STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVIII

Číslo 1

# M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

## Milí řešitelé současní a snad budoucí,

v rukou držíte první číslo nového ročníku časopisu M&M. O co jde? Řečeno jednou větou, zkuste se zamyslet nad zajímavými problémy a svá zjištění nám poslat. Podrobnější informace se dozvíte na našem webu[1] nebo v přiloženém letáčku[2]. Zde jen dodáme, že za úspěšné řešení můžete získat odpuštění přijímacích zkoušek na MFF UK, ceny jako knihy nebo deskové hry, ale také pozvání na týdenní **soustředění**, které pořádáme na jaře a na podzim. Nově můžete také získat M&Mí ponožky (o tom více dále).

Pokud bude příznivá situace a bude možnost ho uspořádat, uskuteční se letošní podzimní soustředění 16.–24. října. K pozvánce vás mohou dostat blíž i vaše příspěvky k prvnímu číslu, pokud nám je pošlete do termínu **21. září**.

S novým ročníkem samozřejmě přichází úplně nová témata! A je jich rovnou pět. V průběhu možná nějaká skončí a nějaká nová začnou, ale to se nechte překvapit.

**Elektrické sítě** jsou téma především fyzikální, lehce prolínající se s teoretickou informatikou. V tomto díle se naučíme využívat informatické grafy k počítání elektrických charakteristik obvodů, v těch dalších si povíme, jak pomocí toho najít ideální vyplnění obdélníku čtverci. Že to zní jako dost nesouvisející úlohy z různých oborů? Nevadí, jsme přece multioboroví!

**Oware** nám ukáže, jak si lidé v jiných částech světa umí krátit čas jen s pomocí pár semínek a jednoduchých pravidel. My se budeme snažit vymyslet optimální strategii pro tuto hru. Pokud své nápady implementujete do skriptu, můžete se zúčastnit turnajů, které budeme pravidelně vyhlašovat.

**Lingvistika** je obor, který jsme tu dlouho neměli, avšak k matematice a informatice nemá tak daleko, jak by se mohlo zdát. Budeme se snažit rozluštit zákonitosti starých jazyků, v tomto díle konkrétně chetitštiny.

**Pozoruhodným atmosférickým jevům** budeme přicházet na kloub v dalším tématu, převážně fyzikálním. Tentokrát se zaměříme na to, jak běžně prochází světlo atmosférou, že to rozhodně není cesta přímá a jak moc nás to může zmást.

**Nekonečna** jsou konečně téma matematické. Ukážeme si, že není nekonečno jako nekonečno a jak se chovají věci nekonečných velikostí. V tomto díle se budeme snažit ubytovat nekonečno hostů do nekonečného hotelu. Povede se nám to? No, občas.

Tím ale s novinkami nekončíme! Zasílání řešení e-mailem bylo nepraktické pro nás i pro vás, proto prosím od nynějška odevzdávejte své příspěvky vždy jen do **odevzdávátka**, které najdete na našem webu.

Ničeho se nebojte, zasílejte nám klidně i částečná řešení a uvidíte, že věci nemusí být tak složité, jak se na první pohled zdají. Budeme se těšit!

*Vaši organizátoři*

[1] `https://mam.matfyz.cz`

[2] Pokud čtete elektronickou verzi čísla, můžete ho najít na: `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/jak_resit.pdf`

## A jak že je to s těmi ponožkami?

Za každé číslo, ve kterém získáte alespoň $\pi$ bodů, dostanete ponožku v jedné ze čtyř barev. Ano, čtete správně, ponožku – jednotné číslo. Jak tedy získat pár stejněbarevných ponožek? Na to už jste možná přišli z Dirichletova principu[3]. Abyste měli jistotu, že budete mít dvě ponožky stejné barvy, musíte řešit každé z pěti čísel!

# Obsah




[3]Pokud nevíte, o co se jedná, nelekejte se vznešeného názvu, nejde o nic komplikovaného, vizte například `https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichlet%C5%AFv_princip`.

# Zadání a řešení témat

**1. deadline: 21. 9. 2021 | 2. deadline: 12. 10. 2021**
**Řešení odevzdaná do 21. 9. se započítají pro účast na soustředění.**

## Téma 1 – Elektrické sítě

*Elektrické sítě jako grafy? Cože? Jak to bude vypadat? A proč bychom to dělali? Bude nám to k něčemu?*

Nejen na tyto otázky se bude snažit odpovědět toto tématko. Budeme se zaobírat jiným pohledem na elektrické sítě a výpočty v nich. Použijeme k tomu grafy, avšak ne ty obyčejné matematické, ale grafy z pohledu informatického. Doprovodné texty předpokládají, že jste již o takových grafech slyšeli, ale pokud tomu tak není, nezoufejte. Vše, co budete potřebovat, je jen představa, jak takový graf vypadá – že má nějaké body neboli vrcholy a nějaká spojení mezi vrcholy neboli hrany, co je to orientovaná hrana (vede z nějakého vrcholu do jiného vrcholu konkrétním směrem) a že existuje něco jako multigraf (mezi dvěma vrcholy může být více hran).[4]

### Díl 1: Sítě jako grafy

V tomto díle tématka si ukážeme elektrické sítě a zavedeme si značení. Dále si zopakujeme fyzikální vzorce a zákony, spočítáme si nějaké příklady a poté si ukážeme několik fíglů, jak počítání zadaných příkladů zjednodušit.

