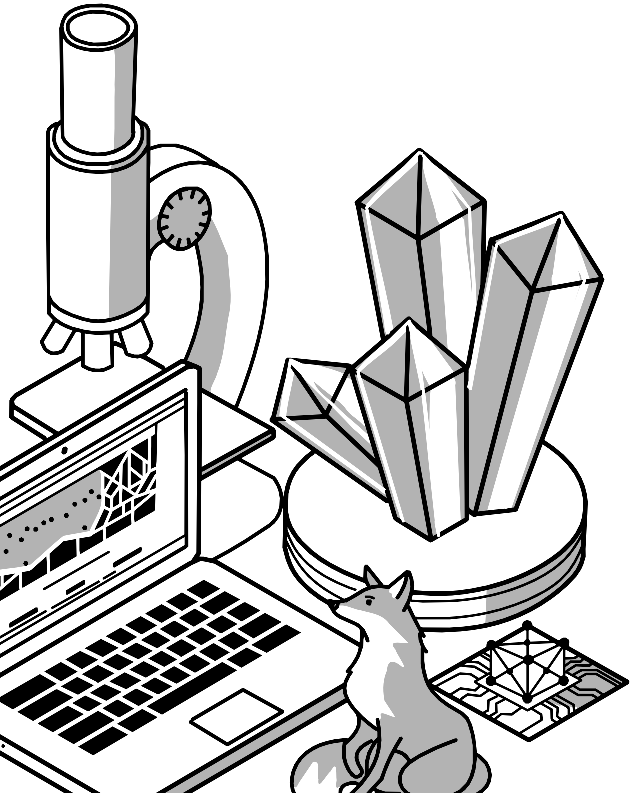
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVIII
Číslo 2

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milý čtenáři,

v rukou držíš již druhé číslo korespondenčního semináře M&M. Pokud jsi nový a nikdy jsi žádný korespondenční seminář neřešil, nevíš si tedy rady co a jak, podívej se na `mam.mff.cuni.cz/jak-resit`. Udělej to co nejdříve, ať na to nezapomeneš. Řešit se určitě vyplatí.

Své si v každém případě najdeš. Letos můžeš prozkoumávat krásy *Nekonečen, Elektrických sítí, Lingvistiky,* hry *Oware, Pozoruhodných atmosférických jevů* a nakonec i nového tématka s názvem *Růst monokrystalů.*

Stalo se a stane se! Skončily prázdniny a to i dokonce nám, univerzitním studentům. Během nich jsme nezaháleli. První řešení nám tak již přišla skrze nový web. Líbí se vám? Už jste ho celý prošmejdili? Prošli jste každou stránku? Možná něco skrývá? Poklad? Šifru? Milostné básně z dávných dob? Či snad jen pohledné obrázky vašich orgů?

Co ale víme určitě, je, že někteří z vás už vybojovali svou první ponožku. Nezbývá než pogratulovat a pobídnout k dalšímu snažení, aby vám do schránky došly i další.

A když už jsme u toho posílání, nebojte se sepsat i nějaký ten článek. Není to zas tak pracné a ani těžké. Pokud byste nevěděli, jak na to, určitě se nebojte a podívejte se na `mam.mff.cuni.cz/jak-resit/jak-psat-clanek/`. Odměna určitě stojí za to. Respekt, sláva, čest, a nakonec i ty povrchní a světské body.

A nejenom ty můžete získat. Nové tématko o růstu monokrystalů nejenže otevírá cestu k domácímu pěstování rubínů, ale také i k možnosti zúčastnit se víkendovky konající se 19. až 21. listopadu. Míst ale není neomezeně, je tedy potřeba aktivně řešit.

Závěrem bychom vám rádi připomněli staré turecké přísloví, které praví:

> „Kdo své myšlenky zapíše, ten je bude mít zapsané.“

Vaši organizátoři

Obsah

Zadání a řešení témat

1. deadline: 9. 11. 2021 | 2. deadline: 7. 12. 2021

Téma 1 – Elektrické sítě

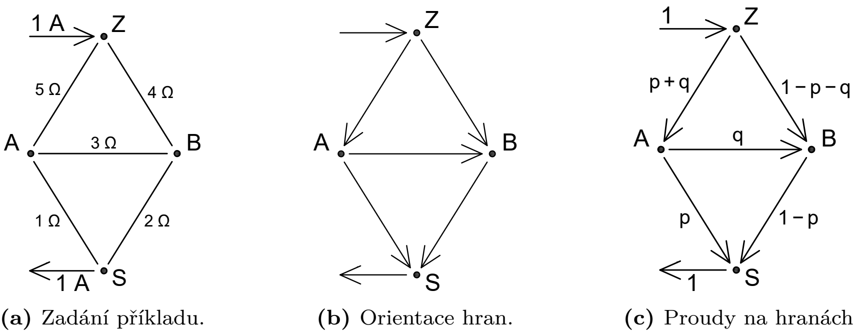
Nejdříve si uvedeme řešení úloh dílu minulého, kde jsme se naučili určovat proudy v sítích a díky tomu také celkový odpor dané sítě. V tomto díle se pak zaměříme na mírně teoretičtější témata, chytrým použitím koster si ukážeme, že určení proudů v síti je jednoznačné a pro souvislé sítě vždy existuje. Z toho vyplyne zajímavý teoretický důsledek o racionalitě, který se nám bude hodit příště. Nakonec zkusíme nahrazovat části sítě jinými, či stříhat nebo „scucávat" jednotlivé hrany.

Vzorová řešení 1. dílu

Úloha 1

Zadání:
Zkusíme si vypočítat, jaký odpor je mezi Z a S v grafu na obrázku 1a, když touto sítí prochází celkový proud 1 *A a mezi vrcholy jsou rezistory o odporu 1, 2, 3, 4 a 5* Ω*.*

Rozmyslete si, proč jsou hrany zorientovány právě tak, jako na obrázku 1b. Mohli bychom je zorientovat i jinak? Napište nám, proč ne, nebo uveďte jinou orientaci. Pokud zjistíte, že ano, zkuste si příklad vypočítat s touto orientací. Vyjde vám výsledek stejně?

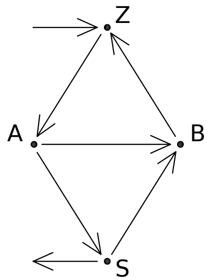


(a) Zadání příkladu. **(b)** Orientace hran. **(c)** Proudy na hranách.

Obrázek 1: Počítání odporů.

Řešení od Mgr.^{MM} Aleše Opla:

Ano, hrany můžeme orientovat naprosto libovolně. Výhoda uvedené orientace je v tom, že hrany jsou vždy orientovány z bodu s vyšším potenciálem do bodu s nižším potenciálem, v čehož důsledku nám s takovouto orientací vyjdou na všech hranách kladné proudy. Nic nám však nebrání v tom, abychom některé hrany orientovali opačně. Poté nám na nich sice vyjde záporný proud, ale na tom není nic špatného, neboť to pouze značí fakt, že proud teče opačně proti orientaci hrany. Například tedy můžeme použít takovouto orientaci *(viz obrázek 2).*



Obrázek 2: K úloze 1.

Myslím si, že co se týče odporů a potenciálů vrcholů, tak bychom měli dostat stejné výsledky. Jediné, co by se mělo lišit, je znaménko u proudů na hranách SB a BZ.

Z posledního pozorování lze odvodit tvrzení, že proudy na hranách jsou v dané síti určeny jednoznačně. Důkaz tvrzení si ukážeme právě v tomto dílu tématka.

Minule jsme si zavedli značení a doplnili proudy, čímž jsme získali obrázek 1c. Začali jsme počítat potenciály pomocí Ohmova zákona.

Úloha 2

Zadání:
Napište rovnice dle Ohmova zákona pro síť z obrázku 1a, dopočítejte potenciály jednotlivých vrcholů (nejprve si je vyjádřete pomocí p a q) a celkový odpor sítě. (Nápověda: Máme 5 neznámých včetně p a q a 5 rovnic, tedy úlohu lze jednoznačně vyřešit. Abyste spočetli potenciály vrcholů, musíte nejdříve vypočítat p a q. Nápovědu k výpočtu celkového odporu naleznete v zamyšlení výše.)

Řešení:
Všechny rovnice dle Ohmova zákona:

$$
\begin{aligned}
\varphi_A - \varphi_S &= 1\ \Omega \cdot p \\
\varphi_B - \varphi_S &= 2\ \Omega \cdot (1 - p) \\
\varphi_A - \varphi_B &= 3\ \Omega \cdot q \\
\varphi_Z - \varphi_A &= 5\ \Omega \cdot (p + q) \\
\varphi_Z - \varphi_B &= 4\ \Omega \cdot (1 - p - q)
\end{aligned}
$$

Soustavu můžeme řešit například takto: $\varphi_A = p + \varphi_S$ (z 1. rovnice) a $\varphi_B = 2 - 2p + \varphi_S$ (z 2. rovnice) dosadíme do 3. rovnice následovně:

$$(p + \varphi_S) - (2 - 2p + \varphi_S) = 3q$$

$$3p - 2 = 3q$$

Dále můžeme vyjádřit φ_Z jako $\varphi_Z = 5p + 5q + \varphi_A$ a $\varphi_Z = 4 - 4p - 4q + \varphi_B$ (ze 4. a 5. rovnice). Zkombinováním dostaneme

$$5p + 5q + \varphi_A = 4 - 4p - 4q + \varphi_B$$

a pokud opět použijeme vyjádření φ_A a φ_B z prvních dvou rovnic, můžeme dosadit

$$5p + 5q + (p + \varphi_S) = 4 - 4p - 4q + (2 - 2p + \varphi_S)$$

a po úpravách

$$4p - 2 = 3q.$$

Nyní máme 2 rovnice o 2 neznámých, kde nám vyjde $p = \frac{4}{7}$ a $q = -\frac{2}{21}$. Potenciál φ_S si zvolíme 0 a zbytek dopočítáme, tedy $\varphi_A = \frac{4}{7}$, $\varphi_B = \frac{6}{7}$ a $\varphi_Z = \frac{62}{21}$. Celkový odpor sítě vypočteme dle rovnice

$$R = \frac{\varphi_Z - \varphi_S}{I} = \frac{\frac{62}{21} - 0}{1} = \frac{62}{21}\ \Omega.$$

Úloha 3

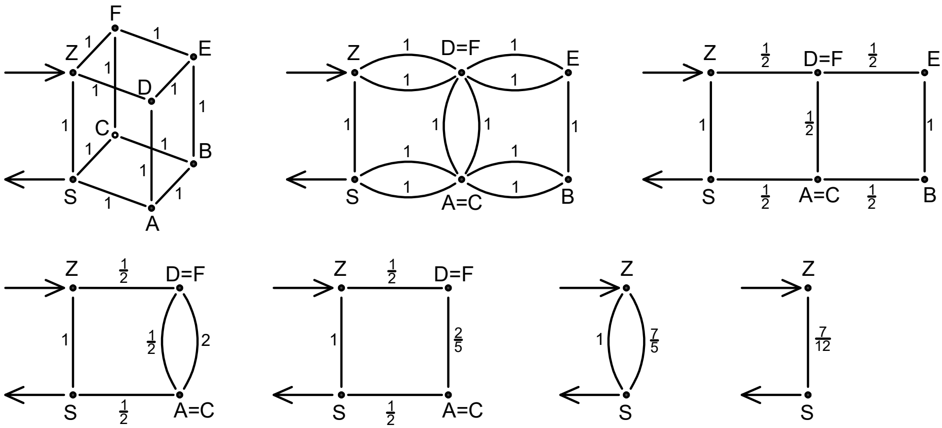
Zadání:
Doplňte do každé části obrázku odpory na jednotlivé hrany odpovídající danému kroku výpočtu. Připomínáme, že v první části (před sloučením vrcholů) je na každé hraně odpor 1 Ω.

Řešení:
Viz obrázek 3.

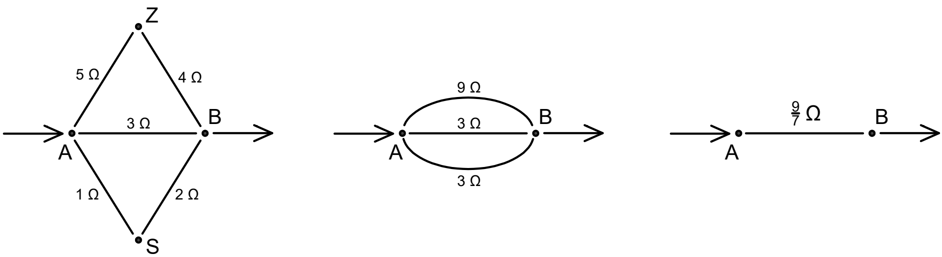
Úloha 4

Zadání:
Vraťte se k obrázku 1a a s nově nabytými znalostmi vypočítejte odpor mezi vrcholy A a B. Uvažujte A jako zdroj a B jako stok, proud procházející sítí je 1 A.

Řešení:
Sériové odpory na hranách AZ a ZB můžeme sloučit do jednoho odporu velikosti 9 Ω, stejně tak můžeme sloučit odpory na hranách AS a SB do odporu velikosti 3 Ω. Následně spočítáme výsledný odpor pomocí vzorce pro paralelní odpory jako $\frac{1}{R} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ neboli $R = \frac{9}{7}$ Ω.



Obrázek 3: Výpočet odporu v krychli – úloha 3.



Obrázek 4: K úloze 4.

