STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVIII

Číslo 5

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí čtenáři,

do rukou se ti dostalo 5. číslo 28. ročníku a s ním přichází nejen možnost získání nových vědomostí, ale, jak sis jistě povšimnul, i jaro. S jarem přichází mnoho krásného, slunečné a teplé dny, úsměvy lidí a především chuť sednout si pod rozkvetlé keře, zamyslet se a začít sepisovat básně o kráse kolem nás či ji jen popsat do nového článku pro M&M.

Než tě uchvátí krása jara a s ní spojená touha po psaní článků, rádi bychom sdělili pár podstatných informací. Prvně připomínáme jarní soustředění, které se bude konat od 2. dubna do 10. dubna.

Za druhé, nejsme unešení jen jarem, ale i počtem článků, které k nám dorazily, přišlo jich šest a to od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Ládi Vávry, Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Mikuláše Smrčky a Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Ondry Popovského. Určitě doporučujeme se na ně podívat a přečíst si je.

Zatím se všechny články věnovaly jen monokrystalům. Rádi si přečteme i řešení problémů z jiných tématek, například lingvistiky či nekonečen. Tak se nebojte nad nimi zamyslet.

Vaši organizátoři

Obsah

Zadání a řešení témat

1. deadline: 26. dubna 2022 | 2. deadline: 24. května 2022
Nepropásněte poslední možnost odevzdat svá řešení a články v tomto ročníku!

Téma 2 – Oware

Milí řešitelé, Erechtheus zatím zůstává neporažen. Prozradím vám tedy některé nápady, které vám snad pomůžou porazit nejen jej, ale i Foronea a Glauka. Možná některé z nich pak využije i jeden z pozdějších králů.

Asi nejsložitější možnost je hrát si s nastavováním okna pro alfa-beta ořezávání. Je možné odhadnout správné nastavení mezí podle předchozí iterace prohlubování nebo velkou část prohledávání vyřešit velmi úzkým okýnkem. Doporučuju hledat informace o algoritmech NegaScout a MTD(f). Ale existují i mnohem snazší triky.

Úplně první tah bývá pro algoritmy dost těžký – možných tahů je hodně, nic není předpočítané z předchozích tahů a poznat dobrou pozici takhle daleko od konce hry je těžké. Počáteční pozice je ale vždy stejná. Můžete si tedy zkusit spočítat optimální první tah u sebe doma a uložit jej do svého algoritmu. Pokročilejší realizace této myšlenky jsou známé jako knihy zahájení a pro šachy představují významné zlepšení u algoritmů i lidí. S trochou šikovnosti by mělo být možné do souboru menšího než 50 MB uložit cca prvních 9 tahů pro oba hráče.

Povolenou velikost souboru jde využít ještě jedním způsobem – je možné si předpočítat databázi koncovek, což jsou přesná ohodnocení a optimální tahy pro pozice, které jsou dostatečně blízko ke konci hry. Pro šachy jsou známé koncovky pro až sedm kamenů. Oware by v tomto ohledu mělo být výrazně snazší. Upřímně se ale domnívám, že (alespoň malá) kniha zahájení je snazší na implementaci a výraznější zlepšení.

Posledně jsem taky zmínil optimalizaci kódu. Alespoň pro můj kód se ukázalo, že samotný objekt Game je dost pomalý. Proto jsem si implementoval vlastní verzi, která pracuje s tuply. Je dost dobře možné, že občas se chová trochu jinak než samotná hra, ale mým algoritmům mnohem více vadí pomalé tahy (což je do jisté míry způsobeno taky tím, že pořád používám velmi jednoduchou heuristiku a spoléhám na vyšší hloubku prohledávání).

Tohle je jenom několik málo možných zlepšení. Určitě jich dokážete vymyslet ještě víc. Já sám se třeba úmyslně vyhýbám zlepšení své heuristiky, která je nyní výrazně horší než některé vaše heuristiky. Stejně tak nemám v plánu používat strojové učení.

Tohle je poslední číslo, po kterém budete mít ještě příležitost svoje programy vylepšovat. Pokud jste se na něčem zasekli, tak mi napište e-mail, a nějak to spolu vyřešíme. Zkuste mě ještě jednou přinutit k tomu, abych musel naimplementovat další silnější krále. Glaukus opravdu není neporazitelný. A pro autora nejlepšího programu si možná připravím speciální výhru. ;-)

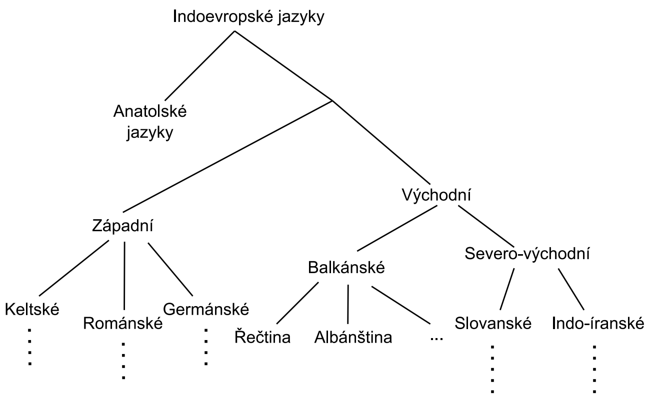
V příštím čísle se dočkáte závěrečného shrnutí našeho tématka, zveřejnění zdrojového kódu králů a prozrazení některých tajemství. Máte se na co těšit, ale teď neotálejte a vrhněte se do programování!

Matej; `lieskovsky.matej+mam@gmail.com`
Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
Borek; `b0r3k@matfyz.cz`
e-mailová konference: `oware@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 3 – Lingvistika

Po původu jazyka

Jazyk postupem času prochází vývojem, který je ovlivněn lidmi mluvícími daným jazykem, kontaktem s dalšími jazyky a dalšími vnějšími vlivy. Pak vznikají jazyky, které se sice od sebe liší, ale občas mají společného předka a tak nemůžou být úplně rozdílné. Jazyky pak můžeme dělit do rodin podle jazyka, ze kterého vznikly. Původní jazyk se pak nazývá prajazyk. Samotný vývoj můžeme zachytit pomocí obráceného stromu na obrázku 1, jehož větve jsou rozdělení prajazyka na jeho modernější verze.



Obrázek 1: Znázornění části stromu indoevropských jazyků.

Jakým způsobem se ale můžeme dostat k podobě různých prajazyků? Lidí, co by mluvili třeba praslovanštinou, už mezi námi moc není.

Můžeme na to jít dvěma způsoby. Buď si vezmeme jeden samotný jazyk a pokusíme se z jeho struktury vytvořit prajazyk, nebo si můžeme vzít skupinu podobných jazyků, u kterých předpokládáme nějakou příbuznost, a pokusit se najít prajazyk, ze kterého se oddělily. Druhé zmíněné metodě se říká komparativní neboli porovnávací metoda.

Dejme tomu, že jsme už našli nějaké jazyky, které chceme porovnat. Nejprve potřebujeme nějakou množinu slov, která pak budeme porovnávat. Velikost této množiny se bude odvíjet od toho, jak moc detailně se snažíme jazyk zrekonstruovat. V následujícím textu budeme používat jazyky A–E a množinu slov v tabulce 1

Slovo	A	B	C	D	E
jedna	taha	tasi	tafi	kahi	tahi
dva	ua	lua	rua	lua	rua
tři	tolu	tolu	toru	kolu	toru
čtyři	fa	fa	fa	ha	fa
pět	nima	lima	rima	lima	rima
moře	tahi	tai	tai	kai	tai

Tabulka 1: Množina slov jazyků A–E

Po chvíli zkoumání začnou být vidět drobné podobnosti mezi jazyky, což je dobrý začátek pro následující krok, utvořit množiny podobností. Najít jazyky, které u podobných slov obsahují podobné hlásky na stejných místech. Třeba mezi jazyky B a C můžeme vidět změnu mezi [l] a [r] ve více slovech.

Úloha 1 [1b]: *Utvořte množinu podobných hlásek pro tabulku 1 a rozřaďte jazyky do menších skupin podle toho, jak moc společné podobnosti mají.*

Následně se vezmou tyto různé množiny a zařadí se do určitého jazykového kontextu. Vezměme si pro příklad následující 2 skupiny a uvažme, že druhá skupina se vyskytuje pouze v kontextu nějaké určité skupiny hlásek.

Kontext	X	Y	Z
jinde kromě hlásky [a]	[z]	[z]	[z]
před hláskou [a]	[z]	[z]	[s]

Tabulka 2: Ukázka změn kolem kontextu[1]

Podívejme se do tabulky 2. Konkrétně na změnu u jazyka Z. Můžeme vidět změnu [z] $\rightarrow$ [s]. Teď nás budou zajímat zbylé dva jazyky. V našem příkladu došlo ke změně pouze když v jazycích X a Y vyskytuje foném v kontextu za hláskou [a]. Kontext v jazyce Z nás nemusí zajímat, neboť mohlo dojít k větší změně (třeba se i hláska [a] na něco podobného změnila), hlavní jsou ostatní jazyky. Teď se podíváme na hlásky skupiny, která je v 1. řádku a hlavně na jejich kontext. Vidíme, že kontexty řádků se vůbec neprolínají. Toto naznačuje, že někdy došlo k odtržení kontextu a tyto dvě skupiny fonémů mají nejspíše nějakého společného

[1] Následně se budeme bavit o výslovnosti slov. Pro jednoduchost předpokládejme, že jazyky mají stejnou výslovnost jako čeština.

předka. Pokud by se kontexty nějakým způsobem prolínaly, tak na sobě tyto fonémy nemusí vůbec záviset a ani mít společného předka.

Následně je potřeba původní fonémy zrekonstruovat. Tady se už musíme spoléhat na intuici. Existují však změny v jazyce, které se často objevují a mohou nám pomoci k utvoření fonému. Jedna změna může být třeba znělost.

A jsme víceméně hotovi. Máme nějaké fonémy původního jazyka. Co když jsme ale úplně vedle, jak to poznat?
Nějaká přímá cesta neexistuje, ale občas můžete rozpoznat různé nesedící věci. Například pokud by najednou foném přeskočil místo artikulace ze zadního patra až na ret, tak nám to může být podezřelé. Většina jazyků je často symetrických, pokud mají neznělou souhlásku, tak často mají i souhlásku znělou atp. Vznik nějakého nového fonému, který se v žádném jazyku nevyskytuje, také nebudí pocit jistoty. Nic z toho však nemusí znamenat, že je vámi zrekonstruovaný jazyk špatně. Jen je občas lepší zvážit úspěšnost předchozích kroků.

