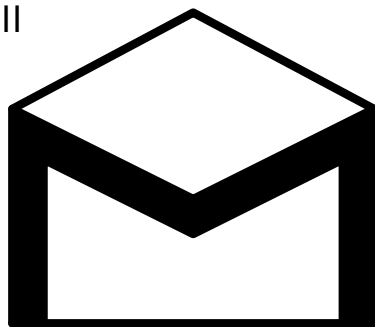
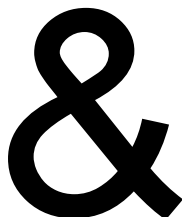
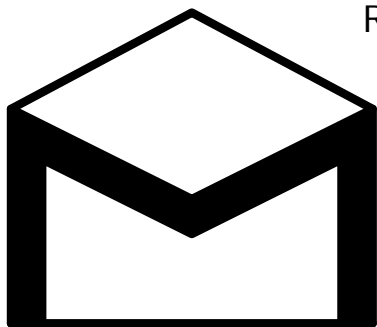


# STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVIII

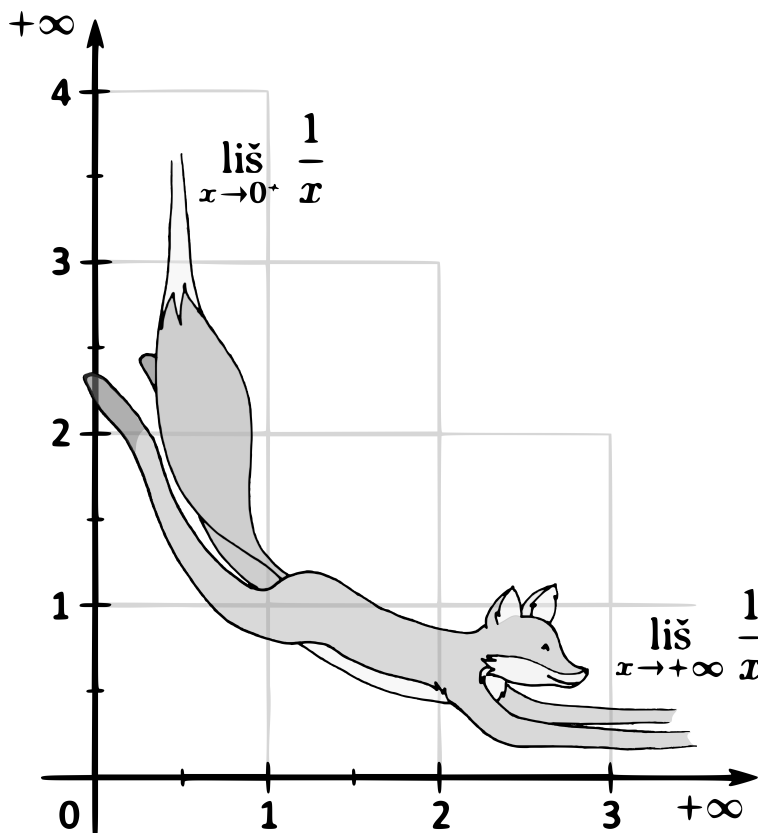
Číslo 3



MATEMATIKA

FYZIKA

INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

## Milý čtenáři,

právě čteš 3. číslo 28. ročníku časopisu M&M. Bohužel pro novou vlnu nákazy jsme museli upravit plány a tak se plánovaná témátková víkendovka neuskutečnila v prezenční variantě. Stejně tak bohužel i naše každoroční vánoční setkání se nemohlo konat v tradiční formě, ale bylo nahrazeno výletem 11. prosince, na kterém jsme se setkali v přátelské atmosféře.

Navzdory složité situaci jsme mohli uspořádat podzimní soustředění bez problémů a doufáme, že jste si ho užili stejně jako my a vrátíte se domů plní zážitků, dovedností a nových přátelství. Těšíme se, až vás zase uvidíme. Třeba na jarním soustředění, které snad, dá-li osud, proběhne 2. až 10. dubna.

Třetí číslo je poslední roku 2021. Ročník ale nekončí! Stejně jako naše touha po vašich článcích. Přemýšleli jste o něčem zajímavém, máte chytrý nápad či postřeh? Neváhejte, sepište ho a pošlete. Za svoji píli budete odměněni nejen hlubším pochopením problematiky, ale i bodíky a také velkou šancí na výhru dortu za nejlepší článek.

Na závěr bychom vám rádi popřáli šťastné Vánoce a krásný nový rok.

*Vaši organizátoři*

## Obsah

<b>Téma 1 – Elektrické sítě.....</b>	<b>3</b>
<b>Téma 2 – Oware .....</b>	<b>22</b>
<b>Téma 3 – Lingvistika .....</b>	<b>26</b>
<b>Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře.....</b>	<b>31</b>
<b>Téma 5 – Nekonečna .....</b>	<b>46</b>
<b>Téma 6 – Růst monokrystalů.....</b>	<b>56</b>

# Zadání a řešení témat

1. deadline: 4. ledna 2022 | 2. deadline: 1. února 2022

## Téma 1 – Elektrické sítě

Vzorová řešení zbytku úloh 1. dílu

Úloha 6

### Zadání:

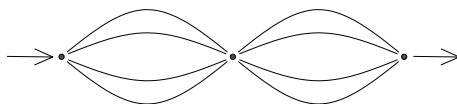
Vypočítejte odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy:

- pravidelného osmistěnu
- pravidelného dvanáctistěnu
- pravidelného dvacetistěnu

Odpor každé hrany je opět  $1 \Omega$ .

**Řešení a) osmistěnu od Mgr.<sup>MM</sup> Aleše Opla:**

Tento případ ještě není tak složitý. Zásadní je zde opět využití symetrií. U osmistěnu si dokonce můžeme vybrat, zda chceme použít dvě zrcadlové symetrie, či využít opět rotační symetrii, ale ať si vybereme jakkoliv, tak dojdeme k závěru, že všechny čtyři vrcholy osmistěnu, které leží mezi zdrojem a stokem, mají právě díky symetrii stejný potenciál, a tak je můžeme opět spojit do jednoho. Osmistěn tedy můžeme překreslit na následující síť (obrázek 1), v níž prostřední bod reprezentuje právě spojení čtyř bodů.



Obrázek 1: Zjednodušení osmistěnu úlohy 6a)

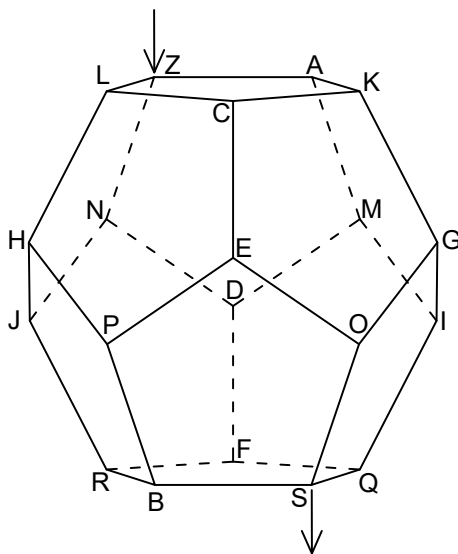
Nyní již odpor můžeme počítat jednoduše. Nejdříve spočítáme celkový odpor čtyř paralelně zapojených odporů:

$$\frac{1}{R_{n=4}} = 4 \cdot \frac{1}{1 \Omega} \Rightarrow R_{n=4} = \frac{1}{4} \Omega$$

Celkový odpor pak odpovídá zapojení dvou těchto odporů do série:

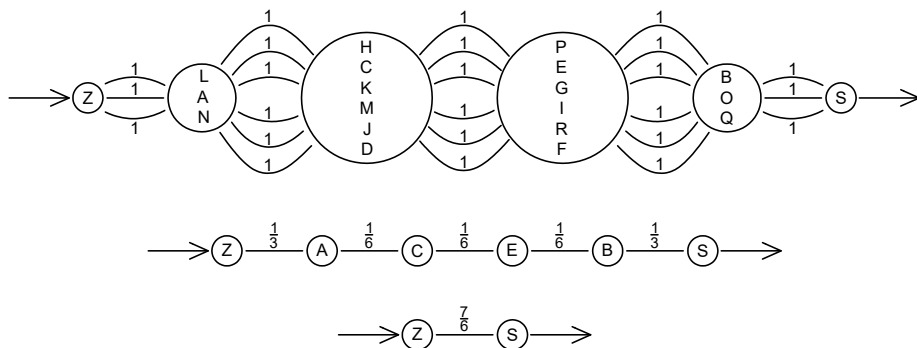
$$R_C = 2R_{n=4} = \frac{1}{2} \Omega$$

Řešení b) dvanáctistěnu od Mgr.<sup>MM</sup> Kristýny Petrlíkové:



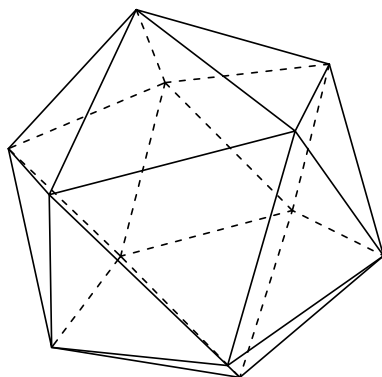
Obrázek 2: Dvanáctistěn

V případě dvanáctistěnu (obrázek 2) se proud nejdříve rozdělí rovnoměrně do tří větví (vrcholy  $L, A, N$ ), přičemž každá větev se následně rozdělí ještě na další dvě (ve vrcholech  $H, C, K, M, J, D$ ). Dvojice proudů se nakonec sloučí v jeden ve vrcholech  $B, O, Q$ , viz obrázek 3. Výsledný odpor mezi  $Z$  a  $S$  je tedy  $\frac{7}{6} \Omega$ .



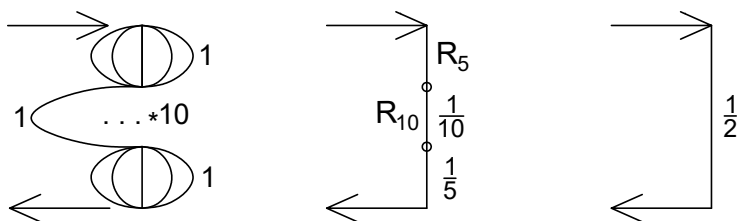
Obrázek 3: Síť úlohy 6b)



Řešení c) dvacetistěnu od Bc.<sup>MM</sup> Jiřího Polácha:


Obrázek 4: Dvacetistěn

Ve dvacetistěnu si můžeme všimnout, že po zanedbání dvou protějších vrcholů získáme útvar s pětiúhelníkovou podstavou. Vrchní podstava je oproti té spodní otočena o  $36^\circ$  a tím vzniklo 10 hran mezi nimi. Celý útvar bude tedy mít po vrstvách 5, 10 a 5 hran.



Obrázek 5: Síť úlohy 6c)

$$R_5 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{5} \Omega$$

$$R_{10} = \frac{1}{10 \cdot \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{10 \cdot \frac{1}{1}} = \frac{1}{10} \Omega$$

$$R = 2 \cdot R_5 + R_{10} = 2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \Omega$$

Po vypočítání dostaneme  $\frac{1}{2} \Omega$ .

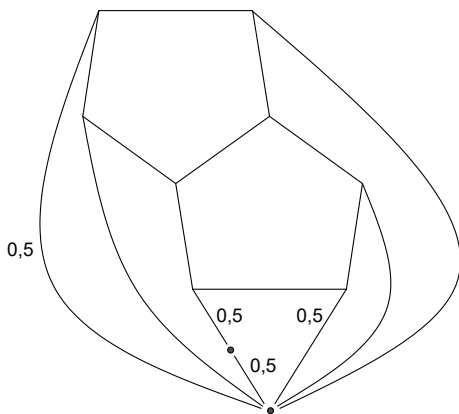
## Úloha 9

**Zadání:**

Pomocí hvězdicových transformací vypočítejte odpor mezi středy dvou sousedících hran v pravidelném dvanáctistěnu.

**Řešení od Mgr.<sup>MM</sup> Aleše Opla:**

Myslím, že je dobré se ze všeho nejdříve zamyslet nad tím, zda nemůžeme využít nějakou symetrii. A máme štěstí, jelikož můžeme. Dvanáctistěn i se zdroji je totiž zrcadlově symetrický podle roviny, která leží ve středu spojnice zdroje a stoku a je na ni kolmá. Díky tomu můžeme spojit všechny body, které na ní leží, do jednoho. Následně můžeme ještě dalším způsobem využít toho, že obě poloviny grafu (nad rovinou a pod rovinou) jsou stejné. Díky tomu nám totiž stačí vypočítat odpor jedné poloviny a celkový odpor poté získáme zapojením dvou takovýchto odporů do série. Stačí nám tedy si překreslit polovinu grafu, a když to uděláme, tak dostaneme situaci z obrázku 6. (Hrany, u nichž není napsaný odpor, mají odpor  $1 \Omega$ .)



**Obrázek 6:** Polovina dvanáctistěnu

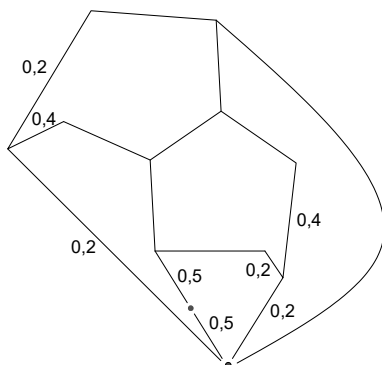
Nyní můžeme začít transformovat. Transformovat zde můžeme dva trojúhelníky, přičemž oba dva mají dvě hrany s odporem  $a' = b' = 1$  a jednu s odporem  $c' = 0,5$ . Po transformaci tedy budou mít nové hrany odpor:

$$a_1 = \frac{b'_1 c'_1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} = \frac{1}{5}$$

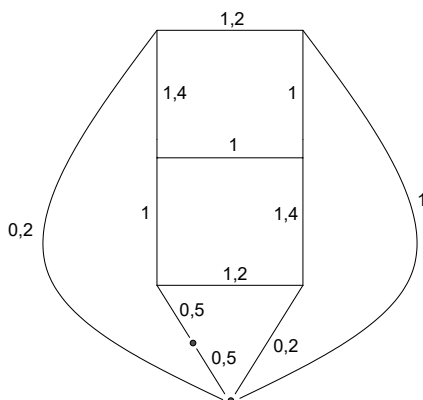
$$b_1 = \frac{a'_1 c'_1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} = \frac{1}{5}$$

$$c_1 = \frac{a'_1 b'_1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} = \frac{2}{5}$$

Nyní tedy obvod vypadá jako na obrázku 7.


**Obrázek 7:** K úloze 9

Zde můžeme sečíst sériově zapojené odpory a obvod trochu překreslit a dostaneme síť jako na obrázku 8.


**Obrázek 8:** K úloze 9

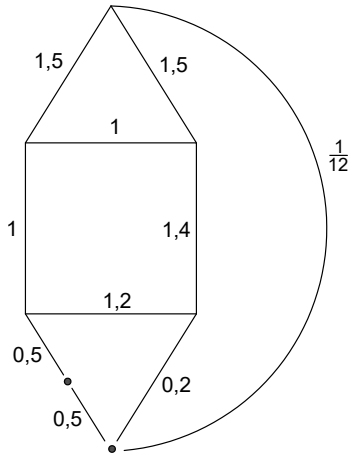
Nyní již můžeme zřetelně zpozorovat, že zde máme další trojúhelník tvořený odpory  $a' = 1$ ,  $b' = 0,2$  a  $c' = 1,2$ , který můžeme transformovat na hvězdu.

$$a_2 = \frac{b'_2 c'_2}{a'_2 + b'_2 + c'_2} = \frac{1}{10}$$

$$b_2 = \frac{a'_2 c'_2}{a'_2 + b'_2 + c'_2} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{a'_2 b'_2}{a'_2 + b'_2 + c'_2} = \frac{1}{12}$$

Když sečteme sériově zapojené odpory a opět překreslíme schéma obvodu, tak dostaneme obrázek 9:



**Obrázek 9:** K úloze 9

Ve vrchní části opět najdeme trojúhelník, který transfigurujeme ( $a'_3 = b'_3 = 1,5, c'_3 = 1$ ):

$$a_3 = \frac{b'_3 c'_3}{a'_3 + b'_3 + c'_3} = \frac{3}{8}$$

$$b_3 = \frac{a'_3 c'_3}{a'_3 + b'_3 + c'_3} = \frac{3}{8}$$

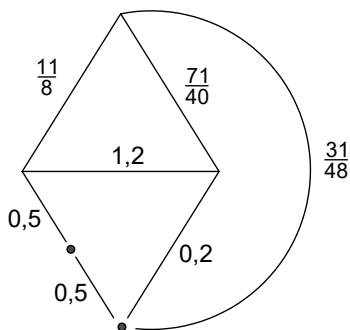
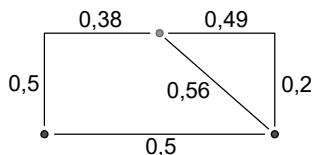
$$c_3 = \frac{a'_3 b'_3}{a'_3 + b'_3 + c'_3} = \frac{9}{16}$$

A když zase sečteme sériové odpory, dostaneme obvod, v němž najdeme ve vrchní části opět trojúhelník, který můžeme transformovat na hvězdu (obrázek 10).

$$a'_4 = \frac{71}{40}, b'_4 = \frac{11}{8}, c'_4 = \frac{6}{5}$$

$$a_4 \doteq 0,38, \quad b_4 \doteq 0,49, \quad c_4 \doteq 0,56$$

Výsledek nakonec můžeme překreslit na obvod, který zobrazuje obrázek 11, jehož odpor už jsme schopni spočítat pouze s využitím vztahů pro sériové a paralelní odpory.


**Obrázek 10:** K úloze 9

**Obrázek 11:** K úloze 9

Nejdříve můžeme sečíst sériově zapojené odpory:

$$R_1 = 0,5 + 0,38 = 0,88$$

$$R_2 = 0,49 + 0,2 = 0,69$$

Dále můžeme spočítat odpor paralelního zapojení v pravé horní části:

$$R_3 = \frac{0,56 \cdot R_2}{0,56 + R_2} \doteq 0,31$$

Tím nám opět vznikne sériové zapojení:

$$R_4 = R_1 + R_3 = 1,19$$

A nakonec nám zbudou dva paralelně zapojené odpory:

$$R_P = \frac{0,5 \cdot R_4}{0,5 + R_4} \doteq 0,35$$

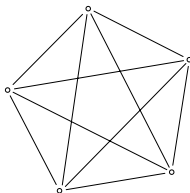
Celkový odpor mezi dvěma sousedními hranami dvanáctistěny tedy je:

$$R_C = 2R_P \doteq 0,7$$

## Úloha 10

**Zadání:**

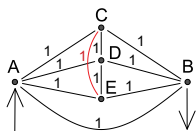
Vypočítejte odpor mezi libovolnými dvěma vrcholy v úplném grafu  $K_5$  na obrázku 12. (Hrany se nikde neprotínají, i když to tak může vypadat. Vedou nad sebou a pod sebou.)



Obrázek 12: Úplný graf na 5 vrcholech.

