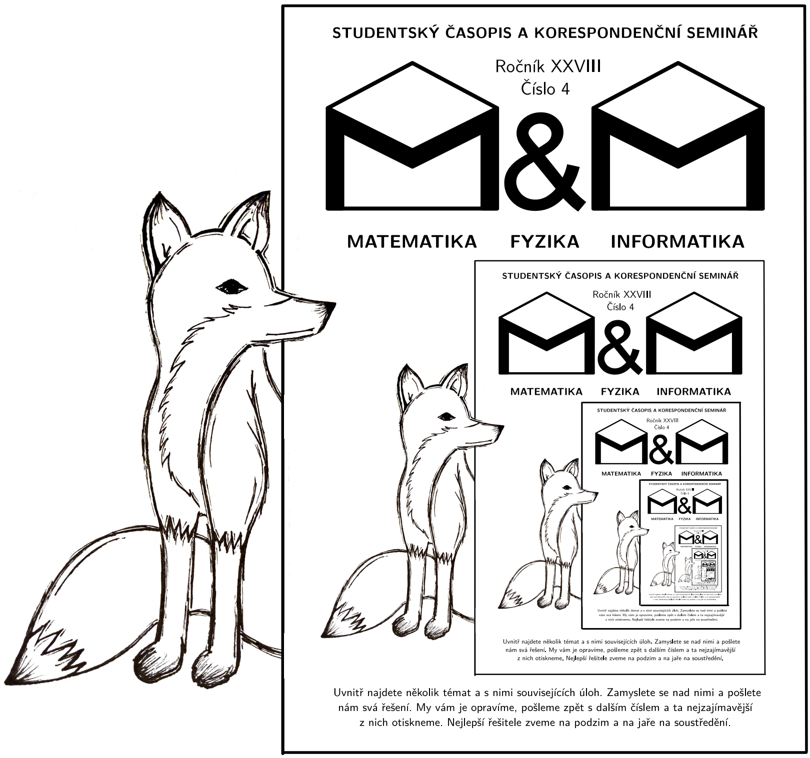
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVIII
Číslo 4

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí čtenáři,

do rukou se vám dostává 4. číslo 28. ročníku časopisu M&M, které je prvním v tomto roce. Doufáme, že jste všichni zdraví a že vás vánoční radovánky příliš nepoznamenaly a vrhnete se na řešení problémů a psaní článků s obvyklou vervou. V některých tématkách k tomu budete mít poslední možnost. Nezoufejte však, že byste měli v budoucnu málo příležitostí, protože tímto číslem začíná nové tématko o problematice modelů a modýlků.

V našem časopise nenajdete jen texty psané organizátory, ale i vámi samotnými. Tak si můžete přečíst povedený článek od Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Kvapila, ve kterém popisuje svůj pokus o růst monokrystalů. Určitě neváhejte a zkuste také něco napsat.

Těšíme se, že vás potkáme na soustředění, které by mělo proběhnout 2. až 10. dubna. Jeho přípravy jsou již v plném proudu a určitě se máte na co těšit.

Vaši organizátoři

Obsah

Zadání a řešení témat

1. deadline: 24. února 2022 | 2. deadline: 22. března 2022
Řešení odevzdaná do 24. 2. se započítají pro účast na soustředění.

Téma 1 – Elektrické sítě

Tento díl je úplně posledním tohoto tématka. Ušli jsme dlouhou cestu, od jednoduchých elektrických sítí přes celkem těžkou matematiku až po perfektní čtvercování. Děkujeme, že jste s takovým nadšením řešili naše tématko. Dále bychom vám chtěly poskytnout seznam materiálů, ze kterých jsme při přípravě tématka čerpaly. Je to především 2. kapitola knihy Modern Graph Theory, jejímž autorem je Béla Bollobás, dále stránka `http://www.squaring.net/`, kde můžete vidět různá čtvercování, a Průvodce labyrintem algoritmů od Martina Mareše a Tomáše Vally, dostupný v elektronické podobě na adrese `http://pruvodce.ucw.cz`.

Vzorová řešení zbytku úloh 2. dílu

Úloha 2

Zadání:
Ukažte pomocí principu superpozice, že libovolný proud sítí, který je výsledkem přítomnosti více zdrojů a stoků, lze získat skládáním proudů příslušejících vždy jen jednomu zdroji a stoku.

Krátké řešení od Doc.[MM] Martina Fofa:

> Máme tedy libovolný původní proud sítě, ve které je více zdrojů a stoků. My si ze všech vybereme jeden zdroj Z a jeden stok S a najdeme libovolný proud sítě, který splňuje Kirchhoffovy zákony (to díky konci druhého dílu víme, že existuje). Přiřazení vynásobíme tak, aby touto novou sítí protékal takový proud, jaký buď vtéká do původní sítě skrz zdroj Z, nebo vytéká ze zdroje Z. Pokud nyní toto přiřazení odečteme od původní sítě, tak dostaneme nové přiřazení, které má o minimálně jeden „spoj s okolím“ méně (může mít o dva méně právě tehdy, když měly Z i S stejný proud přitékající/vytékající z nich). Takto můžeme odčítat přiřazení s právě jedním stokem a zdrojem tak dlouho, dokud nedostaneme přiřazení, které má samo pouze jeden stok a jeden zdroj. Víme tedy, že součet tohoto přiřazení se všemi, které jsme odečetli, musí být původní síť s více zdroji a stoky.

Formální řešení od Dr.[MM] Aleše Opla:

> Zde se nám hodí především fakt, že řešení daného obvodu, do nějž vstupuje stejný proud, jako z něj vystupuje, existuje a je vždy jedno. Díky tomuto a také díky platnosti principu superpozice v tomto případě pak můžeme problém přeformulovat na otázku, zda jsme vždy schopni vytvořit zadané rozmístění zdrojů a stoků rozmísťováním vždy jedné dvojice a jejich následným sčítáním.

Představme si totiž, že jsme skutečně byli schopni řešení posčítat tak, abychom dostali požadované rozmístění zdrojů a stoků. Tímto způsobem jsme také dostali nějaké řešení pro obvod s těmito zdroji a stoky. Jelikož však existuje toto řešení právě jedno, tak to musí být také řešení zadaného obvodu.

Nyní se tedy podívejme na to, jak vždy sestavit pomocí jednoho zdroje a stoku libovolné rozmístění libovolného počtu zdrojů a stoků. Toho lze docílit poměrně jednoduchým postupem. Nejdříve si libovolně zvolme pořadí zdrojů (s proudy I_i) a stoků (s proudy $-I'_j$), ve kterém je budeme obsazovat, a libovolný vrchol sítě, který označme například R. Jako první řešení použijme takové, v němž do bodu, v němž se nachází první zdroj, umístíme zdroj s požadovaným proudem (I_1) a do bodu R umístíme stok. V druhém řešení pak použijeme jako zdroj bod, v němž se nachází druhý zdroj s požadovaným proudem (I_2), a jako stok použijeme opět bod R. Přesně tímto způsobem budeme pokračovat, dokud nezaplníme všechny zdroje.

Poté přistoupíme ke stokům. Nyní vždy zdroj s proudem I'_j umístíme do bodu R a stok do příslušného bodu, v němž se nachází stok, který máme v daném řešení zaplnit a ten poté bude odvádět proud o velikosti $-I'_j$.

Co se stane, když všechna řešení sečteme? Vzhledem k tomu, jak jsme jednotlivá řešení konstruovali, víme, že výsledné řešení bude obsahovat všechny zdroje i stoky s danými proudy, které mají být i ve výsledném řešení. Jedinou problematickou záležitostí by mohl být bod R, který by se mohl zdát jako další potenciální zdroj či stok. Toto ale vyřeší fakt, že do obvodu musí vstupovat stejný proud, jako z něj vystupuje. V bodě R se totiž sečtou s kladným znaménkem všechny proudy, které z obvodu vystupují, a od nich se odečtou všechny proudy, které do obvodu vstupují, a tak se vykrátí přesně na 0, a tak R není ani zdrojem, ani stokem, nýbrž obyčejným průchozím vrcholem sítě. Čímž jsme dokázali, že vždy lze sestavit libovolné rozmístění zdrojů a stoků sečtením vždy jen jednoho zdroje a stoku, pokud splňují tu podmínku, že do obvodu vstupuje stejný proud, jako z něj vystupuje. A tím jsme také dokázali požadované tvrzení.

Následuje série úloh tvořících části důkazu existence řešení, konkrétně splnění potenciálového zákona. Pro zavedené značení se můžete podívat do 2. dílu na strany 20 a 21.

Úloha 7

Zadání:
Zdůvodněte, že $N(Z, A, B, S)$ *je počet spletí* $F = F_Z \cup F_S$*, pro které* $A \in F_Z$ *a* $B \in F_S$.

Řešení od Bc.^MM Jana Škopka:

Ve chvíli, kdy $A \in F_Z$ a $B \in F_S$, získáváme dvě komponenty souvislosti, každou o dvou vrcholech a jedné hraně. Tyto dva vrcholy v každé komponentě jsou pak spojeny jednou hranou, existuje tedy jen jedna možnost, jak sestrojit kostru tohoto podgrafu.

Jak plyne ze samotné definice spleti, jedná se o les složený ze dvou komponent. V našem případě máme komponenty dvě a jak je uvedeno výše, máme jen jednu možnost, jak sestrojit kostru podgrafu. Máme tedy dvě komponenty, které dle definice tvoří spleť a jednu možnost, jak udělat její kostru.

Úloha 8

Zadání:
Rozmyslete si, že $F + AB$ je kostra právě tehdy, když $A \in F_Z$ a $B \in F_S$, nebo $A \in F_S$ a $B \in F_Z$. Jak moc je tato úloha podobná úloze 7?

Řešení od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Polácha:

Jelikož je F spleť, což je les se dvěma komponentami souvislosti, znamená to, že přidání jakékoli hrany mezi tyto dva lesy by jej změnilo na strom, v našem případě kostru. A a B se nachází v odlišných komponentách a ani jedna komponenta neobsahuje tuto hranu AB právě z toho důvodu. Proto by se z této spleti stala kostra po přidání hrany AB. Zároveň A a B musí ležet v odlišných komponentách, jinak by po jejich propojení nedošlo k vytvoření stromu/kostry ale cyklu (viz 4. tvrzení o stromu).

Úloha 9

Zadání:
Ukažte, že

$$\sum_T I_{AB}^{(T)} = \sum_F I_{AB}^{(F)},$$

kde druhá sumace je přes všechny spleti F.

Řešení od Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Aleše Opla:

Myslím si, že na začátek se nám bude hodit využít rovnosti, která byla ukázána v tématku, a to

$$\sum_T I_{AB}^{(T)} = N(Z, A, B, S) - N(Z, B, A, S).$$

Nyní se zamysleme nad tím, jaké členy dostaneme, když budeme sčítat přes všechny spleti. Zaprvé to budou členy, které budou nula, neboť $F + AB$ nebude kostra. Tyto členy odpovídají tomu, když i A i B leží buď v F_Z, nebo v F_S, tedy ve stejné komponentě souvislosti. Druhý druh členů jsou takové, když platí, že $A \in F_Z$ a $B \in F_S$. Těchto členů je $N(Z, A, B, S)$, jak jsme již ukázali v úloze 7, a všechny mají hodnotu $+1$, neboť v nich proud vždy prochází směrem z A do B.

Nyní nám již zbývají jen členy, kde $A \in F_S$ a $B \in F_Z$. Úplně stejným způsobem, jako v jsme to v úloze 7 ukazovali pro prohozené umístění bodů, tak můžeme ukázat, že počet těchto spletí a tak i počet těchto členů je $N(Z, B, A, S)$. Jejich hodnota je však -1, neboť v nich proud prochází vždy z B do A. Součet přes spletě tedy můžeme zapsat jako

$$\sum_F I_{AB}^{(F)} = 0+1\cdot N(Z, A, B,S)-1\cdot N(Z, B, A, S) = N(Z, A, B,S)-N(Z, B, A,S),$$

což je identické vyjádření, jako máme pro součet přes kostry, a tak daná rovnost platí.

Úloha 10

Zadání:
Ukažte, že $\sum_{i=1}^{k} I_{x_i x_{i+1}}^{(F)} = 0$ *pro každou spleť* F.

Řešení od Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Martina Fofa:

Jak již víme, $I_{x_i x_{i+1}}^{(F)}$ je nenulové právě tehdy, když se vrcholy x_I a x_{i+1} nachází v různých komponentách souvislosti. Suma přes celý cyklus tedy bude počet případů, kdy je první vrchol v F_Z a druhý v F_S, mínus počet případů, kdy je první vrchol v F_S a druhý v F_Z.

Pokud si tedy nakreslíme celý cyklus, tak je $\sum_{i=1}^{k} I_{x_i x_{i+1}}^{(F)}$ rovno rozdílu počtu přechodů z jedné komponenty do druhé a počtu přechodů z druhé do první. Tyto dvě hodnoty ale musí být rozhodně stejné, protože je to cyklus, a tak musí být $\sum_{i=1}^{k} I_{x_i x_{i+1}}^{(F)}$ rozhodně rovno nule.

Vzorová řešení 3. dílu

Připomeňme si tvrzení ze závěru prvního dílu tématka (to, které lehce vyplynulo z celého druhého dílu):

Pokud jsou odpory všech hran racionální a celkový proud procházející sítí má velikost 1, pak má proud na každé hraně racionální hodnotu.

Z tohoto tvrzení nyní odvodíme následující důsledek – **Nutná podmínka pro existenci rozdělení obdélníku na čtverce**:

Pokud může být obdélník rozdělen na čtverce, tak poměr rozdílných stran obdélníku je racionální.

Úloha 1

Zadání:
Dokažte předchozí důsledek z daného tvrzení.