#### Grafy a značení

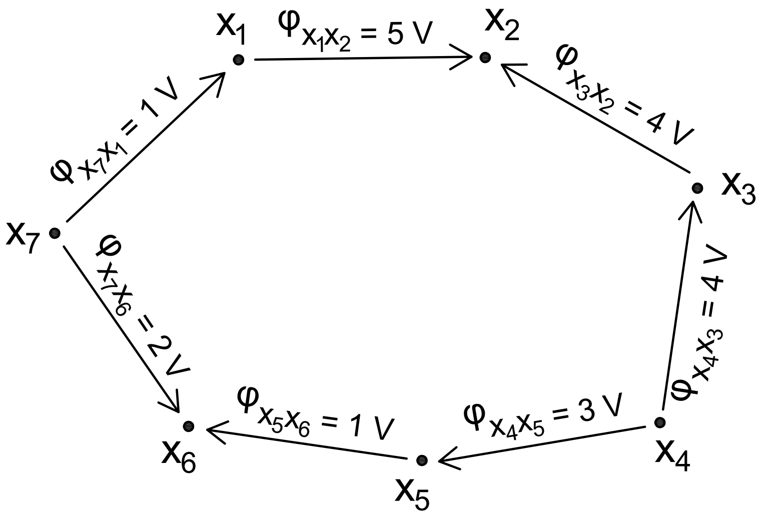
Jak jsme již uvedli, budeme se na elektrické sítě dívat jako na grafy složené z vrcholů a hran. Konkrétněji se bude jednat o orientované multigrafy, což znamená, že hrany vedou z počátečního vrcholu do koncového a mezi dvěma vrcholy může být více orientovaných hran.

Hrany jsou orientované, tedy hrana $e_{AB}$ nechť vede z vrcholu $A$ do vrcholu $B$. Každé hraně $e_i$ přiřadíme nějaký odpor $R_i$. Odpory na hranách si můžete představit jako rezistory nebo jako přirozený odpor různě dlouhých a různě silných kabelů. Vrcholům přiřadíme jinou hodnotu, a to elektrický potenciál. Potenciál ve vrcholu $A$ budeme značit $\varphi_A$. Jednotky odporu jsou ohmy neboli $\Omega$ a jednotkami potenciálu jsou volty V.

Rozdíl potenciálů mezi dvěma vrcholy $\varphi_{AB}$ neboli napětí $U_{AB}$ vypočítáme jako $\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$. Zbývá nám zavést proud mezi dvěma vrcholy, ten budeme značit $I_{AB}$. Proud má jednotku ampér A.

Jelikož jsme si chytře zavedli orientované hrany, můžeme prohlásit, že $\varphi_{AB}$ je rozdíl potenciálů na hraně $e_{AB}$ a že $I_{AB}$ je proud na hraně $e_{AB}$.

[4] Pokud přeci jen vůbec netušíte nebo se chcete o grafech dozvědět více, můžete si dané pojmy nastudovat v kuchařce Korespondenčního semináře z programování. `https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/grafy/`




**Obrázek 1:** Cyklus vrcholů

## Využité fyzikální zákony

Důležité pro nás budou zákony Ohmův a Kirchhoffovy, které tu uvádíme pro připomenutí. Pokud je dobře znáte, můžete přeskočit k sekci Poznámka.

Ohmův zákon, který nejčastěji budeme využívat pro výpočet odporu $R_{AB}$, zní následovně:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{\varphi_{AB}}{R_{AB}}.$$

Před Kirchhoffovými zákony si uvedeme ještě jeden vztah. Mějme proud $I_{AB}$ na orientované hraně $e_{AB}$. Proud $I_{BA}$ (neboli proud v opačném směru) si definujeme jako $I_{BA} = -I_{AB}$. Stejně jako proud si můžeme zadefinovat i rozdíl potenciálů ($\varphi_{BA} = -\varphi_{AB}$). V Kirchhoffových zákonech se tedy nemusíme zaobírat znaménky, neboť je máme díky této definici ve výpočtu zahrnuta.

První Kirchhoffův zákon o proudu a smyčkách říká, že součet rozdílů potenciálů v cyklu vrcholů $x_1$, $x_2$ až $x_k$ je roven nule. (Cyklus vrcholů znamená, že jsou vrcholy po řadě spojeny hranami, tedy v grafu jsou hrany $e_{x_1x_2}$ nebo $e_{x_2x_1}$, pak $e_{x_2x_3}$ nebo $e_{x_3x_2}$ atd.)

$$\varphi_{x_1x_2} + \varphi_{x_2x_3} + \dots + \varphi_{x_{k-1}x_k} + \varphi_{x_kx_1} = 0$$

Ukažme si tento zákon na konkrétním cyklu. Mějme síť na obrázku 1 a dané rozdíly potenciálů. Pro smyčku platí

$$\varphi_{x_1x_2} + \varphi_{x_2x_3} + \varphi_{x_3x_4} + \varphi_{x_4x_5} + \varphi_{x_5x_6} + \varphi_{x_6x_7} + \varphi_{x_7x_1} = 0.$$

A jelikož $\varphi_{AB} = -\varphi_{BA}$, tak

$$\varphi_{x_1x_2} - \varphi_{x_3x_2} - \varphi_{x_4x_3} + \varphi_{x_4x_5} + \varphi_{x_5x_6} - \varphi_{x_7x_6} + \varphi_{x_7x_1} = 0.$$

Po dosazení hodnot

$$5\,\mathrm{V} - 4\,\mathrm{V} - 4\,\mathrm{V} + 3\,\mathrm{V} + 1\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{V} + 1\,\mathrm{V} = 0\,\mathrm{V},$$

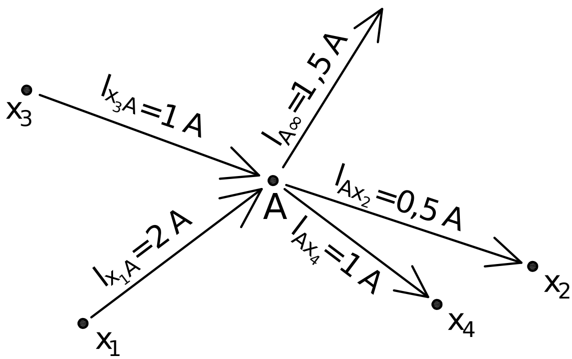
$$0\,\mathrm{V} = 0\,\mathrm{V},$$

tedy rozdíly potenciálů na hranách vyhovují zákonu.