**Řešení od Bc.<sup>MM</sup> Zdeňka Mareše:**

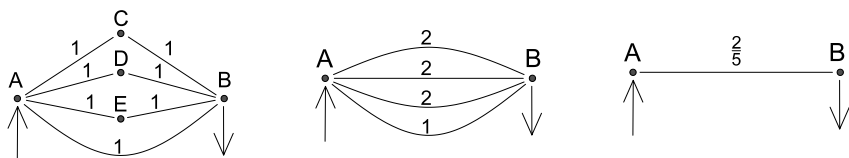
Počítám v  $\Omega$ . Nejdříve si zvolíme, mezi kterými vrcholy budeme odpor počítat. I když to tak nevypadá, je to jedno. Každý vrchol je spojen s každým jiným vrcholem právě jednou. Vrcholy si můžeme libovolně pojmenovat, aby se nám s nimi lépe pracovalo (obrázek 13).



Obrázek 13: Pojmenování vrcholů

Hranami mezi body  $C$  a  $D$ ,  $C$  a  $E$  a  $D$  a  $E$  neproteče žádný proud, protože vrcholy  $C$ ,  $D$  a  $E$  mají stejný potenciál. Proto hrany  $CD$ ,  $CE$  a  $DE$  můžeme z obvodu úplně vynechat. Poté již můžeme pokračovat ve zjednodušování jako v mnoha předešlých úlohách.

Celkový odpor našeho úplného grafu  $K_5$  je tedy  $\frac{2}{5} \Omega$ .



Obrázek 14: K úloze 10

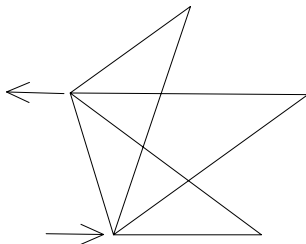
## Úloha 11

**Zadání:**

Dokažte, že odpor mezi libovolnými dvěma vrcholy v úplném grafu  $K_n$  je  $\frac{2}{n} \Omega$ . (Úplný graf  $K_n$  je takový graf o  $n$  vrcholech, který má hrany mezi každými dvěma vrcholy.)

**Řešení od Bc.<sup>MM</sup> Jiřího Polácha:**

V jakémkoli úplném grafu  $K_n$  je přesně jedna hrana vedoucí přímo od zdroje ke stoku a přesně  $n - 2$  (přes všechny vrcholy krom  $S$  a  $Z$ ) cest přes právě 1 vrchol (tedy skládající se ze 2 hran). Zbýlých  $\binom{n}{2} - 1 - 2 \cdot (n - 2)$  hran pouze spojuje cesty přes 1 vrchol. Jelikož všechny hrany mají stejný odpor a podmínky splňují pravidla pro symetričnost, můžeme těchto  $\binom{n}{2} - 2n - 5$  hran zanedbat. Z úplného grafu  $K_5$  nám tedy zbyde pouze toto (obrázek 15):


**Obrázek 15:** Zredukování grafu  $K_5$ 

Odpor můžeme vypočítat následujícím způsobem. Číslo 2 je ve jmenovateli pravé části, protože odpor cesty vedoucí přes 1 vrchol se skládá z 2 hran sériově zapojených, tzn. jejich odpor se sčítá. Vzorec obsahuje  $(n - 2)$ , protože je to počet, kolikrát se tam objevuje cesta přes 1 vrchol (všechny vrcholy krom  $Z$  a  $S$ ).

$$R = \frac{1}{\frac{1}{1} + (n - 2) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{n-2}{2}} = \frac{1}{\frac{2+n-2}{2}} = \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n}$$

**Vzorová řešení 2. dílu**

Neustále pracujeme s Kirchhoffovými zákony, opět si je připomeneme.

První Kirchhoffův zákon o proudu a smyčkách říká, že součet rozdílů potenciálů v cyklu vrcholů  $x_1, x_2$  až  $x_k$  je roven nule.

$$\varphi_{x_1 x_2} + \varphi_{x_2 x_3} + \dots + \varphi_{x_{k-1} x_k} + \varphi_{x_k x_1} = 0 \quad (1)$$

Druhý Kirchhoffův zákon se týká proudu procházejícího jedním vrcholem. Součet proudů vstupujících do vrcholu  $A$  a proudů z něj vystupujících je nulový.

$$I_{Ax_1} + I_{Ax_2} + \dots + I_{Ax_k} + I_{A\infty} = 0, \quad (2)$$

kde  $x_1$  až  $x_k$  jsou vrcholy, do nichž vede hrana z  $A$  nebo z nichž vede hrana do  $A$ , a  $I_{A\infty}$  je proud, který vychází ze sítě pryč ve vrcholu  $A$ . (Analogicky  $I_{\infty A}$  je proud, který do sítě v daném vrcholu vstupuje.)

Princip superpozice v této situaci zní následovně. Když budeme mít více přiřazení proudů hranám, která všechna splňují Kirchhoffovy zákony, a vytvoříme nové přiřazení proudů jako součet nějakých násobků našich přiřazení (mohou tam být i záporné násobky), tak toto nové také splňuje Kirchhoffovy zákony.

### Úloha 1

#### Zadání:

*Algebraicky dokažte, že platí princip superpozice pro naše rovnice (1) a (2).*

*(Nápověda: Pokud nevíte, jak na to, zkuste si princip superpozice dokázat pro nějaký malý konkrétní počet vrcholů a hran. Představte si, že máte dvě různá přiřazení (tedy potenciály a proudy), která vyhovují těmto rovnicím. Co se stane, když rovnice vynásobíte nějakým číslem? Budou pořád platit? A čemu se bude rovnat součet všech potenciálů obou přiřazení (nebo všech proudů hran)? Pokud si nejste jistí, tak připomínáme, že můžete využít pravé strany našich rovnic – jsou tam nuly.)*

#### Řešení od Bc.<sup>MM</sup> Jiřího Polácha (zkráceno):

Nejdřív jsem se snažil dokázat druhý Kirch. zákon a až potom první.

**Druhý Kirchhoffův zákon:** Na každém vrcholu platí, že součet vstupujících a vystupujících proudů je roven 0. Tedy:

$$\sum_{i=1}^k I_{A_1 x_i} = 0$$

To platí i pro druhé přiřazení. Pokud obě strany přenásobíme jakýmkoli koeficientem  $c$ , dostaneme:

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^k I_{A_1 x_i} = c_1 \cdot 0 = 0$$

Pokud sečteme tuto možnost s možností pro druhé přiřazení, dostaneme

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^k I_{A_1 x_i} + c_2 \cdot \sum_{i=1}^k I_{A_2 x_i} = 0 + 0 = 0$$

Toto můžeme rozepsat jako:

$$c_1 I_{A_1 x_1} + c_2 I_{A_2 x_1} + c_1 I_{A_1 x_2} + c_2 I_{A_2 x_2} + \dots + c_1 I_{A_1 x_k} + c_2 I_{A_2 x_k} + c_1 I_{A_1 \infty} + I_{A_2 \infty} = 0$$



Jelikož je tato rovnice opět homogenní, je toto další možností přiřazení proudů a mezi vrcholem  $A$  a  $x_1$  bude procházet proud  $I_{Ax_1} = c_1 I_{A_1x_1} + c_2 I_{A_2x_1}$ ;  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , z předpokladu, že ve zbytku obvodu opět použijeme shodné  $c_1, c_2$ .

**První Kirchhoffův zákon:** Obdobně můžeme udělat i důkaz o potenciálech. Kde sumu  $\sum_{i=1}^k I_{A_1x_i}$  nahradíme  $\varphi_{x_1x_2} + \varphi_{x_2x_3} + \dots + \varphi_{x_kx_1}$ . Na konci dostaneme, že rozdíl potenciálu na vrcholech  $x_1$  a  $x_2$  je roven jejich rozdílu v jednotlivých přiřazeních přenásobené stejnou konstantou  $c_1$  a  $c_2$  jako u druhého Kirchhoffova zákonu.

### Úloha 3

Při dokazování jednoznačnosti řešení jsme zkonstruovali cyklus  $ABC \dots A$ , kde teče kladný proud ve všech hranách  $AB, BC, \dots$ , tedy v jednom směru.

#### Zadání:

*Rozmyslete si, proč takový cyklus nemůže existovat. (Nápověda: Podívejte se na potenciály v jeho vrcholech.)*

#### Řešení od Mgr.<sup>MM</sup> Pavly Šimové:

Rozdíl potenciálů vypočítáme jako  $IR$ , kde  $R$  nebude nikdy záporné. V případě okruhu, kde jsou všechny proudy kladné, budou i všechny rozdíly potenciálů kladné, tím pádem nemohou splnit první Kirchhoffův zákon, že jejich součet je 0.

### Úloha 4

#### Zadání:

*Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.*

#### Řešení:

Označme náš souvislý graf  $G$ . Budeme postupovat matematickou indukcí podle počtu cyklů.

Pokud  $G$  nemá žádný cyklus, je to již strom. Je tedy zároveň svou kostrou.

Nyní mějme  $n \geq 1$  a předpokládejme, že každý souvislý graf s nanejvýš  $n$  cykly má kostru. Ukážeme, že také každý souvislý graf s  $n+1$  cykly má kostru. (Tomuto kroku se říká indukční krok.) Máme tedy souvislý graf  $G$ , který má  $n+1$  cyklů. To, že má souvislý graf  $G$  cyklus, je ekvivalentní tomu, že mezi každými dvěma vrcholy existují alespoň dvě cesty. Proto, když odstraníme libovolnou hranu z některého z cyklů, graf bude stále souvislý, neboť mezi dvěma vrcholy, které hrana spojovala, musela vést ještě nějaká cesta. A pro tento nový graf  $G'$  můžeme použít indukční předpoklad, jelikož má určitě alespoň o jeden cyklus méně (ten, který jsme rozpojili), což znamená, že má nanejvýš  $n$  cyklů. Tedy má kostru. Tato kostra je souvislý graf bez cyklů, který obsahuje všechny vrcholy  $G'$ , jež jsou však shodné s vrcholy  $G$ . Je to proto také kostra  $G$ .

Ukázali jsme indukcí, že každý souvislý graf má kostru.

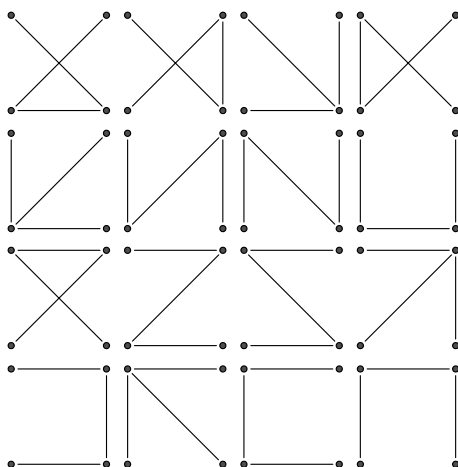
## Úloha 5

**Zadání:**

Nakreslete všechny kostry úplného grafu na 4 vrcholech. (Pokud netušíte, co je to úplný graf, podívejte se na závěr předchozího dílu tématka.)

**Řešení od Mgr.<sup>MM</sup> Pavly Šimové:**

Protože je graf úplný, tedy má všechny hrany, které by jen mohl mít, tak vlastně jen hledáme všechny stromy o 4 vrcholech. Můžeme pouze spojit 4 vrcholy za sebou, nebo je spojit do tvaru hvězdy. Pokud rozlišujeme od sebe jednotlivé body grafu, vyjde nám 16 možností.



**Obrázek 16:** Všechny kostry na 4 vrcholech

## Doplnění k úlohám 6 a 11

Dokazovali jsme větu o existenci řešení.

Pro danou hranu  $AB$  značíme  $N(Z, A, B, S)$  počet koster grafu  $G$ , ve kterých (ta jediná) cesta ze  $Z$  do  $S$  obsahuje vrcholy  $A, B$  v tomto pořadí.

Obdobně jsme pojmenovali  $N(Z, B, A, S)$  tj. cesta ze  $Z$  do  $S$  prochází hranu  $AB$  směrem z  $B$  do  $A$ . Dále  $K$  značí celkový počet koster a

$$I_{AB} = \frac{N(Z, A, B, S) - N(Z, B, A, S)}{K}.$$

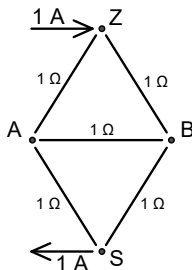
Potom platí věta, kterou jsme minule ukázali:

*Když rozmístíme do každé hrany  $AB$  grafu  $G$  proud  $I_{AB}$ , aby tekł ve směru z  $A$  do  $B$ , pak celkový proud ze zdroje  $Z$  do stoku  $S$  má velikost  $1 \Omega$  a vyhovuje Kirchhoffovým zákonům.*

## Úloha 6

**Zadání:**

Využijte to, že znáte všechny kostry úplného grafu na 4 vrcholech z minulé úlohy 5, a určete proudy všech hran na obrázku 17, kde všechny hrany mají odpor  $1\ \Omega$ , pomocí vzorce z této věty.



Obrázek 17: Určete proudy pomocí koster!

**Řešení od Mgr.<sup>MM</sup> Pavly Šimové:**

Sít na obrázku má o hranu méně než úplný graf, proto celkový počet koster  $K = 8$ . Graf je symetrický podle os  $ZS$  a  $AB$ , takže proud  $I_{ZA} = I_{ZB} = I_{AS} = I_{BS}$ . Počet koster grafu, ve kterých cesta ze  $Z$  do  $S$  obsahuje vrcholy  $Z, A$  v tomto pořadí je  $N(Z, Z, A, S) = 4$ , stejně tak pro ostatní tři hrany. Všechny čtyři hrany mají jeden z krajních vrcholů zdroj nebo stok, takže v opačném směru cesta vést nemůže.

$$I_{ZA} = I_{ZB} = I_{AS} = I_{BS} = \frac{4 - 0}{8} \text{ A} = \frac{1}{2} \text{ A}$$

Pro hranu  $AB$  je kvůli symetrii grafu v obou směrech počet koster  $N(Z, A, B, S) = N(Z, B, A, S) = 1$ .

$$I_{AB} = \frac{1 - 1}{8} \text{ A} = 0 \text{ A}$$

**Připomenutí z minulého dílu**

Větu jsme pomocí spletí dokázali a následně řekli, že platí i pro libovolné odpory.

Pro kostru  $T$  definujme *váhu*  $T$  jako převrácenou hodnotu součinu odporů jejích hran. Označíme  $K^*$  součet vah přes všechny kostry grafu  $G$ , dále označíme  $N^*(Z, A, B, S)$  součet vah přes všechny kostry, kde je na cestě ze  $Z$  do  $S$  nejdříve  $A$  a hned potom  $B$ . A definujme  $N^*(S, B, A, Z) = N^*(Z, A, B, S)$ . Potom platí následující tvrzení:

*Rozmístění proudů, ve kterém je velikost proudu v každé hraně  $AB$  dána jako  $\frac{N^*(Z,A,B,S) - N^*(Z,B,A,S)}{K^*}$ , splňuje Ohmův a Kirchhoffovy zákony a velikost proudu vstupujícího do sítě v  $Z$  a vystupujícího v  $S$  je 1.*

Tato věta má krásný důsledek formulovaný v následující úloze.

### Úloha 11

#### Zadání:

*Napište, proč platí následující tvrzení: Pokud jsou odpory všech hran racionální a celkový proud procházející sítí má velikost 1, pak má proud na každé hraně racionální hodnotu.*

#### Řešení od Mgr.<sup>MM</sup> Pavly Šimové:

Pokud jsou odpory racionální, tak jejich součin pro kostru  $T$  je také racionální. Převertáčená hodnota racionálního čísla je opět racionální, neboli váha pro každou  $T$  je racionální. Sčítáním vah nám vyjdou racionální čísla. A dělením racionálním číslem zrovna tak. Všechny operace, které při výpočtu proudů provádíme nám zachovávají číselný obor!

#### Zbylé úlohy

Stále můžete posílat řešení neotištěných úloh! Občas k nim nyní zveřejňujeme nápovědu a mírně snižujeme počet bodů.

**Úloha 2 (28.2)** [3b]: *Ukažte pomocí principu superpozice, že libovolný proud sítě, který je výsledkem přítomnosti více zdrojů a stoků, lze získat skládáním proudů příslušejících vždy jen jednomu zdroji a stoku.*

Následuje série úloh tvořících části důkazu existence řešení, konkrétně splnění potenciálového zákona. Pro zavedené značení se můžete podívat do 2. dílu na strany 20 a 21.

**Úloha 7 (28.2)** [2b]: *Zdůvodněte, že  $N(Z, A, B, S)$  je počet spleť  $F = F_Z \cup F_S$ , pro které  $A \in F_Z$  a  $B \in F_S$ . (Nová nápověda: Zkuste přidávat a ubírat hranu  $AB$ .)*

**Úloha 8 (28.2)** [2b]: *Rozmyslete si, že  $F + AB$  je kostra právě tehdy, když  $A \in F_Z$  a  $B \in F_S$ , nebo  $A \in F_S$  a  $B \in F_Z$ . Jak moc je tato úloha podobná úloze 7?*

**Úloha 9 (28.2)** [3b 2b]: *Ukažte, že*

$$\sum_T I_{AB}^{(T)} = \sum_F I_{AB}^{(F)},$$

*kde druhá sumace je přes všechny spleť  $F$ . (Nápověda: Použijte tvrzení předchozích dvou úloh a ukažte, že levá strana  $\leq$  pravá a zároveň pravá  $\leq$  levá.)*

**Úloha 10 (28.2)** [3b 2b]: *Ukažte, že  $\sum_{i=1}^k I_{x_i x_{i+1}}^{(F)} = 0$  pro každou spleť  $F$ . (Nápověda: Zamyslete se nad započítáváním hran cyklu vedoucích mezi oběma částmi spleti.)*

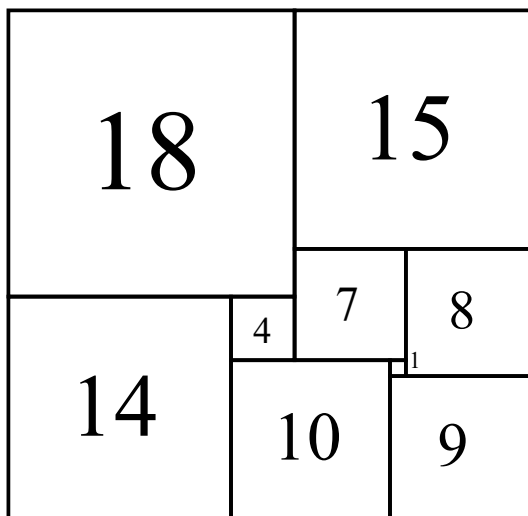
### Díl 3: Perfektní dělení čtverců

Vítejte u posledního dílu se zadáním úloh tématka Elektrické sítě. V minulých dílech jsme si představili elektrické sítě, naučili se počítat jejich odpor a zamysleli se i nad jejich teoretičtějším pojetím a spojením s inženýrskými kostrami grafů. V tomto tématku se podíváme na čtverce.

Představte si, že máte tabulku čokolády a chcete ji rozdělit vaší rodině. Avšak každý z rodiny je perfekcionista a požaduje, aby jeho celistvý kousek čokolády měl stejné rozměry na šířku i délku (neboli chce, aby dostal čtverec). Jak byste čokoládu rozdělili?