Úloha 5

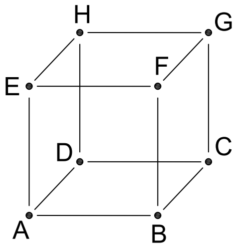
Zadání:
Vypočítejte odpor mezi každou dvojicí vrcholů v krychli. Každá hrana má odpor 1 Ω.

Řešení:
Pojďme si rozebrat jednotlivé případy dvojice vrcholů, které si můžeme vybrat. Zvolíme si výchozí vrchol A. Vrcholy mohou:

a) být sousední na stejné stěně (vrcholy B, D a E),

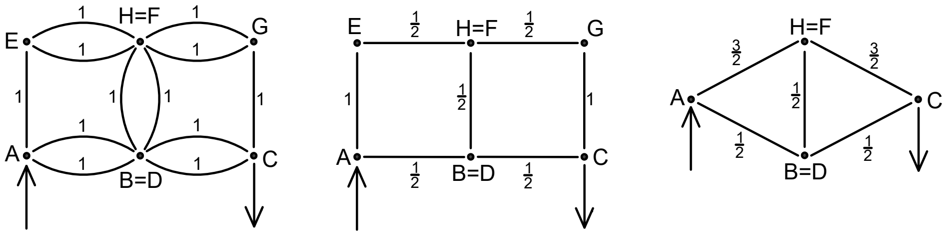
b) být na stejné stěně a nebýt sousední (neboli jsou to krajní body stěnové úhlopříčky, vrcholy C, F a H),

c) nebýt na stejné stěně (což znamená, že jsou krajní body tělesové úhlopříčky, vrchol G).



Obrázek 5: Nákres k úloze 5.

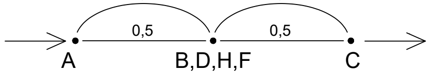
Máme tedy jen 3 různé případy dvojic, které musíme vypočítat. Případ a) jsme si již vypočítali v předchozí úloze, výsledek je $\frac{7}{12}$ Ω. Případ b) zredukujeme dle obrázku 6 – vrcholy BD a FH tvoří dvě osy souměrnosti. Dále použijeme vzorec pro paralelní a sériové zapojení a vznikne nám síť, kterou známe již z úlohy 1. Tu pak dopočítáme klasickým způsobem. Výsledné potenciály jsou $\varphi_{EFHG} = \varphi_{BD} = \frac{3}{8}$, $\varphi_A = \frac{6}{8}$ a φ_C jsme si zvolili rovno nule. Odpor mezi těmito vrcholy je roven $R = \frac{6}{8}$ Ω.



Obrázek 6: K úloze 5, případ b).

Poslední síť lze také řešit transformací trojúhelník-hvězda, kde se jeden z trojúhelníků změní na hvězdu s odpory $\frac{3}{10}$ Ω, $\frac{3}{10}$ Ω a $\frac{1}{10}$ Ω.

Mgr.[MM] Aleš Opl hezky popsal možný trik se stejnými potenciály. (Značení v řešení je upraveno, aby odpovídalo našemu.)



Obrázek 7: K úloze 5, případ b), odstranění hrany.

Řešení od Mgr.[MM] Aleše Opla:

Nyní si můžeme všimnout, že obvod je symetrický podle osy procházející body B a F, tudíž mají tyto body stejný potenciál, a tak je můžeme spojit do jednoho bodu *(obrázek 7)*.

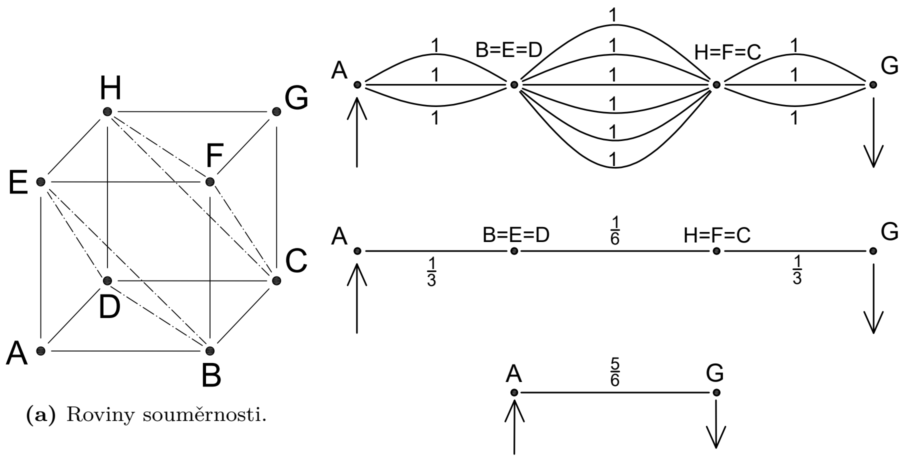
Nyní už nám tedy stačí jen spočítat, jaký je odpor paralelního zapojení, a poté dvou za sebou sériově zapojených těchto odporů.

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{1.5\ \Omega} + \frac{1}{0.5\ \Omega} \rightarrow R_P = \frac{3}{8}\ \Omega$$

$$R_S = R_P + R_P = \frac{3}{4}\ \Omega$$

Což je tedy náš výsledek.

Pro případ c) si uvědomíme, že vrcholy BDE (dle obrázku 8a) tvoří jednu rovinu souměrnosti (nebo můžeme mluvit o 3 jednotlivých osách souměrnosti) a vrcholy CFH tvoří další rovinu souměrnosti. Tedy síť krychle si můžeme zjednodušit, viz obrázek 8b. Výsledný odpor je $\frac{5}{6}$ Ω.



(a) Roviny souměrnosti.

(b) Zjednodušení sítě.

Obrázek 8: K úloze 5 c).

Úloha 7

Zadání:

Odvoďte vzorce pro výpočet odporů hvězdy (a, b, c) z odporů trojúhelníku $(a'$, b', $c')$. Neboli vyjádřete a, b, c pomocí a', b', c'.

Řešení od Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Polácha:

Tyto vzorce jsou uvedeny v zadání:

$$\begin{aligned} s &= ab + bc + cb \\ a' &= \frac{s}{a} \\ b' &= \frac{s}{b} \\ c' &= \frac{s}{c} \end{aligned}$$

Zavedeme R_{AB} jako odpor mezi body A, B. Z hvězdového zapojení vyplývá

$$R_{AB} = a + b.$$

A z trojúhelníkového

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{c'} + \frac{1}{a'+b'}}.$$

Spojením těchto vzorců dostaneme

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{1}{\frac{1}{c'} + \frac{1}{a'+b'}} \\ a + b &= \frac{1}{\frac{a'+b'+c'}{c'(a'+b')}} \\ a + b &= \frac{c'(a'+b')}{a'+b'+c'}. \end{aligned} \tag{1}$$

Obdobně můžeme odvodit vztah pro R_{BC} a R_{CA}

$$\begin{aligned} R_{AB} - b &= a \\ R_{Bc} - c &= b \\ R_{AB} - a &= c. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} a &= R_{AB} - R_{BC} + R_{CA} - a \\ 2a &= R_{AB} - R_{BC} + R_{CA} \\ a &= \frac{R_{AB} - R_{BC} + R_{CA}}{2} \\ a &= \frac{\frac{c'a'+c'b'-a'b'-a'c'+a'b'+b'c'}{a'+b'+c'}}{2} \\ a &= \frac{2c'b'}{2(a'+b'+c')} \\ a &= \frac{c'b'}{a'+b'+c'}. \end{aligned}$$

Stejným způsobem můžeme odvodit i vzorec pro b a c.

$$b = \frac{a'c'}{a' + b' + c'}$$

$$c = \frac{a'b'}{a' + b' + c'}.$$

K rovnici (1) pro součet $a+b$ se dalo dospět také fyzikální úvahou, jak popsala Mgr.[MM] Kristýna Petrlíková.

Výběr z řešení Mgr.[MM] Kristýny Petrlíkové:

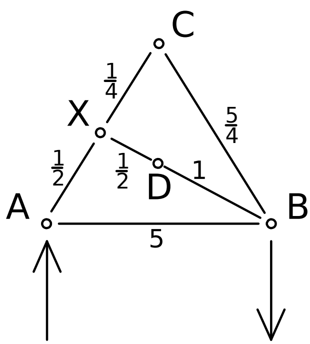
Chceme, aby se odpor mezi body A, B (a symetricky pro ostatní dvojice okrajových vrcholů) v hvězdě rovnal odporu na trojúhelníku.

Na hvězdě se tento odpor rovná $a + b$.

V trojúhelníku vedou mezi A a B dva paralelní odpory: $(b' + a')$ a c', což se dá zjednodušit na $\frac{b'c'+a'c'}{a'+b'+c'}$. Odpory ve hvězdě a v trojúhelníku takto položíme rovné pro všechny možné dvojice bodů:

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{b'c' + a'c'}{a' + b' + c'} \\ a + c &= \frac{b'c' + a'b'}{a' + b' + c'} \\ b + c &= \frac{a'c' + a'b'}{a' + b' + c'}. \end{aligned}$$

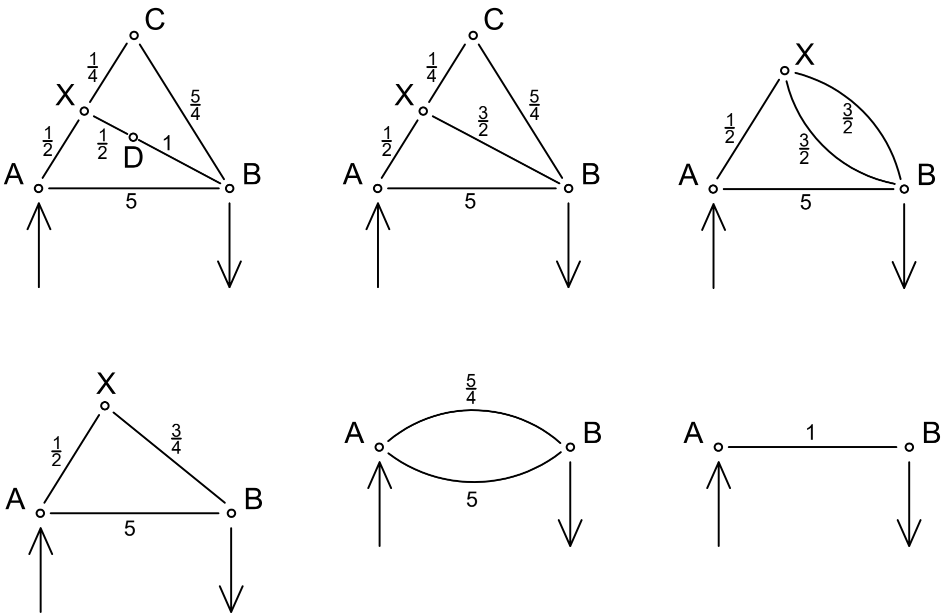
Úloha 8



Obrázek 9: Zadání úlohy 8.

Zadání:
Vezměte si graf z obrázku 9 a provádějte pouze operace se vzorci na paralelní a sériové zapojení. Vypočítejte odpor mezi zdrojem a stokem.

Řešení:
Viz obrázek 10.



Obrázek 10: Řešení úlohy 8.

Zbylé úlohy

Stále se můžete zamyslet nad úlohou 10, jako nápověda se vám může hodit řešení úlohy 7. Také úlohy 6, 9 a 11 budou vyřešeny v dalším čísle.

Úloha 6 (28.1) [3b+3b+4b]: *Vypočítejte odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy:*

a) pravidelného osmistěnu,

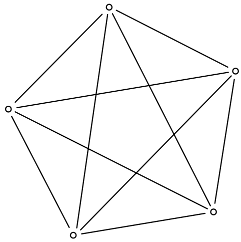
b) pravidelného dvanáctistěnu,

c) pravidelného dvacetistěnu.

Odpor každé hrany je opět 1 Ω.

Úloha 9 (28.1) [3b]: *Pomocí hvězdicových transformací vypočítejte odpor mezi středy dvou sousedících hran v pravidelném dvanáctistěnu.*

Úloha 10 (28.1) [3b]: *Vypočítejte odpor mezi libovolnými dvěma vrcholy v úplném grafu K_5 na obrázku 11. (Hrany se nikde neprotínají, i když to tak může vypadat. Vedou nad sebou a pod sebou.)*



Obrázek 11: Úplný graf na 5 vrcholech.

Úloha 11 (28.1) [5b]: *Dokažte, že odpor mezi libovolnými dvěma vrcholy v úplném grafu K_n je $\frac{2}{n}$ Ω. (Úplný graf K_n je takový graf o n vrcholech, který má hrany mezi každými dvěma vrcholy.)*

Díl 2: Jednoznačnost a existence řešení

A nyní již následuje pokračování tématka.

Princip superpozice

Nejprve si odvodíme princip, pomocí něhož si dokážeme jednoznačnost. Bude se týkat vlastností Kirchhoffových zákonů, jež si nyní připomeneme.

První Kirchhoffův zákon o proudu a smyčkách říká, že součet rozdílů potenciálů v cyklu vrcholů x_1, x_2 až x_k je roven nule.

$$\varphi_{x_1 x_2} + \varphi_{x_2 x_3} + \cdots + \varphi_{x_{k-1} x_k} + \varphi_{x_k x_1} = 0 \tag{2}$$

Druhý Kirchhoffův zákon se týká proudu procházejícího jedním vrcholem. Součet proudů vstupujících do vrcholu A a proudů z něj vystupujících je nulový.