Druhý Kichhoffův zákon se týká proudu procházejícího jedním vrcholem. Součet proudů vstupujících do vrcholu $A$ a proudů z něj vystupujících je nulový.

$$I_{Ax_1} + I_{Ax_2} + \cdots + I_{Ax_k} + I_{A\infty} = 0,$$

kde $x_1$ až $x_k$ jsou vrcholy, do nichž vede hrana z $A$ nebo z nichž vede hrana do $A$, a $I_{A\infty}$ je proud, který vychází ze sítě pryč ve vrcholu $A$. (Analogicky $I_{\infty A}$ je proud, který do sítě v daném vrcholu vstupuje.) Tyto proudy si můžeme představit třeba jako připojení spotřebiče ($I_{A\infty}$) a jako připojení kabelů do elektrické sítě ($I_{\infty A}$).




**Obrázek 2:** Proudy ve vrcholu

Tento zákon si ukážeme na konkrétním vrcholu. Dle obrázku 2 máme:

$$I_{Ax_1} + I_{Ax_2} + I_{Ax_3} + I_{Ax_4} + I_{A\infty} = 0$$

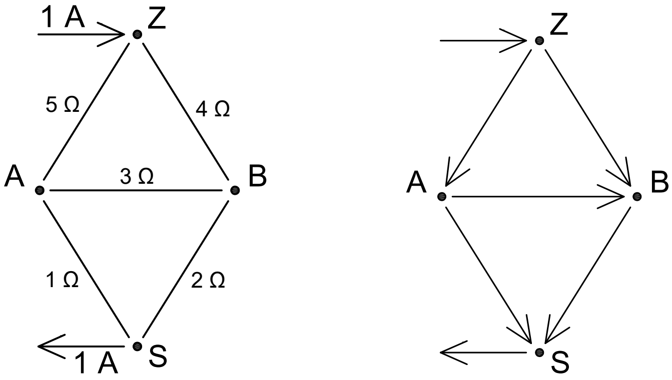
$$-I_{x_1A} + I_{Ax_2} - I_{x_3A} + I_{Ax_4} + I_{A\infty} = 0$$

$$-2\,\mathrm{A} + 0{,}5\,\mathrm{A} - 1\,\mathrm{A} + 1\,\mathrm{A} + 1{,}5\,\mathrm{A} = 0\,\mathrm{A}$$

$$0\,\mathrm{A} = 0\,\mathrm{A}$$

tedy proudy odpovídají 2. Kirchhoffovu zákonu.

Nyní si uvedeme poslední trik. Pokud známe rozdíl potenciálů mezi dvěma vrcholy ($\varphi_{AB}$), ale neznáme potenciály těchto vrcholů ($\varphi_A$ a $\varphi_B$), tak si můžeme potenciál jednoho vrcholu zvolit libovolně a ten druhý již dopočítáme. Tento postup avšak nemůžeme použít na více vrcholů v síti, protože by nám pak nemuselo správně vyjít napětí na hranách. Vždy je nejlepší si pevně zvolit $\varphi$ jednoho vrcholu (většinou budeme volit roven nule) a poté spočítat všechny $\varphi$ vrcholů, které můžeme.




**(a)** Zadání příkladu **(b)** Orientace hran

**Obrázek 3:** Počítání odporů

## Poznámka

V tomto tématu budeme všechny proudy uvádět v ampérech, napětí ve voltech a odpor v ohmech. Občas proto jednotku pro zjednodušení psát nebudeme.

## Příklad

Všechnu teorii máme již probranou, takže nastal čas spočítat si nějaký příklad. Pro jednoduchost budeme ze začátku uvažovat síť, do které proud vstupuje pouze v jednom vrcholu, zdroji $Z$, a vystupuje pouze z jednoho vrcholu, stoku $S$.

### Zamyšlení

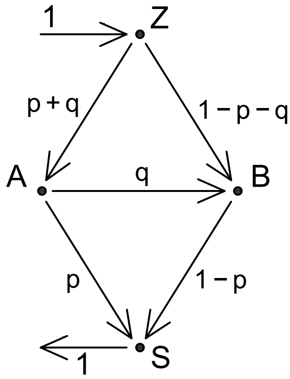
*Pokud známe proud procházející sítí a spočítáme rozdíl potenciálů mezi $Z$ a $S$, tak můžeme lehce pomocí Ohmova zákona spočítat i výsledný celkový odpor sítě mezi těmito dvěma vrcholy jako* $R = \frac{\varphi_Z - \varphi_S}{I}$.

Zkusíme si vypočítat, jaký odpor je mezi $Z$ a $S$ v grafu na obrázku 3a, když touto sítí prochází celkový proud 1 A a mezi vrcholy jsou rezistory o odporu 1, 2, 3, 4 a 5 Ω.

Hrany si pro lepší představu zorientujeme, jak je zakresleno v obrázku 3b.

Dalším krokem, který nás posune blíže řešení, je označení jednotlivých proudů na hranách. Využijeme přitom Kirchhoffových zákonů.