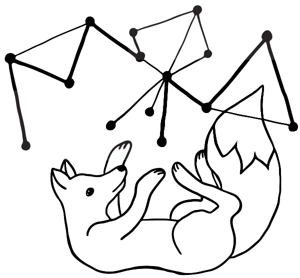
Řešení:
Mějme obdélník, který může být rozdělen na čtverce. Díky tomu mu přísluší nějaká síť s hranami s proudy úměrnými velikostem čtverců a odpory 1 Ω (tj. racionálními odpory).

Pošleme do sítě proud 1 A. To znamená, že tento proud tvoří součet proudů vystupujících ze zdroje, které jsou totožné s délkami čtverců při horní základně obdélníku (když položíme délku této základny rovnou 1).

Chtěli bychom, aby poměr stran obdélníku byl racionální, a to je (při délce horní strany rovné jedné) ekvivalentní tomu, že svislá strana obdélníku bude racionální.

Pokračování řešení od Mgr.[MM] Pavly Šimové:

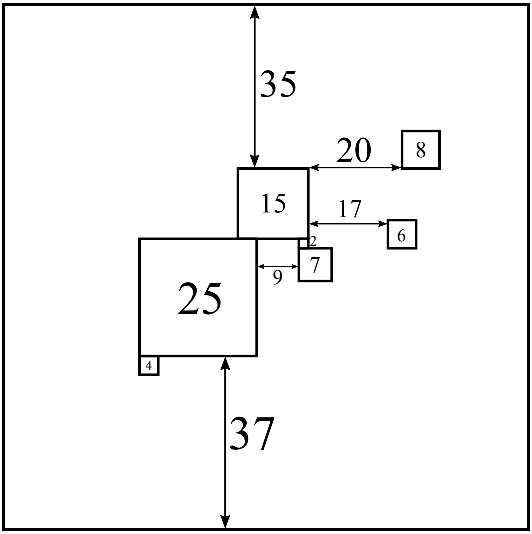
> Když tímto obvodem poteče proud 1, budou podle výchozího tvrzení i všechny proudy v obvodu racionální. A když jsou proudy i odpory v obvodu racionální, tak budou i všechna napětí racionální (vypočítám jako $I \cdot R$). Napětím v obvodu odpovídají délky stran čtverců, na které jsme rozdělili obdélník. Jejich sečtením získáme i délky stran obdélníka, které budou taky racionální, tedy i poměr stran bude racionální.



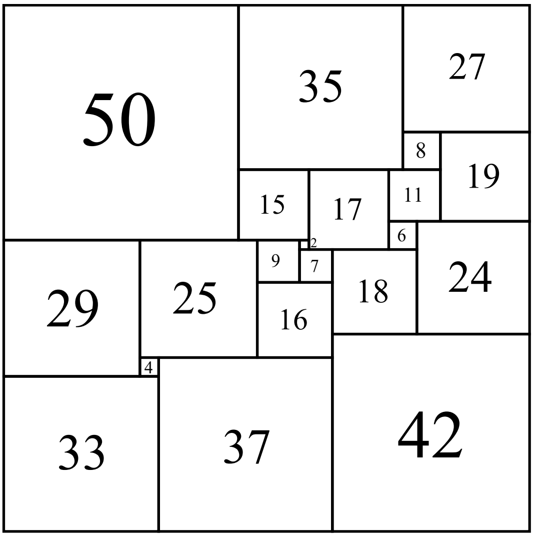
Úloha 2

Zadání:
Zkuste rozdělit čtverec 112×112 *na obrázku 1 na čtverce nestejných velikostí. (Nápověda: Vždy se snažte doplnit co největší čtverec, který se na dané místo ještě vejde. Čtverců bude 21.)*

Řešení:
Viz obrázek 2.



Obrázek 1: Obrázek k úloze 2

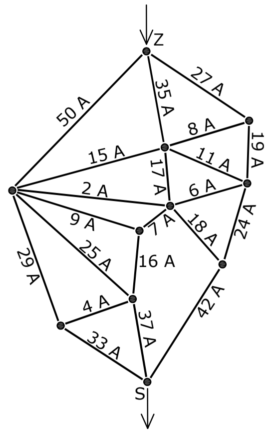


Obrázek 2: Řešení úlohy 2 – rozdělení na čtverce

Úloha 3

Zadání:
Nakreslete síť odpovídající rozdělení čtverce z úlohy 2.

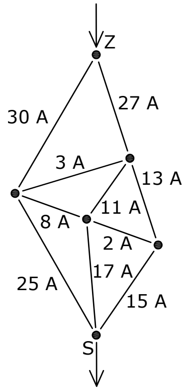
Řešení:
Viz obrázek 3.



Obrázek 3: Řešení úlohy 3 – odpovídající síť

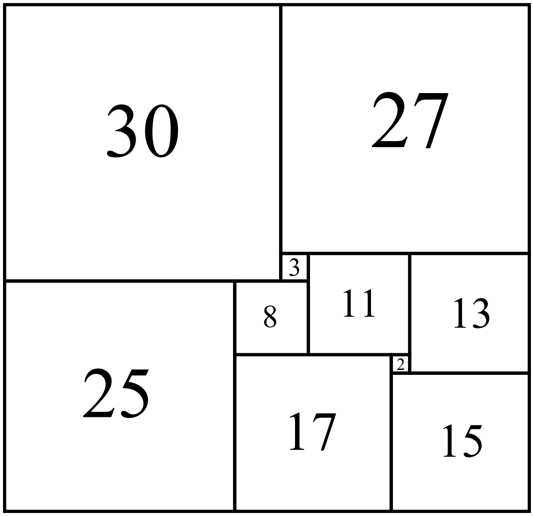
Úloha 4

Zadání:
Překreslete síť z obrázku 4 na rozdělení na čtverce.



Obrázek 4: Obrázek k úloze 4

Řešení:
Viz obrázek 5.



Obrázek 5: Řešení úlohy 4

Kačka Vokálová; katerina.vokalova@matfyz.cz
Lucka Kundratová; kundratova@karlin.mff.cuni.cz
e-mailová konference: elektricke-site@mam.mff.cuni.cz

Téma 2 – Oware

Vítejte u čtvrtého dílu. Pokud s řešením tématka teprve začínáte, doporučujeme si přečíst všechny díly popořadě. A směle do toho, body je pořád možné získat i za poražení prvního soupeře, Agamemnona.

Na GitHubu se i nadále pravidelně konají turnaje a objevili se noví protivníci, se kterými můžete poměřit své síly – Foroneus a Glaucus. Pojďme si ale něco povědět o tom, jak by mohlo být možné je porazit.

Tento strom vidím už počtvrté!

Celkem dobrý přístup je ptát se, co ještě nevyužíváme. Přidělený čas už díky iterativnímu prohlubování spotřebujeme celý. Počítač ale má i spoustu paměti, které jsme se zatím ani nedotkli. Představíme si tedy trik, kterému se běžně říká caching (nebo, obecněji, memoizace), ale v kontextu her se mu říká transpoziční tabulka. Tohle bude mnohem snadněji představitelné pro NegaMax bez alpha-beta ořezávání, tak to nejdříve popíšeme pro něj. Na konci této části najdete pár tipů, jak to skloubit s ořezáváním.

Naším cílem bude vyhnout se tomu, abychom museli nějakou pozici prohledávat do té samé hloubky vícekrát. Pokaždé, když prohledáme nějakou pozici do nějaké hloubky, dozvíme se její ohodnocení. Pokud si tento výsledek zapamatujeme a někdy budeme zase prohledávat tutéž pozici do téže hloubky, tak můžeme rovnou vrátit výsledek. Tohle se sice samo o sobě nemusí zdát až tak převratné, ale v některých situacích to může vést k výrazným zrychlením a je to potřeba pro další zlepšení.

Všimněte si, že náš Agent existuje po celou dobu hry. Pokud si budeme mezivýsledky ukládat tak, aby přežily od jednoho tahu do druhého, tak budoucí tahy už budou mít výpočty pro menší hloubky hotové. Tímto také docílíme toho, že i nedokončená iterace prohlubování pro nás bude mít alespoň nějaký přínos.

Druhé zlepšení se naplno projeví až u alpha-beta ořezávání, ale trochu pomáhá i pro dobře implementovaný NegaMax. Pokud se nám při prohledávání pozice podaří najít zaručeně vyhrávající tah, můžeme tuto pozici prohlásit za vyhranou a neztrácet čas zkoumáním dalších tahů. Pokud budeme schopní tipnout, který tah je asi nejlepší, tak si tím můžeme ušetřit docela dost výpočtů. Můžeme si tahy seřadit třeba podle toho, jak tahy ohodnotila předchozí iterace prohlubování. Tah, který byl dobrý při prohledání do hloubky h, pravděpodobně bude dobrý i při prohledání do hloubky $h + 1$.

V kombinaci s alpha-beta ořezáváním je memoizace trochu složitější. Ve výsledku si chceme pamatovat dolní a horní odhad na skutečné ohodnocení pozice. Silně doporučuji alespoň pro začátek držet ohodnocení pro jednotlivé hloubky odděleně a důkladně si rozmyslet, kdy můžeme který odhad vylepšit.

Postřehy z programování

Vzájemné pořadí agentů může záviset na výkonu stroje. Zvláště si na to dávejte pozor pokud třeba testujete na upraveném turnaji s 0,1 vteřiny na tah. Nechcete ztratit několik hodin hledáním neexistující chyby v kódu, který jenom nemá dost času na ukázání své síly.

Než začnete intenzivně optimalizovat části vašeho kódu, naučte se profilovat. Není dobrý nápad prostě jenom tipovat, co přesně váš kód zpomaluje. Přehled profilování pro Python najdete zde.[1] Profilování během hry zbytečně komplikují

[1] `https://docs.python.org/3/library/profile.html`

vlákna, zaměřil bych se na jednu iteraci prohlubování. Na GitHubu najdete zjednodušenou verzi kódu, kterým profilujeme my. Pro svého agenta ji nejspíše budete potřebovat trochu upravit.

Výsledky turnajů dost zkresluje to, že agenti mají tendenci hrát pokaždé stejně. Vybírat úmyslně horší tahy po vás samozřejmě nemůžeme chtít, ale existuje lepší způsob. Využijte inicializaci agenta k zavolání

```
random.shuffle(moves := list(range(6))).
```

Výsledný seznam `moves` pak použijte jako výchozí pořadí pro zkoušení tahů. Erechtheus a novější organizátorské programy toho využívají a zatím to jejich výkony spíše zlepšuje.

Matej; `lieskovsky.matej+mam@gmail.com`
Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
Borek; `b0r3k@matfyz.cz`
e-mailová konference: `oware@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 3 – Lingvistika

Fonetika

Po krátké přestávce se vrací i lingvistické tématko s novým zadáním. Tentokrát se podíváme na vyslovování písmen abeced a jeho zápis.

Nejmenším stavebním kamenem je hláska. Jak už možná víte, jedná se o samostatný zvukový projev. Hlásky (a obecně různé zvuky) budeme v textu zapisovat v hranatých závorkách: [a]. Pokud hlásky mají rozlišovací funkci (tj. jejich změnou se změní význam slova), tak je nazýváme fonémy.

Problém 1: *Minimální pár jsou dvě slova, která se od sebe liší pouze jednou hláskou. Kupříkladu "los" a "les". Nalezněte slovo či slova, která mají v češtině co nejvíce minimálních párů.*

Pojďme se podívat na asi nejpřirozenější způsob dělení fonémů. Každý foném má určité vlastnosti, které ho přesně určují. V případě souhlásek jsou to tyto:[2]

- místo artikulace
- artikulační překážka
- znělost
- přídech
- užití nosu

Následující tabulka obsahuje některé souhlásky indického jazyka sanskrt, který se v dnešní době stále používá.

[p]	[p^h]	[b]	[b^h]	m
[t]	[t^h]	[d]	[d^h]	n
[ʈ]	[ʈ^h]	[ɖ]	[ɖ^h]	[ɳ]
[c]	[c^h]	[ɟ]	[ɟ^h]	[ɲ]
[k]	[k^h]	[g]	[g^h]	[ŋ]

Tabulka 1: Sanskrt[3]

Úloha 2 [1b]: *Pokud budete číst tabulku 1 shora zleva ve směru doprava a dolů, tak si můžete všimnout, že hlásky jsou uspořádané podle nějakých vlastností. Podle kterých vlastností jsou uspořádané? Má nějaké uspořádání i naše abeceda? Pokud ne, jak by se daly souhlásky uspořádat?*

Jak již bylo výše naznačeno, tak každá souhláska má při vyslovování určité vlastnosti, které můžeme nějak zapsat.

Souhlásku [c] můžeme zapsat takto:

$$\begin{bmatrix} \textit{místo}: & \textit{patro} \\ \textit{překážka}: & \textit{frikativa} \\ \textit{nos}: & \textit{NE} \\ \textit{přídech}: & \textit{NE} \\ \textit{znělost}: & \textit{NE} \end{bmatrix}$$

Pokud nějakou souhlásku popisujeme, tak vždy jako nějakou množinu vlastností. Zatímco u vlastností jako užití nosu, přídech či znělost rozlišujeme pouze ANO/NE, u místa nebo překážky rozlišujeme více konkrétních hodnot. Možnosti jsou v následujících seznamech:

[2] Pokud vás zajímá, kde přesně které hlásky vznikají, tak se můžete podívat na `http://smu-facweb.smu.ca/~s0949176/sammy/`.