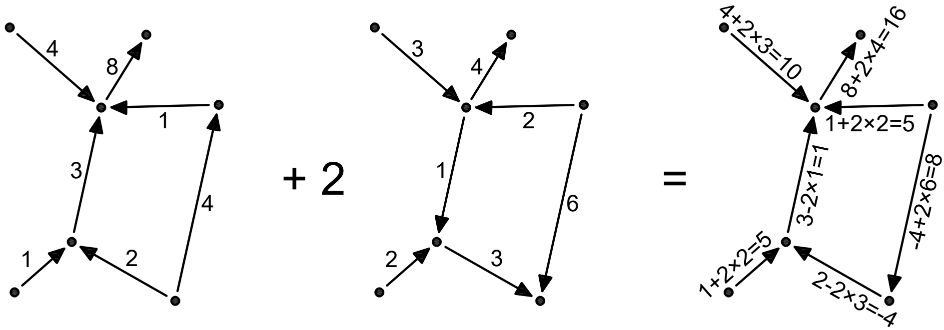
$$I_{Ax_1} + I_{Ax_2} + \cdots + I_{Ax_k} + I_{A\infty} = 0, \tag{3}$$

kde x_1 až x_k jsou vrcholy, do nichž vede hrana z A nebo z nichž vede hrana do A, a $I_{A\infty}$ je proud, který vychází ze sítě pryč ve vrcholu A. (Analogicky $I_{\infty A}$ je proud, který do sítě v daném vrcholu vstupuje.)

Všimneme si, že rovnice Kirchhoffových zákonů[1] jsou lineární (proměnné jsou jen v první mocnině neboli nevyskytuje se tam žádná proměnná na druhou,

[1] První Kirchhoffův zákon (2), kde se vyskytují potenciály φ, budeme občas označovat jako potenciálový a druhý (3), kde se používají proudy I, jako proudový.

třetí, ...) a homogenní (na pravé straně rovnic je 0) ve všech proudech I a rozdílech potenciálů φ. Když tedy budeme mít více přiřazení proudů hranám, která všechna splňují Kirchhoffovy zákony, a vytvoříme nové přiřazení proudů jako součet nějakých násobků našich přiřazení (mohou tam být i záporné násobky), tak toto nové také splňuje Kirchhoffovy zákony. Tomuto se říká *princip superpozice.*



Obrázek 12: Kombinace proudů splňuje princip superpozice

Příkladem může být kombinace přiřazení na obrázku 12. Pokud je v obou přiřazeních na dané hraně stejně orientovaný proud, tak proudy jednoduše sečteme a směr proudu zakreslíme stejný. Pokud jsou proudy na dané hraně opačného směru, tak si zvolíme směr proudu, který budeme brát jako kladný. Tento směr si zakreslíme do finálního přiřazení. Velikost proudu na hraně vypočítáme tak, že proud stejného směru jako ten finální bude mít kladné znaménko, proud opačného směru má znaménko záporné.

Úloha 1 [2b]: *Algebraicky dokažte, že platí princip superpozice pro naše rovnice (2) a (3).*

(Nápověda: Pokud nevíte, jak na to, zkuste si princip superpozice dokázat pro nějaký malý konkrétní počet vrcholů a hran. Představte si, že máte dvě různá přiřazení (tedy potenciály a proudy), která vyhovují těmto rovnicím. Co se stane, když rovnice vynásobíte nějakým číslem? Budou pořád platit? A čemu se bude rovnat součet všech potenciálů obou přiřazení (nebo všech proudů hran)? Pokud si nejste jistí, tak připomínáme, že můžete využít pravé strany našich rovnic – jsou tam nuly.)

Úloha 2 [3b]: *Ukažte pomocí principu superpozice, že libovolný proud sítí, který je výsledkem přítomnosti více zdrojů a stoků, lze získat skládáním proudů příslušejících vždy jen jednomu zdroji a stoku.*

Jednoznačnost

Nyní se již dostáváme ke slíbené jednoznačnosti. Představme si, že máme zadanou síť,[2] do které vtéká jednotkový proud ve vrcholu Z (zdroj) a vytéká jednotkový proud ve vrcholu S (stok). Přesně takto vypadaly příklady v prvním dílu – a u těch jsme uměli určit proudy v každé hraně. Je toto přiřazení proudů jednoznačné? Tedy, může být pro stejnou síť ještě nějaké jiné přiřazení, které splňuje Ohmův a Kirchhoffovy zákony? Umíme na tuto otázku odpovědět obecně pro libovolnou síť? Zjistíme, že ano:

Pro síť s danými odpory hran a s daným rozmístěním zdrojů a stoků (může jich být více) včetně proudů v nich vtékajících/vytékajících existuje nanejvýš jedno řešení.[3]

Tuto větu nyní dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že máme dvě různá řešení (pro danou síť), a podívejme se na jejich rozdíl. Ten je také řešením, díky principu superpozice (první přiřazení sečteme s minus druhým přiřazením, tedy výsledek splňuje Kirchhoffovy zákony). Navíc je to takové řešení, kde žádné proudy nevstupují do sítě ani ji neopouští: Proud vstupující do sítě byl stejný (jinak by to byla jiná úloha) pro obě ta řešení ve všech zdrojích, takže se odečte – ve výsledném řešení bude proud vstupující do sítě 0. A stejně tak pro vystupující.

Pokud pro spor byla naše původní řešení různá (existují nějaké vrcholy A a B, že proudy předtím v hraně AB nebyly stejné), tak v tomto řešení je v hraně AB kladný (tj. nenulový) proud. Pak z proudového zákona (3) musí jít kladný proud také z B do nějakého vrcholu C (do B nějaký kladný proud vtekl, tak musí i vytéct = přitéct záporný, protože součet vtékajících proudů do každého vrcholu má být nulový), pak z C do D a tak dále. To nám dá posloupnost vrcholů a hran, kde se vrcholy mohou opakovat a hrany ne (takzvaný *tah*) $ABCD\ldots$ Jelikož je síť konečná, musí se tento tah vrátit do vrcholu, který již navštívil. Tedy existuje cyklus, kde tečou kladné proudy jedním směrem.

Úloha 3 [1b]: *Rozmyslete si, proč takový cyklus nemůže existovat. (Nápověda: Podívejte se na potenciály v jeho vrcholech.)*

Kostra

Nyní odbočíme od sítí k čisté teorii grafů a uvedeme si některé definice a vlastnosti, které za chvíli použijeme. (Pokud víte, co je kostra grafu, můžete přeskočit na další sekci.)

Zavedeme si nejprve značení pro lepší vyjádřitelnost písmenky. Budeme psát $G = (V,E)$ a říkat, že graf G má množinu vrcholů V a množinu hran E. Pojmy zde definujeme pro neorientované grafy, avšak většinou se dají použít i pro orientované.

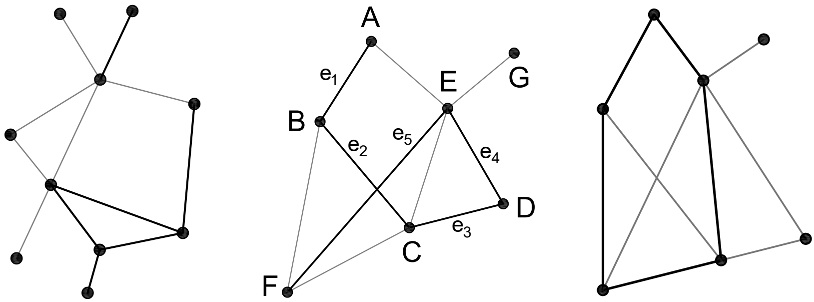
[2] Víme tvar sítě, odpory každé hrany a kde do/z ní vtéká/vytéká jaký proud.

[3] Řešením rozumíme přiřazení směrů a velikostí proudů všem hranám sítě.

Mějme graf $G = (V_G, E_G)$. Graf $H = (V_H, E_H)$ je *podgraf* grafu G, pokud množina hran H je podmnožinou hran G a množina vrcholů H je podmnožinou množiny vrcholů G, což se zapíše $E_H \subseteq E_G$ a $V_H \subseteq V_G$.

Cesta v grafu G je posloupnost[4] $(V_0, e_1, V_1, e_2, V_2, \ldots, e_k, V_k)$, že $V_0, \ldots, V_k$ jsou navzájem různé vrcholy a pro každé i je e_i hrana mezi V_{i-1} a V_i.

Kružnice, neboli *cyklus* v grafu je definován obdobně s tím, že první a poslední vrchol je stejný ($V_0 = V_k$) a hrana e_k vede mezi V_{k-1} a V_0.

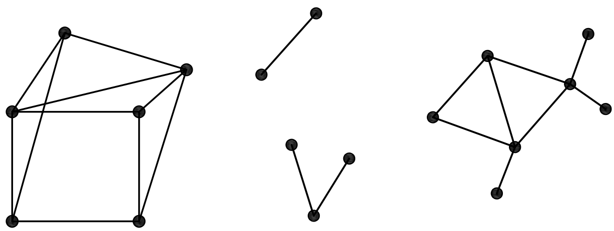


(a) Podgraf. **(b)** Cesta. **(c)** Kružnice.

Obrázek 13: Námi využívané podgrafy.

Graf G je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy U, V existuje cesta v G z U do V.

Komponenta souvislosti grafu G je maximální souvislý podgraf. Tedy mezi každými dvěma jejími vrcholy existuje cesta, ale když si vezmeme libovolný vrchol z ní a libovolný mimo ni, už mezi nimi cesta nevede.



(a) Souvislý graf. **(b)** Graf, který má 3 komponenty souvislosti.

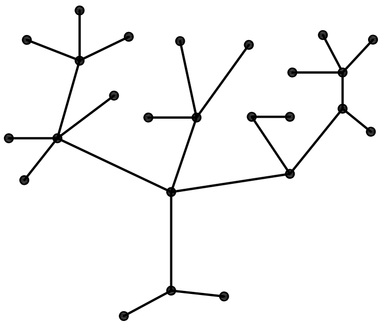
Obrázek 14: Souvislost.

[4] Pokud budou z kontextu jasné hrany e_i, můžeme psát pouze $V_0, V_1, \ldots V_k$.

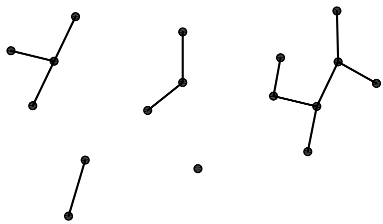
Strom je souvislý graf bez cyklů. Mějme graf G s množinou vrcholů V a množinou hran E. Následující tvrzení jsou ekvivalentní, neboli pokud o grafu platí jedno, tak o něm platí i všechna ostatní:

- G je strom.
- Mezi každými dvěma vrcholy $u,v \in V$ existuje právě jedna cesta.
- G je souvislý graf, ale po odebrání libovolné hrany přestává být souvislý.
- G je bez cyklů, ale po přidání libovolné hrany cyklus vznikne.

Les je množina navzájem nepropojených stromů.



(a) Strom.



(b) Les.

Obrázek 15: „Rostliny.“

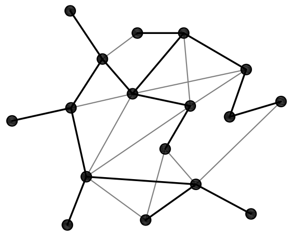
Nyní přichází definice hlavního pojmu, který budeme používat.

Nechť G je souvislý graf. Pak jeho podgraf T se stejnou množinou vrcholů je *kostrou grafu* G, pokud je T strom.

Formálně: Nechť $G = (V,E)$ je souvislý graf. Nechť $F \subseteq E$ je taková podmnožina jeho hran, že $T = (V,F)$ je strom. Pak říkáme, že T je *kostra grafu* G. Všimněte si, že T je souvislý podgraf G, který neobsahuje žádnou kružnici.

Úloha 4 [2b]: *Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.*

Úloha 5 [1b]: *Nakreslete všechny kostry úplného grafu na 4 vrcholech. (Pokud netušíte, co je to úplný graf, podívejte se na závěr předchozího dílu tématka.)*



Obrázek 16: Kostra.

Existence – těžká věta, kterou budeme potřebovat

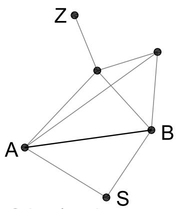
Jednoznačnost řešení úlohy jsme si již dokázali, nyní se zaměříme na existenci. Ta je z fyzikální interpretace zřejmá – pustíme proud do (souvislé) sítě a stejně velký proud někde vyteče, tedy nějak tou sítí protéká. Z matematického hlediska to však již tak zřejmé není a použijeme elegantní trik, aby to bylo zřejmější. Nakonec z důkazu vyplynou zajímavé teoretické důsledky.

Když sítí protéká proud velikosti 1 A, proud protékající danou hranou lze vyjádřit pomocí počtu určitých koster.

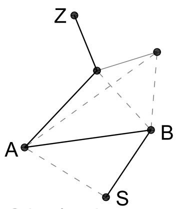
To, že „rozmístění proudů v grafu vyhovuje Kirchoffovým zákonům“ znamená, že pro každý vrchol je splněn proudový zákon a pro každý cyklus je splněn potenciálový zákon.

Budeme pro jednoduchost předpokládat, že graf G naší sítě je souvislý, každá hrana má odpor 1 Ω, proud 1 A vstupuje do sítě ve zdroji Z a vystupuje z ní ve stoku S. (Poznamenejme, že odpor každé hrany rovný 1 Ω znamená $\forall A, B \in V: I_{AB} = \varphi_{AB}$, což je rovnost velikostí proudu a napětí (v ampérech a voltech) na každé hraně. Tato rovnost plyne z Ohmova zákona.)