Úloha 2 [2b]: *Zrekonstruujte jazykovou rodinu jazyků A–E. S postupem zakreslete i strom jazykové rodiny.*

Problém 3: *Mohli jste si alespoň částečně sáhnout na komparativní metodu. Najděte si nějakou množinu jazyků, které by mohly mít společné předky a pokuste se prajazyk alespoň částečně zrekonstruovat. Pro výběr jazyků nemusíte chodit daleko. Výběr z evropských jazyků bude nejspíše nejjednodušší.*

Problém 4: *Komparativní metoda sice dojde k nějakému výsledku, který ale úplně neodráží úplně realitu. Jaké mohou být problémy při použití této metody?*

Honza; `jan@piroutek.eu`
Lucka; `lucy.kuncarova@gmail.com`
e-mailová konference: `lingvistika@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře

Vzorové řešení 3. série

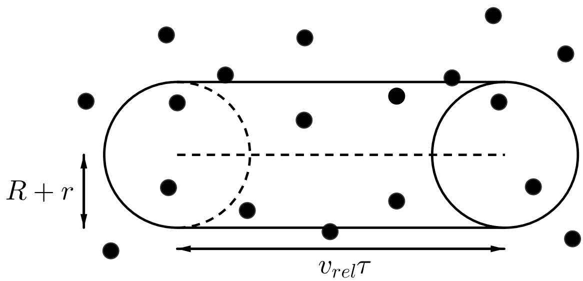
Úloha 1

Zadání:
Předpokládejme, že všechny kapky v atmosféře mají poloměr r a jejich objemová koncentrace je n. Dodejme do takové atmosféry padající kapku o poloměru R. Vypočítejte střední vzdálenost, kterou tato kapka uletí před pohlcením jiné kapky, pokud a) všechny kapky padají stejným směrem. b) vlivem vzdušných proudů je pohyb kapek ve všech směrech rovnocenný.

Řešení:
Pro stručnost dodanou kapku nazvěme kapkou X. Nechť je její hmotnost M a rychlost V, hmotnosti a rychlosti ostatních kapek jsou m a v.

Kapka X je urychlována gravitační silou $F_g = Mg$ a zpomalována Stokesovou silou $F_S = 6\pi\eta RV$. Když padá dostatečně dlouho, tyto dvě síly se vyrovnají a kapka koná rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí $V = \frac{Mg}{6\pi\eta R}$. Obdobně ostatní kapky padají rychlostí $v = \frac{mg}{6\pi\eta r}$. V případě a) je vzájemná rychlost kapky X a jakékoli jiné kapky $v_{rel} = V - v$ (předpokládejme $V > v$ platné při $R > r$), ostatní kapky se vůči sobě vzájemně nepohybují.

Pro zjednodušení předpokládejme, že poloměr kapky X se při pohlcení jiné kapky nemění (na výsledek to nemá vliv, nás zajímá jen první srážka). Za čas τ kapka X urazí vzdálenost $V\tau$ a každé další kapce, se kterou se může srazit, se přiblíží o $v_{rel}\tau$. Během stejného časového intervalu pohltí každou takovou kapku, jejíž střed se středu kapky X přiblíží na vzdálenost menší než $r + R$ (viz Obr. 2). To splňují všechny kapky, které leží uvnitř válce o výšce $v_{rel}\tau$ a poloměru $r + R$. Takový válec má objem $\pi(r + R)^2 v_{rel}\tau$ a obsahuje průměrně $n\pi(r + R)^2 v_{rel}\tau$ kapek, kde n je koncentrace kapek.



Obrázek 2: Grafické znázornění úvahy výše. Plnou čarou kreslený válec je oblast ovlivněná kapkou X. Přerušovaná čára uprostřed válce je trajektorie středu kapky X. Černé body jsou středy okolních kapek. Černé body ležící uvnitř válce jsou středy kapek, které pohltila kapka X.

Během průletu dráhy $V\tau$ kapka X pohltí průměrně $n\pi(r + R)^2 v_{rel}\tau$ dalších kapek. Střední vzdálenost mezi dvěma pohlceními je

$$\lambda = \frac{V\tau}{n\pi(r+R)^2 v_{rel}\tau} = \frac{\frac{Mg}{6\pi\eta R}}{n\pi(r+R)^2\left(\frac{Mg}{6\pi\eta R} - \frac{mg}{6\pi\eta r}\right)} = \frac{Mr}{n\pi(r+R)^2(Mr - mR)}. \tag{1}$$

V případě b) je rychlost okolních kapek stejná jako předtím, jen její směr je rovnoměrně rozložen do všech směrů. Vyberme libovolnou kapku, nechť je α úhel mezi směrem jejího letu a směrem letu kapky X. Podle kosinové věty pro vzájemnou rychlost této kapky a kapky X platí

$$v_{rel}^2 = V^2 + v^2 + 2Vv\cos(\alpha). \tag{2}$$

Nás ovšem zajímá jenom střední hodnota. Je-li kapek opravdu hodně a jejich rychlost je rozložena rovnoměrně, ve směru α vždy letí právě tolik kapek jako ve směru opačném, tj. $\pi + \alpha$. Pro průměrné v_{rel} kapek z těchto dvou směrů pak vychází

$$\overline{v_{rel}^2} = \frac{V^2 + V^2}{2} + \frac{v^2 + v^2}{2} + \frac{2Vv\cos(\alpha) + 2Vv\cos(\pi + \alpha)}{2} = V^2 + v^2, \qquad (3)$$

protože $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$.

Totéž můžeme udělat pro všechny směry α a průměr bude $v_{rel} = \sqrt{V^2 + v^2}$. Dosazením dostáváme pro střední vzdálenost mezi dvěma pohlceními

$$\lambda = \frac{\frac{Mg}{6\pi\eta R}}{n\pi(r+R)^2\sqrt{\left(\frac{Mg}{6\pi\eta R}\right)^2 + \left(\frac{mg}{6\pi\eta r}\right)^2}} = \frac{Mr}{n\pi(r+R)^2\sqrt{(Mr)^2 + (mR)^2}}. \qquad (4)$$

Úloha 2

Zadání:

Jaké největší velikosti může kapka vody dorůst, než dojde k jejímu rozpadu? Výsledek stačí řádově.

Cílem úlohy bylo velikost kapky vypočítat podobným postupem, jaký použil Zdeněk Mareš. Za otištění ovšem stojí také řešení Ládi Vávry, který se výpočtu sice originálním způsobem vyhnul, zato však přinesl dobře ozdrojovaný přehled toho, co je o popisu zkoumaného jevu obecně známo. Obě řešení jsou uvedena níže.

Řešení od Dr.MM Zdeňka Mareše:

K rozpadu kapky dojde, když tíha kapky F_g převýší sílu povrchového napětí F.

$$F_g \geq F$$
$$mg \geq \sigma l$$
$$V\rho g \geq \sigma 2\pi R$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \geq \sigma 2\pi R$$
$$\frac{2}{3}R^2\rho g \geq \sigma$$
$$R \geq \sqrt{\frac{3\sigma}{2\rho g}}$$

Stačí nám zjistit, jaký je maximální poloměr R kapky, tedy kdy se $F_g = F$.

$$R = \sqrt{\frac{3\sigma}{2\rho g}}$$

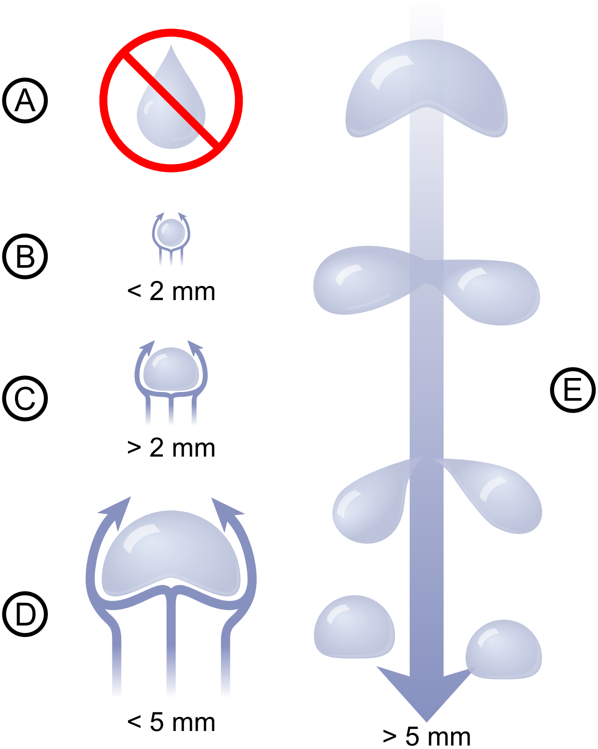
$$R = \sqrt{\frac{3 \cdot 73 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 999{,}97 \cdot 9{,}80665}}$$
$$R \approx 0{,}003342\,\mathrm{m} \approx 3{,}342\,\mathrm{mm}$$

Kapka se rozpadne při poloměru větším než cca 3,342 mm, tedy při poloměru v řádech milimetrů.

Řešení od Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ládi Vávry

Stručná odpověď: Kapky jsou v jednotkách milimetrů.

Kapka může mít velikosti v jednotkách milimetrů. Největší zaznamenaná kapka byla velikosti 10 mm. Menší mají pod 2 mm, časté jsou o velikosti mezi 2 až 4 milimetry a nad to jsou spíše ojediněle. Největší přírodní vodní kapky jsou v tropických oblastech, kde jsou až velikosti 10 mm, větší velikosti mohou pouze nastat za speciálních podmínek (například s přítomností elektrického pole). Velikost kapek souvisí s jejich povrchovým napětím a kapilárním tlakem, který musí být větší než hydrostatický a atmosférický tlak, jinak se kapka rozpadá. Našel jsem později i obrázek, který ukazuje kdy se kapky rozpadají.



https://en.wikipedia.org/wiki/Rain#/media/File:Raindrops_sizes.svg

> Zdroje:
> https://thefactfactor.com/facts/pure_science/physics/laplaces-law/5349/
> https://cs.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9%C5%A1%C5%A5
> https://towardsdatascience.com/the-shape-of-a-water-droplet-cb902b69e9cb
> https://books.google.cz/books?hl=en&lr=&id=sua9BwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT14&ots=cdy2eNeVar&sig=JMiYFESGkc1_-ZGigW1LO5DkNBY&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
> https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4820848

Úloha 3

Zadání:
Odhadněte, co by se stalo, kdybychom do atmosféry dodali dostatečné množství krystalizačních jader (např. částic solí). Navrhněte, k čemu by to mohlo být dobré.