[3] [p^h] můžete vyslovovat jako [p] s přídechem

Místo	Překážka
• obouretný • zubní • retroflex – špička jazyka se zakroutí za patro • patrový • zadopatrový	• zábrana • frikativa – zúžení • aproximanta – např. [j], hodně se blíží samohláskám, jen se příliš rychle vyslovují • nazální – nosní

Seznamy 1: Atributy místa a překážky

Při běžné mluvě se ne vždy zachovávají hlásky tak, jak jsou zapsány. V češtině je to vidět u znělých a neznělých souhlásek. Vezměme si pro příklad slovo plod. [d] na konci se v přítomnosti některých hlásek mění na [t]. Takových pravidel je samozřejmě vícero a tak nastává otázka, jak je zapsat. Náš příklad plodu bychom zapsali následovně:

$$[d] \rightarrow [t] \ / \ plo\_\#$$

Co to vlastně říká? Hláska [d] se mění na [t], pokud se kolem ní vyskytují hlásky plo a # značí konec slova. Samozřejmě popisovat takováto pravidla pro každé slovo by bylo velmi vyčerpávající. Jelikož si v pravidlech hrajeme s hláskami, tak je můžeme zapsat i s pomocí množin (viz nahoře) a vyvarovat se tak rozdílů výslovnosti v různých jazycích.

Úloha 3 [1b]: *Pojďme spojit předchozí informace a zůstaňme pro jednoduchost u češtiny. Už jsme tu nakousli změnu hlásek při znělosti a neznělosti. Pokuste se ji vyjádřit jako pravidla s pomocí zápisu v množinách.*

- *znělé: b, v, d, z, g, h, ž, ď*
- *neznělé: p, f, t, s, k, ch, š, ť*

Zkuste je zapsat s pomocí co nejméně pravidel. Zkuste si třeba rozmyslet, zda se souhlásky vyskytují na začátku/uprostřed/na konci slova.

Pro zápis pravidel používejte _ jako prázdné místo, kam patří souhláska, nebo skupina souhlásek, kterých se pravidlo týká, a symbol # pro začátek a konec slova.[4]

Nakonec se ještě přesuneme k samohláskám. Samohlásky k popisu potřebují ještě jednu vlastnost, která se nazývá otevřenost. Otevřenost je vzdálenost jazyka od patra. Samohlásky nazveme uzavřené, když je jazyk patru nejblíže, otevřené,

[4] V příkladu není # na začátku slova, to znamená, že před 'plo' se můžou vyskytovat nějaké jiné hlásky a pravidlo pro taková slova bude také platit. Pokud by na začátku byl #, tak pravidlo platí pouze pro slovo 'plod'.

pokud je nejdále. Možných poloh je sice více, kromě otevřených a uzavřených nám ale bude stačit rozlišovat ještě polouzavřené samohlásky.

Úloha 4 [1b]: *Pokud bychom pro popis samohlásek použili stejné vlastnosti jako pro souhlásky a navíc otevřenost, tak by nám jedna vlastnost trochu přebývala. Která? A hlavně proč?*

Tímto popisem se dají zachytit prakticky veškeré hlásky, které lidé používají. Napříč národy se hlásek vyskytuje ale strašná spousta. Pořádek do toho vnáší mezinárodní fonetická abeceda[5] (zkráceně IPA), která se dá použít pro zapsání výslovnosti všech jazyků.

Honza; jan@piroutek.eu
Lucka; lucy.kuncarova@gmail.com
e-mailová konference: lingvistika@mam.mff.cuni.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře

Vzorová řešení k úlohám 2. dílu

Úloha 1

Zadání:
Dokažte, že pro úhel δ_k a $k > 2$, kde δ_k je úhel, jejž svírá paprsek vycházející z kapky s paprskem vcházejícím, platí

$$\delta_k = (k-2)\pi + 2(\alpha - (k-1)\beta)$$

kde α je úhel, pod který paprsek dopadá na povrch kapky ze strany atmosféru, a β úhel, pod kterým z tohoto rozhraní vystupuje na straně kapky (oba úhly jsou dle konvence odečítány od kolmice k rozhraní a dosazovány v radiánech).

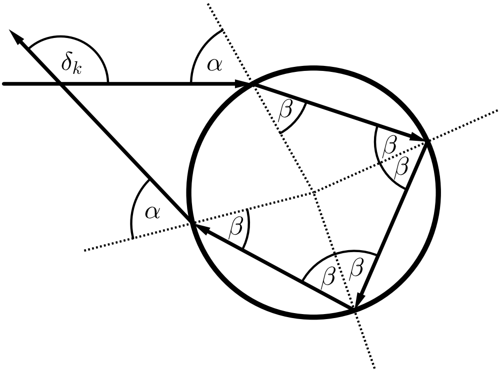
Řešení:
Omezme se na paprsky dopadající na horní polovinu kapky (viz obrázek 6). Postup pro spodní polovinu kapky je analogický. Dále pro paprsek na obrázku definujme úhel stočení po směru hodinových ručiček jako kladný a úhel stočení proti směru hodinových ručiček jako záporný.

Všimněme si, že body dvou po sobě jdoucích vnitřních odrazů společně se středem kapky vždy tvoří rovnoramenný trojúhelník, který má u základny úhly β. Při každém vnitřním odrazu se paprsek stočí o úhel $\pi - 2\beta$.

Zároveň při vstupu a výstupu z kapky se paprsek ve stejném směru stočí o úhel $\alpha - \beta$.

Dojde-li ke $k-2$ vnitřním odrazům, dostáváme otočení o
$\delta_k = (k-2)(\pi - 2\beta) + 2(\alpha - \beta) = (k-2)\pi + 2(\alpha - (k-1)\beta)$.

[5] https://cs.wikipedia.org/wiki/Mezin%C3%A1rodn%C3%AD_fonetick%C3%A1_abeceda



Obrázek 6: Obrázek k řešení první úlohy druhého čísla

Úloha 2

Zadání:
Experimentálně dokažte, že střed duhy leží na polopřímce dané sluncem a pozorovatelem.

Řešení:
Způsobů, jak toto dokázat, je spousta. Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Láďa Vávra si s úlohou poradil pozorováním uměle vytvořené duhy z různých úhlů a následnými úvahami o symetrii, což je v pořádku. Nejpřesnější a současně nejtriviálnější z možných metod je pravděpodobně změření úhlové výšky a azimutálního směru pomyslného středu duhy a Slunce a následné předvedení, že v rámci stanovené odchylky leží oba tyto body přesně v opačných bodech nebeské sféry.

Protože možné postupy řešení zdaleka nebyly vyčerpány, tato úloha zůstává nadále otevřena jako problém 12. Nebojte se přijít s originálnějším řešením!

Problém 4

Zadání:
Pokuste se vytvořit duhu v domácích podmínkách. Potřebujete k tomu pouze dostatečné množství padající vody a dostatečně silný zdroj světla. Experiment vyfoťte. Pokud se vám to povedlo, pokuste se měnit parametry vašeho uspořádání, vyzkoušejte například více různých zdrojů světla, víc různých kapalin kromě vody, nebo se pokuste změnit velikost kapek. Diskutujte, jak se vámi pozorovaná duha mění v závislosti na těchto parametrech.

Řešení dle Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ládi Vávry:

Teorie

Pokusím se zreplikovat podmínky, jaké jsou při duze venku.

Praxe + poznámky

Zkoušel jsem různé intenzity světla, a nejlépe to šlo (okem) vidět při silném světle. Použil jsem bílé světlo silné čelovky. Použil jsem rozstřikovač jako zdroj vody, protože sprcha nefungovala dost dobře.

Čím je větší vzdálenost od vodních kapek, tím „větší“ se duha jeví. Když je světlo výše, tak je pro vidění celé duhy lepší jít dál od vodních kapek. A duha se jeví výše.

Určitě tedy duha závisí na parametrech a podmínkách, které jsou. Silnější světlo dá silnější duhu, nebo spíše silnější barvy a tudíž se to jeví jako silnější barevná duha. Závisí i na vzdálenosti pozorovatele od vodního sloupce. Tomu se pak vzhledem k jeho vzdálenosti od kapek vody jeví duha jinak. Jiné zdroje světla určitě budou mít vliv, jelikož například bílé světlo obsahuje v sobě všechny barvy, duha bude barevná. Pokud bych však použil jen světlo bez nějaké barvy, tak by duha nevypadala jako „opravdová duha“ protože by tam nějaká barva „chyběla“.

Různé kapaliny mají rozdílný lom světla. Proto si myslím, že by se změnil úhel, pod kterým je duha vidět. Což by znamenalo, že Sluníčko může být jak výše, tak níže, aby byla celá duha, primární či jakékoliv variace vidět.

Úloha 5

Zadání:

S využitím vztahů zavedených ve druhém čísle vykreslete následující závislosti v programu vlastní volby. Číselné konstanty a, r, I_0 můžete položit rovné 1, Fresnelovy koeficienty R a T vyčíslete např. jako $R = 1/2 = T$. Není-li uvedeno jinak, za index lomu dosazujte hodnotu pro vodu $n_r = 1{,}33$.

a) *Závislost δ_k na vzdálenosti původního paprsku od osy kapky pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [2b]*

b) *Závislost I_k na vzdálenosti původního paprsku od osy kapky pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [2b]*

c) *Závislost δ_k, při kterém intenzita prošlého paprsku nabývá maxima, na indexu lomu kapaliny pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [2b]*

d) *Závislost I_k na δ_k za předpokladu, že na kapku dopadá široký svazek paprsků světla o stejném směru a intenzitě pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [3b]*

Řešení:

Algoritmus využívá vztahy ze zadání druhého čísla:

$$\delta_k = (k-2)\pi + 2[\alpha - (k-1)\beta] \tag{1}$$

$$I_k = \frac{a^2}{4r^2} I_0 R^{k-2} T^2 \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\delta_k)\left|1 - \frac{k-1}{n_r}\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right|} \tag{2}$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{n_r^2 - 1}{k^2 - 2k}\right)} \tag{3}$$

Cyklus vedoucí ke správnému vyřešení části a) spočíval v krocích:

1. Volba vzdálenosti d paprsku od osy (v rozmezí 0 až 1)
2. Výpočet úhlu dopadu α ($\sin(\alpha) = d/a$)
3. Výpočet úhlu lomu β ($\sin(\alpha) = n_r \sin(\beta)$)
4. Výpočet úhlu rozptylu δ_k (vztah (1))

V části b) navazoval 5. krok výpočtem intenzity ze vztahu (2). V části c) byl první krok přeskočen a úhel α byl stanoven ze vztahu (3). V části d) byly sečteny všechny příspěvky z části b), každý s váhou $2\pi d$.

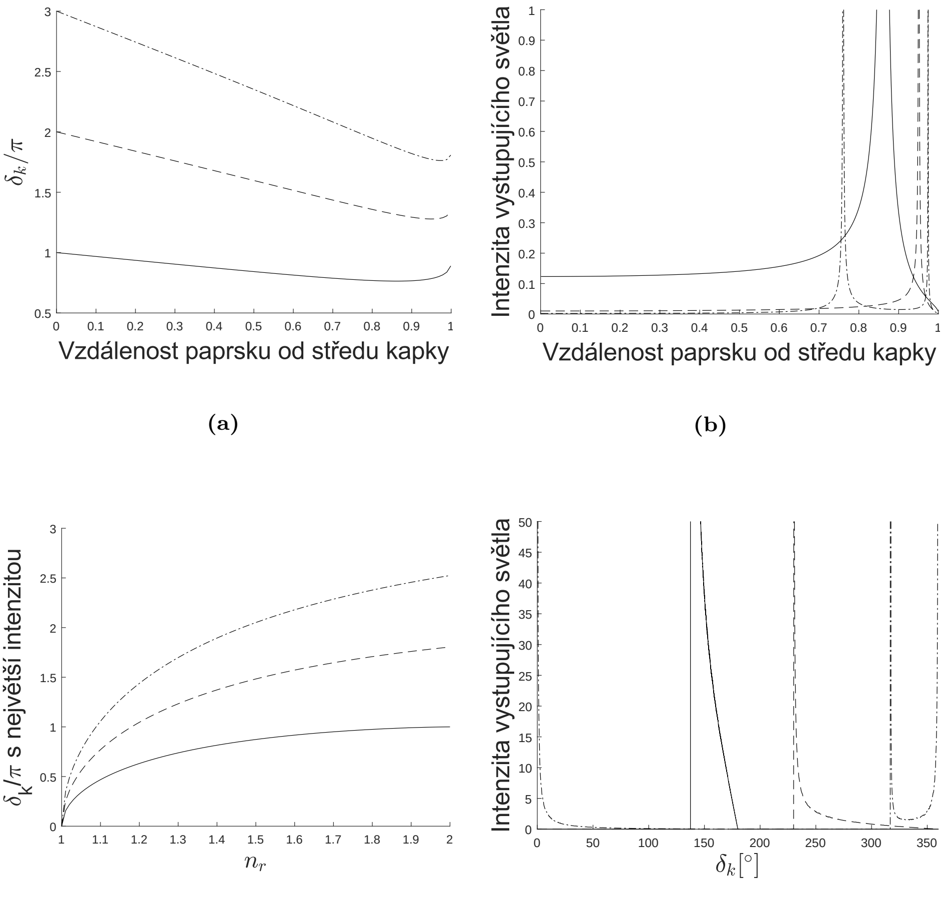
Při správném vykreslení požadovaných závislostí měly vyjít grafy podobné těm na obrázcích 7a-d.

Jediný nepřímočarý krok byl vyžadován v úloze d), kde bylo potřeba nejdřív spočítat intenzitu a až poté ji přiřadit bodu na vodorovné ose.