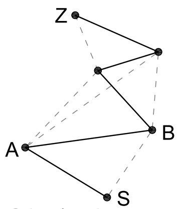
Pro danou hranu AB označíme $N(Z, A, B, S)$ počet koster grafu G, ve kterých (ta jediná) cesta ze Z do S obsahuje vrcholy A, B v tomto pořadí.



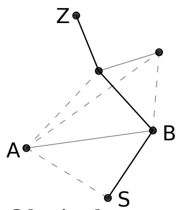
Obrázek 17: Graf s hranou AB.



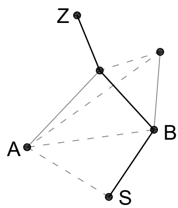
Obrázek 18: Kostra T_1, kde se prochází AB z A do B.



Obrázek 19: Kostra T_2, kde se hrana prochází z B do A.



Obrázek 20: V této kostře se hrana AB při cestě ze Z do S neprochází.



Obrázek 21: V této kostře hrana AB není.

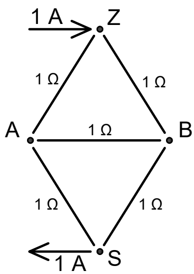
Obdobně pojmenujeme $N(Z, B, A, S)$ tj. cesta ze Z do S prochází hranu AB směrem z B do A. Dále nechť K značí celkový počet koster a

$$I_{AB} = \frac{N(Z, A, B, S) - N(Z, B, A, S)}{K}.$$

A naše věta zní:

Když rozmístíme do každé hrany AB grafu G proud I_{AB}, aby tekl ve směru z A do B, pak celkový proud ze zdroje Z do stoku S má velikost $1\,\Omega$ a vyhovuje Kirchhoffovým zákonům.

Úloha 6 [3b]: *Využijte to, že znáte všechny kostry úplného grafu na 4 vrcholech z minulé úlohy 5, a určete proudy všech hran na obrázku 22, kde všechny hrany mají odpor $1\,\Omega$, pomocí vzorce z této věty.*



Obrázek 22: Určete proudy pomocí koster!

Nyní si ukážeme, proč to tak dopadne obecně. Pro zjednodušení situace vynásobíme všechny proudy krát K. Pro každou kostru T a hranu $AB \in E_G$ označíme $I^{(T)}$ proud velikosti 1 podél té jednoznačné[5] cesty ze Z do S takto:

$$I_{AB}^{(T)} = \begin{cases} 1 & \text{pokud se v T vyskytuje cesta } Z \dots AB \dots S, \\ -1 & \text{pokud se v T vyskytuje cesta } Z \dots BA \dots S, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

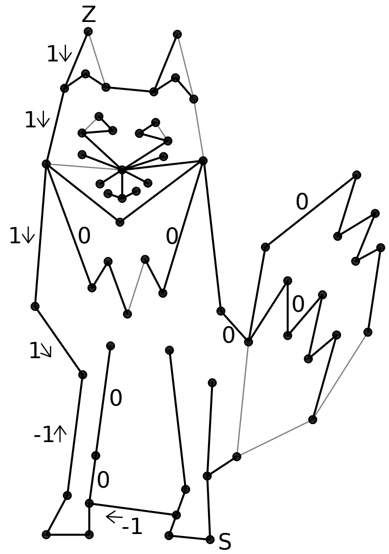
Tedy pro danou kostru a hranu se započítá proud za tuto hranu $+1$, nebo -1, když ta hrana leží na cestě mezi Z a S, a znaménko je podle orientace (viz obrázek 23).

Platí následující rovnost

$$N(Z, A, B, S) - N(Z, B, A, S) = \sum_T I_{AB}^{(T)} = I_{AB}^{(T_1)} + I_{AB}^{(T_2)} + \dots,$$

kde sčítáme přes všechny kostry $T \in \{T_1, T_2, \dots\}$ grafu G. Podíváme se, co se objeví na jednotlivých stranách rovnosti pro jednu danou hranu AB. Do výrazu

[5] Kostra je strom a mezi každými dvěma vrcholy stromu je právě jedna cesta.



Obrázek 23: Graf, tučně vyznačena vybraná kostra, pro některé hrany kostry ukázáno, jak se započítávají.

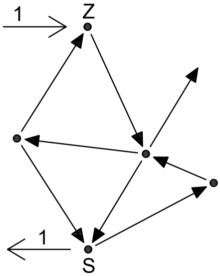
vlevo započítáme jednou všechny kostry, jejichž cesta obsahuje hranu v pořadí AB. A dále také mínus jednou ty kostry, pro něž je to naopak (BA). To je však to samé, jako vpravo, neboť zde započítáme pro každou kostru $+1$, pokud byla hrana prošlá ze Z do S jako AB, a -1, pokud naopak.

Chceme tedy ukázat, že když pošleme proud velikosti $\sum_T I_{AB}^{(T)}$ z A do B každou hranou AB, tak dostaneme celkový proud velikosti K ze Z do S splňující Kirchhoffovy zákony.

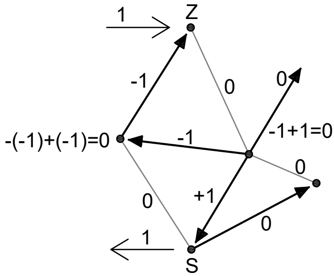
Každý $I^{(T)}$ (skládající se z jednotlivých ± 1 na hranách příslušejících cestě) je proud velikosti 1 ze Z do S splňující Kirchhoffův proudový zákon (součet proudů vstupujících do vrcholů mimo cestu je 0 a pro ty v cestě vždy právě $+1$ vstoupí a $+1$ vystoupí za ty dvě hrany v cestě, viz obrázek 27). Takže součet těchto K proudů je proud velikosti K (přičteme 1 za každou z K koster) ze Z do S splňující proudový zákon (když si zafixujeme vrchol, tak přidáváním nových zůstane celkový součet proudů ve vrcholu stále 0 – to je dříve použitý princip superpozice).

Nyní nám stačí ukázat, že potenciálový zákon je také splněn. Jelikož všechny hrany mají stejný odpor, potenciálový zákon říká, že celkový proud (tj. součet jednotlivých proudů, když velikosti proudů s opačnou orientací odčítáme) v cyklu s nějakou orientací je nula.

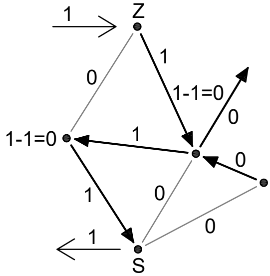
Pouštíme do každé hrany AB proud $\sum_T I_{AB}^{(T)}$. Chceme říct, že když je sečteme v nějakém cyklu, dají 0.



Obrázek 24: Graf.



Obrázek 25: Vybraná kostra T_1 a $I_{AB}^{(T_1)}$ pro všechny hrany.



Obrázek 26: Vybraná kostra T_2 a $I_{AB}^{(T_2)}$ pro všechny hrany.

Obrázek 27: Sčítání jednotlivých proudů.

Nejdříve se podíváme jiným pohledem na definici $N(Z, A, B, S)$. Podgraf F grafu G, pro který $E_F = E_G$ a který je les, nazveme *spleť*, pokud má právě dvě komponenty souvislosti F_Z a F_S, že Z je v F_Z a S je v F_S. Tedy F obsahuje všechny vrcholy G a skládá se ze dvou stromů, které nejsou propojeny žádnou hranou a které obsahují každý po jednom z vrcholů Z a S.

Úloha 7 [2b]: *Zdůvodněte, že $N(Z, A, B, S)$ je počet spletí $F = F_Z \cup F_S$, pro které $A \in F_Z$ a $B \in F_S$.*

Také $N(Z, B, A, S)$ je definovatelné podobně.

Použijeme jednoduchý a mocný kombinatorický princip počítání dvěma způsoby a převracení pořadí sčítání.

Pro spleť $F = F_Z \cup F_S$ a hranu $AB \in E(G)$ mějme:

$$I_{AB}^{(F)} = \begin{cases} I_{AB}^{(F+AB)} & \text{pokud } F + AB \text{ je kostra,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Úloha 8 [2b]: *Rozmyslete si, že $F + AB$ je kostra právě tehdy, když $A \in F_Z$ a $B \in F_S$, nebo $A \in F_S$ a $B \in F_Z$. Jak moc je tato úloha podobná úloze 7?*

Úloha 9 [3b]: *Ukažte, že*

$$\sum_T I_{AB}^{(T)} = \sum_F I_{AB}^{(F)},$$

kde druhá sumace je přes všechny spletě F.

Můžeme tedy zaměnit tyto dvě sumy, přičemž ta první vyjadřuje proud, který pouštíme do hrany AB a o té druhé budeme za chvíli něco umět říct. Označíme nějaký cyklus v grafu G jako $x_1x_2\dots x_k$, kde $x_{k+1} = x_1$. Dostáváme, že celkový proud v tomto cyklu je

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{F} I^{(F)}_{x_ix_{i+1}} = \sum_{F}\sum_{i=1}^{k} I^{(F)}_{x_ix_{i+1}} = 0,$$

kde sumace s F je přes všechny spletě F grafu G. Sumy můžeme prohodit – jen sčítáme konečně mnoho členů v různém pořadí (to je ten trik) – a k poslední rovnosti použijeme úlohu 10.

Úloha 10 [3b]: *Ukažte, že* $\sum_{i=1}^{k} I^{(F)}_{x_ix_{i+1}} = 0$ *pro každou spleť* F.

Tím jsme dokázali existenci řešení naší úlohy a dokonce víme přesné vyjádření toho, jaký proud teče po jaké hraně.

Libovolné odpory

Předchozí zdůvodnění lze přepsat, aby nám poskytlo řešení také v případě, že hrany mají libovolné odpory.

Pro kostru T definujme *váhu* T jako převrácenou hodnotu součinu odporů jejích hran. Označíme K^* součet vah přes všechny kostry grafu G, dále označíme $N^*(Z, A, B, S)$ součet vah přes všechny kostry, kde je na cestě ze Z do S nejdříve A a hned potom B. A definujme $N^*(S, B, A, Z) = N^*(Z, A, B, S)$. Potom platí následující tvrzení (které nebudeme dokazovat – dělalo by se to obdobně jako existence pro případ s jednotkovými odpory):

Rozmístění proudů, ve kterém je velikost proudu v každé hraně AB *dána jako* $\frac{N^*(Z,A,B,S)-N^*(Z,B,A,S)}{K^*}$*, splňuje Ohmův a Kirchhoffovy zákony a velikost proudu vstupujícího do sítě v* Z *a vystupujícího v* S *je* 1.

Důsledek? Něco je racionální!

Víme už, že při dané síti a jednotkovém proudu do ní vstupujícím a z ní vystupujícím lze vždy jednoznačně (pokud požadujeme platnost Ohmova a Kirchhoffových zákonů) určit proudy protékající každou hranou – budou mít právě hodnotu (s N^*) z minulého tvrzení.

A v následující úloze si rozmyslíte, že tato hodnota je racionální!

Úloha 11 [1b]: *Napište, proč platí následující tvrzení: Pokud jsou odpory všech hran racionální a celkový proud procházející sítí má velikost 1, pak má proud na každé hraně racionální hodnotu.*

Tento výsledek je hezký a bude se nám ještě hodit.

Kačka Vokálová; katerina.vokalova@matfyz.cz
Lucka Kundratová; kundratova@karlin.mff.cuni.cz
e-mailová konference: elektricke-site@mam.mff.cuni.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 2 – Oware

Díl 2: Turnaj

Zahajujeme konání turnajů. Aktuálně plánujeme turnaj každé dva týdny, přesný harmonogram a výsledky proběhlých turnajů budeme průběžně uveřejňovat na GitHubu.[6]

V turnajích se váš program utká s programy ostatních řešitelů. V závislosti na jeho umístnění můžete získat 2,5 bodu za první místo, 2 body za druhé a 1 bod za třetí. Nebojte se posílat „nedokonalé" programy – záporné body v turnaji získat nejde a vždy budete mít možnost nahradit je lepšími programy.

Kromě turnajů se váš program utká s různými programy, které jsou dílem organizátorů. Odměnu za poražení každého z nich najdete na obrázku 28 (hodnota mince značí počet bodů za poražení), další odměny se budou průběžně objevovat na GitHubu.[6]

Obrázek 28: Nabídka organizátorských programů k poražení.

Závěrem bychom vám chtěli připomenout, že můžete posílat i svá sepsaná pozorování. Dostanete za ně body a možná tím pomůžete ostatním řešitelům s překonáváním organizátorských algoritmů.

Matej; `lieskovsky.matej+mam@gmail.com`
Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
Borek; `b0r3k@matfyz.cz`
e-mailová konference: `oware@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

[6] `https://github.com/JoHavel/Turnaj-v-Oware`

Téma 3 – Lingvistika

Ještě předtím, než se vrhnete na čtení a řešení následujícího tématka o lingvistice, bychom vás chtěli poprosit, abyste při řešení nepoužívali internetové vyhledávače ani žádnou literaturu. Jejich použitím byste si některé úlohy buď příliš zjednodušili, nebo naopak udělali těžší. Některá zákoutí gramatiky zde vůbec nezmiňujeme, protože by se nám to nevešlo ani do celého ročníku. Nejde úplně o znalost jazyka, ale o logické přemýšlení a hledání spojitostí v textu. Proto raději odevzdejte špatné řešení se zdůvodněním, než bezchybně přeložený text, který jste nemohli vypozorovat z našeho tématka. Teď už vám přejeme šťastné řešení.