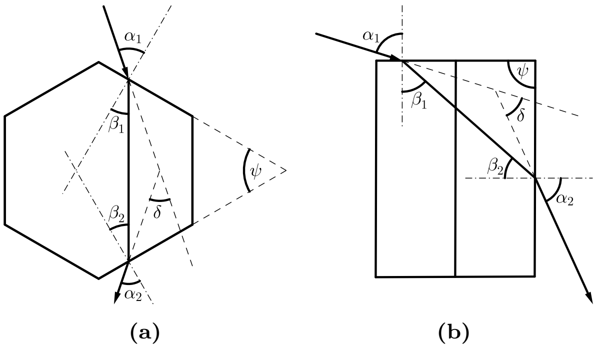
Řešení:
Když se za vhodných podmínek srazí ledový krystal s kapkou, vyroste, zatímco když se srazí s jiným ledovým krystalem, nic se neděje. Dodáním většího množství krystalizačních jader do atmosféry napomůžeme vzniku většího množství ledových krystalů. V důsledku budou upřednostněny jejich vzájemné srážky na úkor jejich srážek s kapkami a nárůst jejich velikosti tím bude omezen. Menší krystaly při průletu atmosférou snáze roztají, což nastává ve výškách, kde už nemohou znovu zkrystalizovat a dopadnou tak na zem v podobě deště. Tím je možné zabránit krupobití, které by jinak ničilo úrodu. V praxi se k tomu používá např. jodid stříbrný.

Jak některá řešení uváděla, podobného mechanismu lze využít také k přivolání deště. V takovém případě se však pevné částice, které do atmosféry dodáme, nepodílí na krystalizaci kapalné vody do formy ledu nýbrž na kondenzaci vodní páry do podoby kapek. Zbytek mechanismu je zřejmý.

Úloha 5

Zadání:
Prostou úvahou vysvětlete, proč je světlo vystupující z krystalku koncentrováno právě v úhlu $\delta = \delta_{min}$.

Řešení:
Pokud obrátíme směr průchodu paprsku krystalem, úhel vychýlení δ zůstává stejný. Při změně orientace krystalku se δ mění nejpomaleji v okolí bodu δ_{min}. Paprsky lehce vychýlené vůči tomuto bodu na jednu stranu se proto skládají s těmi vychýlenými na druhou stranu a intenzita světla vystupujícího ve směru δ_{min} je proto největší.



Obrázek 3: Lom slunečních paprsků podílejících se na vzniku malého a velkého hala.

Úloha 6

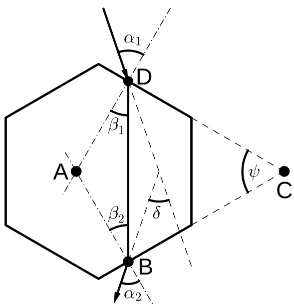
Zadání:

Pro situaci znázorněnou na obrázcích 3a a 3b odvoďte rovnici pro δ_{min}, ve které jako jediné parametry vystupují relativní index lomu pro led $n_r = n_1/n_2$ a lámavý úhel $\psi = 60°$, resp. $\psi = 90°$.

Řešení:

Uvažme čtyřúhelník $ABCD$ jako na obrázku 4. Ze skutečnosti, že $|\angle ABC| = |\angle CDA| = 90°$ a že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku BCD je $180°$, vyplývá $\beta_1 + \beta_2 = \psi$. Dále je z obrázku zřejmé, že $\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)$ (znovu z vnitřních úhlů trojúhelníka a z vedlejších úhlů). Minimální vychýlení δ_{min} nastává pro $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha_{min}$ a $\beta_1 = \beta_2 =: \beta_{min}$. Z výše uvedeného potom dostáváme $\delta_{min} = 2\alpha_{min} - \psi$ a $2\beta_{min} = \psi$, čili $\alpha_{min} = \frac{1}{2}(\delta_{min} + \psi)$ a $\beta_{min} = \frac{\psi}{2}$. Dosazením do Snellova zákona s $n_r = n_2/n_1$ vychází hledaná rovnice

$$\sin \frac{\delta_{min} + \psi}{2} = n_r \sin \frac{\psi}{2}. \tag{5}$$



Obrázek 4: Obrázek k řešení úlohy 6.

Téma 5 – Nekonečna

V minulém díle jsme si popovídali o řadách. Ukazovali jsme si definici pomocí limity a součet geometrické řady. Najít součet jiných řad je však často těžké a trikové, tedy se jimi dále nebudeme zabývat a vrátíme se zpět k limitám z předminulého dílu. Nejdříve si je zopakujeme vzorovými řešeními a upozorněním na běžné chyby a následně se podíváme na různé „rychlosti růstu (v limitě)“ funkcí.

Vzorová řešení 3. dílu

Pro zopakování formální definice limit:

$$\lim_{\alpha \to *} f(\alpha) = A \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \beta \in P(*, \delta) : f(\beta) \in B(A, \varepsilon).$$

Úloha 1

Zadání:
Spočtěte z definice (tedy ne z aritmetiky limit) limity (pro kladné celé a)

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^a.$$

Řešení od Dr.$^{\text{MM}}$ Daniela Skýpaly (upraveno):

$$\lim_{x \to \infty} x^2 - x = +\infty$$

Zde si zvolíme $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}+1}$, což nám dá:

$$x > \frac{1}{\delta} = \frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Chceme $f(x) \in B(\infty, \varepsilon)$:

$$f(x) = x^2 - x = x(x-1) > \frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon + 1 > 1, \qquad \sqrt{\varepsilon} > 0$$

Z toho vidíme, že když je x z $P\left(\infty, \frac{\sqrt{\varepsilon}+1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, tak funkční hodnoty budou v $B(\infty, \varepsilon)$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^a$$

Budeme uvažovat dvě možnosti:

1. $a = 2k,\ k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} x^a = +\infty$. Když si zvolíme $\delta = \sqrt[a]{\varepsilon}$, můžeme z $x \in P(-\infty, \delta)$ sestavit nerovnici:

$$x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\sqrt[a]{\varepsilon}}$$

Protože obě čísla jsou záporná, mocnění na druhou prohodí jejich poměr:

$$x^a > \frac{1}{\varepsilon}$$

Takže $x^a \in B(\infty, \varepsilon)$.

2. $a = 2k-1, k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} x^a = -\infty$. Zde je postup podobný. Zvolíme si stejné δ:

$$x < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\sqrt[a]{\varepsilon}}$$

Akorát, zde umocňujeme na lichou mocninu, a ta zachovává znaménka:

$$x^a < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Takže $x^a \in B(-\infty, \varepsilon)$.

Zde stojí ještě za zmínku řešení Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Martina Fofa a Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jana Škopka, kteří si všimli, že x^a je sudá resp. lichá funkce,[2] když je a sudé respektive liché. Tudíž $\lim_{x\to-\infty} x^a$ lze spočítat přímo z $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.

Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jan Škopek si navíc všiml, že první limitu lze doplnit na čtverec, tj. $x^2 - x = (x-1/2)^2 - 1/4$, a pak jen příslušně upravit okolí v limitě $\lim_{x\to\infty} x^2$.

Úloha 2

Zadání:

Energie potřebná k odletu člověka o hmotnosti $65\,\mathrm{kg}$ *ze Země*[3] *do vzdálenosti* x *(pro jednoduchost počítejme vzdálenost od středu Země) se spočítá jako (integrál, neboli součet, který vyjde)*

$$E(x) = \kappa \cdot M_Z \cdot m \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{x}\right) \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 65 \cdot \left(\frac{1}{6{,}378 \cdot 10^6} - \frac{1}{x}\right).$$

Jelikož se tato energie s rostoucí vzdáleností zvětšuje, můžeme energii potřebnou na odlet kamkoliv spočítat jako $\lim_{x\to+\infty} E(x)$. *Spočítejte tuto hodnotu. Výsledek*

[2] Funkce je sudá, pokud $f(x) = f(-x)$ pro všechna x, a lichá, pokud $f(x) = -f(-x)$ pro všechna x.

[3] Zanedbejme vše ostatní, včetně rakety, paliva a hlavně Slunce, čímž jsme se naprosto vzdálili od reality, ale stejně tak bychom mohli spočítat energii pro odlet od Slunce, Galaxie, . . .

můžete porovnat s hodnotou $E_k = \frac{1}{2} \cdot 65 \cdot 11186^2 \approx 4 \cdot 10^9$, *spočítanou z únikové rychlosti.*[4]

Řešení od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Poláscha:

Podle aritmetiky limit toto můžeme rozložit na součin a později rozdíl dvou limit.

$$\lim_{x\to+\infty} \kappa \cdot M_Z \cdot m \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (\kappa \cdot M_Z \cdot m) \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \kappa \cdot M_Z \cdot m \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{R_Z} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) = \kappa \cdot M_Z \cdot m \left(\frac{1}{R_Z} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right)$$

A jak víme ze začátku tohoto tématu $\frac{1}{\infty} = 0$. Tedy

$$= \kappa \cdot M_Z \cdot m \left(\frac{1}{R_Z} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \kappa \cdot M_Z \cdot m \left(\frac{1}{R_Z} - 0\right) = \frac{\kappa \cdot M_Z \cdot m}{R_Z}$$

Po dosazení čísel dostaneme

$$\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 65}{6{,}378 \cdot 10^6} \approx 4{,}0785 \cdot 10^9$$

Tento výsledek je velice blízko hodnotě ze zadání.