Na obrázku d) je dobře vidět, že intenzita vystupujícího světla diverguje v bodech daných vzorcem (3). V případě $k = 3$ je to $\delta_3 = 138°$, což znamená 42° od protilehlého bodu vůči zdroji. V případě $k = 4$ je divergence v bodě $\delta_4 = 230°$, což je 50° od protilehlého bodu vůči zdroji. Protože je světlo promítáno do celého kruhu, vidíme, že sekundární duha skutečně leží zhruba 8° nad duhou primární. V případě $k = 5$ intenzita diverguje v bodě $\delta_5 = 327°$, což je 43° vůči zdroji, tedy skutečně na opačné straně oblohy než duha primární a sekundární. Krom toho zde však divergenci pozorujeme také v bodech $\delta_5 = 0°$ a $\delta_5 = 360°$ (které jsou samozřejmě na obloze ekvivalentní). Tato vedlejší divergence je rovněž důsledkem vztahu (2), kde se při $\sin(\delta_k) = 0$ objevuje nula ve jmenovateli. Z toho zároveň plyne, že by se tato divergence měla vyskytovat nejen v bodě $\delta_k = 0°$, ale také $\delta_k = 180°$, a to u všech tří závislostí. Nevyskytuje se proto, že paprsek po prodělání $k - 2$ vnitřních odrazů může být stočen jen o úhel δ_k z nějakého omezeného intervalu. Divergenci tedy nevidíme, protože pod úhlem, který by jí odpovídal, paprsek nemůže vystoupit a v daném směru je intenzita nulová. Nicméně tato divergence je z hlediska duhy stejně spíše nezajímavá, protože se vyskytuje výhradně na přímce protínající Slunce a střed kapky a projevuje se podobně jako čočka, která směřuje paprsky do ohniska. Žádné další duhové úkazy tímto mechanismem nevzniknou.

Na obrázku a) lze vidět, do kterých směrů se který paprsek láme, na obrázku b) pak stejnou divergenci jako na obrázku d), jen tentokrát v závislosti na poloze paprsku. Obrázek c) prokazuje, že s větším indexem lomu kapky se duha rozšiřuje, ačkoli z grafu již nejsou patrné další aspekty závislosti na indexu lomu, které jistě odhalíte sami při řešení úlohy 4.6.[6]

[6]Použité značení úloh se týká tohoto tématka. Zápis „úloha X.Y“ čtěte „úloha Y z tématka Atmosférické jevy z čísla X“.



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Obrázek 7: Obrázky k řešení úlohy 5 druhého čísla. Plná čára odpovídá $k = 3$, přerušovaná čára odpovídá $k = 4$ a čerchovaná čára odpovídá $k = 5$

Díl 4: Doplňující úlohy

S politováním oznamujeme, že čtvrté číslo M&M je poslední, ve kterém vyjdou k tomuto tématku nová zadání (alespoň pokud se nestane zázrak, o kterém budete samozřejmě v pátém čísle zpraveni). S přihlédnutím k této okolnosti nebudeme načínat novou kapitolu optických jevů, nýbrž rozvedeme a uzavřeme tři kapitoly předcházející, ve kterých jsme si pověděli o astronomické refrakci, o duze a o halových jevech. Doplníme k nim úlohy, které se do předchozích čísel nevešly, nebo které navazují na tehdy ještě tajná vzorová řešení některých úloh. Dále zde naleznete nápovědu k některým dříve zadaným problémům, ke kterým dosud nedošlo tolik úspěšných řešení, kolik by si tyto problémy zasloužily.

V prvním čísle bylo slíbeno, že řešení všech problémů bude možné odesílat v průběhu celého ročníku, to platí nadále. Ke každému problému lze odeslat libovolný počet řešení. Tato řešení se mohou vzájemně doplňovat, hodnocení všech jejich neduplicitních částí se budou sčítat.

Koho by přesto žádný z problémů nezaujal, může k tomuto tématu sepsat článek. Atmosférické jevy tímto zdaleka nejsou vyčerpány, za bližší seznámení určitě stojí z nejznámějších např. korony a glorie, jevy probíhající v oblacích, elektrické výboje nebo třeba i zvuk, který se v atmosféře ohýbá podobně jako světlo. K nastudování vřele doporučujeme knihu Pozoruhodné jevy v atmosféře od prof. Jana Bednáře, kterou za hlavní zdroj využívalo také toto tématko.

Nyní však vzhůru do řešení, začněme jednou úlohou na rozehřátí.

Úloha 1 [2b]:

Trajektorie paprsku ovlivněného astronomickou refrakcí na první pohled vzbuzuje dojem analogie se šikmým vrhem v gravitačním poli a možnost svrchního zrcadlení tento dojem ještě podporuje. V souvislosti s tím se nabízí otázka, zda není možné najít analogii také v podobě existence kosmických rychlostí. Příliš strmě stoupající paprsek opustí atmosféru, málo strmý paprsek prodělá svrchní zrcadlení a putuje zpět k zemskému povrchu. Je přípustný nějaký mezipřípad, kdy paprsek „zůstane na oběžné dráze“, jako je tomu v analogii gravitace?

Některá řešení úlohy 1.2 upozorňovala na to, že předepsaný teplotní model ve velkých výškách selhává, protože začne udávat zápornou teplotu. Tato řešení mají samozřejmě pravdu, teplotní modely byly určeny k demonstraci vzniku inverze (viz vzorové řešení úlohy 1.2) a v reálném světě je lze uplatnit nejvýše lokálně. Nyní však dostanete příležitost odvodit, jak se teplota s výškou vyvíjí doopravdy.

Problém 2: *Experimentálně změřte závislost teploty na výšce nebo ji odvoďte z dat z libovolného zdroje. Aproximujte ji teoretickým modelem. Odvodit ji lze např. z výškové závislosti tlaku, hustoty apod., tato data lze s pomocí internetu snadno dohledat. Pokud používáte zdroje, které hledanou závislost přímo uvádějí, neopisujte ji, je ovšem žádoucí využít ji k ověření vašich výsledků. Vzhledem k tomu, že je výsledek obecně znám, hodnocen bude především postup a to jak z hlediska správnosti, tak i elegance a kreativity.*

Krom omezené platnosti teplotního modelu přináší další omezení také problém 1.4. Každá teorie, která pracuje s indexem lomu vzduchu, totiž předpokládá, že světlo vzduchem prochází pomaleji než vakuem (z definice indexu lomu), což je důsledek interakce s molekulami vzduchu a vlnové povahy světla. Při dostatečně nízkých koncentracích molekul n jsou ovšem interakce s nimi natolik vzácné, že se na rychlosti světla téměř nemohou projevit, a takové jevy, jako je astronomická refrakce, pak nelze očekávat.

Přechod mezi oběma těmito situacemi pochopitelně není ostrý, obě nastávají pouze v nějakých limitních případech a problém 1.4 se zabývá tím, jak tyto limitní případy definovat.

Jednou z veličin užívaných k vyčíslení četnosti interakcí je tzv. střední volná dráha. Značí se λ a udává dráhu, kterou částice (v našem případě fotony tvořící paprsek) průměrně uletí mezi dvěma interakcemi s dalšími částicemi. S jejím odvozením jste se mohli mimochodem setkat už při řešení úlohy 3.1.

Velikost střední volné dráhy by sama o sobě měla stačit k dobrému definování podmínek v daném prostředí. Při experimentech ve vakuové aparatuře omezených rozměrů běžně rozlišujeme mezi tzv. viskózními podmínkami (vzduch je spojité prostředí) a molekulárními podmínkami (molekuly se pohybují nezávisle na sobě). Označíme-li D typický rozměr aparatury, o viskózních podmínkách mluvíme v případě[7] $\lambda \ll D$ a o molekulárních v případě $\lambda \gg D$.

V našem případě je problém, že máme rozměry neomezené. Nadchází proto vhodný čas na úvahu, jak známý popis rozšířit na neznámou situaci. Naše úvaha nemusí být nezbytně jediná správná, ani nejlepší, od toho je to taky Problém a ne Úloha. Jako fyzici se však můžeme držet zásady, že pokud nám úvaha pomůže problém vyřešit a přitom nevyjdou najevo skutečnosti, které naše řešení prokazují jako vyloženě špatné, je v pořádku se takové úvahy držet.

Naše úvaha onen chybějící referenční rozměr D odvozuje z pohybu světelného paprsku. Zafixujme polohu paprsku $[x_0,y_0]$ v čase t_0, koncentrace okolních molekul je n_0 a střední volná dráha λ_0. Během nějakého hodně krátkého časového intervalu délky Δt paprsek urazí vzdálenost Δl, ve svislém směru Δy, čímž se sníží okolní koncentrace molekul o Δn a zvýší střední volná dráha o $\Delta\lambda$. Náhodné srážky paprsku s molekulami lze modelovat jako tzv. Poissonův proces,[8] pro který platí, že budoucí vývoj systému je plně dán okamžitým stavem systému, nezávisí

[7] Značení $a \ll b$ zavádíme, když chceme říct, že a je řádově menší než b. V praxi se jako exaktní definice většinou používá $b/a \geq 10$, tj. „menší nejméně o řád“, ačkoli záleží na konkrétní situaci, někdy bývá potřeba rozdíl více než jednoho řádu. Případ $a \gg b$ je analogický. Občas se používá také $a \approx b$ jako „a je řádově srovnatelné s b“, ačkoli je to poněkud zavádějící, protože tento výraz téměř vždy značí přibližnou rovnost, ne jen řádovou srovnatelnost (viz úloha 4.4). Porovnávání řádů je užitečné především při vyšetřování aproximací, tj. když chceme nějaký složitý výraz upravit tak, aby bylo snazší vypočítat jeho číselnou hodnotu a zároveň aby se takto vypočítaná hodnota příliš nelišila od skutečné hodnoty neupraveného výrazu. V takovém případě je potřeba provést jindy matematicky nepřípustné úpravy, které nejčastěji spočívají v položení některých „malých“ členů za rovny nule. Právě zápis $a \ll b$, resp. $a \gg b$ nám umožňuje stanovit, které členy jsou to ty „malé“.

[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_point_process`

na stavech minulých. Proto si můžeme λ_0 představit jako vzdálenost, která paprsku v okamžiku t_0 zbývá do pomyslné nejbližší srážky. Za čas Δt se nejbližší očekávaná srážka paprsku s částicí vzdálí o $\Delta\lambda$ od polohy $[x_0,y_0]$, ale paprsek se jí mezitím přiblíží o Δl, takže vzdálenost paprsku od nejbližší očekávané srážky se ve skutečnosti zvýší jen o $\Delta\lambda - \Delta l$. Je-li $\Delta\lambda \ll \Delta l$, paprsek se srážkám přibližuje rychleji, než se ony vzdalují, a ke kolizím dochází často. Je-li $\Delta\lambda \gg \Delta l$, očekávané srážky se vzdalují příliš rychle a paprsek se s žádnou částicí dle očekávání již nikdy nesetká.

Přijmeme-li výše uvedenou úvahu jako fakt, celý problém 1.4 se redukuje na jedinou přímočarou úlohu rozdělenou do několika kroků.

Úloha 3 [2b+2b+2b+2b+bonusy]:

a) *Odvoďte závislost střední volné dráhy paprsku na koncentraci molekul, tj. funkci $\lambda(n)$.*

b) *Odhadněte závislost koncentrace molekul na výšce, tj. funkci $n(y)$. Můžete k tomu využít 1. termodynamický zákon $pV = Nk_BT$ a buďto dohledané závislosti $p(y)$, $T(y)$, nebo třeba i vlastní výsledky získané při řešení problému 4.2.*

c) *Veličiny $\Delta\lambda$ a Δl se vztahují k nějakému neurčitému, velmi malému časovému posuvu Δt a samy o sobě je nelze vyčíslit. Navrhněte, jak podmínky $\Delta\lambda \ll \Delta l$ a $\Delta\lambda \gg \Delta l$ přepsat pomocí známých měřitelných veličin, jako je sklon paprsku nebo rozměry molekul vzduchu. Využijte k tomu závislosti nalezené v krocích a) a b).*

d) *Odhadněte, v jakých výškách je splněna podmínka $\Delta\lambda \gg \Delta l$, tj. v jakých výškách lze mluvit o jakési analogii molekulárních podmínek.*

Při řešení úlohy 3 by se vám mohla hodit následující často užívaná aproximace.

Úloha 4 [2b]: *Nechť $a = 1/b$. Změní-li se b o malou hodnotu $\Delta b \ll b$, na a se to projeví změnou o hodnotu $\Delta a \ll a$. Dokažte, že $a + \Delta a \approx \frac{1}{b} - \frac{\Delta b}{b^2}$.*

Problém 5: *Inspirujte se výše uvedenou úvahou a pokuste se najít jinou, lepší definici podmínek, při nichž je koncentrace molekul příliš nízká, než aby docházelo k astronomické refrakci. Nebo uvedenou úvahu napadněte, zdůvodněte, proč podle vás není správná a v ideálním případě ji zároveň opravte tak, aby správná byla. Případně se můžete zaměřit také na jiná omezení naší teorie, definovat podmínky pro ně a diskutovat, zda tato omezení třeba nepřijdou v platnost dřív než výše uvedené omezení dané koncentrací molekul.*

Nyní se vraťme k úlohám, které se týkaly duhy. Připomeňme z druhého čísla, že paprsek, který v kapce prodělá $k-2$ vnitřních odrazů, vystupuje z kapky vychýlen o úhel

$$\delta_k = (k-2)\pi + 2[\alpha - (k-1)\beta], \tag{4}$$

kde α je úhel, pod kterým paprsek dopadá na rozhraní kapky, a β je úhel, pod kterým se na tomto rozhraní láme. Svázány jsou Snellovým zákonem $\sin(\alpha) = n_r \sin(\beta)$, kde $n_r = n_2/n_1$ je relativní index lomu.