Možná si říkáte, jak souvisí čtverce s elektrickými sítěmi. Zkuste se zamyslet nad následujícím problémem: Mějme obdélník velikosti  $33 \times 32$  a chceme ho rozdělit na několik (konečně mnoho a alespoň dva) čtverců různých velikostí<sup>1</sup>. Je tento problém vyřešitelný?

Můžeme vám prozradit předem, že ano, a také, že čtvercování můžeme hledat i pomocí našich známých elektrických sítí a odporů v nich.



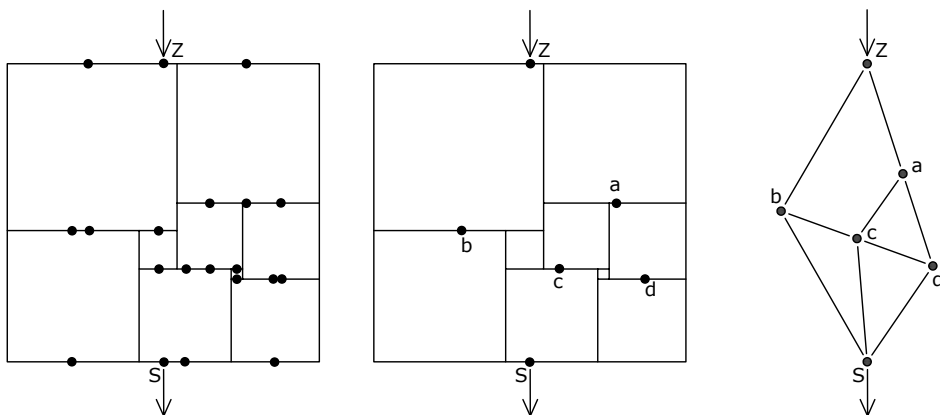
**Obrázek 18:** Perfektní dělení čtverců obdélníku  $33 \times 32$

Roku 1925 přišel Polák Zbigniew Moroń s perfektním rozčtvercováním obdélníku  $33 \times 32$ , které vidíte na obrázku 18. Tento rozdělený obdélník má řád 9, je

<sup>1</sup> Čtverce obecně nemusejí mít celočíselné délky stran.

zde totiž 9 různých čtverců. Tento rozčtvercovaný obdélník použijeme, abychom si ukázali, jak můžeme čtvercování převést na elektrickou síť. Zkusme si představit, že ho vyřízneme z nichromu (materiál, jenž je málo vodivý) a dáme na něj 2 elektrody, jednu nahoru a druhou dolů. Co se stane, když na horní elektrodu umístíme potenciál 32 V a na dolní 0 V (bude mezi nimi napětí 32 V)?

Proud poteče ze shora dolů a potenciál v daném místě obdélníku bude záviset jen a jen na tom, jak je to místo vysoko. Dále víme, že proud se nezmění, ani když dáme pásové elektrody na horní a spodní části jednotlivých čtverců (po celé jejich délce). Z předchozích úloh jsme si také odvodili, že pokud jsou dva vrcholy stejného potenciálu, tak mezi nimi proud nepoteče, můžeme si tedy vrcholy se stejným potenciálem sloučit. Další věcí, kterou provedeme, je rozřezání obdélníku na menší čtverce. Tímto dostaneme sestavení jako na části 2 obrázku 19. Jelikož proud teče jen mezi elektrodami (neboli mezi místy s různými potenciály), tak si celý obdélník můžeme překreslit na elektrickou síť (část 3 obrázku 19).



Obrázek 19: Vytváření sítě ze čtverců

Nyní máme elektrickou síť, podobnou těm, se kterými jsme se seznámili již v předchozích dílech. Potenciály vrcholů jsou určeny velikostmi čtverců („výškou vrcholu“). Máme tedy

$$\varphi_Z = 32$$

$$\varphi_A = 17$$

$$\varphi_B = 14$$

$$\varphi_C = 10$$

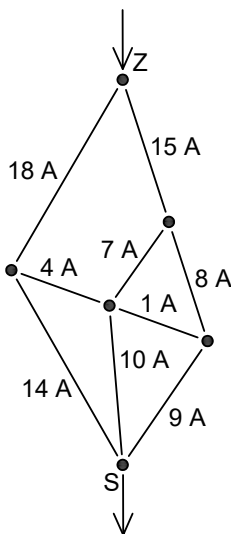
$$\varphi_D = 9$$

$$\varphi_S = 0$$

Mějme čtverec o straně  $l$  a tloušťce  $d$ , z materiálu o měrném odporu  $\rho$  (což je nějaká konstanta), který slouží jako vodič (proud protéká ze shora dolů). Obecně

pro odpor vodiče platí  $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ , kde  $S$  je průřez vodiče rovinou kolmou na protékající proud. Pokud budeme chtít spočítat odpor čtverce, máme  $R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{l}{l \cdot d} = \frac{\rho}{d}$ . Vidíme, že odpor nezávisí na velikosti čtverce, tento odpor si tedy bez újmy na obecnosti určíme jako  $R = 1 \Omega$  pro každý čtverec (tedy i hranu naší sítě).

Nastává čas na známou otázku: Jaký je celkový odpor sítě (mezi zdrojem  $Z$  a stokem  $S$ )? Odpory na hranách jsou jednotkové, napětí na hraně je stejné jako proud procházející hranou dle Ohmova zákona  $I = \frac{U}{1} = U$ . Napětí však známe, je rovno rozdílu potenciálů vrcholů hrany. Umíme tedy určit proud pro každou hranu. Proud procházející obdélníkem odpovídá součtu proudů vstupujících do stoku, což znamená  $14 \text{ A} + 10 \text{ A} + 9 \text{ A} = 33 \text{ A}$ . Je zřejmé, že proud si můžeme představit i jako velikost strany obdélníku. Napětí má velikost  $32 \text{ V}$  a tedy odpor celé sítě je roven  $R = \frac{U}{I} = \frac{32}{33} \Omega$ .



**Obrázek 20:** Proudů v síti

Když už dokážeme udělat z rozděleného obdélníku síť, tento postup můžeme provést i obráceně a udělat ze sítě dělení obdélníku. Každý perfektně rozdělený obdélník (nebo čtverec) může být nakreslen z nějaké sítě, ale ne každá síť odpovídá perfektnímu čtvercování. Musíme si tedy pro síť určit nějaké podmínky, které nám řeknou, zda by daná síť mohla být čtvercováním. Vezmeme souvislý rovinný graf (rovinný znamená, že se hrany při nakreslení nekříží). Kdyby byl graf nesouvislý, tak by na sebe malé čtverce nenavazovaly, a kdyby nebyl rovinný, tak by se dokonce překrývaly. Každé hraně dáme odpor  $1 \Omega$  a vypočítáme celkový odpor mezi zdrojem a stokem. Pokud je tento odpor kladný racionální, může síť odpovídat dělení obdélníku. Pokud je tento odpor roven jedné, tak tato síť může

odpovídat dělení čtverce (neboť máme stejně velké strany). Dále potřebujeme, aby všechny potenciály hran byly rozdílné, což by znamenalo rozdílné velikosti všech malých čtverců. Poté bychom mohli z této sítě najít perfektně rozdělený čtverec/obdélník.

Samozřejmě, že tento popis tvorby čtverce ze sítě ještě neznamená, že perfektně rozdělený čtverec musí existovat. Avšak máme již alespoň postup, jak můžeme tento čtverec hledat.

Nyní už tedy víme, že některých případech nám může znalost existence konkrétních sítí pomoci vytvořit nový perfektně rozčtvercovaný čtverec. V následujícím oddílu se přesuneme k dělení obdélníků. Jelikož ty nemají obě strany stejně dlouhé, můžeme zkusit zjistit nějaké omezující podmínky ohledně délek stran na obdélníky, které by mohly být perfektně rozčtvercovány. Zde nám opět překvapivě pomůže znalost elektrických sítí!

Připomeňme si tvrzení ze závěru prvního dílu tématka (to, které lehce vyplynulo z celého minulého dílu):

*Pokud jsou odpory všech hran racionální a celkový proud procházející sítí má velikost 1, pak má proud na každé hraně racionální hodnotu.*

Z tohoto tvrzení nyní odvodíme následující důsledek – **Nutná podmínka pro existenci rozdělení obdélníku na čtverce**:

*Pokud může být obdélník rozdělen na čtverce, tak poměr rozdílných stran obdélníku je racionální.*

**Úloha 1** [3b]: *Dokažte předchozí důsledek z daného tvrzení.*

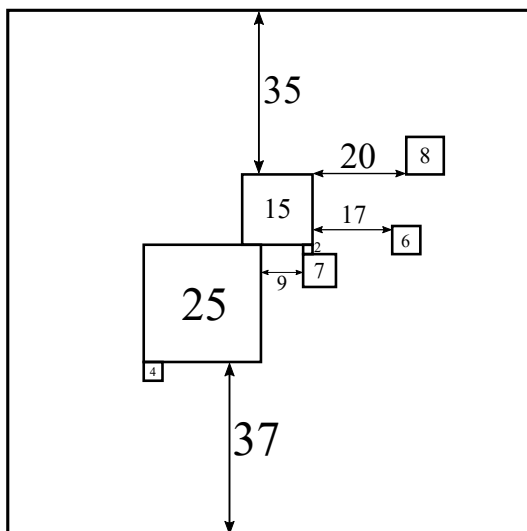
**Úloha 2** [4b]: *Zkuste rozdělit čtverec  $112 \times 112$  na obrázku 21 na čtverce nestejných velikostí. (Nápověda: Vždy se snažte doplnit co největší čtverec, který se na dané místo ještě vejde. Čtverců bude 21.)*

**Úloha 3** [2b]: *Nakreslete síť odpovídající rozdělení čtverce z úlohy 2.*

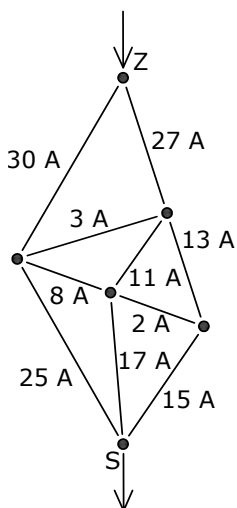
**Úloha 4** [b]: *Překreslete síť z obrázku 22 na rozdělení čtverce.*

Kačka Vokálová; katerina.vokalova@matfyz.cz  
 Lucka Kundratová; kundratova@karlin.mff.cuni.cz  
 e-mailová konference: elektricke-site@mam.mff.cuni.cz  
 odevzdávejte do odevzdávátka





Obrázek 21: Obrázek k úloze 2



Obrázek 22: Obrázek k úloze 4

## Téma 2 – Oware

Vítejte u třetího dílu. V předchozích dílech moc textu nebylo, tak jsme se to rozhodli trochu napravit a to jak otištěním textu, který se již s předstihem objevil na GitHubu,<sup>2</sup> tak zbrusu novým kouskem začínajícím nadpisem: „Kolik toho vlastně stihnu?“

Pokud teprve chcete začít řešit toto tématko, tak si přečtete první díl,<sup>3</sup> kde se o Oware dozvíte víc. Pořád můžete získat body i za poražení organizátorských programů z druhého čísla, k čemuž vám jistě pomůže následující text.

V tomto dílu tedy jistě najdete radu, jak porazit Agamemnona, Bellerophona i Cadma. Možná se vám jako jedněm z mála dokonce podaří porazit Diomeda, jehož porazil zatím pouze Mgr.<sup>MM</sup> Daniel Skýpala, či ještě neporaženého Erechthea (obrázek 23). Také můžete zkusit sesadit Bc.<sup>MM</sup> Adama Kolníka z prvního místa, které již čtyři turnaje vytrvale drží, k čemuž mu samozřejmě velmi gratulujeme.



**Obrázek 23:** Předvánoční nadílka organizátorských programů k poražení.

Nejnovější výsledky, informace a vylepšení skriptů pro turnaj naleznete na GitHubu.<sup>4</sup> A teď už se můžete vrhnout do světa hraní her počítačem!

### Díl 3: Úvod do hraní her pro počítače

Pojďme se zamyslet nad tím, jak bychom mohli naučit počítač hrát Oware. Lidi se snažili naučit stroje hrát šachy ještě před vynálezem počítačů, takže máme spoustu nápadů, kterými se můžeme inspirovat. Oware, stejně jako šachy, je v mnoha ohledech hra jednoduchá pro počítače: máme kompletní přehled o stavu hry, nejsou přítomné žádné náhodné prvky a hrají jenom dva hráči přímo proti sobě.

<sup>2</sup><https://github.com/JoHavel/Turnaj-v-Oware/blob/main/NegaMax.md>

<sup>3</sup>[https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/28/28-1.pdf#section\\*.11](https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/28/28-1.pdf#section*.11)

<sup>4</sup><https://github.com/JoHavel/Turnaj-v-Oware>

V tomto tématku nebudeme moc zabíhat do formalismů. Pokud chcete zjistit víc o teorii her, podívejte se na tématko Hry, jež nás provázelo celým 26. ročníkem.

### Kde vlastně jsem?

První věc, co by počítač měl umět, je zjistit, v jak dobré pozici se nachází. Pak už bude snadné poznat dobré tahy (to jsou ty, co vedou do lepších pozic) a odtud už nějak celou hru zvládneme vyhrát. Jednoduché, ne?

Měřit, jak dobrá daná pozice je, však není vůbec jednoduché. Umíme na konci hry poznat, kdo vyhrál, ale čím dál konec hry je, tím mlhavější je naše představa o stavu hry. V šachu se hráči koukají třeba na to, kolik figurek komu zbývá na šachovnici. V Oware máme ještě přímočařejší metodu – můžeme se koukat na skóre.

**Problém 1:** *Skóre v Oware je dvojice čísel vyjadřující počty sklizených semínek. Zamyslete se, jak dobré je které z následujících skóre pro prvního hráče. Jak byste je uspořádali? Proč?*

10:10, 15:20, 20:15, 10:15, 15:10, 25:10, 25:20, 30:10

Koukáním na skóre rozhodně nedokážeme určit výhodnost pozice dokonale, ale i přibližný odhad se ukáže být dosti užitečným. Tomuto ohodnocení situace se říká heuristika a tradičně se vyhraným hrám přiřazuje hodnota plus nekonečno, prohraným hrám mínus nekonečno, a ještě nerozhodnutým hrám se připisují hodnoty někde mezi těmito extrémy.

**Problém 2:** *Jak by mohla vypadat heuristika pro Oware lepší než jen koukání na skóre?*

### Kam chci jít?

Pokud už tušíme, jak ohodnotit situaci, zbývá nám „jenom“ najít dobrý tah. Tohle je myšlenka, kterou jste mohli vidět v agentovi `nejlepsi_po_mem`, ač ten používal velmi jednoduchou heuristiku. Naše heuristiky nejsou taky nijak dokonalé, budeme se tedy muset snažit poznat dobrý tah nějak lépe.

Snad se shodneme na tom, že pokud existuje tah do výrazně lepší pozice, tak naše aktuální pozice asi není moc špatná. Naopak pokud všechny tahy vedou do špatných pozic, tak na tom asi nejsme dobře. Pokud jsme na tahu, tak vybereme tah, který vede do pro nás nejvýhodnější pozice. Heuristické ohodnocení této pozice by tedy mělo odpovídat maximu z ohodnocení pozic, do kterých se umíme dostat jedním tahem. Tuto myšlenku budeme chtít pořádně rozvinout, ale na to se nejdříve musíme vcítit do role našeho soupeře.

Náš soupeř se snaží vyhrát, tedy abychom my prohráli. Je-li na tahu, může vybrat tah vedoucí do pro nás nejhorší možné pozice. Heuristické ohodnocení pozice, kde je na tahu soupeř, by tudíž mělo odpovídat minimu z ohodnocení pozic, do kterých nás umí soupeř dostat jedním tahem. Pokud se tedy pokusíme dohlédnout dále do budoucnosti, tak ohodnocení naší aktuální pozice by mělo

odpovídat ohodnocení nejlepší z pozic, do kterých se umíme dostat jedním tahem, a ohodnocení těchto pozic by naopak mělo odpovídat ohodnocení nejhorších pozic, do kterých je nás poté schopen dostat soupeř. Této myšlenky se říká Mini-Max,<sup>5</sup> protože se střídají kroky, kde dochází k maximalizování a minimalizování heuristiky.

Ještě než se ale pustíme do programování, pojďme si ukázat jeden elegantní trik. Soupeřova snaha minimalizovat naši heuristiku se dá také popsat jako snaha maximalizovat jeho heuristiku, která je k té naší opačná. V praxi dokonce heuristiky tradičně bývají takové, aby ohodnocení dané pozice oběma hráči se sečetla na nulu. Tohle je nejen celkem rozumný způsob jak o heuristice uvažovat, ale také vede k algoritmu známému jako NegaMax.

NegaMaxové ohodnocení naší aktuální pozice je tedy maximum z našich ohodnocení pozic, do kterých se umíme dostat jedním tahem. Naše ohodnocení těchto pozic je pak vždy negace soupeřova ohodnocení, kde soupeř se řídí stejným algoritmem.

Oware je příliš složitá hra na to, abychom dohlédli ze začátku až na její konec. Snažit se dopracovat se NegaMaxem až k vyhraným či prohraným situacím by trvalo příliš dlouho. Počty možných pozic rostou exponenciálně. Pořád je ale možné nahlédnout několik tahů do budoucnosti a tam situaci ohodnotit heuristikou. Zkuste to! V závislosti na rychlosti vašich programů byste měli vidět asi tak pět tahů do budoucnosti a zvládnout porazit Agamemnona a možná i Bellephona.

### Kolik toho vlastně stihnou?

V předchozí části jsme si ukázali, jak pomocí algoritmu NegaMax prohledávat budoucnost. Žel máme na každý tah jen omezené množství času, a tudíž musíme někde naše hledání ukončit. Tentokrát si ukážeme pár triků, jak dohlédnout o něco dál a tím získat výhodu nad soupeřem.

Při popisu NegaMaxu vyvstala otázka, kolik kroků do budoucnosti se tedy máme koukat. Chceme to stihnout v časovém limitu, ale zase se nechceme zbytečně omezovat. Toto je dále komplikované tím, že nevíme, jak přesně bude rychlý hardware, na kterém poběžíme, a navíc se složitost prohledávání mění během hry: Na začátku existuje mnoho možných tahů a všechny prohledat trvá dlouho. Ke konci hry je možností méně, čehož bychom chtěli využít a koukat o to dál.

Řešení tohoto problému se jmenuje iterativní prohlubování (*iterative deepening*). Algoritmus je až překvapivě jednoduchý – nejdříve pustí NegaMax s hloubkou 1, zapamatuje si nejlepší nalezený tah, zvýší hloubku o jedna a celý proces opakuje. Když mu dojde čas, tak se použije výsledek posledního NegaMaxu, který se stihl celý.

Určitě vás zajímá, zda nám tohle pomůže. Ano, pokud je možností málo, tak se spuštění NegaMaxu stihne více, ale o kolik času nás připraví všechna ta „zbytečná“ spuštění s příliš malou hloubkou? Inu, ukazuje se, že málo. Pokud

<sup>5</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Minimax>

má každý hráč (třeba) dva možné tahy, tak každé další spuštění NegaMaxu bude uvažovat dvakrát tolik možných budoucností a tudíž bude trvat alespoň dvakrát tak dlouho. Ve výsledku tudíž všechny předchozí spuštění dohromady nezabírají ani tolik času, co to poslední stihnuté.