Díl 2: Písmenkový guláš

V minulém díle jsme se zabývali chetitštinou, zkráceně se podívali na základy její gramatiky a některá slovíčka. Ale jak jste si určitě všimli, vynechali jsme jednu důležitou část jazyka. Jeho zápis.

Latinka, abeceda, kterou píšeme my dnes, v té době nebyla ještě známa, a tak si Chetité museli pomoci jiným písemným systémem. V oblasti Malé Asie v té době bylo velice populární písmo klínové. Jednalo se o sadu *grafémů*, která ale nebyla mezi národy jednolitá. Grafém je nejmenší jednotka zápisu jazyka. Může to být jedno písmenko, slabika nebo v některých systémech i celé slovo. Jejich skládáním se pak tvoří slova nebo i větší jazykové struktury.

Jak už jste možná někde zaslechli, v mluvené řeči jako nejmenší jednotku máme hlásky, které tvoří slabiky a z nich se skládají slova. Pro jejich zaznamenání my v dnešní době používáme hláskový písemný systém, latinku. Grafémy chetitštiny však odpovídají celým slabikám. Slabiky se skládaly ze samohlásek a/nebo souhlásek. Samohlásky, které používali, byly *a*, *e*, *i* a *u*. Mohli jste si všimnout, že zde chybí samohláska *o*. Ne, není to chyba tisku. Chetité tento zvuk jen nepotřebovali používat. Souhlásky měli podobné jako my, sem tam se nějaká ztratila a nebyla potřeba, toho jste si mohli všimnout v příkladech minule. Jen pozor na strašáka *y*. V našich končinách běžná samohláska byla používána jako souhláska, a tak ji i my budeme používat v dalších příkladech a úlohách.

Slabiku mohla tvořit buď samotná samohláska, dvojice samohláska-souhláska nebo souhláska-samohláska, případně i trojice souhláska-samohláska-souhláska. Tento způsob zápisu má v porovnání s naším výhody i nevýhody. Sice nepotřebují tolik grafémů na zápis jednoho slova, ale tento písemný systém je daleko bohatější na znaky, než naše latinka. A to i přesto, že mají méně hlásek! Pojďme se na některé klínové znaky chetitů podívat.

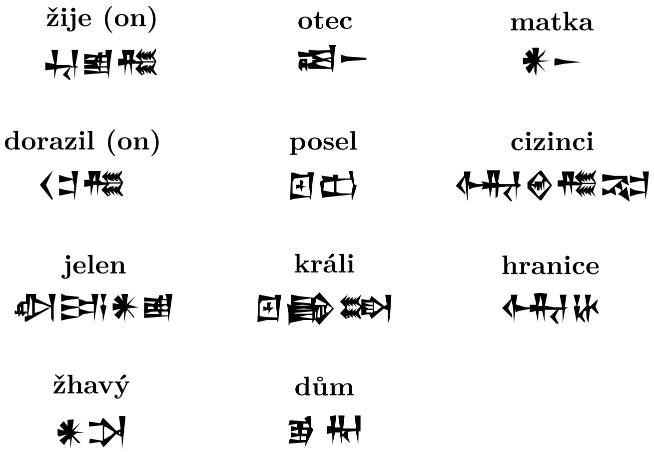
Úloha 1 [2b]: *Na obrázku 29 se nacházejí česká slova zapsaná v chetitštině s pomocí klínového písma. Přeložte do chetitštiny tato slova a zapište je s pomocí klínového písma:*

1. *pojď*
2. *zub*

3. *modrá*

4. *jsou*

V minulém díle se občas objevily zdvojené souhlásky ve stejné slabice jako `ll`*, tak ty se počítají jako jedna souhláska* `l`*. Podobně se vyskytly různé samohlásky s přehláskou apod. Ty také zjednodušíme a přehlásky nebudeme vůbec uvažovat, tedy* `a` *budeme považovat za to samé jako* `ā`*.*



Obrázek 29: Úloha 1.

Hmmm, chetitské symboly nevypadají moc jednoduše a jejich psaní jistě dlouho trvalo. Navíc na zapamatování znaku pro každou slabiku by bylo třeba spousta paměti a úsilí. Naštěstí, nebo možná bohužel, se písmo stále vyvíjí a již v té době existoval daleko jednodušší slabičný písemný systém v Řecku, konkrétně v Mykénách, který je známý jako lineární písmo B.

Úloha 2 [1b]: *Na obrázku 30 naleznete následující věty zapsané v mykénském písmu.*

1. *Unikáme pořá(d) na zápa(d).*

2. *Doma je zakázáno utíkat.*

3. *Mykény okupují (K)rétu.*

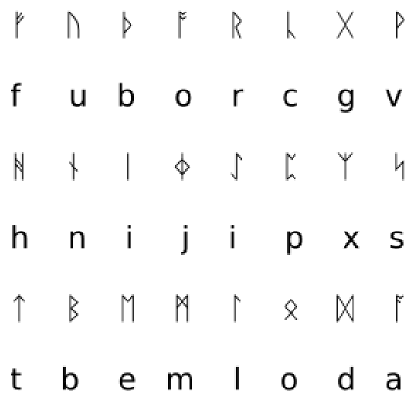
4. *Domů je náro(č)ná (t)rasa.*

5. *Je nu(t)né se (v)ráti(t).*

Pokuste se ke každé větě přiřadit její zápis. Zkuste svoji volbu alespoň stručně zdůvodnit. Zapisovat češtinu v lineárním písmě B úplně nejde. Věty uvažujte bez diakritiky a pokud se ve větách vyskytuje písmeno v kulatých závorkách, tak není vůbec zapsáno (nepatří do žádné slabiky).

Obrázek 30: Úloha 2.

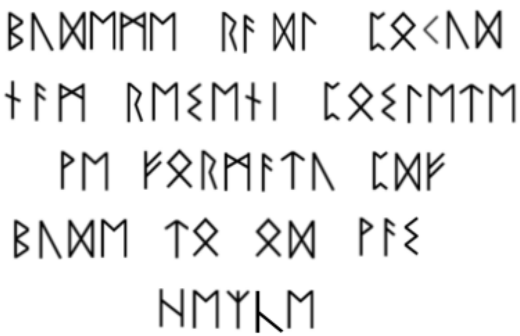
Řekové později přišli s vlastní abecedou, která inspirovala písemný systém Římanů a následně i latinku, kterou dnes píšeme. Kromě Říma se však v Evropě vyskytovala ještě jedna velká skupina obyvatel, která potřebovala vlastní systém. Níže (na obrázku 31) se můžete podívat na systém písma Anglosasů, runy.



Obrázek 31: Runy anglosaské.

Anglosasové nebyli jediným národem, který používal runy. Ve skutečnosti jich byla spousta, nejznámější jsou asi runy vikingů. Všechna runová písma si jsou někdy více, někdy méně podobná.

Úloha 3 [1b]: *Podívejte se na text na obrázku 32 zapsaný pomocí gótských run. Zkuste tento text přepsat do latinky jen se znalostí run anglosaských. Text je v češtině, takže by vám mělo vyjít něco smysluplného.*



Obrázek 32: Úloha 3.

Cesta od klínového písma byla spletitá, ale jak je vidno už z runového písma, tak úspěšná. Grafémy už dnes nejsou tak moc složité na psaní a ani jich není tolik na zapamatování. Ale nešlo by to ještě lépe?

Problém 4: *Vymyslete vlastní systém pro zápis českého jazyka, snažte se minimalizovat jeho složitost, jak ve smyslu počtu potřebných grafémů, tak i množství tahů na jeden grafém. Taková nová abeceda by se také měla dobře číst. Dlouhé texty složené pouze z krátkých rovných čar se nebudou číst úplně příjemně, natož rychle.*

Nezapomeňte pořádně zdůvodnit, proč jste se rozhodli právě pro tento zápis a proč je dobrý pro čtení a zápis.

Honza; `jan@piroutek.eu`
Lucka; `lucy.kuncarova@gmail.com`
e-mailová koference: `lingvistika@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře

Díl 2: Jak vzniká duha

V minulém díle jsme se věnovali optickým jevům, které se vyskytují v ideální čisté atmosféře. Nyní se podíváme na atmosféru, ve které se nachází drobné částice kapaliny, nejčastěji dešťové kapky.

Z fyziky si jistě pamatujete, že když paprsek světla dopadá na rozhraní dvou prostředí s indexy n_1 a n_2, láme se podle Snellova zákona $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$ (α je úhel dopadu, β úhel lomu). Ve skutečnosti to není tak úplně pravda. Paprsek o intenzitě I_0 se na rozhraní rozdělí na dvě části. Část o intenzitě RI_0 se od rozhraní zrcadlově odráží pod úhlem rovným úhlu dopadu ($\alpha = \beta$), zatímco druhá část o intenzitě TI_0 se na rozhraní láme a prochází do druhého prostředí. Koeficienty R a T nazýváme koeficient odrazu a koeficient průchodu a platí pro ně $R + T = 1$ (tj. žádná část intenzity se nikam neztratí). Jejich číselné hodnoty jsou dané tzv. Fresnelovými vzorci, ve kterých R a T obecně závisí na úhlu dopadu a na polarizaci paprsku, my však budeme pro naše účely předpokládat, že jde o konstanty.

Uvažme jediný paprsek, který z homogenní atmosféry s indexem lomu n_1 dopadá na ideálně kulovou kapku vody s poloměrem a a indexem lomu n_2 (viz obrázek 33). Do kapky pak prochází jen jistá jeho část, která se při každém dalším kontaktu s rozhraním prostředí (tj. s okrajem kapky) znovu rozdělí na část, která vystupuje z kapky ven, a na část, která prodělá vnitřní odraz a postupuje dál kapkou k dalšímu rozhraní, kde se znovu dělí stejným způsobem. Označme si trajektorie jednotlivých částí paprsků indexem k. Trajektorie $k = 1$ přísluší té části paprsku, která se od kapky rovnou odrazí. Trajektorie $k = 2$ přísluší části, která do kapky projde, ale hned při dalším kontaktu s rozhraním zase vystoupí ven. Trajektorie $k > 2$ přísluší té části, která prodělá v kapce právě $k-2$ vnitřních odrazů, po kterých vystupuje ven (viz obr. 33). Jako δ_k označme úhel, který svírá koncová část trajektorie k se svou počáteční částí, tj. s původním paprskem (viz obr. 33).

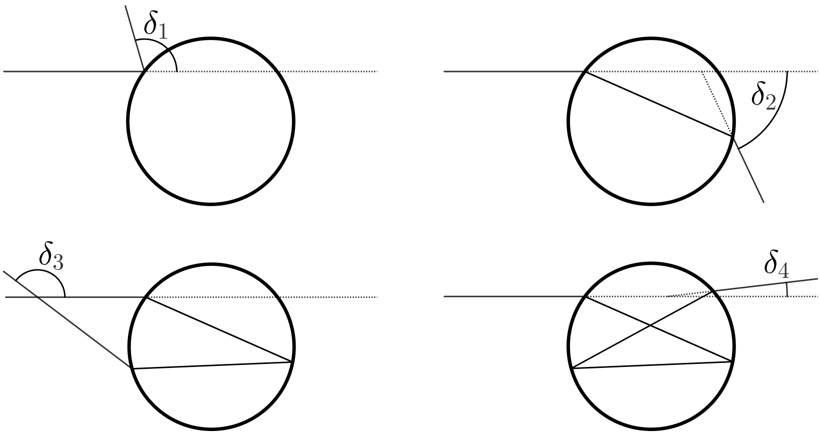
Obecně se dá odvodit, že pro úhel δ_k a $k > 2$ platí

$$\delta_k = (k-2)\pi + 2[\alpha - (k-1)\beta], \tag{4}$$

kde α je úhel, pod kterým paprsek dopadá na povrch kapky ze strany atmosféry, zatímco β je úhel, pod kterým z tohoto rozhraní vystupuje na straně kapky. Pozor, oba úhly jsou dle konvence odečítány od kolmice k rozhraní a dosazovány v radiánech.

Úloha 1 [3b]: *Dokažte výše uvedený vztah pro δ_k.*

Zavedeme-li relativní index lomu $n_r = n_2/n_1$, dá se o něco méně přímočarým způsobem dokázat, že paprsek, který vychází z kapky po prodělání $k-2$ vnitřních



Obrázek 33: Lom světelného paprsku na kapce pro $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Paprsek do kapky vstupuje vždy vodorovně zleva a vystupuje z ní vychýlen o úhel δ_k oproti původnímu směru.

odrazů ($k > 2$), má ve vzdálenosti r od středu kapky intenzitu

$$I_k = \frac{a^2}{4r^2} I_0 R^{k-2} T^2 \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\delta_k)\left|1 - \frac{k-1}{n_r}\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right|} \tag{5}$$

a že pro $n_r > 1$ je tato intenzita maximální ve směru charakterizovaném splněním podmínky

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{n_r^2 - 1}{k^2 - 2k}\right)}. \tag{6}$$

Jako n_r jsme zde označili relativní index lomu, tj. n_2/n_1.

A jak někteří možná pochopili, toto je mechanismus, kterým vzniká duha. Běžná duha, kterou vídáme na obloze, tzv. primární duha, vzniká konkrétně jedním vnitřním odrazem, tj. $k = 3$. Po něm je intenzita vystupujícího světla nejvíce koncentrovaná okolo směru o 42° vychýlenému vůči směru původnímu. Díky symetrii kapky se toto pozorovateli jeví jako kruh na obloze se středem v opačném bodě oblohy, než je slunce.