Vystupující paprsek má ve vzdálenosti r od kapky intenzitu

$$I_k = \frac{a^2}{4r^2} I_0 T^2 R^{k-2} \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\delta_k) \left|1 - \frac{k-1}{n_r} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right|}, \tag{5}$$

kde a je poloměr kapky, T je koeficient průchodu (tj. část paprsku, která na rozhraní prostředí projde skrz) a R je analogicky koeficient odrazu (tj. část paprsku, která se na rozhraní odráží), platí pro ně $T, R \in [0,1]$ a $T + R = 1$.

Úloha 6 [3b]: *Pro jaké hodnoty koeficientů odrazu a průchodu T a R bude mít k-tý řád duhy největší intenzitu?*

Dále připomeňme, že světlo vystupující z kapky po $k - 2$ vnitřních odrazech se silně koncentruje do směru charakterizovaného podmínkou

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{n_r^2 - 1}{k^2 - 2k}\right)}. \tag{6}$$

Úloha 7 [3b+2b+2b+3b]:

a) Dokažte, že je intenzita vystupujícího světla I_k skutečně koncentrována právě do směru daného podmínkou (6)*.*

b) Pro které hodnoty indexu lomu n_r je podmínka (6) *platná?*

c) Popište, co se děje v situacích, kdy podmínka (6) *platná není.*

d) Vykreslete úhlové rozdělení intenzity vystupujícího světla v situaci, kdy podmínka (6) *platná není.*

V úloze 2.8 jsme se zabývali otázkou, zda může vzniknout úkaz podobný duze také na vzduchových bublinách ve vodě. Z hlediska teorie jde o úplně stejný postup jako v případě kapek popsaném ve druhém čísle, jen je relativní index lomu $n_r < 1$. Zda tato skutečnost stačí k narušení mechanismu vzniku duhy, to není na první pohled vůbec zjevné. Protože se to žádnému z došlých řešení zatím nepodařilo potvrdit ani vyvrátit, zůstává problém nadále otevřen.

Problém 8: *Rozhodněte, zda vznikne duha nebo jiný zajímavý úkaz, prochází-li světlo vzduchovou bublinou ve vodě. Své rozhodnutí podpořte úvahou, numerickým výpočtem, nebo experimentem.*

Doplňujeme k němu pouze následující nápovědu.

1. Pojem „bublina“ je v češtině poněkud mnohoznačný. Abychom mohli tuto úlohu řešit, musíme se omezit na homogenní vzduchovou kouli obklopenou homogenní masou vody, ve které se v ideálním případě nachází pozorovatel. Je-li pozorovatel za sklem, ničemu to zvlášť nevadí, ale např. mýdlová bublina tuto definici nesplňuje.

2. Pro vznik duhy není ani tak klíčové ono „duhové“ zabarvení (i když se mu asi nevyhneme) jako schopnost opravdu silně koncentrovat svazek rovnoběžných paprsků do pevně daného směru. Abychom prokázali, že duha na bublině vznikne, musíme prokázat, že bublina dokáže světlo koncentrovat také. K tomu je potřeba silný zdroj světla jdoucí z jediného směru.

3. Intuice nám asi řekne, že v atmosféře, která obsahuje jedinou, byť sebevětší kapku, bychom asi duhu nepozorovali. Pokud se tedy věnujete experimentální části úlohy, je vhodnější zkoumat prostředí s mnoha menšími, hustě rozmístěnými bublinkami, než s menším počtem velkých.

4. Z navržených metod nabízí v této situaci nejjistější výsledky numerický výpočet. Obnáší to pouze po vzoru úlohy 2.5 vykreslit intenzitu vystupujícího světla v závislosti na vzdálenosti paprsku od osy kapky nebo na rozptylovém úhlu δ_k. Pokud jsou hledané jevy přítomné, měly by být vidět na obou těchto závislostech.

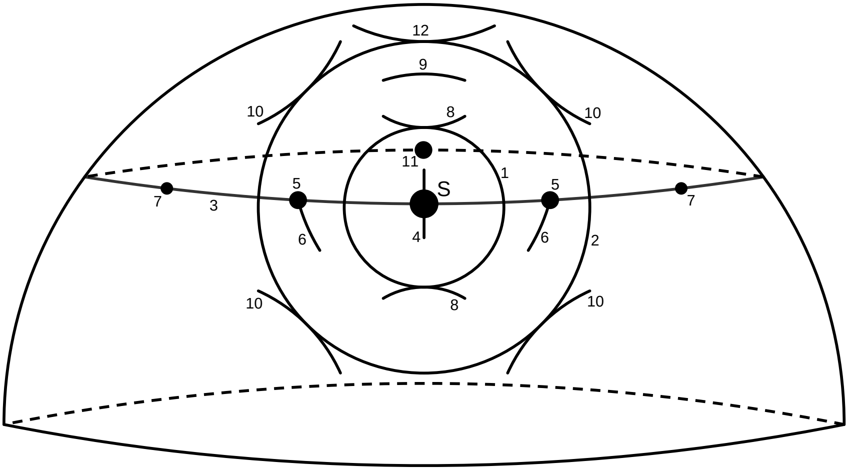
Ačkoli jak duha, tak halové jevy jsou úkazy, které vznikají na obrovském množství malých částeček (kapek nebo krystalků), velmi zajímavé jsou také projekční vlastnosti každé takové částečky samotné. Když posvítíme na kapku nebo krystalek baterkou, světlo se nám promítne na okolní objekty a často se také rozloží na složky. Pozorovatel v bodě, na nějž je světlo promítnuto, neuvidí duhu, uvidí jen jednu konkrétní barevnou složku, ostatní složky pocházejí s kapek dalších. Tato skutečnost vcelku hezky názorně demonstruje mechanismus vzniku duhy a halových jevů, přesto jsme ji doposud opomíjeli. V následujícím problému to napravíme.

Problém 9: *Posviťte na skleněnou kuličku baterkou (ideálně ve tmě). Popište, co vidíte, a pokuste se to uvést do souvislosti s tím, co jste se dozvěděli při čtení tohoto tématka. Experiment opakujte také s jinými skleněnými objekty.*

Na začátku zadání bylo zmíněno, že lze nadále odesílat řešení ke všem dosud zadaným problémům. Zadání těch, ke kterým jsme se blíže nevyjádřili, je ve stručnosti zrekapitulováno níže. Pro přehlednost jsou některé problémy přeformulovány nebo spojeny do jednoho, nicméně jejich zadání se tím nijak nemění. Komu to tak vyhovuje víc, může při řešení vycházet z původní formulace.

Problém 10: *V přírodě nalezněte jevy zmiňované v předchozích sériích a vyfoťte je. Jmenovitě to jsou: Astronomická refrakce, Spodní a svrchní zrcadlení, Zelený záblesk, Primární duha jako celý kruh, Sekundární duha, Terciární duha, Podružné duhové oblouky, Halové jevy znázorněné na obrázku 8. Doplňme také* *dříve nezmiňované červené zabarvení spodní části vycházejícího či zapadajícího slunce, u nějž si určitě dovedete sami domyslet, čím je způsobeno.*

Pozn.: Tento problém nahrazuje problémy 1.5, 1.6, 2.7 a 3.9



Obrázek 8: Hlavní halové jevy: S – Slunce; 1 – Malé halo; 2 – Velké halo; 3 – Horizontální kruh (parhelický kruh); 4 – Halový sloup; 5 – Parhelia (vedlejší slunce malého hala); 6 – Lowitzovy oblouky; 7 – Paranthelia (vedlejší „stodvacetistupňová“ slunce); 8 – Horní a dolní dotykový oblouk malého hala; 9 – Parryho oblouk; 10 – Dotykové oblouky velkého hala; 11 – Antihelium (protislunce); 12 – Horní cirkumzenitální oblouk

Problém 11: *Napište program, který vykreslí trajektorii paprsku světla prolétávajícího atmosférou. Vstupem nechť je úhel θ_0, pod kterým paprsek dopadá na povrch Země, a parametry atmosféry, tj. typicky výšková závislost indexu lomu, nebo jiných veličin, ze kterých lze index lomu dopočítat. Výsledky posílejte v podobě okomentovaných grafů, z nichž bude patrné, že program dělá, co má. Technická stránka programu hodnocena nebude, nicméně za případné uživatelsky přívětivé provedení bude určitě velký bodový bonus.*

Program dále zdokonalujte dle vlastního uvážení, pro inspiraci navrhujeme následující úpravy:

- *Co když je index lomu závislý nejen na výšce ale také na zeměpisné šířce a délce?*
- *Upravte program, aby bral v úvahu zakřivení zemského povrchu (viz úloha 1.3).*
- *Je možné ve vašem programu demonstrovat svrchní zrcadlení?*

- *Vyzkoušejte, co se stane, když vykreslíte trajektorii světla velmi dlouhou, zamyslete se, jestli je výsledek programu realistický, a případně program upravte, aby jeho výsledek realistický byl.*
- *Jedním ze vstupů programu je úhel, pod kterým paprsek dopadá na zem. Upravte program, aby jedním z výstupů byl úhel, pod kterým by na povrch Země dopadal paprsek ve vakuu.*
- *Vykreslete závislost úhlu dopadu paprsku ve vakuu na úhlu dopadu paprsku v atmosféře. Výsledek diskutujte.*
- *Vykreslete deformovanou trajektorii kosmických objektů, kterou byste mohli pozorovat při řešení problému 1.5.*

Pozn.: Tento problém nahrazuje úlohu 1.2 a problém 1.7. Úloha byla sice již uzavřena, to ale platilo spíše po stránce využití programu k vykreslení zadaných modelů, které sloužily k demonstraci inverze. Samotné napsání programu je záležitostí kreativní a zůstává otevřeno v rámci tohoto problému.

Problém 12: *Experimentálně dokažte, že střed duhy leží na polopřímce dané sluncem a pozorovatelem. Pokuste se přijít s originálním řešením.*

Pozn.: Tento problém nahrazuje úlohu 2.2.

Problém 13: *Vytvořte duhu v domácích podmínkách a své výsledky vyfoťte. Zkuste měnit různé parametry uspořádání a pozorujte, jak se duha mění. Své výsledky porovnejte s rovnicemi, kterými se duha řídí.*

Pozn.: Tento problém nahrazuje problémy 2.3 a 2.4.

Problém 14: *Můžete v přírodě pozorovat primární duhu i tehdy, když je slunce více než 42° nad obzorem? Navrhněte, v jaké situaci by k tomu mohlo dojít a vysvětlete proč. Ideálně se pokuste takový jev vyfotit.*

Pozn.: Tento problém nahrazuje problém 2.6.

Problém 15: *Vytvořte krystalky ledu (např. v mrazáku) za různých teplot. Pozorujte, jak se mění jejich tvar v závislosti na teplotě a na materiálu podkladu, na kterém vznikaly.*

Pozn.: Tento problém nahrazuje problém 3.4.

Problém 16: *Modelujte lom světla na ledových krystalcích pomocí počítačové simulace nebo numerického řešení. Své výsledky porovnejte s informacemi uvedenými ve třetím čísle tohoto tématka (případně v jiných zdrojích) nebo s vlastním experimentem. Výsledky posílejte ve formě grafů s komentářem.*

Pozn.: Tento problém nahrazuje problémy 3.7 a 3.8.

Evžen & Karel; `Janskvara@email.cz`
e-mailová konference: `atmosfera@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 5 – Nekonečna

V minulém díle jsme si popovídali o limitách, tedy o tom, jak poznat, že se něco někam „blíží“. Toho teď využijeme ke sčítání nekonečně mnoha malých kousků. A třeba dnes i Achilles doběhne želvu. Nejprve však řešení 2. dílu:

Vzorová řešení 2. dílu

Úloha 1

Zadání:
Nechť je n přirozené a nechť q je kladné racionální. Dokažte, že

$$q \cdot \aleph_1 \pm n = \aleph_1.$$

Řešení od Doc.$^{\text{MM}}$ Martina Fofa:

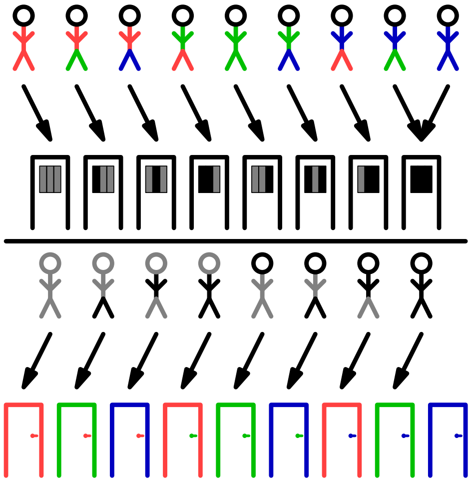
Nejdříve dokážeme, že $\aleph_1 + n = \aleph_1$. Hosty, kteří bydlí v pokoji, který má nejdříve nějaký počet bílých čar (třeba i nulový) a po něm nekonečně mnoho černých čar, posuneme do pokoje, který začíná na o n více bílých čar. Tak se nám uvolní pokoje, které začínají na nula až $n-1$ bílých čar a pak mají černou čáru. A všechny ostatní pokoje budou stále zaplněné. Volných pokojů je právě n, takže do nich můžeme nastěhovat n lidí.

Rovnost $\aleph_1 - n = \aleph_1$ můžeme dokázat velice podobně. Akorát budeme přestěhovávat do pokoje, který začíná na o n méně bílých čar. Takto nám vznikne n „bezdomovců“, které přestěhujeme do neexistujících pokojů.

Dále dokážeme $k \cdot \aleph_1 = \aleph_1$, pro přirozené k. Přijel nám autobus plný lidí označených čárovým kódem. Všechny hosty z hotelu pošleme do pokoje, který začíná bílou čárou, a za ní má „název“ pokoje, ze kterého host přichází. Hosty z autobusu podobně pošleme do pokojů začínajících černou. Takto jsme dokázali, že $2 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$, a díky indukci musí platit i $k \cdot \aleph_1 = \aleph_1$.