Úloha 3

Zadání:

Spočítejte následující limity a odůvodněte veškeré úpravy, dosazení apod.
(hint: $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$*):*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \pi} - x}{x}, \qquad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x - 3} + 1}{(x - 4)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27} - 3}{x}.$$

[4] https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Anikov%C3%A1_rychlost

Řešení od Mgr.[MM] Kristýny Petrlíkové:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+2x^3}{3x+10x^4}\overset{\text{BÚ}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+2x^3}{3x+10x^4}\cdot\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{2}{x}}{\frac{3}{x^3}+10}\overset{\text{AL}}{=}\frac{5+2\cdot 0}{3\cdot 0+10}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^5+2x^2}{x^2+5x^4}\overset{\text{BÚ}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^5+2x^2}{x^2+5x^4}\cdot\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+5}\overset{\text{AL}}{=}\frac{8\cdot\infty+2\cdot 0}{1\cdot 0+5}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^4+2x^3}{3x+10x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot(5x+2)}{x\cdot(3+10x^3)}\overset{\text{BÚ}}{=}\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{5x+2}{3+10x^3}\overset{\text{Spoj.}}{=}0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x^5+2x^2}{x^2+5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(8x^3+2)}{x^2\cdot(1+5x^2)}\overset{\text{BÚ}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{8x^3+2}{1+5x^2}\overset{\text{Spoj.}}{=}2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-\pi}-x}{x}\overset{\text{BÚ}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-\pi}-x}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-\pi}+x}{\sqrt{x^2-\pi}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\pi}{x\sqrt{x^2-\pi}+x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}+1}{x-4}\overset{\text{BÚ}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}+1}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x-3}-1}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\cdot(\sqrt{x-3}-1)}\overset{\text{BÚ}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x-3}-1}=\text{nedef.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3-27}-3}{x}\overset{\text{BÚ}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3-27}-3}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3-27)^2}+3\sqrt[3]{x^3-27}+9}{\sqrt[3]{(x^3-27)^2}+3\sqrt[3]{x^3-27}+9}=$$

$$=\frac{x^3-27-27}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x^3-27)^2}+3\sqrt[3]{x^3-27}+9\right)}=\text{nedef.}$$

V posledních dvou příkladech by se formálně pro nedefinovanost musela limita už na začátku rozdělit na limitu zleva a limitu zprava, čímž bychom dostali výsledky $+\infty$ a $-\infty$, tedy limita není definována. (Nelze říct „vyšlo nám $\frac{1}{0}$, takže limita neexistuje, protože jsme použili AL“, viz dále.)

Tady se přiznám k chybě, v posledních dvou příkladech jsem vás nechtěl zavést do případu $\frac{1}{0}$. Když se v nich vymění znaménka za odmocninou za opačná, tak se úplně stejnými úpravami dojde k výsledkům[5]

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3-27}+3}{x}=0.$$

[5] Hint pak měl být $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$.

Úloha 4

Zadání:
Spočítejte následující limity (a zdůvodněte správnost výpočtu):

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 - x^2, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^5 + x^2\sin(x),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n}.$$

Řešení od Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Martina Fofa:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^5 - x^2) = \lim_{x\to+\infty}(x^2\cdot(x^3-1)) \overset{\text{AL}}{=} \infty\cdot(\infty-1) = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^5 + x^2\cdot\sin(x)) = \lim_{x\to+\infty}(x^2\cdot(x^3+\sin(x))) > \lim_{x\to+\infty}(x^2\cdot(x^3-1)) \overset{\text{AL}}{=} \infty$$

A tedy i $\lim_{x\to+\infty}(x^5 + x^2\cdot\sin(x)) = \infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n}$$

Tuto funkci sevřeme mezi $\sqrt[n]{5^n}$ a $\sqrt[n]{5^n+5^n}$. První z nich je konstantní s hodnotou 5, druhá má limitu v nekonečnu rovnou také pěti ($\sqrt[n]{5^n+5^n} = \sqrt[n]{2\cdot5^n} = 5\sqrt[n]{2}$). Z věty o dvou strážnících tak musí platit:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n} = 5$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n}$$

Pro jeden odhad opět použijeme $\sqrt[n]{5^n}$, pro ten druhý pak využijeme $\sqrt[n]{5^n - 5^n/2}$ (to funguje, protože pro všechna přirozená n platí $\frac{5^n}{2} > 2^n$). Tato funkce má také limitu 5 (jelikož $\sqrt[n]{5^n - 5^n/2} = \sqrt[n]{5^n/2} = 5\sqrt[n]{1/2}$), a proto:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n} = 5$$

Další možností u první limity bylo pro $x > 2$ odhadnout $x^2\cdot(x^3-1) > x^2$, což má zřejmě limitu $+\infty$, tedy i $x^5 - x^2$ má limitu $+\infty$.

Úloha 5

Zadání:
Dokažte, že $\lim_{x\to+\infty} x\sin(x)$ *neexistuje.*

Řešení od Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Daniela Skýpaly:

Zvolíme si následující posloupnosti:

$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \qquad b_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

Potom jsou limity

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot (-1) = -\infty$$

Limity pro obě posloupnosti se nerovnají a tedy $\lim_{x\to+\infty} x\sin(x)$ neexistuje.

Typické chyby

Během opravování řešení jsem narazil na pár chyb, které se často opakují. Pokud jste některou z nich udělali, nezoufejte. Děláme je všichni a pořád dokola…

- Pokud používáte aritmetiku limit a vyjde vám nedefinovaný výraz, tak by člověk hned řekl, že limita neexistuje. *Ale* aritmetika limit právě proto má v sobě větičku „Pokud je pravá strana definována“. Úplně triviálním protipříkladem je například[6]

$$1 = \lim_{x\to+\infty} 1 = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{1}{x} \overset{\text{AL}}{\neq} \left(\lim_{x\to+\infty} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) = \infty \cdot 0.$$

- Tzv. „částečné limitění“: Každá úprava limit má přesně dáno, co se děje s limitami. Ty se nemohou nikde objevovat a mizet, jak se nám zachce. Speciálně aritmetika limit vždy změní limitu na dvě limity dvou separátních výrazů. Nemůže se stát, že nám v limitě zůstane něco, čehož už jsme limitu udělali, např:

$$1 = \lim_{x\to+\infty} 1 = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{1}{x} \overset{\text{AL}}{\neq} \lim_{x\to+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) x = \lim_{x\to+\infty} 0 \cdot x = 0$$

(tady to vypadá zřejmě, ale vězte, že už jen nenapsání závorek často vede k počítání limity špatného výrazu, u složitějších výpočtů často ani závorky nestačí k předejití chyby.)

Při dosazování ve spojitosti *musí* limita zmizet. Nelze dosadit jen za část výrazu a počítat limitu dál.

$$1 = \lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} \overset{\text{Spoj.}}{\neq} \lim_{x\to 0} 0 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

[6] Toto je také důvod proč nedefinujeme $\infty\cdot 0$, protože místo 1 v této rovnici může být libovolná konstanta.

- Částečné limitění má často za následek ignorování toho, že 1^∞ není definováno (na což se často zapomíná):

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Spoj.}}{\neq} \lim_{n\to+\infty}(1+0)^n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

  Kdybychom dosadili za všechna n, tak dostaneme $(1+0)^\infty$. To ale není definované, což nás varuje, že musíme použít na výpočet něco jiného (zde si vzpomenout na známou limitu).

Díl 5: Asymptotické hrátky

Možná jste si všimli, že pokud počítáte limitu podílu dvou polynomů v nekonečnu, tak se stačí dívat pouze na členy s nejvyšší mocninou. Obdobně pokud budeme počítat jejich limitu v 0, tak se stačí dívat na členy nejnižšího řádu.

I v dalších limitách se nám často stává, že sčítáme několik výrazů, z nichž jen jeden je zřejmě „nezanedbatelný“. Také se často hodí vědět, podíl kterých výrazů je ∞, kterých 0, případně podíl kterých výrazů je konečný. K tomu si zadefinujeme následující značení[7] ($f(x)$ a $g(x)$ jsou nějaké výrazy/funkce v proměnné x a x_0 je zkoumaný bod, tedy bod, ve kterém např. děláme limitu, nejčastěji $\pm\infty$ nebo 0)

- $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$, neboli f je asymptoticky ohraničena g shora (někdy také f je asymptoticky nejvýše g nebo f je až na konstantu nejvýše g) tehdy, když existuje nějaké prstencové okolí bodu x_0 a nenulová konstanta C tak, že na tomto okolí je $|f(x)| \leq |C \cdot g(x)|$.

- $f(x) \in \Omega(g(x))$, neboli f je asymptoticky ohraničena g zdola (někdy také f je asymptoticky alespoň g nebo f je až na konstantu alespoň g) tehdy, když existuje nějaké prstencové okolí bodu x_0 a nenulová konstanta C tak, že na tomto okolí je $|g(x)| \leq |C \cdot f(x)|$. Což je vlastně totéž jako $g(x) \in \mathcal{O}(f(x))$ (nerovnici vydělíme C).

- $f(x) \in \Theta(g(x))$, neboli f je asymptoticky ohraničena g z obou stran tehdy, když existuje nějaké prstencové okolí bodu x_0 a nenulové konstanty C_1, C_2 tak, že na tomto okolí je $|C_1 \cdot g(x)| \leq |f(x)| \leq |C_2 \cdot g(x)|$.

  Tedy $\Theta(g(x)) = \mathcal{O}(g(x)) \cap \Omega(g(x))$.

- $f(x) \in o(g(x))$, neboli f je asymptoticky ohraničena g shora ostře (často také značíme $f(x) \ll g(x)$) tehdy, když pro libovolnou nenulovou konstantu C existuje prstencové okolí bodu x_0 tak, že na tomto okolí je $|f(x)| < |C \cdot g(x)|$.

- $f(x) \in \omega(g(x))$, neboli f je asymptoticky ohraničena g zdola ostře (často také značíme $f(x) \gg g(x)$) tehdy, když pro libovolnou nenulovou konstantu C existuje prstencové okolí bodu x_0 tak, že na tomto okolí je $|f(x)| > |C \cdot g(x)|$. To je vlastně totéž, co $g(x) \in o(f(x))$.

[7] Tzv. Landauova notace, `https://cs.wikipedia.org/wiki/Landauova_notace`

Zjednodušeně $\mathcal{O}, \Omega$ je nějaký horní a spodní odhad toho, jak funkce „roste“ s tím, že funkce může růst i stejně. Θ pak říká, že přesně tak funkce opravdu roste. o a ω říká, že funkce roste pomaleji/rychleji než nějaká jiná, tedy například když budeme mít limitu jejich podílu, tak bude 0, respektive nebude konečná.

Úloha 1 [1b]: *Ukaž, že pro g, které nenabývá nuly na nějakém okolí vyšetřovaného bodu, je na takovém okolí tvrzení „existuje nenulové C takové, že $|f(x)| < |C \cdot g(x)|$“, totéž, co „existuje nenulové C takové, že $|f(x)| \leq |C \cdot g(x)|$“. (Tedy že $f(x) \in o(g(x))$ nám nestačí definovat jako existuje konstanta C a okolí, na kterém $|f(x)| < |C \cdot g(x)|$.)*

Zde bych chtěl upozornit na dvě věci. Za prvé velmi záleží na x_0. Speciálně funkce, které jsou asymptoticky větší v nekonečnu, často (ne vždy) bývají asymptoticky menší v 0. Zároveň asymptotické odhady neberou v potaz ani znaménko ani konstanty, tudíž pokud nám vyjde například (za chvíli budeme počítat s těmito odhady v limitách) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\Theta(f(x))}$, tak sice víme, že limita nebude nekonečno nebo nula, ale nevíme ani, zda bude existovat ($\frac{f(x)}{\Theta(f(x))}$ se může pohybovat libovolně mezi C_1 a C_2 z definice). Stejně tak $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{o(f(x))}$ může existovat (a pak může být $\pm\infty$), ale také nemusí, např. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sin(x)}$.