Úloha 2 [3b]: *Experimentálně dokažte, že střed duhy leží na polopřímce dané sluncem a pozorovatelem.*

Protože se index lomu pro jednotlivé vlnové délky světla mírně liší, pozorovaný kruh se rozloží na jednotlivé složky viditelného spektra a získává zbarvení, jaké u duhy známe z běžné zkušenosti.

Problém 3: *Nyní, když víte, jakými rovnicemi se řídí násobný rozptyl v kapce, zamyslete se bez toho, abyste něco počítali, jak závisí vzhled duhy, kterou pozorujeme, na velikosti kapek, na fyzikálních vlastnostech vody (čistota, teplota atd.),* *na vzdálenosti kapek od pozorovatele a případně na dalších parametrech, které vás napadnou.*

Problém 4: *Pokuste se vytvořit duhu v domácích podmínkách. Potřebujete k tomu pouze dostatečné množství padající vody a dostatečně silný zdroj světla. Experiment vyfoťte. Pokud se vám to povedlo, pokuste se měnit parametry vašeho uspořádání, vyzkoušejte například více různých zdrojů světla, víc různých kapalin kromě vody, nebo se pokuste změnit velikost kapek. Diskutujte, jak se vámi pozorovaná duha mění v závislosti na těchto parametrech.*

Úloha 5 [2+2+2+3b]: *S využitím výše uvedených vztahů vykreslete následující závislosti v programu dle vlastní volby*[7]*. Číselné konstanty a, r, I_0 můžete položit rovné 1, Fresnelovy koeficienty R a T vyčíslete např. jako $R = 1/2 = T$. Není-li uvedeno jinak, za index lomu dosazujte hodnotu pro vodu $n_r = 1{,}33$.*

a) *Závislost δ_k na vzdálenosti původního paprsku od osy kapky pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [2b]*

b) *Závislost I_k na vzdálenosti původního paprsku od osy kapky pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [2b]*

c) *Závislost δ_k, při kterém intenzita prošlého paprsku nabývá maxima, na indexu lomu kapaliny pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [2b]*

d) *Závislost I_k na δ_k za předpokladu, že na kapku dopadá široký svazek paprsků světla o stejném směru a intenzitě pro $k \in \{3, 4, 5\}$. [3b]*

Problém 6: *Můžete v přírodě pozorovat primární duhu i tehdy, když je slunce více než 42° nad obzorem? Navrhněte, v jaké situaci by k tomu mohlo dojít a vysvětlete proč. Ideálně se pokuste takový jev vyfotit.*

Poblíž primární duhy můžeme občas vidět také duhu sekundární, která vzniká dvěma vnitřními odrazy. Nachází se přibližně 8° nad duhou primární a má vůči ní převrácené pořadí barev (rozmyslete proč).

Třem vnitřním odrazům odpovídá velmi vzácná duha terciární, která se nachází 43° okolo slunce, tedy na opačné straně oblohy než dvě duhy předchozí.

Duhy vyšších řádů bývají většinou tak slabé, že je pouhým okem nelze zaznamenat. Na vnitřní straně primární duhy a na vnější straně duhy sekundární se však občas objevují ještě podružné duhové oblouky, které se jeví jako několikanásobné opakování slábnoucího spektra barev. Jejich vznik souvisí s interferencí paprsků na kapce poblíž trajektorie odpovídající maximu intenzity.

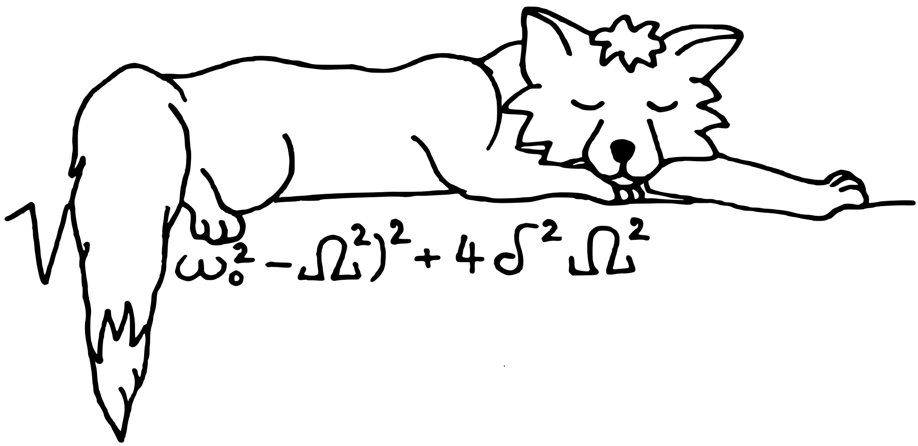
Problém 7: *Najděte v přírodě úplnou duhu jako celý kruh, sekundární duhu a podružné duhové oblouky a vyfoťte je. Velký bodový bonus dostanete, pokud se vám podaří vyfotit také terciární duhu.*

[7] Řešení této úlohy prosím posílejte ve formě grafů s komentářem, neposílejte kód, nejde za něj dostat plný počet bodů.

Na závěr tohoto dílu se zamyslíme nad jakousi inverzní situací. Dosud jsme uvažovali, že máme kapky kapaliny v atmosféře tvořené vzduchem, tj. $n_1 < n_2$. Co by se ale stalo, kdyby nastal opačný případ, tj. $n_2 < n_1$? Například kdybychom uvažovali vzduchovou bublinu ve vodě? Co by za takových podmínek nastalo, se dozvíte při řešení následující úlohy.

Problém 8: *Rozhodněte, zda vznikne duha nebo jiný zajímavý úkaz, prochází-li světlo vzduchovou bublinou ve vodě. Své rozhodnutí podpořte úvahou, numerickým výpočtem, nebo experimentem.*

Evžen & Karel; `Janskvara@email.cz`
e-mailová konference: `atmosfera@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka



Téma 5 – Nekonečna

Nejprve jedna omluva: Úloha 4 a problém 5 minulého dílu nebyly stavěny na řešení „Postupně číslujeme, a když narazíme na již použité racionální číslo, tak jej přeskočíme a číslujeme dál.“ Toto řešení je úplně správně (i když ne úplně formální), ale v úloze 4 o něco jednodušší než řešení původně zamýšlené (viz níže). Problém 5 je tímto naprosto bezpředmětný a proto bych ho rád doplnil:

Problém 5 (28.1): Dokažte, že je racionálních čísel stejně jako přirozených, a to tak, že každému racionálnímu číslu přiřadíte nějakým „vzorečkem“ číslo přirozené tak, že žádné přirozené číslo nezůstane nepřiřazeno. (Neboli řečí tohoto 2. dílu, nalezněte bijekci $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.)

„Vzorečkem“ je myšleno například: Číslům $\frac{1}{n}$ přiřadíme $2n$ a číslům $\frac{2n}{2n+1}$ přiřadíme $2n + 1$.

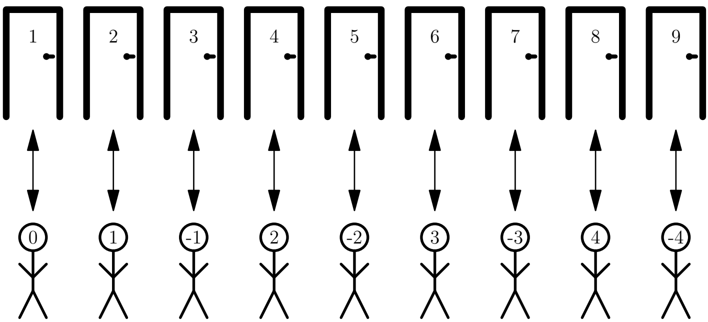
Ještě bych doplnil, že důkaz $\aleph_0^2 = \aleph_0$ z minulého dílu neposílá hosty do nějakých neznámých pokojů, ale můžeme si pomocí součtu aritmetické řady spočítat, že host z a-tého sedadla b-tého autobusu půjde do pokoje číslo

$$\frac{(a + b - 2) \cdot (a + b - 1)}{2} + a.$$

Vzorová řešení 1. dílu

Úloha 1

Zadání:
Tak co, už víte, jestli je více přirozených, nebo celých čísel? Odpověď zdůvodněte.



Obrázek 34: K řešení úlohy 1.

Řešení:
Zde bylo úplně nejjednodušší říct, že záporná čísla jsou vlastně totéž co přirozená, jen se znaménkem mínus. Celá čísla se skládají z přirozených, záporných a nuly (na tu většina řešitelů, kteří zvolili toto řešení, zapomněla), tedy jich je $2\aleph_0+1 = \aleph_0$.

Samozřejmě šlo i přímo ukázat, že pokud přijdou hosté očíslovaní celými čísly, tak hosta s číslem $n > 0$ ubytujeme do pokoje $2n$ a hosta s číslem $n \leq 0$ pošleme do pokoje $-2n + 1$.

Úloha 2

Zadání:
Nechť je n přirozené. Pokud $\aleph_0 = \aleph_0 + n$, tak zřejmě $\aleph_0 - n = \aleph_0$. Stejně tak pokud $\aleph_0 = n \cdot \aleph_0$, potom $\aleph_0 = \frac{\aleph_0}{n}$. Speciálně tedy víme, že když q je kladné racionální, pak $q \cdot \aleph_0 \pm n = \aleph_0$. Dokážete to ukázat bez použití úpravy rovnic, pouze s „hotelovým argumentem“?

Řešení od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Kvapila:

Jeden z hostů přišel dnes velmi brzo ráno v podnapilém stavu do hotelu a vzbudil téměř celé patro. Toto chování je určitě nevhodné, a proto nás Hilbert požádá o vyhození tohoto hosta. Důkaz $\aleph_0 - 1 = \aleph_0$ provedeme obdobně jako přičtení (ubytování). Vyhodíme hosta a všechny lidi za ním přestěhujeme do pokoje $i' = i - 1$. Takto jsme ukázali, jak můžeme jednoho hosta vyhodit. Matematickou indukcí potom můžeme vyhodit n hostů. To nám dá vztah k vyhození n hostů: $\aleph_0 - n = \aleph_0$.

V textu bylo ukázáno, jak ubytovat nekonečný autobus. Zájezd je ale u konce, a tak hosty potřebujeme dostat zpět do autobusu. V textu jsme ubytovávali do lichých pokojů. Teď ale všichni z lichých pokojů odjeli a my tedy přestěhujeme všechny zbývající hosty do pokoje $i' = \frac{i}{2}$. Tímto nám sice „polovina“ hostů odjela, ale ještě $\aleph_0$ zbylo, tedy $\frac{1}{2}\aleph_0 = \aleph_0$. Podobně nám může zbýt i $\frac{1}{3}\aleph_0$: každý třetí v hotelu zůstane a přestěhuje se do pokoje $i' = \frac{i}{3}$, zbytek odjede pryč. Z toho vyplývá $\frac{1}{3}\aleph_0 = \aleph_0$. Analogicky zjistíme, že toto bude platit obecně i pro $\frac{1}{n}\aleph_0 = \aleph_0$.

Rovnici $q \cdot \aleph_0 \pm n = \aleph_0$ můžeme přepsat na $\frac{a}{b} \cdot \aleph_0 \pm n = \aleph_0$, kde a a b jsou přirozená nesoudělná čísla. Víme už, že $\aleph_0 \cdot a = \aleph_0$ a dokázali jsme, že i $\frac{1}{b}\aleph_0 = \aleph_0$. Rovnici tedy upravíme na $\aleph_0 \pm n = \aleph_0$. V textu je dokázaná varianta $\aleph_0 + n = \aleph_0$ a varianta s mínus je dokázaná v prvním odstavci. Takto jsme „hotelově“ dokázali celou rovnici.

Úloha 4

Zadání:
Je více přirozených, či racionálních čísel?

Řešení:
Je jich stejně. Nejdříve ukážeme, že kladných racionálních čísel je $\aleph_0$ (se složitějším přiřazením to můžeme ukazovat rovnou pro všechna, ale proč si to dělat těžší) a následně stejně jako v první úloze použijeme $2\aleph_0 + 1 = \aleph_0$.

Přirozená čísla jsou podmnožinou (kladných) racionálních, tedy racionálních čísel je alespoň tolik jako přirozených. Naopak každé (kladné) racionální číslo lze vyjádřit jako $\frac{a}{b}$, kde a, b jsou přirozená nesoudělná. Tedy racionálním číslům můžeme přiřadit dvojice přirozených čísel. Některé dvojice přirozených čísel zůstanou nepřiřazeny, ale to nám nevadí, my jsme přiřadili nějakou podmnožinu dvojic přirozených čísel (jen ty dvojice, kde jsou čísla nesoudělná), tedy tato množina má nejvýše tolik prvků, kolik je dvojic.

Tedy jsme ukázali, že racionálních čísel je nejméně $\aleph_0$ a nejvýše $\aleph_0^2 = \aleph_0$, tudíž podle faktu ze zadání, známého jako Cantor-Bernsteinova věta, je racionálních čísel $\aleph_0$, tj. stejně jako přirozených.