Už nám stačí ukázat jen to, že platí $\frac{1}{k} \cdot \aleph_1 = \aleph_1$. Máme tedy plný hotel a hosty chceme rozdělit mezi $k-1$ autobusů a pořád zanechat hotel plný. V hotelu necháme ty hosty, kteří začínají na alespoň jednu černou. Přestěhujeme je do pokoje, který tuto černou čáru nemá. Tím zacpeme všechny pokoje a do autobusů můžeme poslat všechny, kteří začínají alespoň na jednu bílou. Do i-tého autobusu pošleme lidi z pokojů, které mají přesně i bílých čar, a poté alespoň jednu černou. Sedadlo v autobuse budou mít takové, jako pokračování jejich pokoje po všech bílých a první černé čáře. Tam už nejsou čáry nijak omezeny, a tak musíme obsadit všechna sedadla ve všech autobusech.

Dohromady, spojením jednotlivých „stěhování“, dostáváme $q \cdot \aleph_1 \pm n = \aleph_1$.



Obrázek 9: Řešení úlohy 2

Úloha 2

Zadání:
Porovnejte oběma způsoby počet trojmístných čárových kódů a počet možností, jak obarvit dvě různé věci, každou právě jednou ze tří barev.

Řešení:
Tady jsem chtěl pouze libovolná přiřazení jako například ta na obrázku 9, a tak ukázat na něčem uchopitelném (konečných množinách), jak funguje porovnávání: v prvním případě je počet hostů (tj. počet možností jak obarvit dvě různé věci třemi barvami) větší roven počtu pokojů (trojmístných čárových kódů), jelikož existuje zobrazení hostů do pokojů, které je na.

V druhém případě je počet hostů (tj. počet trojmístných čárových kódů) menší roven počtu pokojů (tj. počet možností jak obarvit dvě různé věci třemi barvami), jelikož existuje prosté zobrazení hostů do pokojů.

Úloha 3

Zadání:
Pomocí Cantorovy-Bernsteinovy věty ukažte, že nekonečných čárových (dvoubarevných) kódů je stejně jako nekonečných trojbarevných kódů.

Řešení od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Daniela Skýpaly:

> Každý dvojbarevný kód je zároveň kódem trojbarevným, takže ho můžeme rovnou přiřadit:
> $$\#\text{Dvojbarevný} \leq \#\text{Trojbarevný}$$

A jaký dvojbarevný kód přiřadíme trojbarevnému? Vezmeme si první číslo z trojbarevného a podle tabulky zjistíme, jak mají vypadat první dvě číslice v dvojbarevném:

Trojbarevný	Dvojbarevný
0	00
1	01
2	10

S tím, že to samé potom budeme opakovat pro všechna zbylá čísla. Např:

$$2012\ldots \to 10000110\ldots$$

Proč nejsou ke stejnému dvojbarevnému kódu přiřazené dva různé trojbarevné? Vezmeme si první číslici, ve které se kódy liší. Podle prvního čísla bude na pozicích $2n-1$, $2n$ zobrazené $k_1[n]$, ale podle druhé tam bude zobrazené $k_2[n]$. Projitím všech případů pro $k_1[n]$, $k_2[n]$ můžeme dojít k závěru, že pokud se rovnají obrazy $k_1[n]$ a $k_2[n]$, tak

$$k_1[n] = k_2[n],$$

což ale neplatí, protože v této číslici se kódy měly lišit. Tedy:

$$\#\text{Dvojbarevný} \geq \#\text{Trojbarevný}.$$

Když obě nerovnosti dáme dohromady:

$$\#\text{Dvojbarevný} = \#\text{Trojbarevný}.$$

Úloha 4

Zadání:
Ukažte, že $\aleph_1 > \aleph_0 > n$ pro libovolné přirozené n.

Řešení:
Nejprve ukážeme druhou nerovnost a to $\aleph_0 > n$. $\aleph_0$ je mohutnost množiny přirozených čísel a n je mohutnost n-prvkové množiny, například množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tedy můžeme např. najít prosté zobrazení $\{1, 2, \ldots, n\}$ do přirozených čísel, tj. třeba identitu $(\mathrm{id}(x) = x)$. Tudíž $n \leq \aleph_0$.

To, že neplatí rovnost, vyplývá z Dirichletova principu, protože kdyby existovalo prosté zobrazení přirozených čísel na množinu mohutnosti n, pak z libovolných $n+1$ přirozených čísel nemůže být nějaké zobrazeno. Tedy $n < \aleph_0$.

Druhá nerovnost se dokáže tak, že zobrazíme prostě přirozená čísla na nekonečné čárové kódy, například každému přirozenému číslu k přiřadíme čárový kód, kde jsou všechna pole bílá, jen k-té bude černé. A že $\aleph_0 \neq \aleph_1$ jsme dokázali v prvním dílu tématka (připomeňme Cantorovu diagonální metodu). Tedy $\aleph_1 > \aleph_0$.

Úloha 5

Zadání:
Nyní už umíme plně porovnat počet přirozených a reálných čísel. Ukažte jak!

Řešení:
V prvním dílu tématka jsme ukázali, že reálných čísel není stejně jako přirozených (vzpomeňte si na Cantorovu diagonální metodu).[9] Tedy nám stačí dokázat, že počet přirozených čísel je menší roven počtu reálných.

To ukážeme tak, že najdeme nějaké prosté zobrazení. Takovým zobrazením je například identita, tedy $\mathrm{id}(x) = x$, jelikož přirozená čísla jsou podmnožinou reálných.

Tudíž počet přirozených čísel je menší roven než počet reálných a zároveň nejsou stejné, tedy počet přirozených čísel je ostře menší než počet reálných.

Díl 4: Řady

Jak už jsem naznačil, dnes se budeme věnovat součtu. A to součtu buď všech prvků posloupnosti,[10] ten nazýváme řada, nebo jejích prvních n členů, tomu pak říkáme částečný součet. Ze školy určitě umíme sčítat konečný počet prvků, tedy se pojďme podívat na nějaké základní částečné součty.

Konstantní posloupnost: Pokud máme posloupnost, kde každý člen je roven a, pak součet prvních n členů bude $a \cdot n$, protože součet

$$\underbrace{a + \ldots + a}_{n-\text{krát}}$$

je přesně to, co takové násobení znamená.

Aritmetická posloupnost: Takovou klasickou posloupností je tzv. aritmetická posloupnost, kde každý člen je o nějakou konstantu (takzvanou diferenci) větší (případně menší) než předchozí, tedy

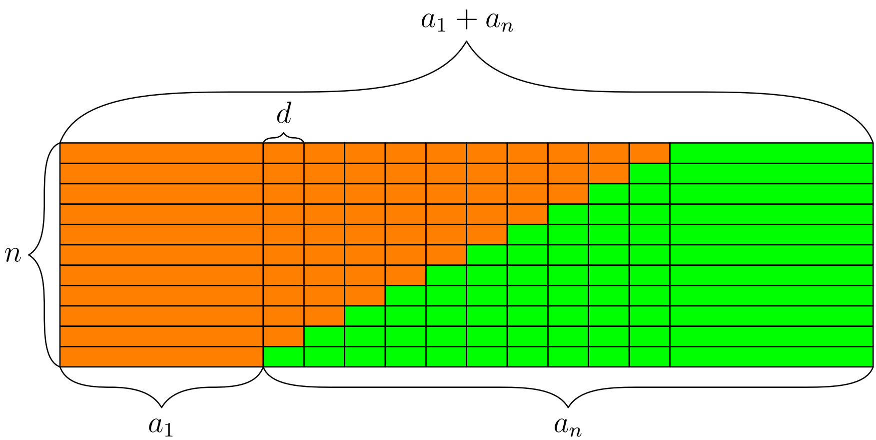
$$a_{n+1} = a_n + d = (a_{n-1} + d) + d = a_{n-1} + 2d = \ldots = a_1 + n \cdot d,$$

[9] Dokonce jsme dokázali, že neexistuje prosté zobrazení reálných čísel do přirozených, tedy že počet reálných čísel není menší roven počtu přirozených. Ale to za prvé chtělo takto rozepsat (to mi v některých řešeních chybělo) a za druhé formálně dokázat, že pokud není nekonečný počet menší roven jinému, pak je větší, není úplně triviální.

[10] Posloupnost je funkce (tedy nějaké přiřazení) přirozených čísel do reálných (obecně i do čehokoliv jiného, ale zde do reálných čísel). Můžeme si ji představit jako nekonečný seznam očíslovaný 1., 2., … Tedy i-tý člen posloupnosti a (neboli funkční hodnotu v i) označujeme a_i místo $a(i)$.

kde a_1 je první člen a d diference. Součet prvních n členů pak spočítáme jako n krát průměr těchto členů. K tomu si můžeme všimnout (graficky si to lze pro kladná d představit jako na obrázku 10), že průměr všech členů je roven průměru prvního a posledního členu. Tedy $a_1 + \ldots + a_n =$

$$n \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d}{2} = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d.$$



Obrázek 10: Částečný součet aritmetické posloupnosti

Úloha 1 [1b]: *Říká se, že když byl Carl Friedrich Gauss*[11] *(jeden z nejslavnějších matematiků) na základní škole, otravoval svého učitele matematiky natolik, že dostal za trest sečíst čísla 1 až 100. Gauss však během chvíle přinesl správný výsledek.*

K jakému číslu se malý Gauss dopočítal a jak to udělal?

Geometrická posloupnost: Často se nám stává, že konstantu nepřičítáme, ale násobíme s ní.[12] Pak mluvíme o geometrické posloupnosti, jejíž členy jsou tedy $a_{n+1} = q \cdot a_n = \ldots = q^n \cdot a_1$ a částečné součty jsou $a_1 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$, k čemuž se lze dostat kupříkladu rozkladem

$$1 - q^n = 1^n - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Úloha 2 [2b]: *Ukažte jak.*

[11] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss`

[12] Například inflace nám neříká, že se ceny za rok zvednou o 10 korun, ale zvednou se třeba o šest procent, tedy na 1.06 násobek.

Řada: Doteď jsme sčítali vždy jen konečné množství sčítanců. S naší znalostí limit si už ale jednoduše zadefinujeme nekonečný součet. Pokud označíme s_n n-tý částečný součet posloupnosti a_i (tj. součet prvních n členů), pak řada $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ má součet $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Může se stát, že tato limita neexistuje. Dá se však ukázat, že pokud všechna a_i jsou kladná, pak limita vždy existuje. Naopak pokud a_i jsou kladná i záporná (nebo jen záporná), tak se buď řada dá vyjádřit jako rozdíl součtu kladných a součtu absolutních hodnot záporných členů (pro to potřebujeme, aby alespoň jedna z těchto řad měla konečný součet), nebo jsou součet kladných i součet záporných členů nekonečné (tj. v předchozím případě bychom dostali $\infty - \infty$), pak ale záleží[13] na pořadí čísel v posloupnosti a_i. První případ můžeme vyřešit jako dvě řady kladných čísel. Druhý případ tu rozebírat nebudeme.

Úloha 3 [3b]: *Spočítejte součet řady*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{i\cdot(i+1)} + \ldots$$

Hint: Rozložte každý zlomek na dva a vyjádřete částečné součty.

Teď už můžeme prozkoumat součet zmíněných řad: Pokud je posloupnost a_i konstantní, pak částečné součty jsou $a_1 \cdot n$ a tedy součet celé řady je

$$\lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot n = \begin{cases} +\infty, & \text{pokud } a_1 > 0,\\ 0, & \text{pokud } a_1 = 0,\\ -\infty, & \text{pokud } a_1 < 0. \end{cases}$$

Takže řada konstantní posloupnosti není moc zajímavá, protože její součet je buď nekonečný nebo nula. Přesně tak, jak bychom čekali.

O trochu zajímavější (ale spíše výpočtem) je součet aritmetické řady (předpokládejme, že $d \neq 0$, protože jinak by to byla konstantní posloupnost):

$$\lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot n + \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot d =$$

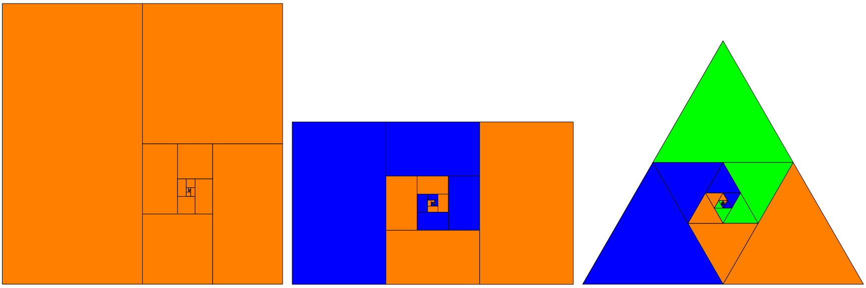
$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(a_1 - \frac{d}{2} + n \cdot \frac{d}{2}\right) \stackrel{\text{AL}}{=} +\infty \cdot \left(a_1 - \frac{d}{2} + \infty \cdot \frac{d}{2}\right) = \pm\infty.$$

(Znaménko nekonečna je podle znaménka d). Tedy součet aritmetické řady je dokonce vždy nekonečný.

Ta nejdůležitější řada je řada geometrická. Součet té je (zase vynecháváme $q = 1$, protože je to konstantní posloupnost)

$$\lim_{n\to+\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \stackrel{\text{AL}}{=} \begin{cases} a_1 \frac{1-\infty}{1-q} = +\infty, & \text{pokud } q > 1\\ a_1 \frac{1-q^{+\infty}}{1-q} = a_1 \frac{1}{1-q}, & \text{pokud } |q| < 1. \end{cases}$$

[13] Dokonce se dá ukázat, že pokud $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ a součet kladných i záporných členů je nekonečný, pak se dá čísla a_i v řadě proházet tak, aby vyšlo libovolné reálné číslo.