Dle zadání vstupuje do zdroje proud velikosti 1 A a ze stoku vystupuje proud 1 A. Proud na hraně $e_{AS}$ označíme $p$. Hrana $e_{BS}$ tedy bude mít proud $1-p$ (neboť dle zákona o proudu procházejícího jedním vrcholem máme $I_{SA} + I_{SB} + I_{S\infty} = (-p) + I_{SB} + (1) = 0$, tedy $I_{SB} = p - 1$ a $I_{BS} = -I_{SB} = 1 - p$). Další proudy nemůžeme odvodit pomocí známých proudů, a tak hraně $e_{AB}$ přiřadíme opět nějaký proud $q$. Poté již triviálně doplníme dle Kirchhoffových zákonů (obrázek 4).




**Obrázek 4:** Proudy na hranách

Nyní nám zbývá jen spočítat potenciály vrcholů $\varphi$. Jak jsme již uvedli, pokud známe napětí na hraně, ale neznáme potenciály vrcholů, můžeme si potenciál jednoho vrcholu zvolit libovolně a potenciály dalších vrcholů dopočítat dle hran mezi nimi. Nejjednodušší je si zvolit jeden z potenciálů vrcholů roven nule. Tedy u našeho příkladu $\varphi_S = 0\,\mathrm{V}$. Dle Ohmova zákona

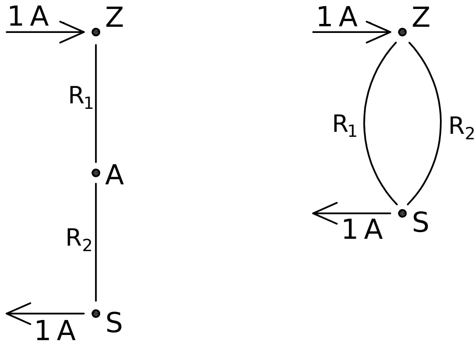
$$\begin{aligned}\varphi_A - \varphi_B &= R_{AB} \cdot I_{AB}\\ \varphi_A - \varphi_S &= 1\ \Omega \cdot p\\ \varphi_B - \varphi_S &= 2\ \Omega \cdot (1-p)\\ &\vdots\end{aligned}$$

**Úloha 1** [1b]: *Rozmyslete si, proč jsou hrany zorientovány právě tak, jako na obrázku 3b. Mohli bychom je zorientovat i jinak? Napište nám, proč ne, nebo uveďte jinou orientaci. Pokud zjistíte, že ano, zkuste si příklad vypočítat s touto orientací. Vyjde vám výsledek stejně?*

**Úloha 2** [1b]: *Dopište zbytek rovnic dle Ohmova zákona a dopočítejte potenciály jednotlivých vrcholů (nejprve si je vyjádřete pomocí p a q) a celkový odpor sítě. (Nápověda: Máme 5 neznámých včetně p a q a 5 rovnic, tedy úlohu lze jednoznačně vyřešit. Abyste spočetli potenciály vrcholů, musíte nejdříve vypočítat p a q. Nápovědu k výpočtu celkového odporu naleznete v zamyšlení výše.)*

## Paralelní a sériové zapojení

Abychom mohli odpor počítat jednodušeji, podíváme se na vzorce pro odpor při paralelním a sériovém zapojení rezistorů, znázorněno na obrázku 5. (V následujících příkladech předpokládáme, že do sítě vstupuje a z ní vystupuje proud velikosti 1 A.)




**Obrázek 5:** Paralelní a sériové odpory

V obou případech si zvolíme $\varphi_S = 0$. Pro sériové zapojení máme $\frac{\varphi_A - \varphi_S}{1} = R_1$, tedy $\varphi_A = R_1$. Dále $\varphi_Z - \varphi_A = R_2$ neboli $\varphi_Z = R_1 + R_2$. Celkový odpor je tedy

$$R = \frac{\varphi_S - \varphi_Z}{1} = R_1 + R_2.$$

Pro paralelní zapojení máme $\varphi_Z - \varphi_S = p \cdot R_1 = (1-p) \cdot R_2$, kde $p$ je proud na hraně s odporem $R_1$. Dále tedy

$$p = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\varphi_Z - \varphi_S = \varphi_Z = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Pokud si tento výraz zjednodušíme, vyjde nám vztah mezi odpory

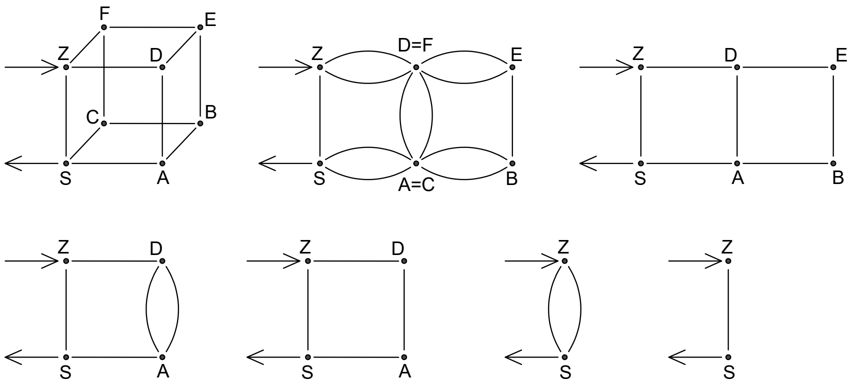
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Tyto dva vzorce nám velmi zjednoduší výpočty příkladů. Dalším zjednodušením bude fakt, že pokud se potenciály dvou vrcholů rovnají ($\varphi_A = \varphi_B$), tak vrcholy z našeho pohledu můžeme prohlásit za identické (viz dále).