Úloha 6

Zadání:
Cantorovu diagonální metodu lze použít pro dokázání, že reálných čísel (pro jednoduchost z intervalu $[0,1)$*, tedy menších než 1 a větších rovno 0) není stejně jako přirozených. Ukažte, jak na to.*

Řešení:
Následující řešení je velmi pěkné, ale stejně jako ostatní se nechalo nachytat na malou drobnost. Čtěte pozorně:

Řešení od Mgr.[MM] Daniela Skýpaly:

> Reálné číslo v intervalu $[0,1)$ je vlastně přesně dáno svou desetinnou částí. A desetinná část je jen nekonečná posloupnost číslic 0 až 9 (pokud končí, prohlásíme zbytek za nekonečnou posloupnost nul). A pokud si z nich uděláme tabulku (tj. očíslujeme je přirozenými čísly a napíšeme pod sebe v tom pořadí) a vezmeme číslice na diagonále, aplikujeme na každou číslici funkci $f(x) = 9-x$, potom tato posloupnost v hotelu není, protože se liší v prvním řádku na první buňce, v druhém řádku na druhé, ...

Tak. Pojďme si očíslovat reálná čísla v pořadí 0.9, 0.1, 0.01, 0.001, atd:

$$0.\mathbf{9}0000000\ldots$$
$$0.1\mathbf{0}000000\ldots$$
$$0.01\mathbf{0}00000\ldots$$
$$0.001\mathbf{0}0000\ldots$$
$$0.0001\mathbf{0}000\ldots$$
$$0.00001\mathbf{0}00\ldots$$
$$\vdots$$

Číslo, o kterém řešení tvrdí, že v této posloupnosti není, je $0.099999\ldots$ Ale já s ním nesouhlasím. Jistě mi věříte, že $\frac{0.1}{3} \cdot 3 = 0.1$. Ale když se podíváme na $\frac{0.1}{3} = 0.033333\ldots$ a následně to vynásobíme třemi: $0.033333\ldots \cdot 3 = 0.099999\ldots$ Tedy zřejmě $0.1 = 0.099999\ldots$

Co je na tom řešení tedy špatně? Jenom myšlenka, že každé reálné číslo odpovídá právě jednomu (nekonečnému) desetinnému zápisu. Více o vztahu desetinných zápisů a reálných čísel si povíme ve čtvrtém díle.

Teď však potřebujeme řešení opravit. Problém je způsoben číslem končícím na nekonečně mnoho devítek. Můžeme tedy číslice měnit jen třeba na jedničky a nuly (nuly změníme na jedničky a vše ostatní na nuly). Stále ale budeme mít problém, pokud se takové číslo vyskytne v tabulce. To vyřešíme tak, že při vyjadřování reálného čísla (v případě, že máme na výběr) vezmeme vyjádření, které nekončí na nekonečně devítek.

Úloha 7

Zadání:
Ukažte, že kdyby do plného hotelu s pokoji označenými čárovými kódy přijel autobus se sedačkami očíslovanými přirozenými čísly, tak by se noví hosté mohli bez problému nastěhovat, tedy že $\aleph_1 + \aleph_0 = \aleph_1$.

Řešení od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Martina Bočka:

> K ubytování nám stačí pouze velice malá část pokojů. A to pokoje jejichž kódy pomocí binární soustavy popisují přirozená čísla. To jsou kódy, které končí nekonečně mnoha bílými čarami. Tedy například kódy:
>
> $$1000000000000\ldots$$
> $$0100000000000\ldots$$
> $$1100000000000\ldots$$
> $$0010011000000\ldots$$
> $$1011010110000\ldots$$
> $$\vdots$$
>
> Každý z těchto kódů budeme vnímat jako číslo, které vyjadřuje. A každého z hostů v pokoji s číslem n pošleme do pokoje s číslem $2n$. Nově příchozího s číslem n ubytujeme do pokoje $2n - 1$.

Díl 2: Větší? Menší? Rovno?

V minulém díle jsme se podívali na nekonečno jako množství. Definovali jsme si $\aleph_0$ („alef nula“) jako počet přirozených čísel a následně ukázali, že se rozumným přičtením, odečtením a vynásobením nezmění.

Nakonec jsme objevili, že existuje i další nekonečno (počet nekonečných čárových kódů), které jsme si označili $\aleph_1$. Pro procvičení můžete nahlédnout, že se vůči přirozeným číslům chová stejně jako $\aleph_0$:

Úloha 1 [4b]: *Nechť je n přirozené a nechť q je kladné racionální. Dokažte, že*

$$q \cdot \aleph_1 \pm n = \aleph_1.$$

Obě nekonečna se tedy chovají podobně, ale také už jsme si ukázali, že nejsou shodná. U dvou množství bychom ale očekávali, že pokud se nerovnají, jeden bude větší a druhý menší. Jak ale porovnat nekonečné počty?

V úloze 7 z minulého čísla si můžete dokázat, že $\aleph_1 + \aleph_0 = \aleph_1$. Z toho plyne $\aleph_0 + \aleph_1 \neq \aleph_0$. Tedy mohli bychom definovat větší z počtů tak, že se přičtením menšího nezmění. To sice odpovídá tomu, že ve velkém počtu (např. 1000000) se malý (např. 13) ztratí ($1000000+13 \approx 1000000$), ale pro konečné množiny (hlavně ty podobně velké) to vůbec nefunguje ($8 + 7 = 15 \not\approx 8$). Tak se můžeme zamyslet, jak porovnáváme běžně:

Vezměme si třeba taková čísla 2021 a 2013. Začínáme od nejvyššího řádu, kterým jsou zde tisíce. Ty máme v obou číslech 2, tedy vezmeme 2000 z jednoho a 2000 z druhého čísla (můžeme si je představovat jako počet hostů a pokojů) a spárujeme tyto 2000 (ubytujeme 2000 hostů do 2000 pokojů). V řádech stovek nic není, takže můžeme pokračovat na desítky. Tam je v druhém čísle 1 a v prvními 2, proto 2 rozložíme na $1 + 1$. Tedy vezmeme 10 a 10, které spárujeme, a zbude nám v prvním čísle jedna desítka a nějaké jednotky, v druhém čísle jen jednotky. Tady bychom mohli skončit, protože víme, že číslo řádově větší (10) je i větší (než nějaké jednotky), nebo můžeme pokračovat:

Z prvního čísla nám zbývá $11 = 8 + 3$ a z druhého 3. Spárujeme 3 a z prvního nám zbude 8, zatímco z druhého nic, tudíž první je větší než druhé. Tedy konečné počty porovnáváme tak, že vše spárujeme a číslo, ze kterého něco zbude, je to větší. Jen u nekonečen si musíme dát pozor, že i při porovnávání $\aleph_0$ s $\aleph_0$ nám může něco zbýt[8], ačkoliv jsou porovnávané velikosti jsou stejně velké. Proto nelze říct, že něčeho je více než něčeho jiného, ale musíme použít neostrou nerovnost.

V naší hotelové terminologii to znamená, že hostů je nejvýše tolik co pokojů (tj. počet hostů je menší roven počtu pokojů) tehdy, když umíme hosty umístit do prázdného hotelu tak, aby v každém pokoji byl nejvýše jeden host (tj. pokoj může zůstat i prázdný), avšak umístili jsme všechny hosty.

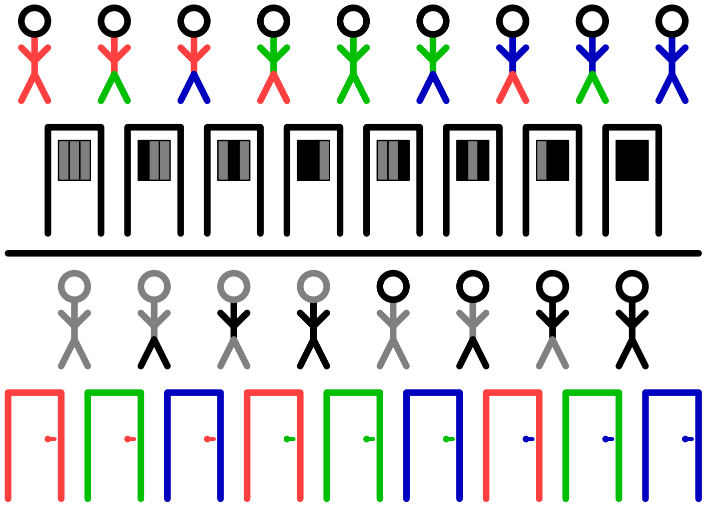
Druhý směr, tj. to že je hostů alespoň tolik co pokojů, můžeme samozřejmě definovat tak, že pokojů je nejvýše tolik co hostů. Existuje ale i jiný pohled: zrekonstruujeme hotel tak, aby v jednom pokoji mohl být libovolný počet hostů (tj. abychom mohli ubytovat všechny hosty, i když jich je ostře víc než pokojů). Pro zrekonstruovaný hotel můžeme říct, že počet hostů je větší roven počtu pokojů, když existuje ubytování (všech) hostů do prázdného hotelu tak, že v každém pokoji bude ubytován alespoň jeden host.

Tím jsme dostali neostré nerovnosti (alespoň tolik, nejvýše tolik), kdybychom však chtěli ostré (více, méně), tak není nic jednoduššího, než říct, že platí neostrá

[8] V minulém díle jsme si ukázali, že $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$. Při porovnávání $\aleph_0 = 1 + \aleph_0$ a $\aleph_0$ se nám spárují $\aleph_0$ a u prvního čísla (které je však stejné jako druhé) nám zbude 1.

nerovnost a zároveň neplatí rovnost. Dále můžeme získat jinou „definici“ rovnosti, a to pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty, která říká, že je-li něčeho alespoň tolik a zároveň nejvýše tolik co něčeho jiného, tak je toho stejně.

Úloha 2 [1b]: *Porovnejte oběma způsoby počet trojmístných čárových kódů a počet možností, jak obarvit dvě různé věci, každou právě jednou z tří barev.*



Obrázek 35: K úloze 2.

Úloha 3 [3b]: *Pomocí Cantorovy-Bernsteinovy věty ukažte, že nekonečných čárových (dvoubarevných) kódů je stejně jako nekonečných trojbarevných kódů.*

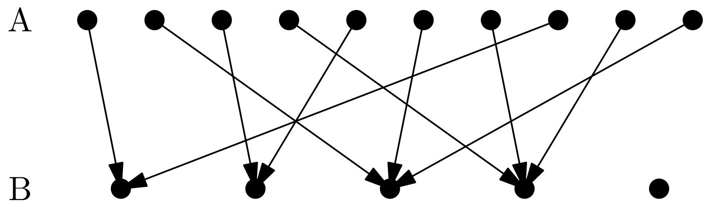
Obrázek 36: K úloze 3.

Úloha 4 [3b]: *Ukažte, že* $\aleph_1 > \aleph_0 > n$ *pro libovolné přirozené* n.

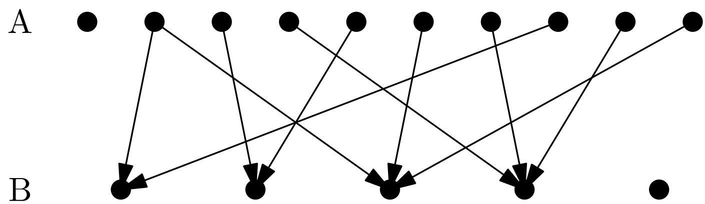
Závěr nekonečného množství – a teď všechno formálně

Množiny formálně definovat nebudeme, o tom je celý předmět na Matfyzu, nám stačí jen představa, že množina je jakási „skupina“ čehokoliv (čísel, ovoce, aut, domů, …).

Funkci jste už nejspíše potkali, tak jen ve stručnosti: Funkce (neboli zobrazení) f množiny A do množiny B (značeno $f : A \to B$) každému prvku množiny A přiřazuje právě jeden prvek množiny B (značeno $f(a) = b$, $a \in A$, $b \in B$).

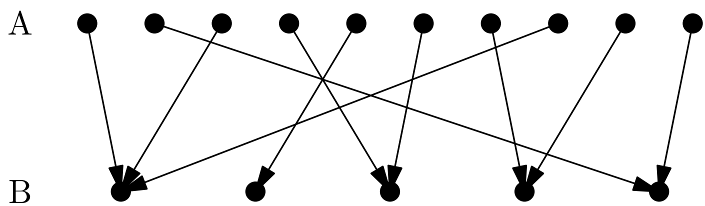


Obrázek 37: Funkce, která není *prostá* ani *na*.



Obrázek 38: Příklad něčeho (relace), co není funkce. Prvnímu bodu A není nic přiřazeno a druhému jsou přiřazeny dva body.

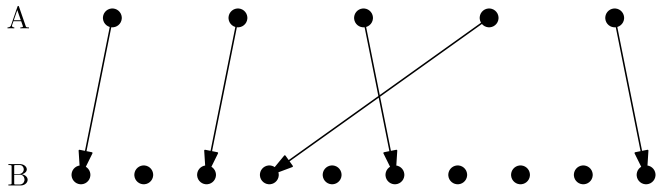
Takto definované funkce tedy mluví o každém prvku množiny A a některých prvcích množiny B. Může se však stát, že každý prvek množiny B je (alespoň jednou) přiřazen některému prvku z množiny A.[9] V takovém případě mluvíme o funkci „na“ (množinu B). To odpovídá našemu rekonstruovanému hotelu a požadavku, aby byl v každém pokoji alespoň jeden host.



Obrázek 39: Funkce, která je *na*.

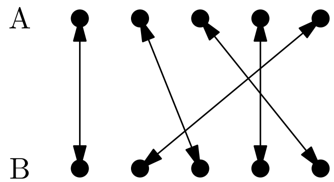
[9] Tj. pro všechna $b \in B$ existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$.

Funkce obecně mohou zobrazovat více prvků na jeden. Pokud však máme funkci, která každý prvek množiny B přiřadí nejvýše jednomu prvku množiny A, nazýváme ji „prostá“ a odpovídá původnímu hotelu, kde v jednom pokoji byl ubytován nejvýše jeden host.