(a) Součet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ **(b)** Součet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$ **(c)** Součet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$

Obrázek 11: Součty vybraných geometrických řad

Pokud $q \leq -1$, tak řada nemá součet (pro $q = -1$ jsou částečné součty střídavě 1 a 0, takže limita neexistuje, pro $q < -1$ se střídavě blíží oběma nekonečnům, takže limita také neexistuje).

Geometrické řady s koeficienty $\frac{1}{2}$ (tu asi potkáme nejčastěji), $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ se dokonce dají hezky ilustrovat graficky jako na obrázku 11. Na prvním máme součet poloviny, poloviny poloviny, poloviny poloviny poloviny, … čtverce, což nám očividně dává celý čtverec, neboť ($a = q = \frac{1}{2}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Ve druhém případě rozdělíme obdélník na třetiny, jednu obarvíme jednou barvou, druhý druhou, třetí zase rozdělíme na třetiny, atd. Tedy máme součet třetiny, třetiny třetiny, … A rozdělíme tak obdélník na dvě části, tedy součet této geometrické řady je jedna polovina, jak nám potvrdí i ($a = q = \frac{1}{3}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

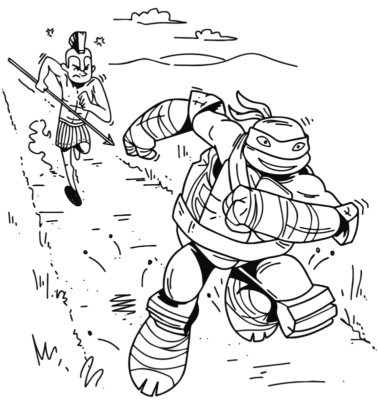
Obdobně dělíme i trojúhelník na čtvrtiny a dostaneme třetinu ($a = q = \frac{1}{4}$):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Problém 4: *Vymyslete další geometrické znázornění geometrické či jiné řady.*

Achilles a želva: Jak to vlastně bylo s Achillem a želvou? Tímto známým příběhem/paradoxem dokazoval Zénón z Eleje nemožnost pohybu. Mluví o závodě Achilla a želvy, kdy Achilles dá želvě náskok a pak ji dohání. Když však Achilles doběhne na místo, kde želva stála, želva už je o kus dále. A poté zase, když Achilles doběhne na místo želvy, ta už je dál. Tedy je nemožné, aby Achilles želvu doběhl. A nebo ne?

Když si takovou situaci představíme, tak pokud Achilles běží rychleji než želva, tak z našich zkušeností ji někdy předběhne. Totiž vždy, když Achilles doběhne na místo, kde byla želva, vzdálenost, kterou za tu dobu uběhne želva, bude v nějakém poměru (například o polovinu, když Achilles běží dvakrát rychleji) menší. To je ale přesně geometrická posloupnost s kvocientem menším než 1, tedy má konečný součet. V konečné vzdálenosti, tj. v konečném čase uběhne tudíž Achilles všechny „úseky" a doběhne želvu.



Reálná čísla: Už jsme se setkali s neintuitivností desetinného zápisu reálných čísel. Desetinný zápis $a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$ není nic jiného, než řada

$$a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \ldots$$

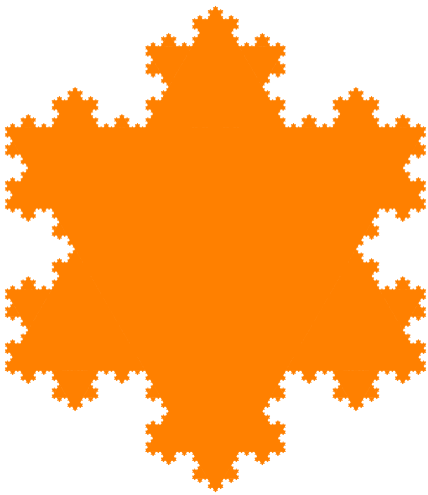
Můžeme tak jednoduše vysvětlit problém $0{,}99999\ldots = 1$ (obdobně se spočítá, když budou devítky až od nějakého desetinného místa). To je totiž geometrická řada s $a_1 = 0.9$ a $q = 0.1$, tudíž její součet je $\frac{0.9}{1-0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1$.

Dá se však ukázat, že čísla končící na nekonečně devítek jsou jediný problém takového zápisu (speciálně všechny konečné zápisy jsou jednoznačné), takže pro praktické použití je vhodný. Je však třeba si dávat pozor na tento jev a na to, že pokud napíšeme jen konečně mnoho číslic nekonečného zápisu, tak jsme se dopustili (zaokrouhlovací) chyby. Ta je však nejvýše

$$\frac{9 \cdot 10^{-(i+1)}}{1-10^{-1}} = \frac{0.9}{0.9} 10^{-i} = 10^{-i},$$

pokud číslo ukončíme na i-té desetinné číslici, protože zbylé cifry mohly být nejvýše všechny 9.

Úloha 5 [3b]: *Spočítejte obsah tzv. Kochovy vločky (na obrázku 12). Ta vznikne tak, že doprostřed každé úsečky rovnostranného trojúhelníku přidáme rovnostranný trojúhelník o třetinové straně. Tím zvýšíme počet úseček na čtyřnásobek (a zkrátíme je na třetinu) a doprostřed každé přidáme trojúhelníky o třetinové straně, a tak dále.*



Obrázek 12: Kochova vločka

Konvergence řad

O řadě, která má konečný součet, řekneme, že konverguje. Můžeme si všimnout a jednoduše rozmyslet, že pokud posloupnost nemá limitu nula, tak řada bude nekonečná, nebo nebude vůbec existovat (jelikož se od nějakého bodu budou po sobě následující částečné součty lišit alespoň o 1). Aby řada konvergovala, musí mít tedy příslušná posloupnost limitu nula. Stačí to ale?

Odpověď je jednoduchá. Nestačí. Protipříkladem nám může být tzv. harmonická řada, tedy $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = +\infty$. O takové řadě bez pokročilých znalostí asi na první pohled nic říct neumíme. Můžeme si však vzpomenout na to, že konstantní posloupnost má nekonečný součet a zkusit zmenšit harmonickou řadu tak, aby nám vznikla řada konstantní posloupnosti následujícím trikem (graficky na obrázku 13):

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Obrázek 13: Harmonická řada, každý černý obdélník má obsah jednu polovinu, protože je sice o polovinu užší, ale dvakrát delší

Takto dostaneme, že harmonická řada má větší součet, než $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty$. Nebo to lze také říct tak, že 2^n-tý částečný součet je větší než $n \cdot \frac{1}{2}$. Součet řady je nekonečný, přestože má posloupnost limitu nula.

Tedy musíme hledat jiné postupy, jak zjistit, že posloupnost konverguje. Ty jsou však většinou dosti obtížné a vrací odpověď jen ano nebo ne, neumí odpovědět kolik. Proto se jimi nebudeme dále zabývat, ale vězte, že několik z nich se zakládá na geometrické posloupnosti (lze například porovnávat n-tou odmocninu n-tého členu, nebo podíl po sobě jdoucích členů s jedničkou).

To už je konec dnešního dílu. Příště se podíváme zpět na limity, s pomocí těch můžeme spočítat i řady, které nejsou geometrické, ale umíme vyjádřit jejich částečné součty. Konkrétně se zaměříme na to, jak „rychle“ se funkce blíží ke své limitě.

Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
e-mailová konference: `nekonecna@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

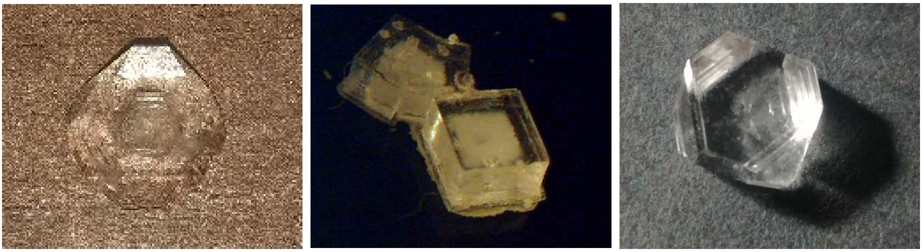
Téma 6 – Růst monokrystalů

Tentokrát je zde první ochutnávka vašich vlastních krystalů! Na obrázcích si můžete prohlédnout ukázky některých krystalů, které se podařilo vyrůst ostatním řešitelům. Pokud mezi nimi není ten váš, nezoufejte. Pěkných příspěvků se sešlo tolik, že nebylo možné je v jednom čísle všechny otisknout. Váš zájem o růst monokrystalů nás velmi potěšil, děkujeme a jen tak dál!

Po přečtení vašich došlých řešení pro vás máme pár dalších tipů. Zkuste se nad nimi zamyslet a svoje úvahy sepsat a odevzdat, odměna ve formě bodů vás samozřejmě nemine.

- U problému 1 někteří z vás vypsali spoustu využití, ale nenapsali jste, proč je dobré mít zrovna monokrystal a proč zrovna z této látky. Zkuste si vybrat jedno zajímavé využití, zjistit o něm něco více do hloubky a své poznatky nám poslat.

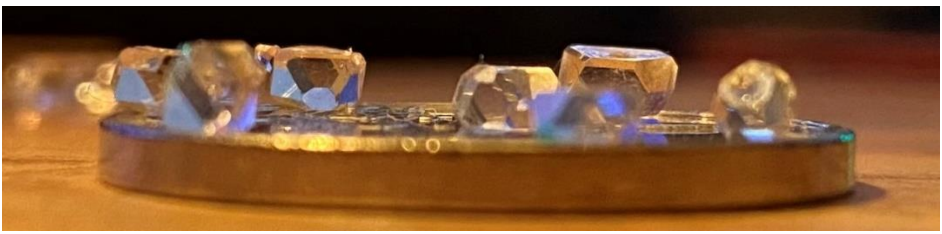
- Spousta z vás v problému 2 zmiňovala Czochralského metodu a metodu *floating zone*. Jak ale zmínil Bc.MM Láďa Vávra ve svém řešení, metod existuje mnohem více: metoda horkého drátu, metoda VLS, metody růstu gelu, Stockbargerova metoda, Bridgmanova metoda či Verneuilova metoda. Jaké jsou jejich výhody a nevýhody? Pro které látky je výhodné použít kterou z metod? Určitě nemusíte popsat všechny, stačí jedna, nad jejímž využitím se pořádně zamyslíte.



(a) Vít Faltus **(b)** Bc.MM Láďa Vávra **(c)** Bc.MM Radim Novák

Obrázek 14: Ukázky krystalů od různých autorů. Jde opravdu o monokrystaly?

- Jak byste v domácích podmínkách poznali, že se jedná o monokrystal, a ne o polykrystal a obráceně? Umíte to identifikovat z nějakého kroku v průběhu krystalizace nebo ze vzhledu finálního krystalu? Bc.MM Mikuláš Smrčka učinil následující pozorování: „Dobrý a použitelný monokrystal, jakožto zárodek, poznáme tak, že z něho opravdu, ale opravdu neroste další krystal, je průsvitný a bez viditelných prasklinek.“ Souhlasíte s ním? Umíte najít nějaký postup, který vám polykrystal a monokrystal umožní rozlišit?



Obrázek 15: Ukázka krystalů, autor Bc.MM Mikuláš Smrčka

- U spousty z vás by se u řešení problému 3 hodily komentáře k výsledku vašeho pokusu, například proč se stalo, že nevyrostl monokrystal, ale jen polykrystaly. Jak se takovýchto nezdarů vyvarovat pro příště?

Níže se můžete pustit do čtení článku o růstu krystalů od Dr.^{MM} Jiřího Kvapila. Velmi vám ho doporučujeme, Jirka přesně popsal, jak při práci postupoval, a jeho výsledky jsou skvělé. Opět platí, že hezkých příspěvků k tématu dorazilo víc, některé další se možná objeví v příštích číslech.

Problémy od minule jsou stále otevřené, zadání včetně pár tipů pro růst krystalů si můžete přečíst v předchozím čísle.[14]

Pája; pavla.trembulakova@seznam.cz
Faník; fandazajic@gmail.com
e-mailová konference: krystaly@mam.mff.cuni.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

Krystaly 8 bodů

Dr.^{MM} Jiří Kvapil

Už několik dní jsem přemýšlel o růstu krystalů z posledního čísla M&M. Nápad mě tak zaujal, že jsem se rozhodl takový krystal vyrůst.

Středa 27. 10.

Při prokrastinaci během učení jsem po několika videích o bismutu našel i tato dvě videa[15] o růstu krystalu ze síranu draselno-hlinitého. Hned jsem si uvědomil, že touto sloučeninou vskutku oplývám, objevil jsem několik sáčků v zapomenuté krabici z cyklu *Hraj si a poznávej*, konkrétněji v sadě *Krystaly.*

Stál jsem před problémem: ve videích byla zmíněna destilovaná voda, kterou jsem doma nemohl najít, a neměli jsme ani filtrační papír nebo cokoliv, co by ho mohlo s dostatečným úspěchem suplovat. Proto jsem sedl do auta a destilovanou vodu dojel koupit. S ní i filtry do kávovaru, které jsem se rozhodl použít místo filtračního papíru.

Doma jsem pod vrstvou prachu našel několik kádinek a rtuťových teploměrů pamatujících sametovou revoluci. Vše jsem vodou z kohoutku s jarem o teplotě nad 50 °C umyl a důkladně vysušil. Byl jsem tak připraven podniknout klíčovou akci celého projektu a to rozpuštění $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ v H_2O. Zvolil jsem velkou kádinku a ponořil ji do vodní lázně se 150 ml destilované vody.