Teorie je sice pěkná, ale nám jde o to vyhrávat. Zkuste iterativní prohlubování implementovat a zjistěte, jak si vede oproti předchozí verzi. Určitě dokážete i vymyslet nějaká zlepšení, jak někde ještě trochu výpočtů ušetřit. Při testování si všimněte, že iterativní prohlubování vždy spotřebuje veškerý čas, který mu dáte.

### Ne, tudy fakt ne

Druhé významné zlepšení by bylo, kdybychom si nějak dokázali ušetřit prohledávání některých budoucností. Tomuto triku se říká alfa-beta ořezávání a dovoluje nám o tahu říct, že je zaručeně špatný, dřív než projdeme všechny z něj vedoucí budoucnosti.

Přidáme našemu NegaMaxu dva další parametry – tradičně se jim říká alfa a beta – které budou určovat jaké nejhorší a jaké nejlepší tahy nás ještě zajímají. Užitečnost alfy je snad zřejmá – kdykoliv zjistíme, že tah je horší než nějaký jiný, tak už nás vlastně nezajímá, jak moc špatný skutečně je. Význam bety je možná trochu záhadnější. Proč by měl být tah příliš dobrý?

Celé to bude zřejmější, pokud si představíme, jak takové alfa-beta ořezávání funguje. Na začátku spustíme NegaMax s  $\alpha = -\infty$  a  $\beta = +\infty$ . O své pozici nic nevíme, tak nás zajímají všechny tahy. Prohledávání se podívá na první možný tah (třeba 1) a ohodnotí jej hodnotou  $x$ . Tudíž nově nastavíme  $\alpha = x$  a začneme vyhodnocovat tah 2. NegaMax se vcítí do protivníka a zavolá sám sebe na situaci po tahu 2. V této situaci jsou ale  $\alpha$  a  $\beta$  prohozeny – pokud je situace po tahu 2 pro protivníka lepší než  $-x$ , tak nás nezajímá jak moc dobrá vlastně je, neboť tah 2 hrát nebudeme a protivníka do této situace vůbec nepustíme.

Alfa-beta ořezávání umí výrazně zrychlit NegaMax, díky čemuž se občas stihneme podívat až dvakrát tak daleko do budoucnosti. Zrychlení je ale proměnlivé, což vede k praktické nutnosti použití iterativního prohlubování, které tuto rychlostní výhodu využije naplno. Zkuste si alfa-beta ořezávání implementovat a porovnejte jej s předchozí verzí. Váš program by nyní měl být schopen suverénně porazit Cadma a (pokud jej dobře vyladíte) máte šanci na úspěch i proti Diomedovi.

*Matej; lieskovsky.matej+mam@gmail.com*

*Jidáš; jonas.havelka@volny.cz*

*Borek; b0r3k@matfyz.cz*

*e-mailová konference: oware@mam.mff.cuni.cz*

*odevzdávejte do odevzdávátka*

## Téma 3 – Lingvistika

Bohužel v tomto díle nemáme nové zadání lingvistického tématka. Přinášíme alespoň řešení k prvnímu číslu. Pokud byste se přeci jen chtěli tématku dále věnovat, tak můžete řešit problém z minulého čísla:

**Problém 4 (28.2):** *Vymyslete vlastní systém pro zápis českého jazyka, snažte se minimalizovat jeho složitost, jak ve smyslu počtu potřebných grafémů, tak i množství tahů na jeden grafém. Taková nová abeceda by se také měla dobře číst. Dlouhé texty složené pouze z krátkých rovných čar se nebudou číst úplně příjemně, natož rychle.*

*Nezapomeňte pořádně zdůvodnit, proč jste se rozhodli právě pro tento zápis a proč je dobrý pro čtení a zápis.*

### Řešení 1. dílu

K 1. dílu nám přišla spousta krásných řešení. Jejich množství nás samotné mile překvapilo. Některá z nich se nám zdála velmi hezká, a tak jsme se je rozhodli otisknout.

**Problém 1 (28.1):** *Podívejte se na příklady výše a pokuste se z nich vypožorovat pořadí podmětu, předmětu a přísudku. Nedá se z ukázek zjistit ještě nějaká další informace o chetitšské gramatice?*

S problémem jste se všichni popasovali. Takže nikoho nepřekvapí, když řekneme, že chetitě měli pevnou stavbu věty s podmětem na začátku a přísudkem na konci věty. Předmět stál vždy uprostřed. Teď, co se ještě dalo vypožorovat?

Docela nápadný byl zápor v podobě slova *ul* a také to, že předložka se píše až za slovo, ke kterému se váže. Důležité pro další úlohy bylo časování slova být v přítomném čase. Koncovky nalezla třeba Bc.<sup>MM</sup> Věra Polášková.

**Řešení:**

osoba	jednotné číslo	množné číslo
1.	esmi	esuwani
2.	esszi	esteni
3.	eszi	assanzi

**Tabulka 1:** Časování slovesa *být* v chetitštině

Sloveso být se časuje pravidelně a ostatní slovesa mají stejné či velmi podobné koncovky.

osoba	jednotné číslo	množné číslo
1.	-mi	-wani/weni
2.	-si	-eni
3.	-zi/za	-zi/za

**Tabulka 2:** Koncovky pravidelného časování sloves pro přítomný čas v chetitštině

Další užitečné pozorování udělal Láďa Vávra, který si všiml, že přívlástek (přídatné jméno) se stejně jako v češtině staví před slovo, ke kterému se váže.

**Úloha 2 (28.1)** [1b]: *Doplňte tabulku 3 skloňování zájmen. Stručně zdůvodněte volbu tvaru zájmena.*

	já	ty	my	vy
nominativ		zik	anzās	
genitiv				sumel
dativ/lokál	ammuk		anzās	
akuzativ		tuk	anzās	
ablativ		tuēdaz		sumēdaz

**Tabulka 3:** Skloňování zájmen

Většina došlých řešení se držela podobného předpisu. Jiří Rypl se s tím popral následovně

- V nominativu se volba *ammuk* zdála jasná, objevuje se často v textu
- V genitivu jsem tvar zájmena odhadl z tvaru zájmena *vy*, koncovka *-el*
- Dativ a akuzativ jsem odhadl od tvaru zájmena *my*, jelikož jsou stejné, tak by měly být stejné i zde
- Ablativ jsem odhadl podobně jako genitiv, s koncovkou *-ēdaz*

A vyšla mu následující správná tabulka 4. My ještě upozorníme na nepravdivost u nominativu pro zájmeno *ty*.

**Řešení:**

	já	ty	my	vy
nominativ	ammuk	zik	anzās	sumās/sumēs
genitiv	ammel	tuel	anzel	sumel
dativ/lokál	ammuk	tuk	anzās	sumās/sumēs
akuzativ	ammuk	tuk	anzās	sumās/sumēs
ablativ	ammēdaz	tuēdaz	anzēdaz	sumēdaz

**Tabulka 4:** Skloňování zájmen vyplněné

Jiní se tohoto problému ujali po svém! Bc.<sup>MM</sup> Jan Škopek si řekl, proč by se nemohla skloňovat stejně jako podstatná jména, a tabulku doplnil podle jejich

koncovek. Vzhledem k nedostatku informací o jazyce to není špatný nápad. Pokud se ale někde dále bude vyskytovat chetitština, tak budeme uvažovat tvary z tabulky 4 nahoře.

### Řešení:

	já	ty	my	vy
nominativ	<b>ammuk</b>	zik	anzās	<b>sumās/sumēs</b>
genitiv	<i>ammās</i>	<i>tas</i>	<i>anzas</i>	sumel
dativ/lokál	ammuk	<i>ti</i>	anzās	<i>sumas</i>
akuzativ	<b>ammuk</b>	tuk	anzās	<i>sumus</i>
ablativ	<i>ammaz</i>	tuēdaz	<i>anzas</i>	sumēdaz

**Tabulka 5:** Skloňování zájmen podle Bc.<sup>MM</sup> Jana Škopka

Tvary vypsané tučně jsou doplněny na základě tvarů uvedených v příkladových větách (tyto tvary byly v alespoň jedné větě). Zbývající tvary, napsány kurzívou, jsou odvozeny z tabulky skloňování podstatných jmen, v případě pádu ablativ podle již ze zadání doplněných tvarů.

**Problém 3 (28.1):** *Mohli jste si povšimnout, že jsme vůbec nic nezměnili o, pro nás běžných, pádech vokativu (5. pád) a instrumentálu (7. pád). Zapomněli jsme na ně, nebo je snad Chetitě nepotřebovali? Jak byste tyto pády nahradili? Jsou pro osobní zájmena vůbec potřeba?*

Ondřej Popovský si všiml, že 5. pád se dá docela v klidu nahradit.

Šlo by ho totiž nahradit českým *hej* + 1. pád zájmena. Takové sousloví by bylo na pozici předmětu, aby byl dodržen podmět na 1. místě ve větě.

Okolo tohoto nápadu se točila velká většina řešení. Rebeka Zábranská uvažovala o intonaci.

Vokativ bych pravděpodobně nahradila splynutím s prvním pádem (nominativem), podobně jako například ve slovenštině. K upoutání pozornosti lze využít jiná intonace, větší důraz na slovo.

Intonace inspirovaná slovenštinou by měla vyplývat z kontextu věty, je však odlišná od intonace nominativu.

Pro zjednodušení bych zavedla intonaci jednotnou, například se zvýšenou poslední slabikou. V jednoslabičných slovech se dá vyjádřit lineárním zvyšováním tónu.

Někteří se rozhodli pořádně vrhnout do 7. pádu. Jeden z častých nápadů byl nahradit ho nominativem a spojkou *a*. To sice nějak funguje, pokud se 7. pád



vyskytuje ve výčtech věcí, ale v češtině to bohužel není jeho jediná funkce.<sup>6</sup> Toho si někteří z vás také všimli a pokusili se to vyřešit přidáním nějaké nové předložky a sloučením 7. pádu do jiného.

**Úloha 4 (28.1)** [2b]: *Podívejte se na následující příklady vět a ty, u kterých překlad chybí, přeložte:*

- *Bohové mají rádi modrý chléb.*
- *Král čeká na ráno.*
- *Cizinci šli domů.*
- *V údolí je zima.*

Většina z vás se s úlohou spojující poznatky z celého témátka nějak úspěšně poprala. Dr.<sup>MM</sup> Tomáš Flídr se do toho pustil následovně.

**Řešení:**

- Bohové mají rádi modrý chléb. → Siuzaas anataran nindan iwarezzi.
  - bohové → siuzaas (Bohové se na nás zlobí)
  - mají rádi → iwarezzi (Špinavý dům kněží nebudou mít rádi)
  - chleba → nindan (Soused jedl jelena a chléb)
  - modrý → anataran (Modrá voda je dobrá)
- Král čeká na ráno. → Lugals lukta istandāizzi.
  - král → lugals (Král hází zub)
  - čekám → instandaimi (Čekám na tebe.)
  - ráno → lukta (Ráno jsme šli do města)
- Cizinci šli domů. → Arahzenes eri andan yiazzi.
  - cizinci → arahzenes (Vy jste cizinci)
  - šli (1. osoba) → yiaweni ⇒ šli (3. osoba minulý čas) → yiazzi
  - domů → eri andan
- V údolí je zima. → Ekun hāri anda eszi.
  - v údolí → hari anda (Otec a matka jsou v údolí.)
  - je → eszi
  - zima → ekun (Když je čisté nebe, v noci se ochladí. ⇒ ekuneszi → ochladí, snad můžeme odebrat eszi → je)

<sup>6</sup>Ještě se často používá jako vyjádření prostředku konání akce. Např.: „Tesal do kamene dlátém.“ Kde dlátém je v 7. pádu, ale stojí samo ve větě.

Pro úplné přeložení čtvrté věty nebylo nikde k nalezení slovo zima. Většina z vás se pokusila nějak přetransformovat slovo ochladit se, což byl rozhodně dobrý nápad. Bc.<sup>MM</sup> Věra Polášková se rozhodla vyzkoušet i trochu jiný přístup s využitím negace slova žhavý.

- *Hāri anda anta ul eszi.*

Věta sice má jiné gramatické nedostatky, ale základní význam v ní jde pořád najít.

**Problém 5 (28.1):** *Vraťte se na začátek dílu a s pomocí nově nabytých znalostí se pokuste přeložit chetitský text v obrázku. Nemusíte přeložit úplně celý text; body můžete získat i za částečný překlad.*

Poslední problém v sobě skrýval sloučení všech nabytých znalostí o chetitštině. Ačkoliv jsme to nečekali, tak k 5. problému nám došla spousta řešení, která se velice blížila správnému překladu. Celý text přeložila Mgr.<sup>MM</sup> Kristýna Petrlíková, která se s pomocí několika iterací dostala k výsledku. Nejprve si přeložila všechny známé výrazy, poté se pokusila doplnit chybějící slova a nakonec převedla text do srozumitelné podoby.

Včerejší noc byla neklidná. Byli jsme v domě mého otce. Z nebe padaly žhavé meteority a sousední vojska táhla pryč.

Otec i matka odešli se sousedními rodinami. Zpátky se už nevrátili. Babička mi řekla: „Vidím nás, jak přicházíme do nového města.“

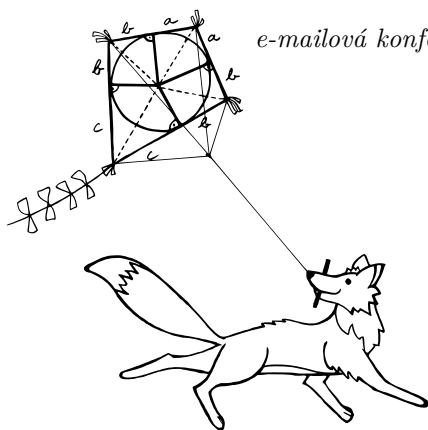
Včerejší noc byla neklidná. Ráno již brzy přijde. Čeká nás nové město. Tak pojďme.

Honza; [jan@piroutek.eu](mailto:jan@piroutek.eu)

Lucka; [lucy.kuncarova@gmail.com](mailto:lucy.kuncarova@gmail.com)

e-mailová konference: [lingvistika@mam.mff.cuni.cz](mailto:lingvistika@mam.mff.cuni.cz)

odevzdávejte do odevzdávátka



## Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře

Vzorová řešení k úlohám 1. dílu

### Úloha 1

#### Zadání:

Odvoďte vztah

$$\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1},$$

ze stavové rovnice ideálního plynu, pokud víte, že  $\frac{n_1-1}{n_2-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$  ( $\rho$  je hustota vzduchu).

#### Řešení dle Dr.<sup>MM</sup> Daniela Čtvrtečky

Vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= n_1 R T_1 \\ p_1 \frac{m_1}{\rho_1} &= \frac{m_1}{M} R T_1 \\ p_2 V_2 &= n_2 R T_2 \\ p_2 \frac{m_2}{\rho_2} &= \frac{m_2}{M} R T_2 \end{aligned}$$

kde  $M$  je molární hmotnost,  $p$  je tlak,  $T$  je teplota,  $R$  je molární plynová konstanta,  $\rho$  je hustota a  $m$  je hmotnost plynu. Z toho můžeme vyjádřit hustotu (hmotnost plynu se nám vykrátí):

$$\rho_1 = \frac{M p_1}{R T_1} \quad \rho_2 = \frac{M p_2}{R T_2}$$

A když dosadíme do zadané rovnice  $\frac{n_1-1}{n_2-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} &= \frac{\frac{M p_1}{R T_1}}{\frac{M p_2}{R T_2}} \\ \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} &= \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \end{aligned}$$

### Úloha 2

#### Zadání:

Napište „program“ (stačí i numerické řešení v tabulkovém editoru, např. MS Excel), který vykreslí trajektorii paprsku světla prolétávajícího atmosférou. Vstupem nechť je úhel  $\alpha_0$ , pod kterým paprsek dopadá na povrch Země, a závislost teploty vzduchu na nadmořské výšce, tj.  $T(z)$ .

*Tlak v k-té vrstvě určete rekurzivně jako*

$$p_k = p_{k-1} \exp\left(-\frac{g}{\tilde{R}T_k} \Delta z\right),$$

*kde  $\exp(x)$  je alternativní zápis funkce  $e^x$ ,  $g$  je tíhové zrychlení,  $\tilde{R}$  měrná plynová konstanta vzduchu o hodnotě přibližně  $\tilde{R} = 287.1 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\Delta z$  je tloušťka jedné vrstvy a  $T_k$  je teplota v k-té vrstvě. Tlak v nulté vrstvě je  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ .*

*Vykreslete trajektorii paprsku procházejícího atmosférou pro teplotní závislosti:*

a)  $T(z) = (300 - 0.01z) \text{ K}$

b)  $T(z) = (300 - 0.034z) \text{ K}$

c)  $T(z) = (300 - 0.05z) \text{ K}$

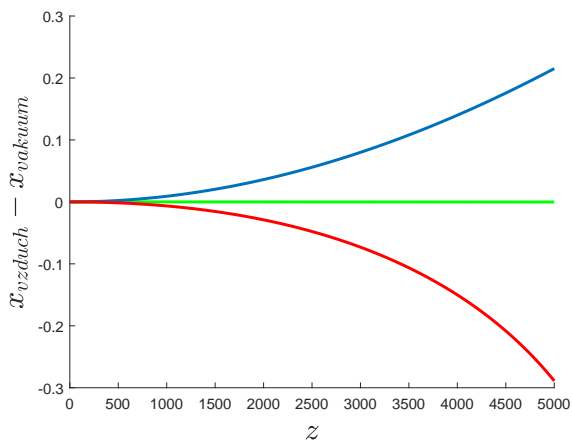
*Vykreslené trajektorie porovnejte s přímkou, po které by se paprsek šířil ve vakuu. Výsledky diskutujte.*

### **Řešení:**

Samotné vykreslení trajektorií světla bylo vcelku přímočaré, všechna došlá řešení si s ním poradila bez větších potíží. Úloha začíná být zajímavá, teprve když dojde na jejich interpretaci. Při správném vykreslení jsou totiž všechny tři trajektorie pouhým okem takřka nerozeznatelné od přímky, která odpovídá trajektorii ve vakuu, i od sebe navzájem. To ovšem pouze znamená, že je vliv astronomické refrakce za normálních okolností zanedbatelný, nikoli že není přítomen. Pokud chceme astronomickou refrakci pozorovat, je vhodné vykreslit si rozdíl zkoumané trajektorie od referenční trajektorie ve vakuu. Takovou kalibraci získáme grafy uvedené na obrázku 24.