Obrázek 40: Funkce *prostá.*

Koneckonců často potkáme i funkce, které jsou prosté i na, tedy dobře párují prvky množiny A s všemi prvky množiny B. Takové funkci říkáme bijekce. To odpovídá našemu úplně nejpůvodnějšímu hotelu, kde nejenom v každém pokoji byl pouze jeden host, ale všechny pokoje byly obsazené.



Obrázek 41: Bijekce.

Naše předchozí definice se tak dají přepsat jako:

- Množiny A, B jsou stejně mohutné (mají stejný počet prvků), pokud mezi nimi existuje bijekce.
- Množina A má nejvýše takovou mohutnost jako množina B, pokud existuje prostá funkce A do B.
- Množina A má alespoň takovou mohutnost jako množina B, pokud existuje funkce A na B.

Toť vše k nekonečnému množství a pravděpodobně i vše, co kdy potkáte, když se nebudete zajímat přímo o teorii množin. V dalších dílech se podíváme na nekonečna, ke kterým se věci „blíží“.

Úloha 5 [2b]: *Nyní už umíme plně porovnat počet přirozených a reálných čísel. Ukažte, jak! (Můžete využít úlohu z minulého dílu, i když jste ji nevyřešili.)*

Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
e-mailová konference: `nekonecna@mam.mff.cuni.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 6 – Růst monokrystalů

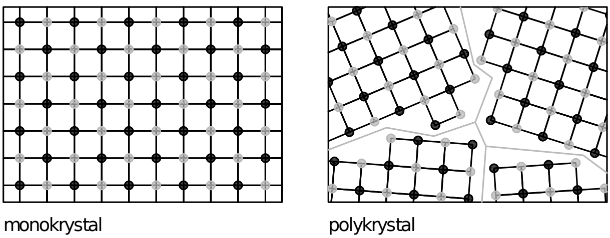
Krystaly jsou krásné, fyzikálně zajímavé a nezbytné pro správnou funkci mnoha zařízení! V tomto experimentálním tématku vám ukážeme, jak se krystaly připravují – pěstují. K tomuto tématku plánujeme uspořádat ještě během prvního pololetí tématkovou víkendovku v Praze, kde budou přednášky o krystalech, ale hlavně velká exkurze k pecím na přípravu monokrystalů na Matfyz. Společně v těchto pecích roztavíme materiály, vypěstujeme monokrystaly a pomocí difrakce rentgenového záření ověříme, že jde opravdu o monokrystaly a naše experimenty byly úspěšné. Určitě se pokusíme o růst syntetického rubínu a možná zkusíme i křemík. Kapacita na této víkendovce bude omezená a ti z vás, kteří už pošlou řešení, budou mít přednost. Je na co se těšit! Pusťte se tedy s vervou do studijního textu a přípravy krystalů!

UPOZORNĚNÍ: Příprava krystalů je časově velmi náročná, není tedy dobrý nápad pustit se do úloh těsně před deadlinem.

Díl 1: Růst z roztoku

Atomy většiny pevných látek jsou uspořádány do krystalové mřížky v pravidelně se opakujících vzorcích. Takovým látkám říkáme krystalické látky. Každý atom má své pevně dané místo, okolo kterého kmitá v závislosti na své teplotě. Uspořádání atomů pak určuje spoustu fyzikálních vlastností – tvrdost, pevnost v tahu, elektrickou vodivost, magnetické vlastnosti, rychlost světla v krystalu a další.

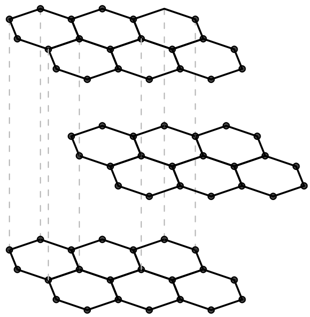
Krystalické látky se mohou vyskytovat buď ve formě monokrystalu, nebo polykrystalu. Monokrystal má periodickou strukturu v celém svém objemu. Existuje tam nějaký motiv, který se opakuje na všechny strany – představte si například čtverečkovaný papír. Naopak polykrystal se skládá z menších, monokrystalických částí, které jsou na sebe náhodně nalepeny. Těmto částem se říká domény nebo zrna. Většina běžných materiálů je právě v polykrystalické formě.



Obrázek 42: Rozdíl mezi monokrystalem a polykrystalem.

Studium monokrystalů je velmi zajímavé mimo jiné kvůli jejich anizotropii. Řekneme-li, že jsou krystaly anizotropní, znamená to, že se jejich vlastnosti liší v závislosti na tom, v jakém krystalografickém směru je měříme. Typickým příkladem je grafit, neboli tuha.

Grafit je složen z vrstev atomů uhlíku uspořádaných do rovinných šestiúhelníkových sítí. Ve svislém směru je pak grafit velice měkký a křehký – když s tužkou přejedete po papíru, tak se vrstvy grafitu ulamují a zůstávají na papíře. Když ale vezmete pouze jednu vrstvu, jedná se o tzv. grafen, materiál, jehož pevnost je větší než pevnost oceli.



Obrázek 43: Grafenové vrstvy tvořící grafit.

Anizotropii můžeme dobře pozorovat jenom u monokrystalů. V polykrystalech se fyzikální vlastnosti zprůměrují skrze jednotlivá mikroskopická zrna, která jsou na sebe nalepena v náhodném směru. Proto u většiny běžných materiálů v polykrystalické formě nepozorujeme žádnou směrovou závislost fyzikálních vlastností. Studium fyzikálních vlastností čistého materiálu je proto obecně možné jenom na monokrystalech.

Problém 1: *Monokrystaly se kromě studia vlastností materiálů používají i v praxi. Najdi nějaký příklad, kde se monokrystaly používají, a napiš nám o tom. Napiš, jaký materiál se používá, jaký je jeho účel a proč je potřeba, aby byl monokrystalický. Proč nám nestačí polykrystal?*

Jak se monokrystaly připravují? Spoustou různých a velmi zajímavých způsobů! Zde si řekneme několik základních informací o růstu krystalů a potom probereme, jak se krystaly rostou z roztoku.

Problém 2: *Zajímá tě, jak ještě jinak lze monokrystaly připravovat? Zkus najít na internetu nebo v učebnici nějakou metodu přípravy monokrystalů a sepiš nám o ní článek, který si potom budou moci přečíst ostatní řešitelé! Napiš, jak příprava probíhá, jaké materiály se touto metodou připravují a jaké to má výhody či nevýhody.*

Naší velkou výhodou je, že pokud je materiál ve formě monokrystalu, je to energeticky výhodnější uspořádání atomů, než když je ve formě polykrystalu. Částice v přírodě chtějí mít co nejmenší energii. Pokud tedy vytvoříme vhodné podmínky, atomy si na příslušná místa posedají samy.

Růst monokrystalů probíhá velmi pomalu. Každá prudká změna teploty, tlaku nebo jiných parametrů typicky vyvolá prudkou krystalizaci a tedy vznik polykrystalu. Při růstu monokrystalů musíme tedy dát atomům čas, aby si posedaly na správná (a energeticky nejvýhodnější) místa.

Jak se roste krystal z roztoku? Vybereme materiál a rozpouštědlo. Vytvoříme nasycený roztok. Do nasyceného roztoku vložíme malý krystal žádaného materiálu, tzv. *zárodek* neboli *seed*. Na povrch tohoto krystalku budou potom sedat atomy z roztoku a krystal bude dále růst. Roztok se zárodkem dáme na místo se stálou teplotou a necháme roztok pomalu vypařovat. Když se vypaří malé množství rozpouštědla, roztok se najednou stane přesyceným, atomy posedají na povrch zárodku a krystal nám o něco vyroste.

Velký problém 3: *Zkuste vyrůst co největší krystal z roztoku!*

Máme pro vás několik rad:

1. Materiál

   Volba materiálu je na vás, doporučujeme ale tyto tři materiály: kuchyňská sůl (NaCl), modrá skalice ($CuSO_4 \cdot 5\,H_2O$) a síran draselno-hlinitý (kamenec, $KAl(SO_4)_2 \cdot 12\,H_2O$), které se všechny rozpouští ve vodě. Modrá skalice se používá v zemědělství a čištění bazénů, síran draselno-hlinitý v potravinářství. Buď tyto materiály máte doma, nebo se dají koupit, nebo doporučujeme poprosit vašeho učitele nebo učitelku chemie. Zejména pokud budete připravovat krystaly ve vaší škole, věříme, že vám rádi vyjdou vstříc. Sůl použijte, pokud nemáte k dispozici nic jiného. Modrá skalice tvoří lepší a větší krystaly a síran draselno-hlinitý roste úplně nejlépe.

2. Nasycený roztok

   Není nasycený roztok jako nasycený roztok. Pro nejlepší výsledky je potřeba zajistit, aby byl roztok skutečně nasycený – tedy aby se v něm již opravdu žádné další množství látky nemohlo rozpustit. Takový roztok připravíte rozpouštěním a pravidelným mícháním roztoku s množstvím nerozpuštěného materiálu alespoň po dva dny. Po dvou dnech nasycený roztok přelijte do sklenice (ve které pak bude probíhat krystalizace) tak, aby v něm nebyla přítomna žádná nerozpuštěná látka. Lze použít například překapávací kávové filtry.

3. Kolísání teploty

   Jistě ze školy víte, že rozpustnost závisí na teplotě rozpouštědla. I střídání teplot mezi dnem a nocí vám může způsobit prudkou krystalizaci a tedy vytvoření polykrystalu nebo zakalených krystalů. Doporučujeme proto dát nádobku s roztokem na nějaké místo, kde je teplota stálá. Nabízí se buď sklep, nebo uzavřená skříňka, dveře skříňky jsou dostatečná izolace.

4. Vibrace a otřesy

   Potřebujete docílit stálých podmínek. Dejte si pozor, abyste neměli nádobu položenou třeba na ledničce, nebo někde, kde lidé často chodí.

5. Trpělivost

   Růst krystalu je velmi pomalý a obvykle platí, čím pomaleji a přirozeněji roste, tím vetší a hezčí kousky nakonec získáte. Takže buďte hlavně trpěliví a dejte krystalům potřebný čas na růst. Nerušte je, poradí si samy!

6. Jak vypadá správný krystal?

   Ideální výsledek je alespoň několik milimetrů (ještě lépe centimetrů) velký, průhledný krystal. Pokud budete mít hezký krystal, schovejte si ho, zkusíme o něm něco zjistit na tématkové víkendovce.

Průběžné výsledky

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	4	5	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ A. Opl	4	81,3	33,0			9,0		42,0	42,0
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ K. Petrlíková	4	87,6	27,6		11,5			39,1	39,1
3.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kvapil	4	91,7	16,8	8,0			12,4	37,2	37,2
4.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ J. Polách	3	36,8	26,4				10,4	36,8	36,8
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Čtvrtečka	2	126,1				21,0	7,9	28,9	28,9
6.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Z. Mareš	3	26,6	20,8		3,8	2,0		26,6	26,6
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ D. Skýpala	4	56,0		5,0			17,9	22,9	22,9
8.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Chrostek	2	20,0	11,1				5,9	17,0	17,0
9.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ P. Jendele	3	29,1	10,9				5,9	16,8	16,8
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ T. Flídr	4	119,4		3,0			13,5	16,5	16,5
11.	J. Krejčí	2	15,8	10,8				5,0	15,8	15,8
12.	J. Rypl	3	15,6	11,3		2,3	2,0		15,6	15,6
13.	O. Popovský	2	15,3			6,6	1,5	7,2	15,3	15,3
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Boček	3	72,5			0,5		12,9	13,4	13,4
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ V. Polášková	3	42,0			9,5		3,0	12,5	12,5
16.	V. Faltus	2	12,3	12,3					12,3	12,3
17.	R. Novák	2	12,2		1,0		4,0	7,2	12,2	12,2
18.	A. Kolník	3	12,0	4,0	8,0				12,0	12,0
19.	M. Smrčka	2	11,6			9,1	2,5		11,6	11,6
20.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Tichý	2	124,6					10,9	10,9	10,9
21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ P. Hladík	4	53,1			1,6		8,5	10,1	10,1
22.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Fof	4	220,4		0,0			9,0	9,0	9,0
23.	L. Vávra	3	8,2			7,8		0,4	8,2	8,2
24.–25.	M. Haikl	3	7,5					7,5	7,5	7,5
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ M. Vícha	3	19,9					7,5	7,5	7,5
26.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Jůzková	4	57,4					6,5	6,5	6,5
27.	J. Škopek	3	5,9					5,9	5,9	5,9
28.	J. Křimská	3	5,5			4,8		0,7	5,5	5,5
29.	J. Tregler	2	3,9					3,9	3,9	3,9
30.	M. Steinhauserová	Z8	3,5	2,7				0,8	3,5	3,5
31.	R. Mayerová	Z9	3,0	2,2				0,8	3,0	3,0

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 1	2	3	4	5	$\sum_0$	$\sum_1$
32.	R. Zábranská	1	2,2			1,9		0,3	2,2	2,2
33.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ J. Knillová	3	89,8				2,0		2,0	2,0
34.	V. Verner	1	1,5					1,5	1,5	1,5
35.	L. Poljaková	2	1,4			0,7		0,7	1,4	1,4

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina obsahuje všechny body za řešení zaslaná do 1. deadlinu předchozí série. Body za řešení zaslaná později obsahovat nemusí.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M