## Odpor krychle

Vezmeme si nyní elektrickou síť tvaru krychle s odpory na hranách o velikosti 1 Ω a budeme počítat odpor mezi dvěma sousedními vrcholy. Postup je znázorněn na obrázku 6.

Nejprve zde využijeme trik se souměrností. Pokud v síti nalezneme nějakou osu, podle které je síť včetně velikostí odporů a poloh bodů (mezi kterými počítáme odpor) souměrná, můžeme tvrdit, že i řešení potenciálů bude stejné na obou stranách osy. Dva body, které osa souměrnosti zobrazuje na sebe, mají tedy stejný potenciál a tudíž je můžeme v síti považovat za jeden bod (můžeme je prohlásit za identické), což nám zde platí pro dvojice $A, C$ a $D, F$. Poté pomocí vzorce na výpočet paralelních odporů spočítáme celkové odpory hran $e_{ZD}$, $e_{DE}$, $e_{AD}$, $e_{AS}$ a $e_{AB}$. Dále využijeme výpočet sériových a paralelních odporů mezi $D$ a $A$, sériových a paralelních odporů mezi $Z$ a $S$ a nakonec tedy zjistíme odpor mezi $Z$ a $S$.




**Obrázek 6:** Odpor krychle

**Úloha 3** [3b]: *Doplňte do každé části obrázku 6 odpory na jednotlivé hrany odpovídající danému kroku výpočtu. Připomínáme, že v první části (před sloučením vrcholů) je na každé hraně odpor 1 Ω.*

**Úloha 4** [1b]: *Vraťte se k obrázku 3a a s nově nabytými znalostmi vypočítejte odpor mezi vrcholy $A$ a $B$. Uvažujte $A$ jako zdroj a $B$ jako stok, proud procházející sítí je* 1 $A$.

**Úloha 5** [3b]: *Vypočítejte odpor mezi každou dvojicí vrcholů v krychli. Každá hrana má odpor 1 Ω.*

**Úloha 6** [3b+3b+4b]: *Vypočítejte odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy:*

*a) pravidelného osmistěnu*

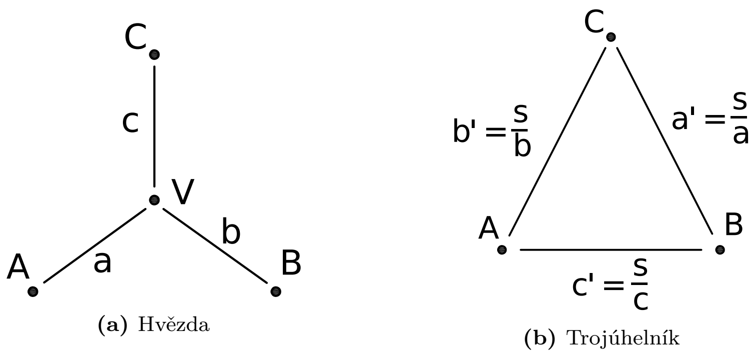
*b) pravidelného dvanáctistěnu*

*c) pravidelného dvacetistěnu*

*Odpor každé hrany je opět 1 Ω.*

## Hvězdicová transformace

Mějme graf se 4 vrcholy, kde vrchol $V$ je spojen s vrcholy $A$, $B$ a $C$ tak, jako na obrázku 7a. Tomuto grafu (nebo této části grafu) budeme říkat hvězda. Pokud vrchol $V$ není zdrojem ani stokem, můžeme ho odebrat a nahradit hrany z něj jinými hranami, vznikne nám tedy takzvaný trojúhelník. Odpory hran vypočítáme dle vzorců z obrázku 7b, kde $s = ab + bc + ca$.




**Obrázek 7:** Hvězda a trojúhelník

Tuto transformaci můžeme provést i v opačném směru.

**Úloha 7** [2b]: *Odvoďte vzorce pro výpočet odporů hvězdy $(a, b, c)$ z odporů trojúhelníku $(a'$, $b'$, $c')$. Neboli vyjádřete $a, b, c$ pomocí $a'$, $b'$, $c'$.*

## Transformační příklad

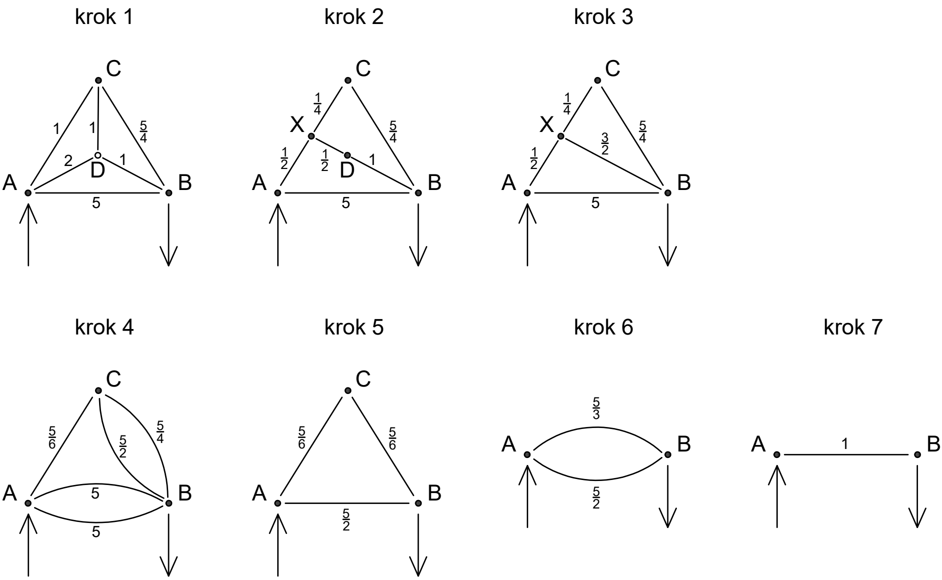
Vezmeme si čtyřstěn s odpory na hranách $1, 1, 1, \frac{5}{4}, 2$ a $5\,\Omega$ se zdrojem v bodě $A$ a stokem v bodě $B$. Na obrázku 8 je znázorněno, jak provádíme transformaci. Nejprve transformujeme trojúhelník $ADC$ na hvězdu $ADCX$, poté využijeme sériového zapojení mezi $X, D$ a $B$, pak znovu transformujeme, tentokrát však z hvězdy $ABCX$ na trojúhelník $ABC$.