Samozřejmě platí, že když $f(x) \ll g(x) \ll h(x)$, tak $f(x) \ll h(x)$. Pro kladná reálná čísla $a < b$ a $1 < c < d$ platí tzv. růstová škála

$$a^{-x} \ll x^{-a} \ll \ln^{-a}(x) \ll 1 \ll \ln^{a}(x) \ll \ln^{b}(x) \ll x^{a} \ll x^{b} \ll c^{x} \ll d^{x} \ll x! \ll x^{x}$$

pro x jdoucí do nekonečna a

$$x^{b} \ll x^{a} \ll 1 \ll x^{-a} \ll x^{-b}$$

pro x jdoucí do nuly.

Problém 2: *S našimi znalostmi už jistě zvládneme některé tyto „nerovnosti“ dokázat. Zkuste to!*

$\mathcal{O}(g(x))$, $\Omega(g(x))$, $\Theta(g(x))$, $o(g(x))$ a $\omega(g(x))$ jsou vlastně třídy („skupiny“, „množiny“) funkcí, ale my je budeme potkávat ve výrazech a tam se na ně budeme dívat jako na místo, kam lze dosadit libovolnou funkci z této třídy. Často se také v $f(x) \in O(f(x))$ a podobně místo „$\in$“ píše „$=$“.

Tedy při vyšetřování x jdoucího do nekonečna (často psáno jako $x \to \infty$) můžeme psát například ($\in$ značí náležení, neboli zde, že levou stranu lze dostat dosazením konkrétních funkcí z daných množin, $\subseteq$ značí podmnožinu, tedy že všechny dosazení vlevo fungují i vpravo)

$$\frac{x^2 + e^x - 36\sin(x)}{2^x + \frac{1}{x}} \in \frac{\mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(e^x) - \mathcal{O}(36\sin(x))}{\Theta(2^x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)} \subseteq \frac{o(2^x) + \mathcal{O}(e^x) - o(x)}{\Omega(2^x) + o(1)}.$$

Protože za $\mathcal{O}(f(x)), \Omega(f(x)), \Theta(f(x))$ můžu zřejmě dosadit přímo $f(x)$. Obdobně protože $x^2 \in o(2^x)$, tak za $o(2^x)$ lze dosadit cokoliv z $\mathcal{O}(x^2)$, atd.

Obecně si dokonce můžeme rozmyslet, že pokud $f(x) \in o(g(x))$ a $g(x) \in \mathcal{O}(h(x))$, pak $\mathcal{O}(f(x)) \subset o(g(x)) \subset o(h(x))$. Obdobně pro Ω a ω.

Jak tohle ale využijeme k výpočtu limit? To, že funkci nahradíme obecnější věcí nám samotné nijak nepomůže. Pojďme se ale vrátit k původní motivaci. Chceme umět zanedbat menší členy. K tomu se hodí vědět, jak se nově zavedené symboly sčítají a násobí konstantami, abychom mohli menší členy „srazit“ do jednoho. A jak fungují v limitách.

První, co nás jistě může napadnout je, že když libovolnou funkci vynásobíme nenulovým reálným číslem, tak se třídy, do kterých patří, nezmění. Jen se změní konstanty a okolí, které použijeme v definici. Máme tedy (pro a reálné nenulové)

$$a \cdot \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(g(x)), \qquad a \cdot \Omega(g(x)) = \Omega(g(x)), \qquad a \cdot \Theta(g(x)) = \Theta(g(x)),$$

$$a \cdot o(g(x)) = o(g(x)), \qquad a \cdot \omega(g(x)) = \omega(g(x)).$$

Když navíc budeme předpokládat, že $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$ a $g(x) \in o(h(x))$. Víme

$$\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(g(x)), \qquad o(f(x)) + o(g(x)) = o(g(x)),$$

$$\Theta(g(x)) + \Theta(h(x)) = \Theta(h(x)),$$

$$\Omega(g(x)) + \Omega(h(x)) = \Omega(h(x)), \qquad \omega(g(x)) + \omega(h(x)) = \omega(h(x)).$$

Teď už chybí jen limity (x_0 je zkoumaný bod):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{\Omega(f(x))} = \{0\}, \text{ speciálně } \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = \{0\},$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathcal{O}(f(x))}{\omega(f(x))} = \{0\}, \qquad \lim_{x \to x_0} o(1) = \{0\}.$$

Pokud si navíc označíme $\mathcal{O}^+(f(x))$ funkce z $\mathcal{O}(f(x))$, které jsou na dostatečném okolí zkoumaného bodu kladné, a podobně pro další zavedené symboly. Potom

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\omega^+(f(x))}{\mathcal{O}^+(f(x))} = \{+\infty\}, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\Omega^+(f(x))}{o^+(f(x))} = \{+\infty\},$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega^+(1) = \{+\infty\}.$$

Úloha 3 [2b]: *Proč neplatí obecně $\Omega(g(x)) + \Omega(h(x)) = \Omega(h(x))$? Vždyť součet funkcí, musí růst alespoň tak jako jednotlivé funkce. Nebo ne?*

Problém 4: *Rozmyslete si, proč tyto vlastnosti platí, a pokuste se to formálně ukázat.*

Problém 5: *Jak funguje násobení?*

Pojďme se nyní podívat na příklad

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 10}{7x^5 - 4x^4 + x^2 - 10x - 1}$$

nejprve nahradíme funkce, které chceme zanedbat, našimi symboly:

$$L \in \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 8\mathcal{O}(x^4) + 2\mathcal{O}(x^3) + 5\mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x) + 10\mathcal{O}(1)}{7x^5 - 4\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^2) - 10\mathcal{O}(x) - \mathcal{O}(1)} = \mathcal{L}_2$$

následně se zbavíme konstant a z růstové škály sečteme:

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(1)}{7x^5 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + \mathcal{O}(x^4)}{7x^5 + \mathcal{O}(x^4)}$$

Z růstové škály zaměníme $\mathcal{O}$ za o a dopočítáme:

$$\mathcal{L}_2 \subset \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + o(x^5)}{7x^5 + o(x^5)} \overset{\text{BÚ}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{o(x^5)}{x^5}}{7 + \frac{o(x^5)}{x^5}} \overset{\text{AL}}{=} \frac{1 + \{0\}}{7 + \{0\}} = \left\{\frac{1}{7}\right\}.$$

Takže víme, že limita (L) je v množině obsahující pouze $\frac{1}{7}$, tedy musí být rovna $\frac{1}{7}$. Nepřesně (ale ne nutně špatně, jen neformálně) můžeme psát

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 10}{7x^5 - 4x^4 + x^2 - 10x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{o(x^5)}{x^5}}{7 + \frac{o(x^5)}{x^5}} = \frac{1+0}{7+0} = \frac{1}{7}.$$

Úloha 6 [3.5b]: *Spočítejte následující limity pomocí právě zadefinovaných symbolů:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \pi} - x}{x}, \qquad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{(x-4)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27} + 3}{x}.$$

Úloha 7 [1b]: *Spočítejte*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + 42 \cdot x^2 + e \cdot \log(x) + \frac{\pi}{x} + 100 \cdot \sin(x)}{\frac{1}{666}x^x + x^{1000}}.$$

Úloha 8 [5b]: *S použitím tzv. Taylorovy řady*[8] *pro sinus v bodě 0 vypočítejte:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(6x^2) - 6x^2}{x^{10}} + \frac{36}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 42} \frac{\sin(x-42)}{x-42}.$$

[8] Taylorova řada je takový obecný postup, jak odhadnout funkci pomocí polynomu. K jejímu spočítání je však nutné znát, co je to derivace, takže se tu s ní víc zabývat nebudeme. Více o Taylorově řadě najdete na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_%C5%99ada`, ale pozor, ne u všech lze „zbytek řady“ nahradit $o(x^n)$ jako zde.

Taylorova řada pro sinus v bodě nula vypadá následovně

$$\sin x \in x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot \ldots \cdot 7} + \ldots \pm \frac{x^{2k+1}}{2 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} + o(x^{2k+2}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2k+2}), \ \textit{pro libovolné } k \textit{ přirozené,}$$

Informatický koutek

S $\mathcal{O}$, Ω a Θ se spíše než v matematice setkáváme v informatice, kde se používají k popisu časové a paměťové složitosti algoritmů.[9] Tyto složitosti jsou udávané jako funkce velikosti vstupu (n).[10]

A jelikož se velmi liší, jak rychle který počítač počítá / jak velkou má paměť, tak nemá moc cenu koukat na konstanty. Navíc pro malá data většina algoritmů seběhne okamžitě, zajímají nás hlavně větší vstupy. Tedy je tu ideální používat asymptotickou složitost.

Konkrétně pomocí $\mathcal{O}$ většinou odhadujeme, jestli algoritmus poběží dostatečně rychle. Pomocí Ω dokazujeme, že je náš algoritmus nejlepší možný.[11] Nakonec Θ popisuje reálně ($\mathcal{O}$ je pouze horní odhad) jak běží algoritmus.

Je však třeba mít na paměti, že jsou to pouze asymptotické algoritmy a může se stát, že lineární algoritmus ($\mathcal{O}(n)$) si povede na běžných datech ($n < 10^{10}$) daleko hůře, než algoritmus s časovou složitostí $\mathcal{O}(n \log n)$.

Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
e-mailová konference: `nekonecna@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

[9] V informatice se tyto pojmy implicitně uvažují v bodě $+\infty$.

[10] Časová složitost je maximální (přes všechny vstupy velikosti n) počet instrukcí, které algoritmus provede.

[11] Například seřazení prvků porovnáváním a prohazováním je $\Omega(n \log n)$, ale algoritmy na seřazení samozřejmě mohou mít libovolně velkou časovou složitost.

Téma 6 – Růst monokrystalů

Do tématka o růstu monokrystalů jste se vrhli po hlavě a zaslali nám mnoho zajímavých příspěvků. Tři z nich si můžete přečíst v tomto čísle a na další se můžete těšit v čísle příštím. Všem autorům děkujeme!