Kolik tam ale zvolené látky dát? Pokud roztok při vysoké teplotě nasytím, tak kamenec při zchladnutí zkrystalizuje do polykrystalů a bude po monokrystalu… Nakonec jsem se rozhodl pro 20 g kamence na 150 ml vody. Na vypočtení jsem použil informací z brožury k sadě *Hraj si a poznávej* a doporučení ve videu.

Nakonec jsem vsypal 20 g $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ do kádinky ve vodní lázni a jal se látku rozpouštět (vizte obrázek 16). Rtuťový teploměr má stupnici pouze do 50 °C, proto jsem vždy počkal, až teplota lázně překročí poslední čárku, vytáhl teploměr

[14] https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/28/28-3.pdf
[15] https://www.youtube.com/watch?v=gsC039jp0T0
https://www.youtube.com/watch?v=_0F0I3XKi0Y

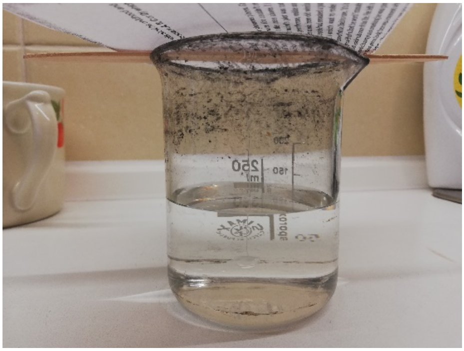
z vody a přepnul plotýnku do vypnutého stavu. Takto jsem lázeň zahříval, dokud nebyl kamenec úplně rozpuštěn.

Nějaký další den

První krystalizace si kladla za cíl vytvořit takzvaný seed krystalu. Můžu s hrdostí říct, že tento účel byl dokonce trojnásobně naplněn. Já vybral svého favorita (na obrázku 19) a ostatní v jeho prospěch rozpustil, a pokračoval v zatím úspěšné krystalizaci.

Další ráno jsem však zpozoroval nelibou věc způsobenou mojí vlastní blbostí – – přes noc se původní monokrystal někam ztratil s místo něj se objevil nechutný polykrystal. Protože vody od první krystalizace ubylo, tak krystalizace nabrala pořádné tempo, což mému monokrystalku nesvědčilo.

Obrázek 16: Vodní lázeň



Obrázek 17: Seed na niti

Musel jsem tedy všechny přebývající krystaly rozpustit a roztok smísit s destilovanou vodou. Množství jsem odhadl takzvaně „od oka“. Seed jsem nenechal ztratit se úplně, nýbrž jsem jej vyjmul a použil jako seed na další pokus.

Vychytávky

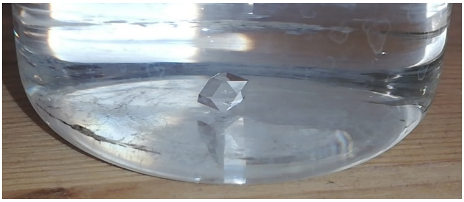
Seed jsem při nevydařeném pokusu zavěsil na nit a doufal, že díky této inovaci bude krystal růst do všech směrů stejně. Ráno jsem však vystřízlivěl, uvědomil si, že by tam ta nit zůstala a nešla by bez rozpuštění krystalu vytáhnout. Další růst jsem tedy prováděl striktně bez nitě, která by mohla ohrozit výzkum vlastností krystalu.

Když už roztok filtruji, tak by bylo celkem hloupé nechat do něj padat různé částečky vyskytující se v okolí poličky v mém pokoji. Z tohoto důvodu jsem nechával kus papíru položen na kádince. Papír jsem použil starý potisknutý. Díky tomu, že jsem situaci takto ekologicky vyřešil, můžu dát dalšímu růstu krystalu zelenou.

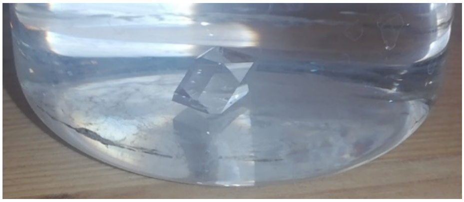
Kádinku s papírem a seedem na niti můžete vidět na obrázku 17.

Finální růst

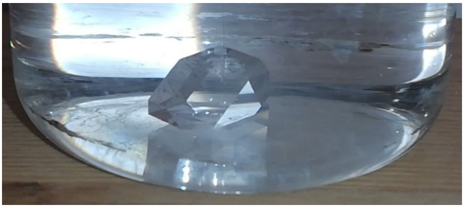
Na obrázku 18 jsou zachyceny momenty dokonce i s datem pořízení, kde krystal spokojeně odpočívá v kádince na dřevěné poličce v pokoji. Je hezky vidět, jak sílil a rostl do krásy. Včera mi tam začala růst spousta dalších krystalků a po minulých zkušenostech jsem se nakonec rozhodl roztok pouze přefiltrovat a vzniklé minikrystalky jsem uschoval. Výsledný monokrystal právě teď měří asi 2 cm na délku a 1,5 cm na šířku.



4. 11. 22:37



5. 11. 20:11



6. 11. 22:06

7. 11. 08:57

8. 11. 15:09

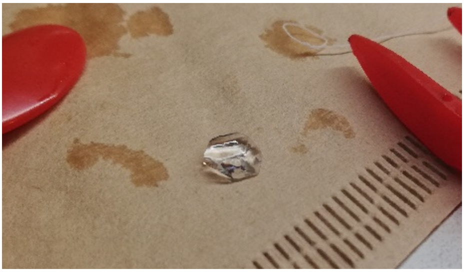
8. 11. 15:10

Obrázek 18: Růst krystalu

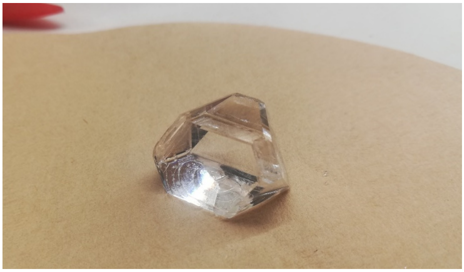
Pro další růst zvolím polohu vzhůru nohama (on žádné nohy nemá, takže to je spíše poloha vzhůru spodkem) a nechám ho růst dále. Třeba se tím jeho asymetrie srovnají a on tak bude symetrický. Od započetí růstu nebyl nikdo v mé rodině nemocen, to klidně může být způsobeno tím, že po bytě může vysílat pozitivní vlny. Možná tedy opravdu bude léčivý, avšak toto odvážné tvrzení si říká o další výzkum.

Děkuji všem, kteří byli schopni dočíst až sem. Tímto se prozatím loučím, avšak nezoufejte, možná přijde pokračování, kde se ukáže, jak moc jsme ještě schopni krystal zvětšit.

Poznámka redakce: Verzi článku rozšířenou o Jirkovy historky z celého procesu a poznámky pro pobavení si můžete přečíst na našem webu.[16]



Obrázek 19: Detail seedu



Obrázek 20: Výsledek 10. 11. 01:04

Téma 7 – Zmenšené modely

Pojďme spolu zkusit zmenšit svět! V novém tématku se budeme zamýšlet, jak si pořídit zmenšený model nějakého procesu tak, abychom v něm mohli zkusit simulovat jevy, které nás zajímají.

Představme si třeba modelovou železnici. Jistě si můžeme postavit model české železniční sítě v nějakém měřítku, tedy všechny délky zkrátit ve stejném poměru. Ale délka není jediná fyzikální veličina – co můžeme udělat třeba s časem? Můžeme ho nechat plynout pořád stejně rychle, nebo ho také nějak upravit, v tomto případě nejspíš zrychlit.

Obě varianty mohou dávat smysl: zatímco u nezměněného času můžeme „zobrazovat" na kolejišti aktuální stav na skutečné železnici, pokud čas zrychlíme, lépe se na vláčky kouká, neboť jim cesta z modelové Prahy do modelového Brna nezabere několik hodin.

U takového zmenšeného modelu nás nejčastěji bude zajímat, jak souvisí jevy v modelu se skutečnými jevy, tedy třeba jestli se zrychlování a brzdění modelové lokomotivy nějak podobá skutečnému vlaku. Další otázkou může být, jak moc je možné co zmenšit, aby byl model sestrojitelný. Ani na oné modelové železnici totiž vlaky nemohou jezdit úplně libovolně rychle.

Samozřejmě se vůbec nemusíme držet zrovna železnice. Vyberte si libovolný obor či objekt, který vás nadchne, a zamyslete se, jestli jej lze zmenšit a co pak půjde pozorovat. Pokud vás napadne, jak na zmenšování pohlížet obecně, též svá pozorování sepište.

Pár otázek pro inspiraci:

Problém 1: *Jakými způsoby se v modelové železnici může chovat zrychlení? Lze věrohodně nasimulovat jízdu lokomotivy do kopce?*

[16] `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/28/clanek_Kvapil.pdf`

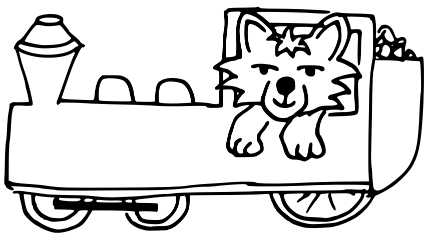
Problém 2: *Bylo by v nějakém prostředí ve stavu beztíže možné postavit model sluneční soustavy, kde by planety skutečně obíhaly díky gravitaci?*

Problém 3: *Může dávat smysl měnit jednotky v modelu nelineárně, tedy jinak, než že zmenšená jednotka je jen nějaký násobek či zlomek té původní?*

Nebojte se hledat náměty a podklady na internetu a v literatuře, nicméně ale buďte kreativní a inventivní. Své závěry posílejte ideálně ve formě článku.[17] Pokud navíc chcete inspirovat ostatní (chcete!), posílejte své příspěvky k prvnímu deadlinu.

Pokud budete mít k tématku nějaký dotaz, nebojte se zeptat! E-mail vedoucího i e-mailové konference k tématu najdete na konci. Na řešení můžete samozřejmě spolupracovat, ať už prostřednictvím e-mailové konference, nebo jinak. Stejně tak pokud budete mít nějaký námět, který vám přijde zajímavý, ale nebudete jej chtít rozvíjet, též ho pošlete do konference a třeba se ho ujme někdo jiný.

Pavel; `pavel.turinsky@matfyz.cz`
e-mailová konference: `zmensovani@mam.mff.cuni.cz`
pro přihlášení do konference napište Pavlovi
odevzdávejte do odevzdávátka



[17] Pár tipů, jak psát článek, najdete na `https://mam.mff.cuni.cz/jak-resit/jak-psat-clanek/`. Zejména se snažte popsat, co jste se snažili simulovat a jaké výhody a nevýhody váš přístup má.

Průběžné výsledky

				Témata							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Fof	4	293,3	22,0		2,0		12,0		36,0	81,9
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Opl	4	106,3	23,0		2,0				25,0	67,0
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Šimová	1	65,2	9,5						9,5	65,2
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Z. Mareš	3	57,1	8,7				12,8		21,5	57,1
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Polách	3	55,2	9,0		3,9		2,0		14,9	55,2
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Tichý	2	167,6		6,0					6,0	53,9
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kvapil	4	107,7		1,0				8,0	9,0	53,2
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Skýpala	4	82,0		7,5			8,0		15,5	48,9
9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Škopek	3	48,0	12,5		4,0				16,5	48,0
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ K. Petrlíková	4	94,6					7,0		7,0	46,1
11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ L. Vávra	3	35,2			5,0	10,0		11,0	26,0	35,2
12.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Jendele	3	44,1	4,0		1,0		9,0		14,0	31,8
13.–14.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Flídr	4	133,8								30,9
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Čtvrtečka	2	128,1								30,9
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ A. Kolník	3	30,0		6,0					6,0	30,0
16.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Verner	1	26,5	10,0		4,5	1,5	3,0	3,5	22,5	26,5
17.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ O. Popovský	2	24,3						9,0	9,0	24,3
18.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ R. Novák	2	23,7						11,5	11,5	23,7
19.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Knillová	3	109,8			3,7				3,7	22,0
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Smrčka	2	21,6						10,0	10,0	21,6
21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Krejčí	2	21,3	5,5						5,5	21,3
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Haikl	3	20,9			1,0		10,4	2,0	13,4	20,9
23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Chrostek	2	26,0				0,5		1,0	1,5	18,5
24.	V. Faltus	2	18,3						6,0	6,0	18,3
25.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Hladík	4	60,1								17,1
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Křimská	3	27,0								17,0
27.	A. Bejdová	4	16,7			6,2		9,0	1,5	16,7	16,7
28.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Polášková	3	45,9								16,4
29.	J. Rypl	3	15,6								15,6
30.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Boček	3	72,5								13,4
31.	M. Steinhauserová	Z8	11,5	2,0				0,0	6,0	8,0	11,5
32.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ O. Piroutek	4	104,9								10,5
33.	V. Bartáková	2	8,0			8,0				8,0	8,0
34.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Vícha	3	19,9								7,5
35.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Jůzková	4	58,2								7,3
36.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Valtrová	3	43,2								6,0

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	4	5	6	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	R. Zábranská	1	5,2			2,0				2,0	5,2
38.	J. Tregler	2	3,9								3,9
39.	R. Mayerová	Z9	3,0								3,0
40.	M. Plevová	3	2,2	0,2		2,0				2,2	2,2
41.	L. Poljaková	2	1,4								1,4

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina obsahuje všechny body za řešení zaslaná do 1. deadlinu předchozí série. Body za řešení zaslaná později obsahovat nemusí.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M