**Úloha 8** [1b]: *Vezměte si graf z kroku 2 a provádějte pouze operace se vzorci na paralelní a sériové zapojení. Vypočítejte odpor mezi zdrojem a stokem.*

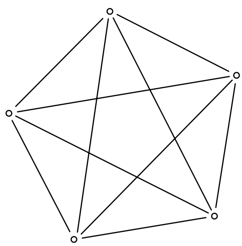
Odpory jednotlivých hran v úlohách 9, 10 a 11 mají velikost $1\,\Omega$.

**Úloha 9** [3b]: *Pomocí hvězdicových transformací vypočítejte odpor mezi středy dvou sousedících hran v pravidelném dvanáctistěnu.*

**Úloha 10** [3b]: *Vypočítejte odpor mezi libovolnými dvěma vrcholy v úplném grafu $K_5$ na obrázku 9. (Hrany se nikde neprotínají, i když to tak může vypadat. Vedou nad sebou a pod sebou.)*




**Obrázek 8:** Transformace



**Obrázek 9:** Úplný graf na 5 vrcholech

**Úloha 11** [5b]: *Dokažte, že odpor mezi libovolnými dvěma vrcholy v úplném grafu* $K_n$ *je* $\frac{2}{n}\ \Omega$*. (Úplný graf* $K_n$ *je takový graf o* $n$ *vrcholech, který má hrany mezi každými dvěma vrcholy.)*

*Kačka Vokálová;* `katerina.vokalova@matfyz.cz`
*e-mailová konference:* `elektricke-site@mam.mff.cuni.cz`
*odevzdávejte do odevzdávátka*

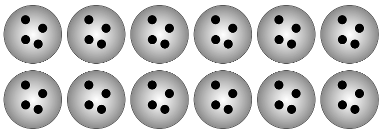
# Téma 2 – Oware

## Díl 1: Pravidla

V tomto tématku se podíváme na jednu z takzvaných mankalových deskových her. Říká se jí Oware (myslíme si, že výslovnost je přibližně „a-ua-ri“) a nás bude zajímat varianta známá jako Abapa. Pokud vám to nic neříká, tak to je v pořádku, pravidla jsou jednoduchá. Koukněme se na to, jak Alice hraje Oware proti Bobovi.

Mezi Alicí a Bobem jsou dvě řady po šesti ďolících. Řady budeme označovat jako Alicinu a Bobovu podle toho, ke kterému hráči je daná řada blíž. Na začátku hry jsou v každém ďolíku čtyři semínka a cílem Alice i Boba je být tím, kdo „sklidí“ (tedy odstraní ze hry) alespoň 25 z těchto 48 semínek.

Bob

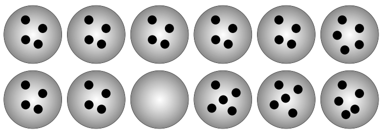


Alice

*Počáteční stav hry*

Alice a Bob se střídají v tom, kdo je zrovna na tahu. Když je na tahu Alice, vybere si libovolný ďolík ze svojí řady, vybere z něj všechna semínka a začne je po jednom „sít“ do ostatních ďolíků proti směru hodinových ručiček, počínaje ďolíkem bezprostředně proti směru hodinových ručiček od vybraného. Pokud si Alice vybrala ďolík obsahující alespoň 12 semínek, tak se při setí ďolík, ve kterém semínka začínala, vynechává.

Bob

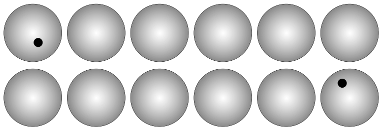


Alice

*Alice si vybrala třetí ďolík*

Když Alice zaseje poslední semínko, podívá se na ďolík, do kterého přistálo. Pokud tento ďolík patří Bobovi a nyní obsahuje dvě nebo tři semínka, Alice všechna semínka v tomto ďolíku sklidí a podívá se na předchozí ďolík. Semínka sklízí tak dlouho, dokud nenarazí na ďolík, ve kterém je jen jedno semínko, čtyři nebo více semínek; nebo je to ďolík na její straně. Pak Alicin tah končí a je na tahu Bob. Hra končí, když někdo sklidí alespoň 25 semínek nebo jsou sklizena všechna semínka. Pokud oba sklidí 24 semínek, tak remizují.

Aby byl Alicin tah platný, musí navíc splňovat alespoň jednu z následujících dvou podmínek: Buď v Bobově řadě zbyde alespoň jedno semínko (tedy nenecháme Boba vyhladovět), nebo Alice tímto tahem ukončí hru. Pokud by Alice měla sklidit všechna semínka v Bobově řadě, ale neukončila by tím hru, nesklidí žádná semínka. Pokud Alice nemá žádný platný tah, tak naopak sklidí všechna zbývající semínka. Pokud se Alice a Bob shodnou na tom, že ani jeden z nich už neumí sklidit další semínko, vyhraje ten, kdo má aktuálně více.