Příprava monokrystalů 12b

Bc.^{MM} Mikuláš Smrčka

Příprava monokrystalů je relativně zajímavé téma. Při přípravě musíme hledět na poměrně dost faktorů: teplota, materiál, prostředí, při některých metodách i atmosféra a samozřejmě také metoda, pomocí které budeme náš krystal růst.

Metod je hned několik a všechny, které znám, si tu krátce, ale přesto dostatečně představíme.

Růst z roztoku

Příprava:

Růst krystalů z roztoku je poměrně dobře popsán v zadání, ale přesto ho zkusím popsat svými slovy a sepsat nějaké výhody, nevýhody a postřehy, které jsem při využívání této metody objevil.

Ze všeho nejdřív potřebujeme pořádně nasycený roztok s materiálem, který jsme si vybrali. Já osobně jsem zvolil síran draselno-hlinitý.

Pořádně nasyceného roztoku dosáhneme tím, že do rozpouštědla (vody) nasypeme poměrně velké množství našeho materiálu (v tomto případě byl v práškovém stavu) a začneme míchat. A mícháme, mícháme, mícháme a míchat nepřestáváme. Stále nepřestáváme až najednou přestaneme po takových 10-15 minutách velmi intenzivního míchání. Roztok necháme do druhého dne v klidu někde odložený, druhý den se opět vrátíme k míchání a budeme míchat a míchat, myslím, že dostáváte představu o tom, jak se nasycuje roztok. Třetí den postup zopakujeme a čtvrtý den přefiltrujeme náš roztok tak, aby tam nezbyl žádný nerozpuštěný materiál. Filtrovat můžeme buď přes kávový filtr nebo třeba roztržený pytlíček od čaje, záleží jen na nás. Nádobku s roztokem odložíme na nějaké odlehlé místo a necháme pár dní v klidu krystalizovat. Po pár dnech najdeme nádobku s roztokem a spoustou krystalů všude po ploše skleničky. Velká většina krystalů bude srostlá s jinými a nebo budou z jiných přímo vyrůstat další krystaly, ale pokud máte dostatečné štěstí, tak najdete i chudáčky osamocené krystaly. To jsou monokrystaly a přesně ty hledáme a potřebujeme pro to, abychom je využili jakožto zárodek pro růst většího, lepšího a obecně úžasnějšího krystalu.

Dobrý a použitelný monokrystal, jakožto zárodek, poznáme tak, že z něho opravdu, ale opravdu neroste další krystal, je průsvitný a bez viditelných prasklinek. Pokud jste takovýto krystal našli, tak skvěle a můžete ho vyndat z roztoku a pořádně osušit, aby vám roztok na krystalu nezaschl a nezdeformoval ho.

Větší, lepší a obecně úžasnější krystal uděláme velmi podobným způsobem. Budeme opakovat přípravu přesyceného roztoku. Tudíž budeme míchat, míchat, míchat a ještě víc míchat. Po dalších třech uplynulých dnech vložíme náš krásný a jedinečný monokrystal do roztoku a opět odložíme roztok na nějaké klidné místo, aby ho neohrožovaly otřesy, změny teploty a další zlé věci.

Po dalších pár dnech se můžete plni nadějí vrátit ke svému roztoku a doufat, že budete mít pořádně velký a krásný monokrystal. Je ovšem poměrně velká šance, že se vám sny zhroutí. Ale pokud máte štěstí, tak objevíte velký, lepší a obecně úžasnější monokrystal, než byl ten, který jste použili jakožto zárodek. V tomto případě gratuluji k vašemu úspěchu a můžete se jít pochlubit svým kamarádům, že máte větší krystal než oni.

Výhody:

Roztok se dá snadno připravit doma za pomoci například soli či modré skalice a nějaké obětovatelné nádoby. Nepotřebujete žádnou náročnou a drahou techniku jako u jiných metod.

Nevýhody:

Tato metoda je poměrně časově náročná a můžete jí využít jen u nějakých materiálů. Také za větší množství času dostanete menší krystal a každý ví, že čím větší, tím lepší. Také je poměrně snadné si pokazit výsledek a můžete selhat jen kvůli moc velkému dupání v místnosti nebo moc nahlas puštěnému Michalu Horákovi.

Czochralského metoda

Příprava:

Co budeme potřebovat? Vysoce čistou taveninu materiálu, který budeme využívat. Při této metodě se rostou primárně monokrystaly germania, křemíku nebo wolframu.

Tak řekněme, že si zvolíme křemík. Dále budeme potřebovat měděnou mističku[12], zárodek našeho materiálu, speciální pec a poměrně dost času.

Asi už jste poznali, že tato metoda se využívá průmyslově nebo ve výzkumných laboratořích, které se zabývají růstem monokrystalů. Takže to není něco, co budeme moct uskutečnit sami doma, pokud si v matraci neschováváte pár miliónů a nejste ochotni je utratit za pec.

Teď už k samotnému růstu krystalů.

Nejprve si připravíme vysoce čistou taveninu křemíku a to tím, že vložíme vysoce čisté polykrystaly křemíku do výše zmíněné měděné mističky, která se nachází ve výše zmíněné drahé a špatně dostupné peci. Pec se nechá nahřát na teplotu tání našeho materiálu, abychom dostali taveninu. A mezitím je měděná mistička zespodu chlazena, aby nám vznikal Leidenfrostův efekt a tavenina se

[12] Pozn. redakce: pro růst křemíku se nepoužívá měděný kelímek. Jaký kelímek byste použili?

nedotýkala mističky a také aby se nám mistička neroztavila[13]. Poté, co máme připravenou taveninu, tak pomalu začneme ponořovat zárodek našeho monokrystalu pomocí lanka na hřídeli. Následně začneme zárodek velmi pomalu tahat z taveniny tak, aby se tavenina na zárodek stihla zachytit a vytvořit monokrystalickou mřížku. Poté, co se toto vydaří, zapneme automatizovaný program, který se postará o rychlost tahání, rotace, atd. Po alespoň dnu se vrátíme zpět do laboratoře a najdeme tam monokrystal, právě třeba křemíku.

Monokrystaly křemíku jsou velmi důležité pro veškerá elektronická zařízení, vzhledem k tomu, že to jsou polovodiče, tak se z nich vytvářejí čipy do počítačů. Výroba funguje následně: krystal se rozřeže na jednotlivé velmi tenké disky, které jsou následně vyleštěny na molekulové úrovni (takže je z toho dokonalé zrcadlo) a čipy a mikročipy se na tento disk natisknou. Je také zajímavé, že kvalita procesorů se liší kus od kusu právě díky těmto monokrystalům – ty, které jsou lépe naleštěné a lépe vyrostlé, jsou lepší a pro příklad se lépe taktují. I když všechny procesory stojí stejně, tak každý je jinak kvalitní.

To už jsem ovšem odběhl od tématu. Vraťme se tedy zpátky k Czochralského metodě. Nyní jsou na řadě výhody a nevýhody.

Výhody:

Pro růst materiálů s nižší tavnou teplotou je tato metoda ideální. Je relativně jednoduchá a dá se celkem snadno využít pro průmysl, kde se díky ní rostou až několikametrové monokrystaly.

Nevýhody:

Krom toho, že když je celý systém chlazen, tak to vydává nesnesitelný rámus, tak je tato metoda právě použitelná a užitečná jen pro materiály s nižší tavnou teplotou. A to právě kvůli měděné mističce. Když teplota v peci překročí určitou teplotu, tak i přestože je mistička zespoda chlazená, tak se začne mísit měď s taveninou, která je potřeba co nejčistší. Tudíž jsou dvě varianty, buď udělat mističky z jiného materiálu nebo přejít k jiné metodě. První varianta by se velmi prodražila, protože je zde použitelná jen platina, a platinová mistička je jen na jedno použití a je pekelně drahá (až několik miliónů za kus). O druhé variantě si něco povíme za malý okamžik.

Floating Zone Method

Příprava:

Floating zone method neboli metoda plovoucí zóny je prováděna pomocí světla koncentrovaného na jedno místo mezi taveninou a zárodkem monokrystalu. Jsou zde použitelné buď velmi silné žárovky, které se soustředí na jedno místo pomocí obloukových zrcadel, nebo laserové diody, které také směřují na jedno exaktní

[13] Pozn. redakce: toto je velmi speciální realizace Czochralského metody. Průmyslově se zahřívá tavenina i s kelímkem a k Leidenfrostově efektu nedochází.

místo. Pomocí této metody se vyrábí monokrystaly, které by potřebovaly větší tavnou teplotu, kterou by měděná mistička již neustála. Zde si popíšeme případ, kde využíváme pec s laserovými diodami.

Nejprve si musíme připravit taveninu, která se zde vyrábí pomocí prášku našeho vybraného materiálu. Prášek dáme do trubičky a následně ho přes noc necháme stlačit, tak dvě tuny váhy by měly stačit. Prášek by se následně měl zahřát, aby se z něj stal jeden kus a byl tavitelný laserem.

Poté, co máme připravenou taveninu i zárodek našeho monokrystalu, vše řádně vložíme do pece. Zárodek se zavěsí pomocí platinového drátku ze shora pece na posuvnou část a samozřejmě se také musí vycentrovat, aby nevisel nakřivo. Podobnou věc uděláme i s budoucí taveninou, akorát že ta bude uchycena na další posuvné části, která se nachází dole. Poté se celá tato aparatura s posuvnými částmi uzavře do skleněné tuby a celá pec se zavře.

Od této chvíle se bude již vše ovládat pomocí počítače.

Pomocí kamery a ovladačů přiblížíme zárodek a taveninu a začneme nastavovat laserové diody na taveninu. Poté, co tohle všechno máme zařízené, zapneme zahřívání laserů. Postupně budeme zvyšovat laserovým diodám procentuální výkon. Poté, co budou tavenina i zárodek řádně nažhaveny a bude to vypadat, že se roztečou, tak je k sobě přiblížíme a pokusíme se je spojit. Pokud se nám to podaří, tak jako u Czochralského metody již jen nastavíme rychlost rotace a táhnutí našeho zárodku směrem od taveniny.

Po dni se můžeme vrátit zpátky do laboratoře k peci a kochat se krásným krystalem, který nám vznikl.

Výhody:

Není zde třeba měděné mističky, takže tu je vyšší teplotní limit, tudíž přístup k více materiálům.