Jak je patrné, v případě a) je  $x_{\text{vzduch}} > x_{\text{vakuum}}$ , tzn. při pevně daném  $z$  je paprsek ve vodorovném směru dál, než by odpovídalo přímce, tzn. trajektorie je konkávní. V případě b) je při stejném  $z$  stejné  $x$ , takže jde skutečně o přímku, a v případě c) je  $x_{\text{vzduch}} < x_{\text{vakuum}}$ , tzn. jde o opačný případ než a), tzn. trajektorie je konvexní. Dá se totiž matematicky odvodit, že pokud je pokles teploty s výškou větší než konstanta  $g/\tilde{R} \approx 0.034 \text{ K m}^{-1}$ , dochází k takzvané inverzi, při které index lomu vzduchu s výškou roste a paprsek tak při průchodu atmosférou k zemskému povrchu prodělává lom od kolmice. To je mimochodem důvod, proč dochází ke spodnímu zrcadlení v okolí horkých předmětů, například v létě na rozpálené vozovce. Vzduch se zde prudce ohřívá při kontaktu s vozovkou a současně ochlazuje při kontaktu s dalšími vrstvami vzduchu. Nám se díky tomu zdá, jako by na vozovce byla louže, ačkoli jde jen o spodní zrcadlení. Odvození vzniku inverze zde uvádět nebudeme, protože překračuje rámec tohoto semináře. Koho by přesto zajímalo, necht' se ozve na e-mail uvedený na konci tématka.

Dr.<sup>MM</sup> Daniel Čtvrtečka se rozhodl tuto úlohu pojmout po svém. K výpočtu indexu lomu si dohledal postup, který nevyplývá z postupu uvedeného v tomto



**Obrázek 24:** Výšková závislost rozdílu  $x$ -ové souřadnice světla ve vakuu a světla v atmosféře s daným rozložením teploty: a)  $T(z) = (300 - 0.01z)$  K – červená křivka; b)  $T(z) = (300 - 0.034z)$  K – zelená křivka; c)  $T(z) = (300 - 0.05z)$  K – modrá křivka

časopise, a přesto i v jeho výsledcích lze pozorovat již zmiňovanou inverzi. Ačkoli to v řešení přímo nezmiňuje, v nízkých výškách také jím vypočtený index lomu v případě a) s výškou klesá, v případě b) je konstantní a v případě c) roste. Na jeho grafickém znázornění astronomické refrakce v případě c) si lze všimnout, že v jednom bodě vystoupí trajektorie v atmosféře do větší výšky než trajektorie ve vakuu, což je znovu důsledek zmíněného růstu indexu lomu. Ve vyšších výškách se naše výsledky v případech b) a c) rozcházejí, což je ale v pořádku, neboť tyto dva případy se v přírodě stejně nevyskytují ve výškách větších než několik metrů. Řešení Dr.<sup>MM</sup> Daniela Čtvrtečky je v krácené podobě otisknuto níže.

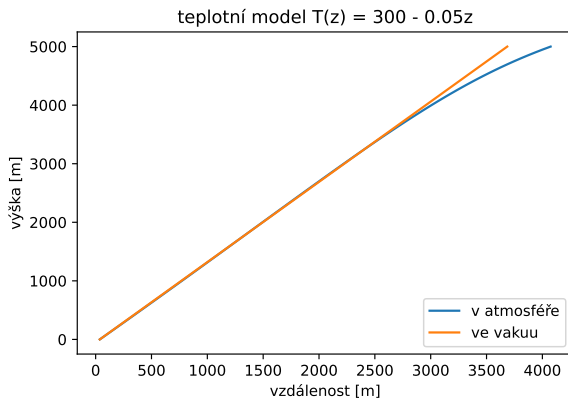
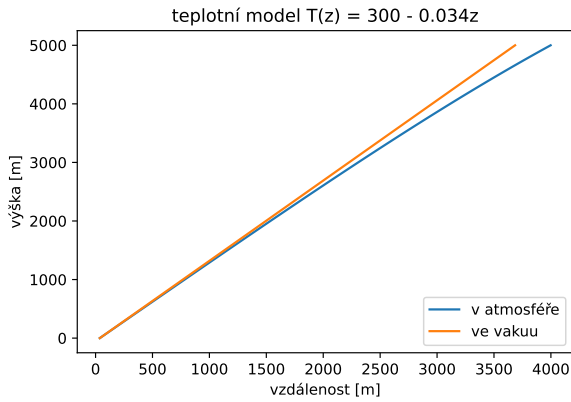
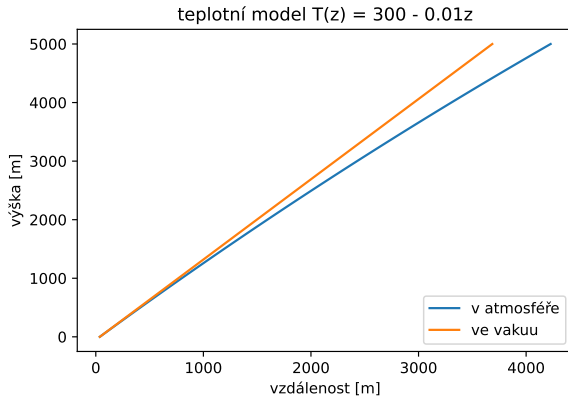
Pro výpočet indexu lomu první vrstvy jsem použil Gladstone-Daleův vztah pro výpočet indexu lomu suchého vzduchu:

$$n = 1 + 7.8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p}{T}$$

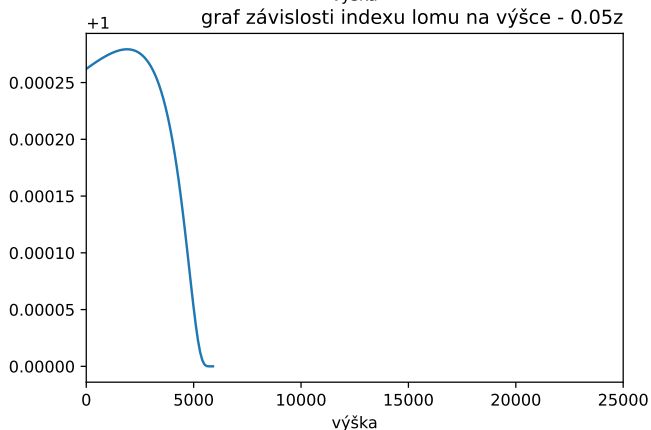
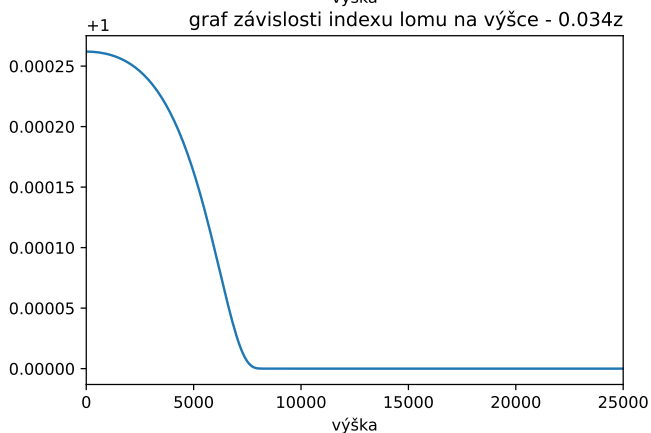
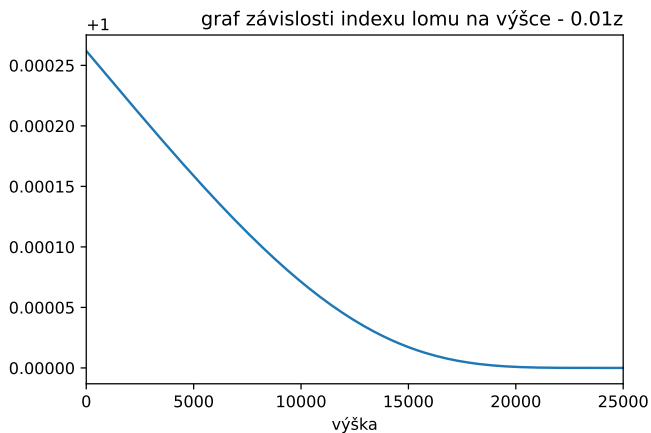
Tedy pro náš model ( $p = 10^5$  Pa,  $T = 300$  K):

$$n = 10.000262$$

Samotné modely trajektorií nejsou úplně vypovídající, jednak kvůli malému počátečnímu indexu lomu vzduchu (trajektorie světla ve vakuu se podobá tomu ve vzduchu – přímka) a kvůli tomu, že každý model má omezení výšky, kterou když překročí, tak teplota jde do záporných čísel (což, jelikož počítáme s jednotkou kelvin, nedává smysl), proto poslední model nám vykreslí trajektorii do menší výšky. K ukázce správného fungování programu můžeme nastavit větší počáteční index lomu  $n = 1.2 * n[\text{air}]$ :



A k porovnání teplotních funkcí je lepší vynést graf závislosti indexu lomu na výšce (*v grafech je na svislé ose vynesena index lomu minus jedna*):



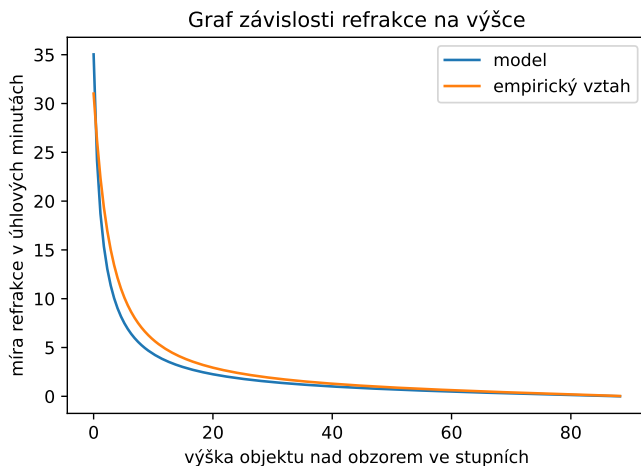
Po porovnání s grafem publikace [1] vychází jako nejlepší teplotní model ten první ( $T(z) = 300 - 0.01z$ )

Jinak z modelů trajektorií můžeme vidět, že, když se díváme například na nebeské objekty, tak právě refrakce způsobuje, že se nám jeví úhlově blíže zenitu.

## Problémy

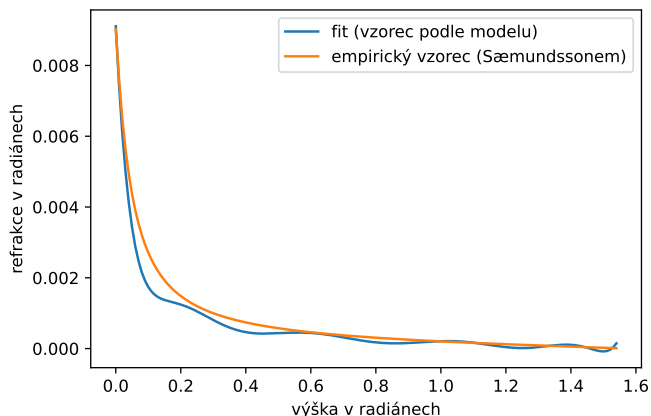
1. Zjišťování závislosti míry refrakce na výšce, porovnání s empirickými vztahy, vlastní empirický vzorec (polynomiální).

Problém, který jsme řešili v souvislosti s určováním polohy pomocí sextantu na Astronomické expedici, bylo započítání chyby vlivem refrakce. Existují různé empirické vztahy, ve kterých vystupuje výška objektu. Chtěl jsem proto si zkusit porovnat výsledky mého modelu a také zkusit vytvořit vlastní empirický vzorec. Jako první jsem tedy pomocí modelu vytvořil graf závislosti refrakce (tj. rozdílu úhlu, který vstupuje do modelu a úhlu v poslední vrstvě – při poslední iteraci) na výšce objektu nad obzorem a porovnal s empirickým vztahem vytvořeným Sæmundssonem [2].





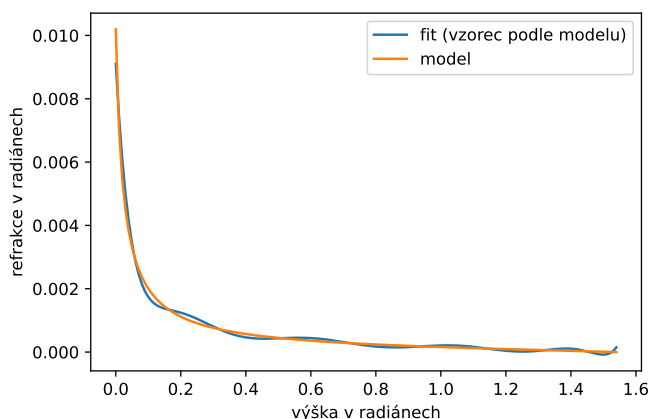
Dalším krokem je fitování křivky polynomem pomocí Pythonu:



Je vidno, že v nějakých intervalech je toto řešení vůči empirickému vztahu nepřesné – právě kvůli tomu, že je to nějaký polynom, nicméně pro refrakci ( $\theta$ ) platí zhruba vztah (polynom 10. stupně):

$$\begin{aligned} \theta[\text{rad}] = & 1.11742604x^{10} - 9.14125259x^9 + 32.2062019x^8 - 63.9346686x^7 \\ & + 78.5668745x^6 - 61.8372954x^5 + 31.1937595x^4 - 9.82350902x^3 + 1.82749769x^2 \\ & - 0.183933857x + 0.00910868573 \end{aligned}$$

Ještě porovnání se samotným modelem, ze kterého vychází:



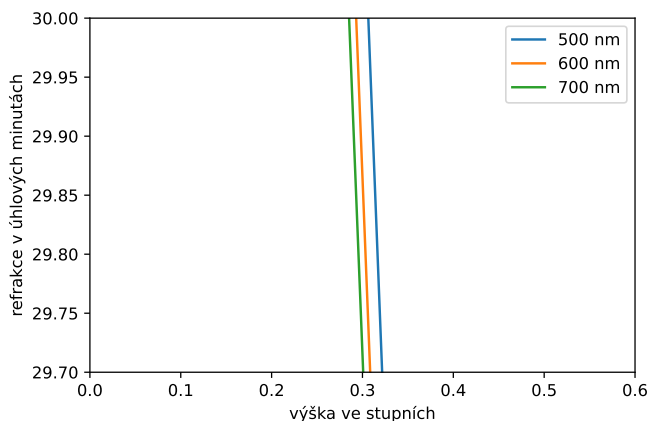
## 2. Závislost refrakce na vlnové délce.

Chtěl jsem zjistit, jak moc se liší lom světla pro různé vlnové délky. Obecně se dá index lomu pro nějakou vlnovou délku v nějakém prostředí určit

pomocí Cauchyho rovnice [3]:

$$n = 1 + A_1 \left( 1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \right)$$

kde  $A_1$  a  $B_1$  jsou konstanty pro dané prostředí a  $\lambda$  je vlnová délka. Bohužel se mi už nepodařilo zjistit nějaký vztah, jak se tyto konstanty  $A_1$ ,  $B_1$  liší v závislosti na tlaku a teplotě, proto jsem porovnával modely jen s jinými počátečními indexy lomu. Modely jsem dělal pro 500, 600 a 700 nm.

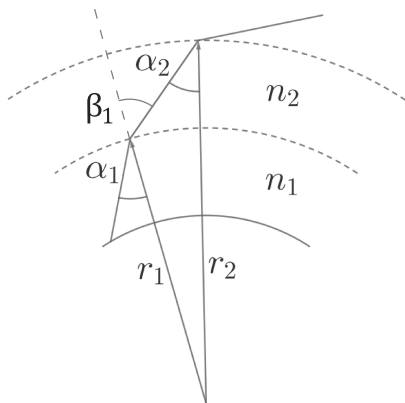


### 3. Další možnosti zpřesňování modelu průchodu světla.

Rád bych teď provedl krátkou diskuzi o přesnosti modelu. V první řadě jsme vycházeli ze stavové rovnice ideálního plynu, která zanedbává různé vlastnosti reálného plynu. To můžeme odstranit pomocí van der Waalsových korekcí, kde započítáváme i objem částic a přitažlivé síly mezi částicemi, tím můžeme zpřesnit náš model. Dále jsme uvažovali lineární teplotní model v atmosféře, který taktéž není úplně přesný. V souvislosti s atmosférou jsme zanedbali i turbulentní proudění a vlhkost vzduchu a určitě další minoritní jevy ovlivňující index lomu. Nicméně vzhledem k tomu, jak jednoduché vztahy a závislosti jsme použili, vychází v porovnání s ověřenými empirickými vztahy pro refrakci náš model velice dobře.

## Reference

- [1] Purvinskis, Robert & Giggenbach, Dirk & Henniger, Hennes & Perlot, Nicolas & David, Florian. (2003). Multiple Wavelength Free-Space Laser Communications. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. 4975. 12- 19. 10.1117/12.478932
- [2] Saemundsson, T., Atmospheric Refraction, *Sky and Telescope*, vol. 72, p. 70, 1986.



**Obrázek 25:** K zadání úlohy 3 prvního čísla

[3] Born, M. and Wolf, E. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference, and Diffraction of Light, 7th ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1999

### Úloha 3

#### Zadání:

V dostatečné výšce začíná hrát roli zakřivení Země a tím pádem i zemské atmosféry. Pak lze odvodit, že pro dvě sousedící vrstvy platí vztah  $n_1 r_1 \sin \alpha_1 = n_2 r_2 \sin \alpha_2$  (viz obr. 25). Odvodte tento vztah.

**Řešení dle Dr.<sup>MM</sup> Daniela Čtvrtečky**

Ze Snellova zákona platí:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \beta_1$$

Dále ze sinové věty víme, že:

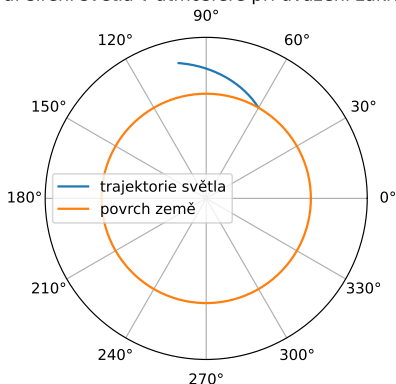
$$\frac{\sin \alpha_2}{r_1} = \frac{\sin 180^\circ - \beta_1}{r_2} = \frac{\sin \beta_1}{r_2}$$

Když si z druhé rovnice vyjádříme  $\sin \beta_1$  a dosadíme do první rovnice, vyjde nám, že:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \alpha_1 &= n_2 \frac{r_2}{r_1} \sin \alpha_2 \\ n_1 r_1 \sin \alpha_1 &= n_2 r_2 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

S tím byl spojený problém vizualizace trajektorie světla při zakřiveném povrchu. Ten jsem řešil zase pomocí pythonu a tentokrát polárního grafu (pro stejné výchozí parametry jako při zanedbání zakřivení povrchu).

Polární graf šíření světla v atmosféře při uvážení zakřivení Země



### Problém 5

K Problému 5 došlo velmi pěkné řešení, shodou okolností také od Dr.<sup>MM</sup> Daniela Čtvrtečky. Tímto připomínáme, že na něj můžete vlastním řešením navázat nebo reagovat. Všechny problémy zadané k tomuto tématku zůstávají nadále otevřené.

Pro tenhle problém jsem použil snímek startrails, tedy snímek složený z několika expozic vykreslující trajektorie hvězd. Snímek jsem dělal tak, aby byl na snímku i severní světový pól (poblíž Polárky). Délka expozice byla zhruba 2 hodiny.

Vykreslil jsem si soustředné kružnice se středem v severním světovém pólu (červeně) a porovnal je s trajektoriemi hvězd, u hvězd úhlově vzdálenějších od severního světového pólu je odklon lépe vidět (obrázek 27). Další jev, který by mohl mít vliv na trajektorii hvězd, je pohyb Země kolem Slunce.