*Tady už Alice ani Bob nic sklidit neumí*

No, a to jsou doslova celá pravidla této deskovky. Pokud si chcete zkusit, jak taková hra probíhá, tady[5] je možnost si zahrát proti počítači. Nejsem si ale jist, že tato hra dodržuje výše uvedená pravidla úplně přesně. Nebo si taky můžete zkusit zahrát doma – bonbóny a obal od tuctu vajíček fungují dobře a poskytují silnou motivaci vyhrát.

Když vás omrzí klikání na počítači a dojdou bonbóny, zkuste se zamyslet, jak tuto hru hrát skutečně dobře. Během tohoto tématka můžete posílat příspěvky popisující vaše pozorování a nebo se účastnit turnaje, kde budou vaše programy opakovaně hrát Oware proti programům (nejen) od ostatních řešitelů.

Detaily o turnaji najdete od 13. 6. na odkazu[6]. Už teď vám ale můžeme prozradit, že vaším úkolem bude napsat skript v Pythonu, který na aktuální stav hry odpoví číslem vybraného ďolíku. Základní verzi skriptu včetně implementace pravidel dostanete, takže se můžete soustředit na vymýšlení strategie.

*Matej;* `lieskovsky.matej+mam@gmail.com`
*Jidáš;* `jonas.havelka@volny.cz`
*Borek;* `b0r3k@matfyz.cz`
*e-mailová konference:* `oware@mam.mff.cuni.cz`
*odevzdávejte do odevzdávátka*

[5] `https://oware.net`
[6] `https://github.com/JoHavel/Turnaj-v-Oware`

# Téma 3 – Lingvistika

Ještě předtím, než se vrhnete na čtení a řešení následujícího tématka o lingvistice, bychom vás chtěli poprosit, abyste při řešení nepoužívali internetové vyhledávače ani žádnou literaturu. Jejich použitím byste si některé úlohy buď příliš zjednodušili, nebo naopak udělali těžší. Některá zákoutí gramatiky zde vůbec nezmiňujeme, protože by se nám to nevešlo ani do celého ročníku. Nejde úplně o znalost jazyka, ale o logické přemýšlení a hledání spojitostí v textu. Proto raději odevzdejte špatné řešení se zdůvodněním, než bezchybně přeložený text, který jste nemohli vypozorovat z našeho tématka. Teď už vám přejeme šťastné řešení.

## Díl 1: Chetitština neboli „nesili“

Ha, lingvistika! Přišla nečekána, ale zvána. No... snad. Jaké přijetí tady v M&M obdrží, bude jen a jen na vás. Navíc brzy zjistíte, že má k naší stálici matematice blíže, než jste si možná mysleli.

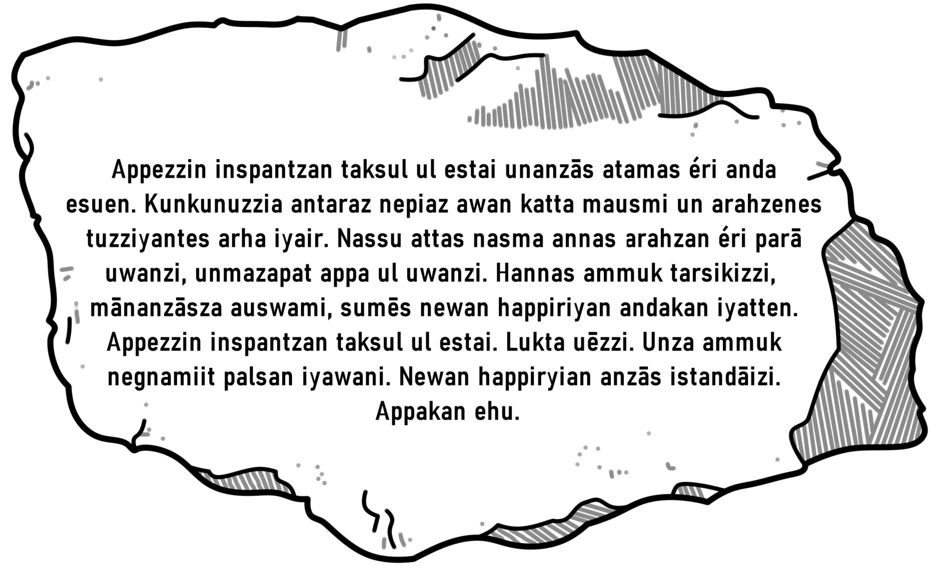
Naše lingvistické tématko vás provede světem mrtvých jazyků. Jestli za touto volbou hledáte nějaký hlubší filosofický význam, tak vás musíme hned na začátku zklamat. (Zároveň ale slibujeme, že je to naposled!) Zkrátka jsme si řekli, že živé jazyky ovládá kdekdo a zabývat se těmi mrtvými zní jako mnohem větší frajeřina.

První mrtvý jazyk, na který se podíváme, bude chetitština. Chetitština je nejstarší zaznamenaný indoevropský jazyk vůbec. Před více než třemi tisíci lety se jím mluvilo na území Malé Asie (dnešní Turecko). Chetité používali k zápisu textu klínové písmo a hliněné destičky; my budeme v následujících úlohách používat přepis do latinky. Kreativitě se ale meze nekladou, přijímáme i řešení vypálená do hliněných destiček.

Chetitština byla dlouhou dobu záhadou, až do roku 1916, kdy ji úspěšně rozluštil český badatel Bedřich Hrozný. Nyní, když už o ní máme nějakou představu, se můžeme vrhnout na to, jak vlastně funguje. Nejdřív ale malá ochutnávka, kterou najdete na obrázku číslo 10.