Nevýhody:

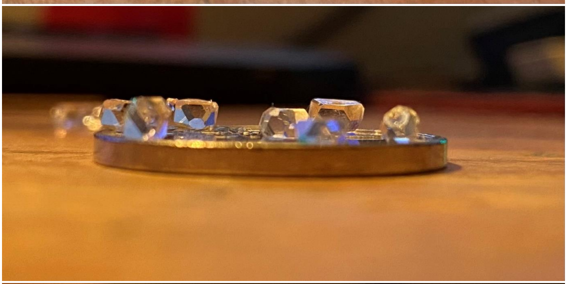
Obecně mi tato metoda přijde náročnější nežli Czochralského metoda. Hluk je zde taky a přijde mi, že příprava taveniny je zde těžší.

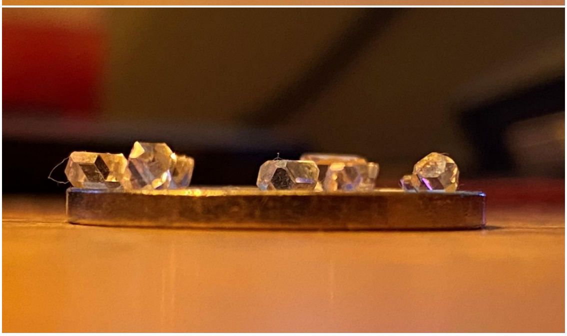
Závěr

Tímto jsem vám tu popsal všechny tři metody růstu monokrystalů, které znám, a popsal jsem jejich výhody a nevýhody, které jsem u nich našel. Je dosti pravděpodobné, že jsem něco vynechal. Jinak u všech tří metod jsem si něco vyzkoušel a fyzicky jsem byl u velmi zrychleného růstu monokrystalů právě těmito metodami.

Monokrystaly jsou samozřejmě poměrně důležitá součást našich životů, i když o tom sami ani pořádně nevíme a neuvědomujeme si to. Jsou kolem nás, v našich kapsách, před našima očima, či i u nás na ruce. Díky nim máme elektroniku a spousty dalších užitečných věcí.

Také bych všem doporučil si vyzkoušet vyrůst krystal alespoň z roztoku, je to velmi nenáročné a výsledky jsou velmi uspokojivé.





Omlouvám se za mizernou kvalitu fotek. Bohužel nemám kvalitní foťák, kterým by to šlo dostatečně dobře vyfotit. Jinak monokrystaly jsou 1–2 mm velké. A budu je dále používat jako zárodky pro větší, lepší a obecně úžasnější monokrystaly.

Metody přípravy monokrystalů 11b

Mgr.[MM] *Láďa Vávra*

Metod výroby monokrystalů je mnoho. Každá z nich má určité výhody, nevýhody a situace, kdy se hodí více než ostatní. Metoda horkého drátu, metoda VLS, metody růstu gelu, z roztoků, či Stockbargerova metoda, Bridhmanova metoda, Verneuilova metoda, Czochralského metoda…

Já se ovšem zaměřím na metodu Czochralského. Často se používá při průmyslové výrobě monokrystalů křemíku, germania a arsenidu gallitého. Její podstatou je roztavená velmi čistá látka, ze které se „tahá“ monokrystal. Pro funkčnost této metody je velmi důležitá čistota. Jak okolního prostředí, tak i samotného materiálu, který se používá. V případě monokrystalů křemíku je to velmi čistý polykrystalický křemík.

Jak funguje vlastně výroba?

Před začátkem procesu výroby monokrystalu je nutné připravit si polykrystalický křemík (či jiné látky) do křemenného kelímku. Už tento krok je složitý, jelikož je během něj nutné, aby se ke křemíku nedostaly žádné nečistoty, stejně tak jako je zapotřebí, aby se minimalizovala styčná plocha křemíku a křemenné nádoby. Někdy ovšem chceme, aby křemík „nebyl sám“, a proto můžeme ke křemíku přidávat dodatečné látky, které ovlivní jeho vlastnosti a zajistí takové, jaké požadujeme. Tomuto říkáme legování.

Tím to však nekončí. Připravili jsme si směs, ale ještě jsme nezačali vyrábět. Pro začátek výroby křemíku začneme tím, že křemenný kelímek s křemíkem (a případnými přidanými látkami) vložíme do grafitového kelímku a to celé do zařízení zvaného tažička. V tažičce se roztaví křemík pomocí topidla, které je často elektrické a samo dosahuje teplot až 2000 °C a roztaví křemík. Do roztoku se následně vloží zárodečný monokrystal a tak začíná monokrystal růst. Jak monokrystal pomalu roste (okolo 5–150 mm za hodinu), tahá se nahoru (pomocí tažičky, která se právě díky tomu tak jmenuje) a otáčí se s ním, aby byl zajištěný rovnoměrný růst. Jak monokrystal vytahujeme, postupně dorůstá vespod v roztoku. Pro dokonale čistý krystal musíme konstantně přivádět inertní plyn (například argon), který zamezuje vzniku nečistot a oxidaci křemíku na stěnách křemenného kelímku. Stejně tak je důležitý i neustálý přívod vody, která chladí komoru, ve které krystal vzniká. Neméně důležitý je i neustálý příkon přístroje.

Na konci tohoto procesu získáme velký, čistý monokrystal s námi chtěnými vlastnostmi (říkáme mu ingot). Tato metoda je tedy velmi vhodná, pokud chceme získat velký monokrystal s vlastnostmi, které přesně chceme. Mezi její výhody patří možnost ovlivňovat průměr a velikost krystalu rychlostí jeho vytahování a velmi čistý monokrystal. To ovšem stojí nějakou cenu, a tou je nutnost velmi čistého prostředí a tažičky, stejně tak jako neustálý přítok chladící vody, inertního plynu a neustálý přívod elektřiny. Krom toho jsou křemenné nádoby na jedno použití a po výrobě monokrystalu se zdeformují či zničí.

Další metody jsou stručně uvedeny zde: https://csacg.fzu.cz/func/viewpdf.php?file=2000_1Ruzicka.pdf

Zdroje:

https://csacg.fzu.cz/func/viewpdf.php?file=2000_1Ruzicka.pdf

https://cs.wikipedia.org/wiki/Czochralsk%C3%A9ho_metoda

https://www.wikiwand.com/cs/Czochralsk%C3%A9ho_metoda

https://oenergetice.cz/technologie/polovodice-pn-prechod-vyroba-polovodicu

http://materialovaveda.blogspot.com/2011/07/kde-se-bere-monokrystalicky-kremik.html

Experimentální výroba krystalu

Teorie a úvod:

Rozhodl jsem se vypěstovat krystal z roztoku soli. Zvolil jsem nasycený solný roztok a nechal jej krystalizovat. Snažil jsem se o co nejrychlejší krystalizaci, tak jsem oddělal víko nádoby. Díky tomu jsem se poučil ohledně nečistot a jejich vlivu na vznik krystalu. Začaly mi vznikat nepravidelné nebo divné krystaly. Tak jsem použil víčko, které umožňovalo sice minimální průchod vzduchu, ale na druhou stranu zabraňovalo vstupu prachu a dalších věcí do roztoku, na kterých by krystaly mohly začít růst. Jelikož jsem experiment necíleně začal (dělal jsem to pro zábavu) před vydáním tohoto[14] zadání, tak jsem nedodržel a ani nevyužil mnoha rad. Snažil jsem se o konstantní teplotu, tak jsem dal roztok do skříňky, ovšem následně mi přišlo, že to trvá moc dlouho, tak jsem to dal k radiátoru. Až později mi došlo, jak teplota ovlivňuje krystalizaci. Během pobytu roztoku u radiátoru vzniklo hodně malých krystalků a i nepravidelné krystalky. Necíleně jsem během většiny krystalizační doby značně eliminoval otřesy, jelikož skříňka, ve které byl roztok a nádobka, je dost daleko a v dobré pozici tak, že se moc netřese.

Výsledky

Dospěl jsem k mnoha poměrně malým krystalům. Největší byly okolo 0,5 cm velké. Mnoho jich bylo okolo velikosti 3 mm a též se jich hodně vykrystalizovalo do podoby malých krystalků. To si myslím, že je kvůli tomu, jak jsem dal nádobu s roztokem k radiátoru a kolísala teplota. Krystaly se mi jinak hodně líbí, hlavně jsou na okrajích krásně průhledné a jde na nich vidět, kdy jsou jako monokrystaly a kdy jsou z více krystalizačních jader (to jsou pak takové spojené do sebe, morfované). Též jsem omylem díky nečistotám ze začátku vyrobil i pár krystalů, které byly „zakalené“ a nejde přes ně vidět.

[14] Pozn. redakce: myšleno zadání Velkého problému 3 z čísla 28.2.

Obrázek 5: Tady jde vidět, jak je „vnější“ část průhledná a vnitřní „kalná“. Též tu jde vidět krystal s více krystalizačními jádry – vypadá jako spojení dvou krystalů, které srostly do sebe

Obrázek 6: Krystaly Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Ládi Vávry

Zajímavosti z měření:

- Zjistil jsem, že krystalům se nechce moc růst.
- Mouchy mají z nějakého důvodu rády solný roztok.
- Krystaly jsou fakt pěkné, hlavně pod mikroskopem.
- Krystaly soli vypadají jako takové čtverečky, které jsou jako kdyby z malé zkalené vnitřní krychličky obalené průhlednou vnější. Může to ale být tím, že ze začátku krystalizovaly jinak (třeba díky změnám teploty u radiátoru) než později, když byly za poměrně konstantní teploty ve skřínce a bez otřesů.
- Baví mě dívat se, jak rostou krystaly.
- Krystaly rostou fakt pomalu.

Monokrystaly 11b

Bc.^{MM} *Ondřej Popovský*

Problém 1

V přírodě se jen některé látky vyskytují ve formě monokrystalů (např. diamant, oxid křemičitý). Monokrystal, zejména monokrystal křemíku, se používá na výrobu čipů (v dnešní době je křemíku nedostatek) a výrobu fotovoltaických panelů, kde se používá monokrystalický nebo polykrystalický křemík.

Rozdíl mezi monokrystalickým a polykrystalickým křemíkem

Monokrystalický fotovoltaický článek je více účinný na přímém světle (nejvíce v létě) a má delší životnost. Polykrystalický fotovoltaický článek má nepatrně větší účinnost při rozptýleném světle (při nepříznivých světelných podmínkách).

Použití monokrystalu

Monokrystal má jiné fyzikální vlastnosti než polykrystal. Tahle vlastnost se nazývá anizotropie[15], která určuje závislost určité veličiny na volbě směru. Anizotropii lze ale vidět i u polykrystalů, jenže je trochu změněná (potlačená). Protože polykrystal má hranice zrn a příprava polykrystalu probíhá např. válcováním[16], tak vzniká jistá deformace v jednom směru.