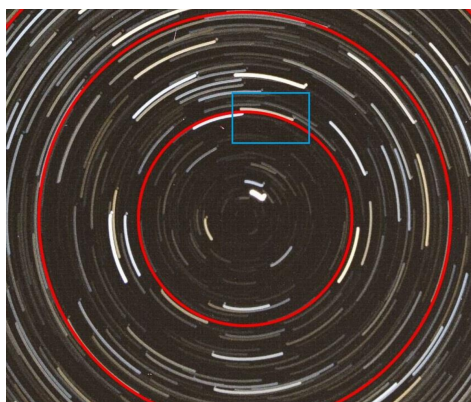
## Díl 3: Halové jevy

V předchozích dílech tématka jste se mohli dočíst o optických úkazech, které se vyskytují v čisté atmosféře (astronomická refrakce, svrchní a spodní zrcadlení) a v atmosféře, která obsahuje kapičky vody (duha a její variace). Jak je ale známo, za vhodných podmínek se v atmosféře začínají objevovat také krystalky ledu. Protože ty mají o něco komplikovanější tvar než kapky vody, jejich přítomnost se projeví celou škálou více či méně zřetelných optických úkazů, které souhrnně nazýváme Halové jevy.

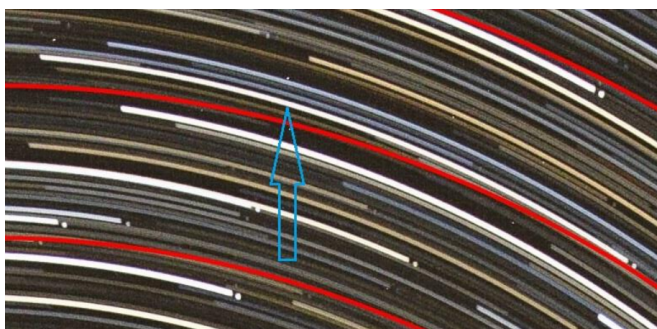
Podmínky, při kterých ledové krystalky vznikají, bohužel není snadné dobře definovat. Ze známého fázového diagramu plyne, že voda přítomná v atmosféře o dostatečně nízké teplotě a dostatečně vysokém přesycení vodní páry by měla být



Obrázek 26: Snímek startrails



Obrázek 27: Trajektorie hvězdy poblíž severního světového pólu



Obrázek 28: Trajektorie hvězdy dále od světového pólu

vždy v pevné fázi. Ve skutečnosti je však tvorbu takové pevné fáze potřeba chápat spíš jako skládání molekul do krystalové mříže, přičemž iniciace takového děje vyžaduje nějaký pevný základ. Jako základ krystalové mříže, tzv. krystalizační jádra, mohou posloužit už existující krystaly ledu, které tím rostou, nebo i pevné nečistoty v atmosféře, převážně krystaly solí. Z tohoto důvodu vodní kapky převažují nad ledovými krystalky až do teplot okolo  $-42\text{ }^\circ\text{C}$ , při nižších teplotách už dochází ke spontánní krystalizaci.

Kapka vody o poloměru  $R$ , která padá rychlostí  $v$ , je dle Stokesova zákona zpomalována silou o velikosti  $F = 6\pi\eta Rv$ , kde  $\eta$  je dynamická viskozita vzduchu. Sraží-li se tato kapka s jinou kapkou o poloměru  $r$ , obě dvě kapky se spojí v jedinou, přičemž jejich celkový objem zůstane zachován.

**Úloha 1** [3b+3b]: *Předpokládejme, že všechny kapky v atmosféře mají poloměr  $r$  a jejich objemová koncentrace je  $n$ . Dodejme do takové atmosféry padající kapku o poloměru  $R$ . Vypočítejte střední vzdálenost, kterou tato kapka uletí před pohlcením jiné kapky, pokud a) všechny kapky padají stejným směrem. b) vlivem vzdušných proudů je pohyb kapek ve všech směrech rovinný.*

Molekuly vody drží v kapce pohromadě povrchová síla  $F = \sigma l$ , kde  $\sigma$  je povrchové napětí vody  $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ , a  $l$  je délka elementu, na který síla působí, v našem případě lze dosadit  $2\pi R$  kapky. Když kapka naroste do příliš velkých rozměrů, povrchová síla ji už neudrží pohromadě a kapka se rozpadá na menší kapky.

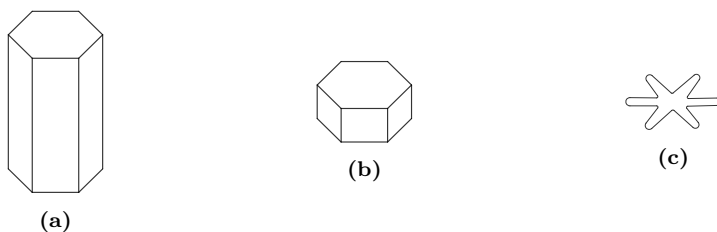
**Úloha 2** [2b]: *Jaké největší velikosti může kapka vody dorůst, než dojde k jejímu rozpadu? Výsledek stačí řádově.*

Když se kapka sraží s krystalizačním jádrem, zmrzne a stane se sama krystalem. Krystaly se při vzájemné srážce už dále nespojují, ale ani nerozpadají. Takto mohou v atmosféře vyrůst i ledové krystaly poměrně velkých rozměrů, např. kroupy.

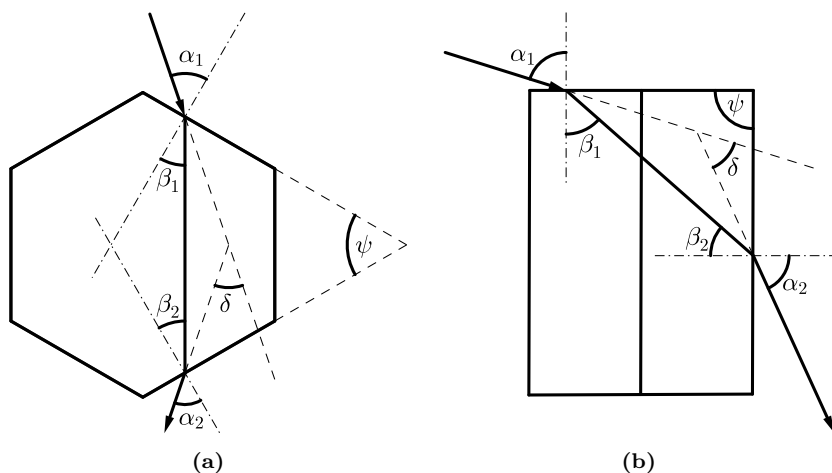
**Úloha 3** [2b]: *Odhadněte, co by se stalo, kdybychom do atmosféry dodali dostatečné množství krystalizačních jader (např. částic solí). Navrhněte, k čemu by to mohlo být dobré.*

Krystalky, které nás budou především zajímat, dosahují velikosti v řádu jednotek mikrometrů. Voda krystalizuje v šesterečné soustavě, krystalky mají proto zpravidla tvar šestiúhelníkových destiček (typicky při teplotách  $0$  až  $-5\text{ }^\circ\text{C}$  nebo  $-10$  až  $-25\text{ }^\circ\text{C}$  nebo při vysokých přesyceních) nebo sloupků se šestiúhelníkovou podstavou (při teplotách  $-5$  až  $-10\text{ }^\circ\text{C}$  nebo  $-25$  až  $-40\text{ }^\circ\text{C}$  nebo při nízkých přesyceních). V úzkém teplotním intervalu okolo  $-14\text{ }^\circ\text{C}$  vznikají při vysokých přesyceních také útvary podobné šesticípé hvězdici, tzv. dendrity.

**Problém 4:** *Vytvořte sami krystalky ledu (např. v mrazáku) za různých teplot. Pozorujte, jak se mění jejich tvar v závislosti na teplotě a na materiálu podkladu, na kterém vznikaly.*



**Obrázek 29:** Základní tvary ledových krystalků: a) sloupek; b) destička; c) hvězdice (dendrit)



**Obrázek 30:** Lom slunečních paprsků podílejících se na vzniku malého a velkého hala.

Podobně, jako to bylo u vodních kapek (viz předchozí díl tématka), paprsek světla se při dopadu na povrch krystalu zčásti zrcadlově odráží a zčásti láme vůči původnímu směru o úhel, který označíme  $\delta$ . Vnitřní odrazy můžeme v tomto případě zanedbat. Takto můžeme halové jevy rozdělit do dvou skupin. Ty, které vznikají pouhým zrcadlovým odrazem, jsou převážně bělavé, zatímco ty, jejichž vznik zahrnuje také lom světla, vykazují lehce duhové zabarvení.

My se zaměříme především na mechanismus vzniku tzv. malého a velkého hala. Ty se jeví jako duhově zbarvené kruhy okolo slunce. Jejich úhlové vzdálenosti od Slunce jsou  $22^\circ$  a  $46^\circ$ . Malé halo vzniká v situaci, kdy paprsek vstupuje do krystalku jednou ze stran pláště a vychází stranou vůči ní pootočenou o  $60^\circ$ . V případě velkého hala jde o situaci, kdy paprsek vstupuje podstavou a vystupuje pláštěm. Obě situace jsou znázorněny na obrázku 30.

Úhel vychýlení  $\delta$  je samozřejmě pevně svázán s úhlem dopadu  $\alpha_1$ , který je zase pevně dán orientací krystalku. Předpokládejme, že je krystalků v atmosféře dostatečné množství, aby byly všechny jejich orientace zastoupeny ve stejné míře.

Přesto je vystupující světlo nejvíce koncentrováno do úhlu odpovídajícího nejmenšímu vychýlení  $\delta = \delta_{\min}$ .

**Úloha 5** [1b]: *Prostou úvahou vysvětlete, proč je vystupující světlo koncentrováno právě v úhlu  $\delta = \delta_{\min}$ .*

**Úloha 6** [3b]: *Pro situaci znázorněnou na obrázcích 30a a 30b odvodte rovnici pro  $\delta_{\min}$ , ve které jako jediné parametry vystupují relativní index lomu pro led  $n_r = n_1/n_2$  a lámavý úhel  $\psi = 60^\circ$ , resp.  $\psi = 90^\circ$ .*

**Problém 7:** *Ověřte výsledky předchozích dvou úloh pomocí počítačové simulace nebo numerického řešení. Své výsledky posílejte ve formě grafů s komentářem.*

**Problém 8:** *Ověřte výsledky předchozích dvou úloh pomocí experimentu. Potřebujete k němu stínítko, laserové ukazovátko a hranolek s lámavým úhlem  $60^\circ$ , resp.  $90^\circ$ . Hranolek může být např. ze skla, nebo si můžete vyrobit skutečně ledový krystalek zamražením vody ve vhodné formě. Posvitte ukazovátkem na hranolek tak, aby vystupující světlo dopadalo na stínítko, a zaznamenejte úhel lomu  $\delta$  (ten bude různý pro červené a pro fialové světlo). Krystalkem pomalu otáčejte a zaznamenávejte úhel  $\delta$  v závislosti na orientaci krystalku. Všimněte si také intenzity. Výsledky diskutujte.*

Malé a velké halo jsou jenom dva zástupci halových jevů, na ledových krystalcích jich ve skutečnosti vzniká daleko více. Nejvýznamnější z těchto jevů jsou znázorněny a popsány na obrázku 31. Přibližná četnost jejich výskytu a mechanismus jejich vzniku jsou dále uvedeny v tabulce 6.

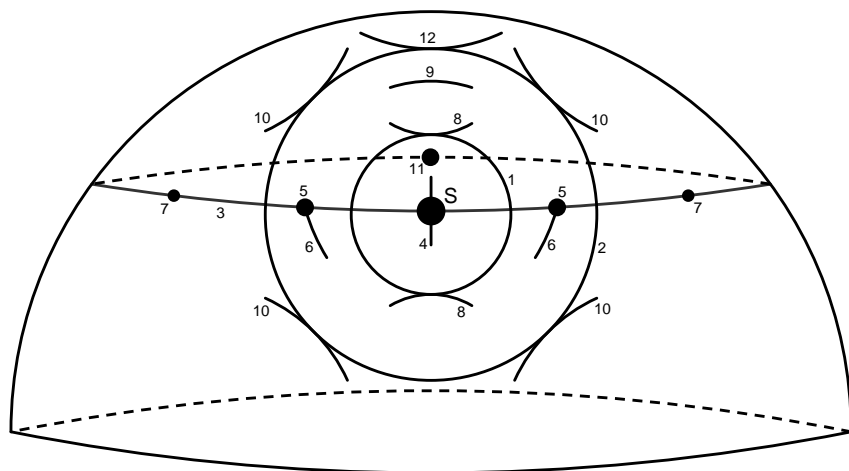
**Problém 9:** *Nalezněte halové jevy uvedené na obrázku 31 v přírodě a vyfotťte je. U každé fotografie uveďte, o který halový jev se jedná.*

*Evžen & Karel; Janskvara@email.cz  
e-mailová konference: atmosfera@mam.mff.cuni.cz  
odevzdávejte do odevzdávátka*



Číslo	Název jevu	Roční průměr	Mechanismus vzniku	Zdůvodnění tvaru
1	Malé halo	209	Lom na hranolu s lámavým úhlem $60^\circ$	Orientace krystalků vůči prsku
2	Velké halo	18	Lom na hranolu s lámavým úhlem $90^\circ$	Orientace krystalků vůči prsku
3	Parhelicí kruh (horizontální kruh)	13	Odraz na vertikálně orientovaných stěnách	Orientace krystalku vůči vertikální ose pozorovatele
4	Halový sloup	34	Odraz na horizontálně orientovaných stěnách	Orientace krystalku vůči horizontální rovině
5	Parhelia (vedlejší slunce malého hala)	71	Lom na hranolu s lámavým úhlem $60^\circ$ ; osa krystalku orientována vertikálně	Koncentrace světla do směru nejmenšího $\delta$
6	Lowitzovy oblouky	3		
7	Parantherlia („stodvacetistupňová“ slunce)	1		
8	Horní a dolní dotykový oblouk malého hala	59	Lom na hranolu s lámavým úhlem $60^\circ$ ; osa krystalku orientována horizontálně	Orientace krystalku vůči jeho ose
9	Parryho oblouk	$<1$	Lom na hranolu s lámavým úhlem $60^\circ$ ; osa i dvě protilehlé stěny krystalků orientovány horizontálně	Orientace krystalku vůči prsku
10	Dotykové oblouky velkého hala	1		
11	Antihelium (protislunce)	1		
12	Horní cirkumzenitální oblouk	31	Lom na hranolu s lámavým úhlem $90^\circ$ ; krystalky orientovány vertikálně	Orientace krystalku vůči jeho ose

**Tabulka 6:** Halové jevy znázorněné na obr. 31



**Obrázek 31:** Hlavní halové jevy: S – Slunce; 1 – Malé halo; 2 – Velké halo; 3 – Horizontální kruh (parhelický kruh); 4 – Halový sloup; 5 – Parhelia (vedlejší slunce malého hala); 6 – Lowitzovy oblouky; 7 – Paranthelia (vedlejší „stodvacetistupňová“ slunce); 8 – Horní a dolní dotykový oblouk malého hala; 9 – Parryho oblouk; 10 – Dotykové oblouky velkého hala; 11 – Antihelium (protislunce); 12 – Horní cirkumzenitální oblouk

## Téma 5 – Nekonečna

V minulých dvou dílech jsme si povídali o nekonečných počtech. Mluvili jsme o tom, že existuje více než jedno nekonečno, a tato různá nekonečna jsme porovnávali. V dnešním díle si vystačíme s dvěma nekonečny,  $+\infty$ , které je větší než libovolné reálné číslo, a  $-\infty$ , které je naopak menší. Ale stejně jako pro všechna předchozí nekonečna bude i pro  $\pm\infty$  platit pro všechna kladná reálná čísla  $r$  a všechna reálná  $s$ :<sup>7</sup>

$$+\infty \cdot r = +\infty, \quad +\infty \cdot (-r) = -\infty, \quad -\infty \cdot r = -\infty, \quad -\infty \cdot (-r) = +\infty,$$

$$\frac{+\infty}{r} = +\infty, \quad \frac{+\infty}{-r} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{r} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{-r} = +\infty,$$

$$+\infty \pm s = +\infty, \quad -\infty \pm s = -\infty, \quad +\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty.$$

Oproti předchozím nekonečnům si také zavedeme pro reálná  $a > 1$  a  $1 > b > 0$ :

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad a^{+\infty} = +\infty, \quad a^{-\infty} = 0, \quad b^{+\infty} = 0, \quad b^{-\infty} = +\infty, \quad 0^{+\infty} = 0.$$

<sup>7</sup>Místo  $x + (+\infty)$  nebo  $x - (-\infty)$  píšeme  $x + \infty$  a místo  $x - (+\infty)$  a  $x + (-\infty)$  píšeme  $x - \infty$ .

Rád bych upozornil, že mocnění záporných čísel na nekonečna, dělení nulou,

$$\pm\infty \cdot 0, \quad +\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^{-\infty}$$

není definováno.

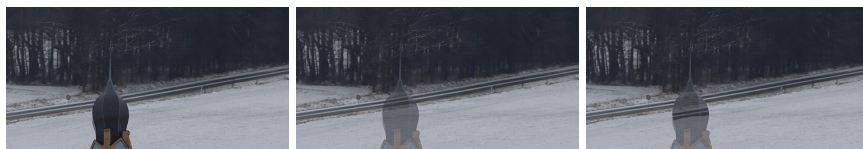


**Obrázek 32:** Reálná osa s nekonečny a operacemi s nimi

Funkce jsme v rychlosti viděli v minulém díle, teď nám dokonce budou stačit jen ty, které přiřazují reálným číslům reálná čísla (resp. nějaké podmnožině reálných čísel, protože například funkce  $\frac{1}{x}$  nepřirazuje nic nule), a ty, které přiřazují přirozeným číslům reálná. Funkcím přirozených čísel do reálných říkáme také posloupnosti, jelikož je můžeme zapsat jako prvních pár členů (obrazů 1, 2, 3, ...) a třemi tečkami. U posloupností často místo  $a(n)$  píšeme  $a_n$ . Abychom to nemuseli pořád psát: v tomto tématku  $n$  značí vždy přirozené číslo a  $x$  reálné, tedy funkce s  $n$  budou funkce přirozených čísel a funkce s  $x$  funkce reálných.