Co to ale znamená? Pojďme se blíže podívat na stavbu chetitštiny. Typická chetitská věta obsahuje podmět, přísudek a případně i ostatní větné členy. Větná stavba je velmi pevná, pořadí větných členů se takřka nikdy nemění. Tato skutečnost vám pomůže při řešení následujících úloh.

- Jsem klidný. → Ammuk taksul esmi.
- Jelen žije v lese. → Alyianas tiessarn anda huiszi.
- On je tvůj soused a dívá se na nebe. → Apā arahzenatis eszi un-apā nepis anda auziza
- Nejsi zlý člověk. → Zik antuhhas huwappas ul essi.
- Otec a matka jsou v údolí. → Attas un annas hāri anda assanzi.




**Obrázek 10:** Tabulka s chetitštinou zapsanou latinkou

- Viděli jsme je v noci. → Anzassmas ispantan auseweni.
- Poslal jsem posla králi. → Ammuk ana lugali lúte uwiyanmi.
- My jsme kněží. → Anzās kitas esuwani.
- Jdeme domů. → Anzas Eri andan tarkuwaneweni.
- Posel dorazil. → Lútan appa uēzzi.
- Soused jedl jelena a chléb. → Aranhezanas nindas un alyiani ezzazzi.
- Vy jste cizinci. → Sumēs arahzenes esteni.

**Problém 1**: *Podívejte se na příklady výše a pokuste se z nich vypozorovat pořadí podmětu, předmětu a přísudku. Nedá se z ukázek zjistit ještě nějaká další informace o chetitské gramatice?*

Při přemýšlení nad první úlohou jste možná odhalili, jak se chová sloveso *být* v přitomném čase pro různé osoby. Naštěstí pro nás se sloveso *být* časuje pravidelně, což v moderních jazycích nebývá běžné. Ostatní slovesa mají stejné či velmi podobné koncovky. My se dále budeme tvářit, že jsou stejné.

A u sloves ještě zůstaneme. Už umíme vyjádřit přítomnost, ale co ostatní časy? Chetitština nemá zvláštní tvary pro budoucí čas. Budoucí čas vyjadřují s pomocí

| | číslo jednotné | číslo množné |
|---|---|---|
| 1. osoba | esun | esuen |
| 2. osoba | esta | esten |
| 3. osoba | esta | esir |

**Tabulka 1:** Minulé tvary slovesa *být*

přítomného času. Pro pochopení věty je tak třeba někdy znát kontext. Minulost už svoje vlastní tvary má a můžete je najít v tabulce 1 pro slovo *být*.

Teď, když umíme trochu pracovat se slovesy, se pojďme podívat, jak vypadají osobní zájmena.

**Úloha 2** [1b]: *Doplňte tabulku 2 skloňování zájmen. Stručně zdůvodněte volbu tvaru zájmena.*

| | já | ty | my | vy |
|---|---|---|---|---|
| nominativ | | zik | anzās | |
| genitiv | | | | sumel |
| dativ/lokál | ammuk | | anzās | |
| akuzativ | | tuk | anzās | |
| ablativ | | tuēdaz | | sumēdaz |

**Tabulka 2:** Skloňování zájmen

Nominativ, genitiv a akuzativ byste už měli znát z češtiny. Jedná se o první, druhý a čtvrtý pád. Dativ a lokál, náš třetí a šestý pád, splývají v chetitštině v jeden. Význam má ale stejný jako sloučení našich pádů. Pád ablativ jste možná ještě nepotkali. Mohli bychom se na něj ptát otázkou *odkud?*. V pádu ablativ by byla slovní spojení jako třeba *ze stolu*.
Určitě jste si všimli, že v tabulce chybí třetí osoba. Kořenem výrazu pro třetí osobu je appa. Pokud je osobní zájmeno ve funkci podmětu, tak se ale ve větách často vynechává, jako náš nevyjádřený podmět. Podmět se pak dá rozpoznat pouze z koncovky slovesa.

**Problém 3**: *Mohli jste si povšimnout, že jsme vůbec nic nezmínili o, pro nás běžných, pádech vokativu (5. pád) a instrumentálu (7. pád). Zapomněli jsme na ně, nebo je snad Chetité nepotřebovali? Jak byste tyto pády nahradili? Jsou pro osobní zájmena vůbec potřeba?*

Zájmena jsou nedílnou součástí jazyka, kromě osobních zájmen znáte jistě i zájmena přivlastňovací. Ty Chetité obvykle řešili přidáním přípony. Příkladem může být -mi → moje.

- attamis → můj otec

- istarnismi → v jejich středu
- tuzzitis → tvá armáda
- annasis → jeho matka
- arhansmis → vaše hranice

Součástí chetitštiny jsou i zvratná zájmena. Osobní zájmena mají vlastní speciální zvratnou příponu. Přesnou podobu zde ale nezmíníme, můžete ji vypozorovat z některých úloh.

Než se vrhneme na nějaké překlady, tak se ještě zastavíme u podstatných jmen. Chetité dělili podstatná jména na dva rody, životný a neživotný. V tabulce 3 naleznete koncovky, které používají podstatná jména při skloňování. Pokud se k podstatnému jménu váže i jméno přídavné, tak přebírá stejný pád a tudíž i koncovku jako jméno podstatné.

| | číslo jednotné | | číslo množné | |
|---|---|---|---|---|
| | životný | neživotný | životný | neživotný |
| nominativ | -s | -n | -es | -a |
| genitiv | -as | -as | -as | -asob |
| dativ/lokál | -i | -i | -as | -as |
| akuzativ | -n | -n | -us | -a |
| instrumentál | -it | -it | | |
| ablativ | -az | -az | -az | -az |
| allativ | -a | -a | | |

**Tabulka 3:** