flídr	4	133,8	16,5	14,4					30,9
	Dr. ^{MM} D. Čtvrtečka	2	128,1	7,9	23,0					30,9

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Číslo						\sum_1
				1	2	3	4	5	6	
18.	Dr. ^{MM} J. Knillová	3	115,8			18,3	3,7		6,0	28,0
19.	Bc. ^{MM} M. Haikl	3	27,9		7,5		13,4	6,5	0,5	27,9
20.	Bc. ^{MM} V. Faltus	2	26,8		12,3		10,0	4,5		26,8
21.	Bc. ^{MM} O. Popovský	2	26,3		15,3		11,0			26,3
22.	Bc. ^{MM} J. Křimská	3	35,8		10,5	6,5		8,8		25,8
23.	Bc. ^{MM} R. Novák	2	25,7		12,2		13,5			25,7
24.	Bc. ^{MM} M. Smrčka	2	23,6		11,6		12,0			23,6
25.	Bc. ^{MM} V. Verner	1	23,5		1,5	2,5	19,5			23,5
26.	Bc. ^{MM} J. Krejčí	2	21,8		15,8		5,5	0,5		21,8
27.	Dr. ^{MM} M. Boček	3	80,5		13,4			8,0		21,4
28.	Bc. ^{MM} M. Chrostek	2	28,0		17,0		1,5	2,0		20,5
29.	I. Žemlička	1	17,0						17,0	17,0
30.	Bc. ^{MM} V. Polášková	3	45,9		12,5	3,9				16,4
31.	J. Rypl	3	15,6		15,6					15,6
32.	M. Steinhauserová	Z8	11,5		3,5	0,0	8,0			11,5
33.	Dr. ^{MM} O. Piroutek	4	104,9		10,5					10,5
34.	L. Poljaková	2	10,4		1,4			9,0		10,4
35.–36.	L. Vokálová	3	8,0					8,0		8,0
	V. Bartáková	2	8,0				8,0			8,0
37.	Bc. ^{MM} M. Vícha	3	19,9		7,5					7,5
38.	Mgr. ^{MM} V. Jůzková	4	58,2		6,5	0,8				7,3
39.	Bc. ^{MM} M. Valtrová	3	43,2			6,0				6,0
40.	R. Záborská	1	5,2		2,2	1,0	2,0			5,2
41.	V. Menšíková	Z9	5,0						5,0	5,0
42.	J. Tregler	2	3,9		3,9					3,9
43.	R. Mayerová	Z9	3,0		3,0					3,0
44.	M. Plevová	3	2,2				2,2			2,2

Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK E-mail: mam@matfyz.cz
 Ke Karlovu 3 Web: mam.matfyz.cz
 121 16 Praha 2 FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