### Díl 3 – Limity

Když se podíváte z okna, určitě uvidíte nějakou lampu, strom, stožár, cokoliv. Za tím možná vede nějaká silnice/řeka. Ale my nevíme, zda tam opravdu vede, vždyť tam nevidíme. Jsme ale zvyklí na to, že silnice/řeka se chová „hezky“ (tzv. spojitě), tedy že když se za překážku blíží zleva i zprava, tak v tom daném místě opravdu pokračuje, nemá tam díru.<sup>8</sup>



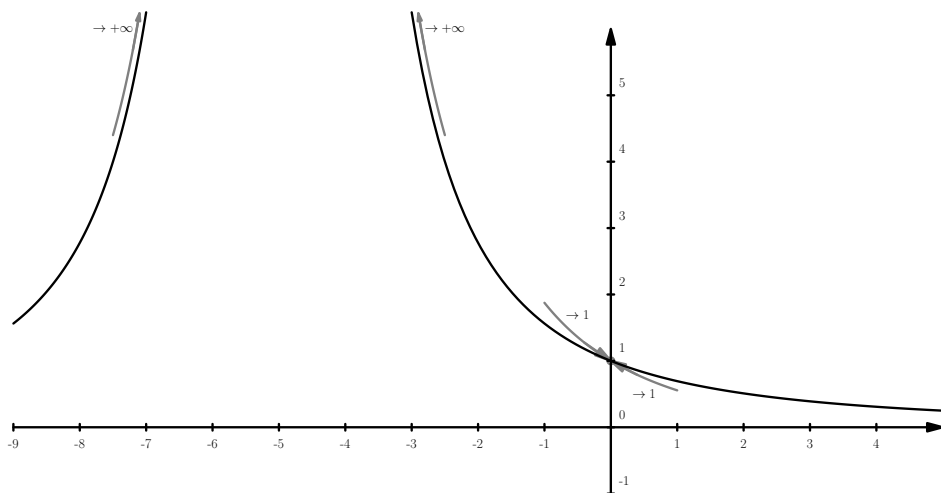
- (a) Cesta zakrytá věžičkou (b) Jak vede cesta ve světle „za věžičkou“, který je spojitý (c) Jak vede cesta ve světle „za věžičkou“, který není spojitý, nebo kde projektant hnul s pravicem

Podobné je to i v matematice. Podívejme se na funkci (na obrázku 34)

$$\frac{x}{x(0.2x + 1)^2}$$

Ta není v 0 definovaná, protože bychom tam dělili nulou. Ale jsme v matematice, co není, můžeme si dodefinovat. A to dokonce tak, aby se funkce „chovala hezky“

<sup>8</sup>Tedy v Čechách jsme možná zvyklí na díru, ale pořád je to silnice a ne bažina.



**Obrázek 34:** Reálná osa s nekonečny a operacemi s nimi

(byla spojitá). Z obrázku víme, že se  $f$  v bodě nula blíží 1, tedy položíme  $f(0) = 1$ . Ale jak víme, že se tam blíží (tedy že s novou definicí, kde jsme přidali  $f(0) = 1$  je spojitá), i když se podíváme dostatečně blízko? A co v bodě  $-5$ , tam nevidíme už vůbec, co dělá. Jde tam do  $+\infty$ , které jsme si definovali výše, nebo tam prostě končí tak vysoko, že ji jen na tomto obrázku nevidíme?<sup>9</sup>

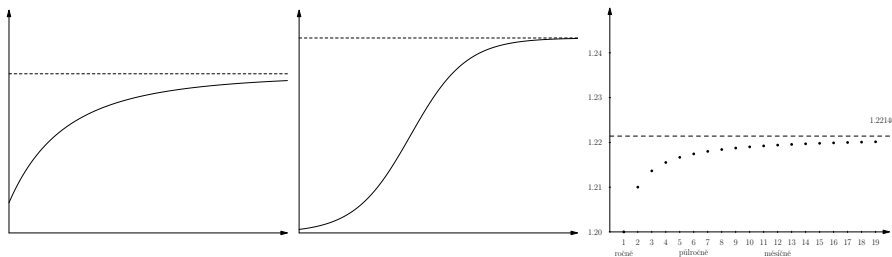
Druhým případem, který se hodí na použití limit, a tím, se kterým se pravděpodobně setkáte dříve (protože zatímco předchozí mluví o funkcích reálných čísel, tento pasuje i na posloupnosti), je ten, kdy se díváte někam na „konec“. Například když se podíváte na hvězdy a zamyslíte se nad tím, kolik energie byste potřebovali, abyste byli schopni vyslat raketu kamkoliv ve vesmíru (zanechtejme vše kromě Slunce a Země), tedy kolik energie potřebujete na vystřelení rakety „do nekonečna“, zjistíte, že i když potřebujete s rostoucí vzdáleností víc energie, tak „v nekonečnu“ je tato energie konečná<sup>10</sup> (a ne  $+\infty$ ). Do konečné hodnoty roste i třeba funkce „populace“, jelikož zdroje jsou omezené.

Když už jsme mluvili o posloupnostech, tak posloupnost s hezkou a zná-

<sup>9</sup>Je to opravdu tak, že tato funkce jde do  $+\infty$ , když se  $x$  blíží  $-5$ . Ale následující funkce vypadá na obrázku úplně totožně a jde v  $-5$  pouze do 100:

$$\frac{x}{x((0.2x + 1)^2 + 0.01)}$$

<sup>10</sup>Tato skutečnost je spojena s několika tzv. kosmickými rychlostmi: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Kosmick%C3%A1\\_rychlost](https://cs.wikipedia.org/wiki/Kosmick%C3%A1_rychlost), které nejsou nic jiného, než rychlosti, při kterých má dané těleso dostatečnou energii na odlet „do nekonečna“.



(a) Funkce energie nutné na (b) Funkce růstu populace (c) Velikost úroku v závis-  
 čím dál větší vzdálenost do- s omezenou kapacitou losti na počtu úročení za rok  
 letu

mou limitou<sup>11</sup> (i když si ji kvůli komplexnosti nebudeme dokazovat) je: Když úročíte peníze jednou ročně dvaceti procenty (20% = 0.2), tak se každý rok vaše jmění znásobí  $1 + 0.2 = 1.2$ . Co kdybyste ale chtěli úročit častěji. Třeba  $\frac{1}{12}$  z dvaceti procent za měsíc. Tak to za rok dává  $(1 + 0.2 \cdot \frac{1}{12})^{12} \doteq 1.21939$ . Dnes ale máme rychlé počítače, tak můžeme počítat úrok klidně každou sekundu:  $(1 + 0.2 \cdot \frac{1}{22\ 896\ 000})^{22\ 896\ 000} \doteq 1.22140$ . Tak a teď budeme počítat nekonečně rychle:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 0.2 \frac{1}{n})^n \doteq 1.22140$ . Z toho je vidět, že úročit rychleji už nemá smysl, jelikož i když se s každým dalším rozdělením hodnota nepatrně zvýší, ve výsledku už nepřekoná 1.2215. Naopak pokud byste místo rozdělení úročení přemýšleli nad tím, co se stane, když budete úročit nekonečně dlouho, tak ano, budete mít  $+\infty$  peněz.

**Koule a prstencové okolí:** Ještě než se vrhneme na limity, potřebujeme vědět, co znamená „blízko“. Definujeme si tedy okolí bodu: kouli

$$B(x, r) := \{y : |y - x| < r\},$$

což je v reálných číslech interval  $(x - r, x + r)$ , se středem v bodě  $x$  a poloměru  $r$ , a prstencové okolí

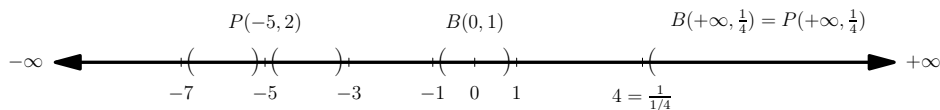
$$P(x, r) := B(x, r) \setminus \{x\}$$

se středem v bodě  $x$  o poloměru  $r$ . Prstencové okolí je tedy vlastně koule, kde vynecháme střed.<sup>12</sup> To určitě funguje pro  $x$  libovolně reálné (a tím pádem i přirozené), ale pro nekonečna se musíme smířit s jinou definicí:

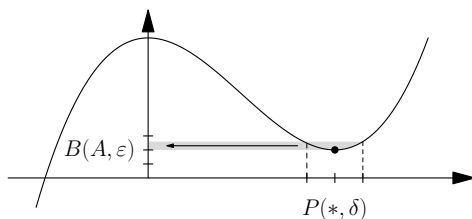
$$B(+\infty, r) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \quad B(-\infty, r) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right),$$

<sup>11</sup>Známé limity jsou limity, které se často objevují, ale o kterých je obvykle těžké dokázat, že platí, avšak víme, že takový důkaz existuje, třeba někde ve skriptech. Některé můžete najít např. na [https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam\\_z%C3%A1kladn%C3%ADch\\_limit](https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_z%C3%A1kladn%C3%ADch_limit).

<sup>12</sup>Když absolutní hodnotu nahradíme velikostí (tzv. normou, např.  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ), nebo vzdáleností (tzv. metrikou), tak dostaneme definici koule, prstencového okolí a následně i limity pro obecnější prostory než reálná čísla, například pro běžný 3D prostor.



Obrázek 36: Koule a prstencová okolí

Obrázek 37: Pro  $\varepsilon$  jsme vybrali správné  $\delta$ , aby byly v  $\delta$  prstencovém okolí  $*$  funkční hodnoty v  $\varepsilon$  okolí  $A$ 

tedy jako vše větší resp. menší než  $\frac{1}{r}$  resp.  $-\frac{1}{r}$ , což přesně splňuje naši představu o tom, že když zmenšíme  $r$ , tak se „přiblížíme“ ke středu.

**Limita:** Limitu poté definujeme<sup>13</sup> následujícím způsobem (pro jak reálné tak přirozené  $\alpha$  a reálná nebo nekonečná čísla  $*$  a  $A$ ):

$$\lim_{\alpha \rightarrow * } f(\alpha) = A \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \beta \in P(*, \delta) : f(\beta) \in B(A, \varepsilon).$$

Nelekejte se, slovy to neznamena nic jiného, než že „limita  $f$  v bodě  $\alpha$  je  $A$ “ definujeme tak, že pro<sup>14</sup> libovolně malé  $\varepsilon$  okolí<sup>15</sup> bodu  $A$  umíme najít dostatečně malé  $\delta$  prstencové (k  $*$  se pouze chceme blížit) okolí tak, že funkční hodnoty na tomto prstencovém okolí leží právě v  $\varepsilon$  okolí bodu  $A$  (tj. dostatečně blízko  $A$ ).

Dá se ukázat, že limita může v reálných číslech existovat nejvýše jedna (kdyby byly 2, tak zvolíme  $\varepsilon$  jako polovinu jejich rozdílu a dojdeme ke sporu). Naopak

Ti, co viděli (třeba v minulém ročníku) topologii, by mohli podotknout, že pojem „okolí“ v topologii opravdu něco znamená. Ano, ale v prostorech, kde můžeme definovat kouli, jako jsme ji definovali zde, jsou koule ta „reprezentující“ skupina okolí, a proto nám stačí. Samozřejmě můžeme limitu definovat i jako

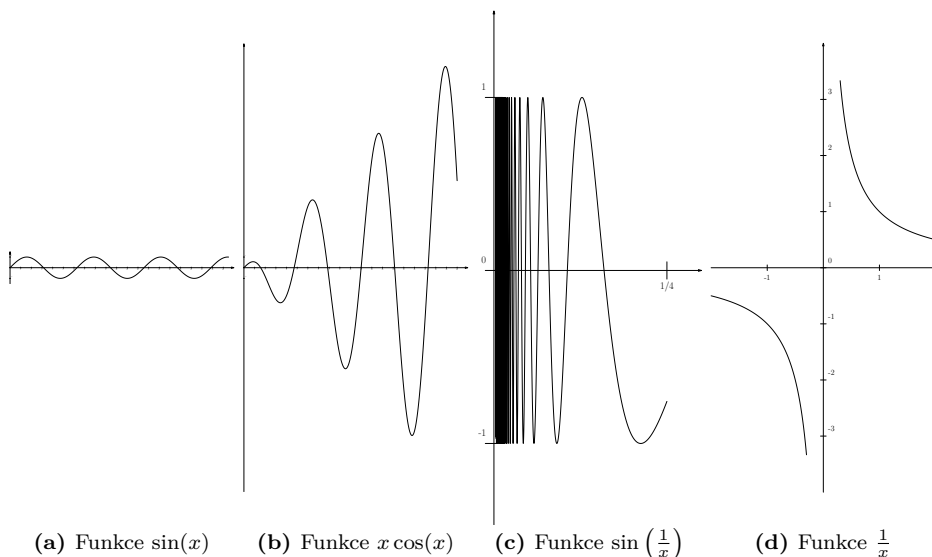
$$\lim_{\alpha \rightarrow * } f(\alpha) = A \equiv \forall U \in \mathcal{U}(A) \exists V \in \mathcal{U}(*) \forall x \in V \setminus \{*\} : f(x) \in U,$$

kde jsme kouli se středem v  $*$ , resp. v  $A$ , nahradili libovolným okolím  $*$ , resp.  $A$ , ale tento pohled má další, zde pro nás nevhodné, vlastnosti. Například to, že taková limita nemusí být jediná, tj. že  $f$  může mít v bodě  $*$  více limit.

<sup>13</sup>Symbolem  $\equiv$  značím definici, kde na levé straně je formule, který definujeme, zde limita  $f$  v bodě  $\dots$ , a na pravé straně je to, jak to definujeme.

<sup>14</sup> $\varepsilon$  okolím resp.  $\delta$  prstencovým okolím myslíme kouli o poloměru  $\varepsilon$  resp. prstencové okolí o poloměru  $\delta$ .

<sup>15</sup>Pro  $A = +\infty$  resp.  $A = -\infty$  to znamená, že pro libovolně velké  $\frac{1}{\varepsilon}$  resp.  $-\frac{1}{\varepsilon}$  umíme zvolit prstencové okolí  $*$  tak, aby byla funkce všude na tom okolí větší než  $\frac{1}{\varepsilon}$ , resp. menší než  $-\frac{1}{\varepsilon}$ .



funkce  $\sin(x)$ ,  $x \cos(x)$ , apod. nemají limitu v nekonečnu,  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\frac{1}{x}$  zase nemají limitu v nule.

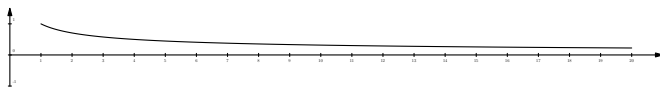
Nyní už si můžeme pár limit spočítat přímo z definice. Například platí  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , jelikož pro libovolné  $\varepsilon$  si můžeme zvolit  $\delta = \varepsilon$  a pro  $x > \frac{1}{\delta}$  opravdu platí  $x > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\delta}$ . Trochu složitější je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a$ . Ta se liší podle toho, zda je  $a = 0$ ,  $a > 0$  a  $a < 0$ . Pokud  $a = 0$ , tak je funkce konstantně 1, což znamená, že pro libovolné  $\varepsilon$  můžeme zvolit libovolné  $\delta$ , protože funkce je všude rovna 1, takže je všude v libovolné kouli se středem v 1.

Pokud je  $a > 0$ , tak jednoduše pro libovolné  $\varepsilon$  zvolíme  $\delta = \sqrt[a]{\varepsilon}$ , tj.  $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[a]{\varepsilon}}$ , když  $x \in P(+\infty, \delta)$ , tak je  $x > \frac{1}{\sqrt[a]{\varepsilon}}$ , tedy  $x^a > \frac{1}{\varepsilon}$  a  $x^a \in B(\infty, \varepsilon)$ , takže  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$ . Teď to vypadá, že pro  $a < 0$  a libovolné  $\varepsilon$ , zvolíme také  $\delta = \sqrt[a]{\varepsilon}$  a výsledkem bude zase  $+\infty$ . Když se však podíváme na graf (obrázek 39), můžeme si všimnout, že funkce klesá k nule. No ono není pravda, že když  $x > \frac{1}{\sqrt[a]{\varepsilon}}$ , tak  $x^a > \frac{1}{\varepsilon}$ , protože když umocňujeme nerovnost na záporné číslo (tedy aplikujeme na obě strany klesající funkci), tak musíme otočit nerovnost. Teď už tušíme, že limitou bude 0. Jaké ale musíme zvolit  $\delta$ , když máme zadané  $\varepsilon$ ? Chceme, aby

$$x \in P(+\infty, \delta) \implies x^a \in B(0, \varepsilon), \text{ což přepíšeme jako } x > \frac{1}{\delta} \implies 0 < x^a < \varepsilon,$$

tedy zvolíme  $\frac{1}{\delta} = \sqrt[a]{\varepsilon}$ , načež pro všechna  $x \in P(\infty, \delta)$  máme  $|x^a + 0| < \varepsilon$ .

**Úloha 1** [2b]: *Spočtěte z definice (tedy ne z aritmetiky limit, kterou popisujeme*



Obrázek 39: Funkce  $x^a$ , pro  $a = -0.5$ , tj. funkce  $\frac{1}{\sqrt{x}}$

dál v textu) limity (pro kladné celé  $a$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^a.$$

**Aritmetika limit (AL):** Počítat všechny limity z definice by občas bylo velmi zdlouhavé, proto se nám hodí různá pozorování, co o limitech platí. Prvním takovým pozorováním je, že můžete „prohazovat“ aritmetické operace. Tedy pro libovolné funkce  $f, g$  a libovolný reálný nebo nekonečný bod  $*$  platí (tzv. aritmetika limit)

$$\lim_{x \rightarrow *}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow *} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow *} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow *}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow *} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow *} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow *} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow *} f(x)}{\lim_{x \rightarrow *} g(x)},$$

pokud je pravá strana definována; tj. neplatí, že pokud je výraz vpravo nedefinován, tak limita neexistuje. (Na tuto podmínku je třeba nezapomínat. My jsme si říkali, že některé výrazy s nekonečny a dělení nulou nejsou definované, tak to je přesně kvůli tomuto, kde když násobíme funkci rychle rostoucí k  $+\infty$  a funkci pomalu klesající k 0, tak nám má vyjít  $0 \cdot \infty = +\infty$ , kdežto opačně (pomalu rostoucí a rychle klesající) by mělo vyjít  $0 \cdot \infty = 0$ .)

**Úloha 2** [2b]: *Energie potřebná k odletu člověka o hmotnosti 65 kg ze Země<sup>16</sup> do vzdálenosti  $x$  (pro jednoduchost počítejme vzdálenost od středu Země) se spočítá jako (integrál, neboli součet, který vyjde)*

$$E(x) = \kappa \cdot M_Z \cdot m \left( \frac{1}{R_Z} - \frac{1}{x} \right) \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 65 \cdot \left( \frac{1}{6.378 \cdot 10^6} - \frac{1}{x} \right).$$

Jelikož se tato energie s rostoucí vzdáleností zvětšuje, můžeme energii potřebnou na odlet kamkoliv spočítat jako  $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x)$ . Spočítejte tuto hodnotu. Výsledek můžete porovnat s hodnotou  $E_k = \frac{1}{2} \cdot 65 \cdot 11186^2 \approx 4 \cdot 10^9$ , spočítanou z únikové rychlosti.<sup>17</sup>

<sup>16</sup>Zanedbejme vše ostatní, včetně rakety, paliva a hlavně Slunce, čímž jsme se naprosto vzdálili od reality, ale stejně tak bychom mohli spočítat energii pro odlet od Slunce, Galaxie, ...