Problém 2

První metodu výroby v roce 1916 objevil Jan Czochralski, polský chemik. Omylem psací pero ponořil do kelímku s roztaveným kovem. Po vytáhnutí zjistil, že na konci špičky vznikl materiál s monokrystalickým charakterem. Jeho metoda byla později zdokonalena tak, že proces probíhá v přístroji – tažičce, v uzavřené peci s velmi přesnou regulací teploty. Nejprve se roztaví látka v kelímku, který se točí. Kelímek musí být schopen vydržet vysoké teploty. Pod kelímkem protéká voda, aby látka byla čistá, a ochlazováním dna kelímku daná látka levituje.[17] Po dosažení správné teploty látky se zárodek ponoří do taveniny na lanku nebo hřídeli. Zárodek je monokrystalický ve tvaru válce o poloměru přibližně 0,5 cm.[18] Následně se začne velmi pomalu vytahovat zárodek při otáčení v protisměru rychlostí několik milimetrů za hodinu. Kvalita krystalu je závislá na rychlosti vytahování krystalu. Následuje proces chladnutí.

[15] Pozn. redakce: anizotropie není nová, zvláštní fyzikální vlastnost. Je to spíše jev závislosti fyzikálních vlastností na směru, ve kterém je měříme.

[16] Pozn. redakce: válcování nespadá přímo do procesu přípravy polykrystalu. Je to spíše metoda, jak zlepšit fyzikální vlastnosti již připraveného polykrystalického vzorku.

[17] Pozn. redakce: to je velmi speciální případ použití Czochralského metody, většinou se zahřívá tavenina i s kelímkem.

[18] Pozn. redakce: znovu, toto je specifické použití, běžně se průmyslově rostou i mnohem větší krystaly.

Výhody popsané metody:

- Relativně rychlý růst
- Průmyslová příprava velkých vzorků
- Možnost kontroly procesu

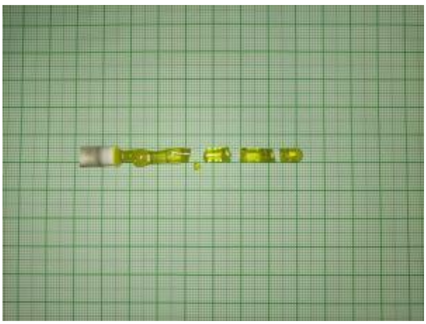
Nevýhody:

- Možnost znehodnocení krystalu kelímkem (nečistota)
- Energeticky náročný

Druhá metoda výroby je metoda floating zone (plovoucí zóna). Byla vynalezena Theuererem v roce 1962. Proces monokrystalů probíhá v laserové nebo optické peci, kde lasery nebo halogenové lampy směřují dokola na jedno místo. Začíná se tavit zárodek a prekurzor (látka, která bude krystalizovat). Jsou od sebe vzdáleny několik milimetrů a obě tyčky se točí v opačném směru. Po roztavení se tyče spojí a vzniká floating zone. V tento moment jsou obě tyče synchronně posouvány dolů. Tavenina se na původním místě ochlazuje a nová floating zone vzniká o kousek výše.

Osobně jsem si vyzkoušel v optické peci vyrobit monokrystal. Pokus byl ale velmi zrychlený, proto výsledkem nebyl monokrystal.

Pod dohledem Františka Zajíce jsem vyrobil prekurzor z Ce:YAG[19] a pak v laserové peci se dodělal náš výsledný krystal, viz obrázek 7.



Obrázek 7: Krystal Bc.[MM] Ondřeje Popovského

Výhody:

Velice čistá metoda – krystal není v kontaktu s žádnými látkami kromě okolního plynu.

[19] Pozn. redakce: cerem dopovaný yttrito-hlinitý granát

Velký problém 3

Vybral jsem si na výrobu krystalu síran hlinito-draselný. Připravil jsem si důkladně umytou zavařovací sklenici. Naplnil vodu do sklenice a nasypal síran. Každé tři hodiny jsem se sklenicí zatřepal. Pokud jsem zpozoroval, že síran ve formě prášku ubyl, přisypal jsem nový. Asi po 78 h jsem již nasycený roztok přefiltroval a rozdělil do 4 misek. První miska byla v zahradním domku (asi nejstabilnější místo, ale nejchladnější), druhá v garáži (méně stabilní teplota, ale teplejší místnost), třetí a čtvrtou jsem uložil do místnosti (nejméně stabilní, ale nejteplejší místnost). Ale čtvrtá miska byla uzavřena v plastové krabičce s menším přístupem vzduchu. Pokus jsem pečlivě pozoroval po dobu několika dnů.[20]

Bohužel jsem do misek nalil větší množství roztoku, proto se mi krystaly nepovedly, slily se do jedné vrstvy v podobě několik malých krystalů. Navíc v zahradním domku a v uzavřené krabičce se voda nestihla zcela vypařit.

Obrázek 8: Výsledek – miska ze zahradního domu

Obrázek 9: Asi největší krystal velký ≈ 4 mm

[20]Pozn. redakce: super nápad, růst krystaly na různých místech, bohužel výsledky nejsou takové, aby šlo rozumně porovnat, které místo bylo nejlepší.

Obrázek 10: Nasycený roztok

Téma 7 – Zmenšené modely

I nadále se můžete zaměřit na vymýšlení modelů skutečného světa. Připomínáme náměty od minula:

Problém 1: *Jakými způsoby se v modelové železnici může chovat zrychlení? Lze věrohodně nasimulovat jízdu lokomotivy do kopce?*

Problém 2: *Bylo by v nějakém prostředí ve stavu beztíže možné postavit model sluneční soustavy, kde by planety skutečně obíhaly díky gravitaci?*

Problém 3: *Může dávat smysl měnit jednotky v modelu nelineárně, tedy jinak, než že zmenšená jednotka je jen nějaký násobek či zlomek té původní?*

Přidáváme i několik tipů, na co se při návrhu modelu zaměřit.

Představujte si, že na svoji otázku neumíte odpověď spočítat přímo, a proto se snažíte postavit model, ve kterém můžete odpověď změřit a z toho pak odvodit hodnotu pro skutečný svět.

Nejprve si zkuste vymyslet nějaký problém nebo otázku, na kterou vás zajímá odpověď. Může to být jedno ze zadání nebo vaše vlastní otázka. Například: *„Jak rychle pojede lokomotiva o určité hmotnosti a výkonu do kopce s určitým stoupáním?“*, *„Do jaké výšky nad podlahu výtahu se člověk vznese, pokud výtah zrychluje z klidu do rychlosti* $3\,\mathrm{m/s}$ *směrem dolů s konstantním zrychlením 1,2g“*? Model pak vymýšlejte tak, aby z něj šlo dostat odpověď na vaši otázku.

Úloha 4 [3b]: *Odpověď na výtahovou otázku spočtěte. Jakou rychlostí člověk dopadne na podlahu výtahu?*

Při samotném návrhu modelu se nesnažte být věrohodní ve všech možných parametrech. K získání odpovědi na vaši otázku to nebývá potřeba. Při popisu svého modelu se pokuste diskutovat alespoň některé z následujících vlastností:

- *Konstruovatelnost:* Jde model sestrojit? Jaká úskalí to přináší?
- *Účelnost:* Odpovídá model na vaši otázku? Na jaké další otázky může dát odpověď?
- *Odchylky od reality:* Co jste zanedbali? Proč to nevadí, případně jaký to má vliv? Nebo naopak, jaké skutečné jevy zkreslují chování modelu ve srovnání se skutečným průběhem experimentu?

Pavel; `pavel.turinsky@matfyz.cz`
e-mailová konference: `zmensovani@mam.mff.cuni.cz`
pro přihlášení do konference napište Pavlovi
odevzdávejte do odevzdávátka

Průběžné výsledky

				Témata								
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Fof	4	321,1	11,0							11,0	109,7
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Z. Mareš	3	102,4	8,0		2,5	12,0	11,0	6,5	0,3	40,3	99,9
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Polách	3	86,9	8,0		2,8		9,0			19,8	86,9
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Šimová	1	82,0			6,0		10,8			16,8	82,0
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Skýpala	4	114,4		5,0			10,9			15,9	81,3
6.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Škopek	3	73,1	10,8							10,8	73,1
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Opl	4	106,3									67,0
8.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Tichý	2	177,4		1,0			7,0	1,8		9,8	63,7
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ L. Vávra	3	55,6				13,0				13,0	55,6
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kvapil	4	108,7		1,0						1,0	54,2
11.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Jendele	3	61,6	11,5				6,0			17,5	49,3
12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ K. Petrlíková	4	94,6									46,1
13.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Kolník	3	34,0		4,0						4,0	34,0
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Hladík	4	75,1					9,0			9,0	32,1
15.–16.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Flídr	4	133,8									30,9
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Čtvrtečka	2	128,1									30,9
17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Bejdová	4	27,7					11,0			11,0	27,7
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Haikl	3	27,4			2,0		4,5			6,5	27,4
19.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Faltus	2	26,8					4,5			4,5	26,8
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Popovský	2	26,3									26,3

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	4	5	6	7	$\sum_0$	$\sum_1$
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Křimská	3	35,8					8,8			8,8	25,8
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ R. Novák	2	25,7									25,7
23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Smrčka	2	23,6									23,6
24.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Verner	1	23,5									23,5
25.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Knillová	3	109,8									22,0
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Krejčí	2	21,8	0,5							0,5	21,8
27.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Boček	3	80,5			1,0		7,0			8,0	21,4
28.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Chrostek	2	28,0						2,0		2,0	20,5
29.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Polášková	3	45,9									16,4
30.	J. Rypl	3	15,6									15,6
31.	M. Steinhauserová	Z8	11,5									11,5
32.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Piroutek	4	104,9									10,5
33.	L. Poljaková	2	10,4					9,0			9,0	10,4
34.–35.	L. Vokálová	3	8,0	8,0	0,0						8,0	8,0
	V. Bartáková	2	8,0									8,0
36.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Vícha	3	19,9									7,5
37.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Jůzková	4	58,2									7,3
38.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Valtrová	3	43,2									6,0
39.	R. Zábranská	1	5,2									5,2
40.	J. Tregler	2	3,9									3,9
41.	R. Mayerová	Z9	3,0									3,0
42.	M. Plevová	3	2,2									2,2

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina obsahuje všechny body za řešení zaslaná do 1. deadlinu předchozí série. Body za řešení zaslaná později obsahovat nemusí.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`