<sup>17</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Anikov%C3%A11\\_rychlost](https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Anikov%C3%A11_rychlost)



**Spojitosť (Spoj.):** Také už jsme se tu zmínili o spojitých funkcích a o tom, že jsou nějakým způsobem hezké. Funkce je spojitá v bodě  $x_0$ , pokud se její limita v tomto bodě rovná její funkční hodnotě v  $x_0$ . (Neboli, že pokud se někam „blíží“, tak tam i „je“.)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Pokud je funkce spojitá ve všech bodech nějaké množiny (např. intervalu), tak říkáme, že je spojitá na té množině. Funkci, která je spojitá všude, říkáme spojitá funkce. Jeden z důvodů, proč se nám spojitě funkce líbí, je ten, že pokud máme limitu ze spojitě funkce (a z něčeho dalšího, takže často musíme použít aritmetiku limit), tak místo limity můžeme použít funkční hodnotu v daném bodě. Navíc spojitě jsou všechny často potkávané funkce (mocnina, odmocnina, sinus, kosinus, tangens ve svém definičním oboru, atd.) a součtem, rozdílem, součinem a podílem (s nenulovým jmenovatelem) dostaneme zase spojitou funkci, takže např:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x^4 + (x-4)^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x-2}} \stackrel{\text{Spoj.}}{=} \frac{3\sqrt{3^4 + (3-1)^2 + 1}}{3^2 - \sqrt{3-2}} = \frac{27 + 4 + 1}{9 - 1} = 4$$

**Běžné úpravy (BŮ):** Jelikož nás zajímá funkční hodnota pouze na *prstencovém* okolí, tak můžeme dělat úpravy jako rozšiřování a krácení i s výrazy, které v bodě, kde hledáme limitu, jsou 0,  $\pm\infty$ , nebo z nějakého důvodu nedefinované (ale v jeho nějakém prstencovém okolí už ano!):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} \stackrel{\text{BŮ}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[5]{3}} \frac{x^{10} - 9}{x^5 - 3} = \lim_{x \rightarrow \sqrt[5]{3}} \frac{(x^5 - 3)(x^5 + 3)}{x^5 - 3} \stackrel{\text{BŮ}}{=} \lim_{x \rightarrow \sqrt[5]{3}} x^5 + 3 = 6,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}^2 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \stackrel{\text{BŮ}}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{BŮ}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \stackrel{\text{Spoj.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 3x^2 + x}{7x^3 + 5x^5 - 2} \stackrel{\text{BŮ}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 3x^2 + x}{7x^3 + 5x^5 - 2} \cdot \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 3 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{7 \cdot \frac{1}{x^2} + 5 - 2 \cdot \frac{1}{x^5}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{6 + 3 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{7 \cdot \frac{1}{x^2} + 5 - 2 \cdot \frac{1}{x^5}}$$

$$\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{6 + 3 \cdot \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{7 \cdot \frac{1}{\infty} + 5 - 2 \cdot \frac{1}{\infty}} = \frac{6 + 3 \cdot 0 + 0}{7 \cdot 0 + 5 - 2 \cdot 0} = \frac{6}{5}.$$

**Úloha 3** [7b]: *Spočítejte následující limity a odůvodněte veškeré úpravy, dosažení apod. (hint:  $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$ ):*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + 2x^3}{3x + 10x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^5 + 2x^2}{x^2 + 5x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \pi} - x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x - 3} + 1}{(x - 4)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27} - 3}{x}.$$

**Mizející krát omezená ( $0 \cdot C$ ):** Dvě další tvrzení se týkají toho, když umíme funkci nějak odhadnout: první (mizející krát omezená) říká, že pokud je funkce  $f$  omezená (tj. umíme najít  $K \in \mathbb{R}$  tak, že  $|f(x)| < K$ ) na nějakém okolí bodu, kde hledáme limitu, a funkce  $g$  má v tomto bodě limitu nula, tak  $f \cdot g$  má v tomto bodě také limitu 0. Například

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin(x) \stackrel{0 \cdot C}{=} 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{0 \cdot C}{=} 0.$$

**O dvou strážnících (strážníci):** Druhé tvrzení (o dvou strážnících) říká, že když umíme funkci  $f$  ohraničit (na nějakém okolí vyšetřovaného bodu) dvěma jinými, které mají obě stejnou limitu, pak  $f$  má taktéž tuto limitu.<sup>18</sup> Například  $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$  umíme sevřít mezi  $\sqrt[n]{3^n} = 3$  a  $\sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt{2} \cdot 3^{n/2} = 3 \sqrt{2}$ , kde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} = 1$  je jedna ze známých limit, tedy  $\sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$ . Pokud je limita  $+\infty$  respektive  $-\infty$ , tak nám dokonce stačí jen spodní resp. horní odhad:  $x^2 + 100 \sin(x)$  umíme zespodu odhadnout  $x^2 - 100$ , tedy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 100 \sin(x) \stackrel{\text{strážníci}}{=} +\infty.$$

**Úloha 4** [4b]: *Spočítejte následující limity (a zdůvodněte správnost výpočtu):*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 - x^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 + x^2 \sin(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n}.$$

<sup>18</sup>Tj. pokud pro nějaké  $\delta > 0$  je  $\forall x \in P(x_0, \delta) : g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$  a navíc platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = L$ , pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

**Věta o limitě složené funkce (VoLSF):** Někdy se nám může stát, že máme nějakou spojitou funkci (například odmocninu), kterou budeme označovat jako vnější funkci, a v té máme něco velmi složitého, což budeme označovat jako vnitřní funkci. Potom se nám může hodit, že pro spočítání limity můžeme spočítat nejprve limitu vnitřní funkce a následně tuto limitu dosadit do vnější funkce. Například

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^5 + x^2 - x^3}{3x^4 + 7x^5}} &\stackrel{\text{VoLSF}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + x^2 - x^3}{3x^4 + 7x^5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + x^{-3} - x^{-2}}{3x^{-1} + 7}} \stackrel{\text{AL}}{=} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-3} - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 7}} = \sqrt{\frac{4 + 0 - 0}{3 \cdot 0 + 7}} = \sqrt{\frac{4}{7}}. \end{aligned}$$

Toto ale opravdu vyžaduje, aby byla vnější funkce spojitá v hodnotě limity vnitřní funkce. Limity ale často mohou být nekonečno a běžně se uvažuje, že v nekonečnu funkce nedefinujeme, takže tam nemohou být ani spojitě. Pak se můžeme podívat na vnitřní funkci, a pokud své limity nenabývá (nekonečna jistě nenabývá nikdy), tak můžeme „dosadit“ limitu vnitřní funkce do vnější, tedy počítat limitu pro vnější funkci jdoucí k limitě vnitřní funkce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 1} \stackrel{\text{VoLSF}}{=} \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 1} \sqrt{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty.$$

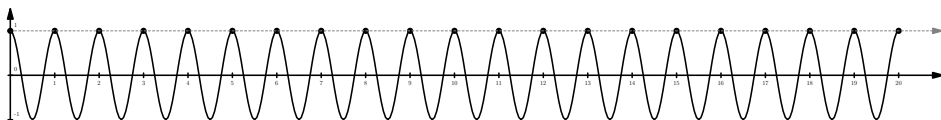
**Heineho věta:** Celou dobu jsme počítali s  $x$ , přestože jsme říkali, že limitu můžeme zavést i pro  $n$ . Ono je to jednoduché. Pokud platí, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , pak i  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = A$ . Dokonce obecněji, pokud si vezmeme libovolnou posloupnost  $a$  tak, aby  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = *$ , pak  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = A$  implikuje  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = A$ . Toho se dá využít, když dokazujeme, že limita neexistuje: např.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  neexistuje, jelikož pro posloupnosti  $a_n = \pi + 2n\pi$  a  $b_n = 3\pi + 2n\pi$  jsou limity původní funkce:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi + 2n\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(3\pi + 2n\pi).$$

Opačně to také funguje, ale musíme říct, že pro každou posloupnost  $a$  je  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = A$ , což z tohoto dělá téměř nepoužitelné tvrzení. Můžeme si všimnout, že kdybychom neřekli pro každou, tak vyjde  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(2x\pi) = 1$ , protože  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2n\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$  přestože  $\cos(2x\pi)$  očividně limitu nemá, což je také důvod, proč musíme rozlišovat, jestli je limita přes reálná čísla, nebo pouze přes přirozená.

**Úloha 5 [2b]:** *Dokažte, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x)$  neexistuje.*

**Dělení nulou:** V prvním díle bylo zmíněno, že si nemůžeme jednoduše obecně definovat  $\frac{1}{0}$ . V limitách je tomu totiž hezké přiblížení  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  a taková limita



**Obrázek 40:**  $\cos(2x\pi)$  (sinusoida bez limity) a  $\cos(2n\pi)$  (jednotlivé body s limitou 1)

není definována, protože když si vezmeme posloupnosti  $a_n = \frac{1}{n}$  a  $b_n = -\frac{1}{n}$ , tak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , tedy  $a$  i  $b$  můžeme „dosadit“ za  $x$ , ale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \neq -\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n}.$$

Co však můžeme, můžeme říct, že  $\frac{1}{0}$  je  $+\infty$ , když se k nule blížíme z kladného směru (a značit si to třeba  $\frac{1}{0^+} = +\infty$ ) a obdobně ze záporného. Potom opravdu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Tím jsme se dostali až na konec tohoto dlouhého a dosti obtížného dílu. Příště se podíváme na obdobný problém, a to, když nás nezajímá jenom limita posloupnosti, ale také její součet (až do nekonečna). Také se můžete těšit na vzorová řešení minulého dílu.

*Jidáš; jonas.havelka@volny.cz*

*e-mailová konference: nekonecna@mam.mff.cuni.cz*

*odevzdávejte do odevzdávátka*

## Téma 6 – Růst monokrystalů

I v tomto čísle budeme pokračovat ve studiu růstu krystalů z roztoku. Problémy zůstávají stejné jako v minulém čísle, na základě vašich došlých řešení a ústních konzultací přinášíme navíc několik návrhů a modifikací růstu:

- Pokud jste rostli sůl, vyzkoušejte kamenec. Dá vám podstatně snadněji podstatně větší krystaly. Půlkilové balení kamence stojí asi 50 Kč, případně se domluvíte s Františkem Zajícem na níže uvedeném mailu na předání.
- Když připravujete nasycený roztok, nalijte vodu a nasypete materiál do (pečlivě vymyté) sklenice od majonézy, se kterou budete trást po dobu asi dvou dní pokaždé, když kolem ní půjdete. Roztok se zbytky materiálu potom přefiltrujte přes filtrační papír.
- Pokud sháníte filtrační papír nebo modrou skalici, zkuste oslovit svého/svou učitele/učitelku chemie. Filtračních papírů i modré skalice mají přešřel. Pokud jim ukážete zadání M&Mka, rádi vám část zásob věnují.

- Dbejte na čistotu. Případné zakalení krystalu je skoro vždy způsobeno nečistotami buď v materiálu nebo ve vodě. Pokud vám rostou zakalené krystaly, pravděpodobně máte doma příliš tvrdou vodu; zkuste destilovanou.
- Při růstu nezapomeňte dbát na stálou teplotu. Mělo by stačit zavřít sklenici, ve které rostete krystaly, do skříňky daleko od topení.
- Pokud se vám povedlo vyrůst malé krystalky, pokračujte! Použijte malé krystaly jakožto zárodek těch větších.
- Pokud se chcete přidržet soli jakožto hlavního materiálu, pro dosažení větších a hezčích krystalů by vám mohly pomoci tyto dva články.<sup>19</sup> Pokud vám články pomohou, nezapomeňte je zmínit ve vašem řešení. Nezapomeňte také použít čistou sůl bez obsahu jódu!

Ať rostou!

**UPOZORNĚNÍ:** Příprava krystalů je časově velmi náročná, není tedy dobrý nápad pustit se do úloh těsně před deadline.

**Problém 1 (28.2):** *Monokrystaly se kromě studia vlastností materiálů používají i v praxi. Najdi nějaký příklad, kde se monokrystaly používají, a napiš nám o tom. Napiš, jaký materiál se používá, jaký je jeho účel a proč je potřeba, aby byl monokrystalický. Proč nám nestačí polykrystal?*

**Problém 2 (28.2):** *Zajímá tě, jak ještě jinak lze monokrystaly připravovat? Zkus najít na internetu nebo v učebnici nějakou metodu přípravy monokrystalů a sepiš nám o ní článek, který si potom budou moci přečíst ostatní řešitelé! Napiš, jak příprava probíhá, jaké materiály se touto metodou připravují a jaké to má výhody či nevýhody.*

**Velký problém 3 (28.2):** *Zkuste vyrůst co největší krystal z roztoku!*

Máme pro vás několik rad:

### 1. Materiál

Volba materiálu je na vás, doporučujeme ale tyto tři materiály: kuchyňská sůl (NaCl), modrá skalice ( $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ ) a síran draselno-hlinitý (kamenec,  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ ), které se všechny rozpouští ve vodě. Modrá skalice se používá v zemědělství a čištění bazénů, síran draselno-hlinitý v potravinářství. Buď tyto materiály máte doma, nebo se dají koupit, nebo doporučujeme poprosit vašeho učitele nebo učitelku chemie. Zejména pokud budete připravovat krystaly ve vaší škole, věříme, že vám rádi vyjdou vstříc. Sůl použijte, pokud nemáte k dispozici nic jiného. Modrá skalice tvoří lepší a větší krystaly a síran draselno-hlinitý roste úplně nejlépe.

<sup>19</sup><https://crystalverse.com/sodium-chloride-crystals>  
<https://hackaday.com/2021/11/20/the-sodium-chloride-crystal-method>

## 2. Nasycený roztok

Není nasycený roztok jako nasycený roztok. Pro nejlepší výsledky je potřeba zajistit, aby byl roztok skutečně nasycený – tedy aby se v něm již opravdu žádné další množství látky nemohlo rozpustit. Takový roztok připravíte rozpouštěním a pravidelným mícháním roztoku s množstvím nerozpuštěného materiálu alespoň po dva dny. Po dvou dnech nasycený roztok přelijte do sklenice (ve které pak bude probíhat krystalizace) tak, aby v něm nebyla přítomna žádná nerozpuštěná látka. Lze použít například překapávací kávové filtry.

## 3. Kolísání teploty

Jistě ze školy víte, že rozpustnost závisí na teplotě rozpouštědla. I střídání teplot mezi dnem a nocí vám může způsobit prudkou krystalizaci a tedy vytvoření polykrystalu nebo zakalených krystalů. Doporučujeme proto dát nádobku s roztokem na nějaké místo, kde je teplota stálá. Nabízí se buď sklep, nebo uzavřená skříňka, dveře skříňky jsou dostatečná izolace.

## 4. Vibrace a otřesy

Potřebujete docílit stálých podmínek. Dejte si pozor, abyste neměli nádobu položenou třeba na ledniče nebo někde, kde lidé často chodí.

## 5. Trpělivost

Růst krystalu je velmi pomalý a obvykle platí, čím pomaleji a přirozeněji roste, tím větší a hezčí kousky nakonec získáte. Takže buďte hlavně trpěliví a dejte krystalům potřebný čas na růst. Nerušte je, poradí si samy!

## 6. Jak vypadá správný krystal?

Ideální výsledek je alespoň několik milimetrů (ještě lépe centimetrů) velký, průhledný krystal. Pokud budete mít hezký krystal, schovejte si ho, až to situace dovolí, zkusíme o něm něco zjistit na témátkové víkendovce.

*Faník; [fandazajic@gmail.com](mailto:fandazajic@gmail.com)*

*e-mailová konference: [krystaly@mam.mff.cuni.cz](mailto:krystaly@mam.mff.cuni.cz)*

*odevzdávejte do odevzdávátka*

## Průběžné výsledky

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata					$\sum_0$	$\sum_1$
				1	2	3	4	5		
1.	Mgr. <sup>MM</sup> P. Šimová	1	55,7	38,5		17,2			55,7	55,7
2.	Dr. <sup>MM</sup> V. Tichý	2	161,6	10,0	5,0	6,0		8,0	29,0	47,9
3.	Doc. <sup>MM</sup> M. Fof	4	257,3	27,5		9,4			36,9	45,9
4.	Dr. <sup>MM</sup> J. Kvapil	4	98,7		7,0				7,0	44,2
5.	Mgr. <sup>MM</sup> A. Opl	4	81,3							42,0
6.	Mgr. <sup>MM</sup> K. Petrlíková	4	87,6							39,1
7.	Bc. <sup>MM</sup> J. Polách	3	38,8	2,0					2,0	38,8
8.	Bc. <sup>MM</sup> Z. Mareš	3	35,6	3,0		9,0			12,0	35,6
9.	Mgr. <sup>MM</sup> D. Skýpala	4	66,5		10,5				10,5	33,4
10.	Bc. <sup>MM</sup> J. Škopek	3	31,5	16,7		8,9			25,6	31,5
11.–12.	Dr. <sup>MM</sup> D. Čtvrtečka	2	128,1					23,0	23,0	30,9
	Dr. <sup>MM</sup> T. Flídr	4	133,8		2,0	4,4		8,0	14,4	30,9
13.	Bc. <sup>MM</sup> A. Kolník	3	24,0		12,0				12,0	24,0
14.	Dr. <sup>MM</sup> J. Knillová	3	106,1	10,0		6,3	2,0		18,3	18,3
15.	Bc. <sup>MM</sup> P. Jendele	3	30,1			1,0			1,0	17,8
16.	Mgr. <sup>MM</sup> P. Hladík	4	60,1					7,0	7,0	17,1
17.–18.	Bc. <sup>MM</sup> M. Chrostek	2	24,5							17,0
	Bc. <sup>MM</sup> J. Křimská	3	27,0			6,5			6,5	17,0
19.	Bc. <sup>MM</sup> V. Polášková	3	45,9			3,9			3,9	16,4
20.	J. Krejčí	2	15,8							15,8
21.	J. Rypl	3	15,6							15,6
22.	O. Popovský	2	15,3							15,3
23.	Mgr. <sup>MM</sup> M. Boček	3	72,5							13,4
24.	V. Faltus	2	12,3							12,3
25.	R. Novák	2	12,2							12,2
26.	M. Smrčka	2	11,6							11,6
27.	Dr. <sup>MM</sup> O. Piroutek	4	104,9							10,5
28.	L. Vávra	3	9,2					1,0	1,0	9,2
29.–30.	M. Haikl	3	7,5							7,5
	Bc. <sup>MM</sup> M. Vícha	3	19,9							7,5
31.	Mgr. <sup>MM</sup> V. Jůzková	4	58,2			0,8			0,8	7,3
32.	Bc. <sup>MM</sup> M. Valtrová	3	43,2	6,0					6,0	6,0
33.	V. Verner	1	4,0	2,5					2,5	4,0

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata					$\sum_0$	$\sum_1$
				1	2	3	4	5		
34.	J. Tregler	2	3,9							3,9
35.	M. Steinhauserová	Z8	3,5	0,0					0,0	3,5
36.	R. Zábranská	1	3,2			1,0			1,0	3,2
37.	R. Mayerová	Z9	3,0							3,0
38.	L. Poljaková	2	1,4							1,4

Sloupeček  $\sum_{-1}$  je součet všech bodů získaných v našem semináři,  $\sum_0$  je součet bodů v aktuální sérii a  $\sum_1$  součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina obsahuje všechny body za řešení zasláná do 1. deadlinu předchozí série. Body za řešení zasláná později obsahovat nemusí.

Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M.

## Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK E-mail: [mam@matfyz.cz](mailto:mam@matfyz.cz)  
 Ke Karlovu 3 Web: [mam.matfyz.cz](http://mam.matfyz.cz)  
 121 16 Praha 2 FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

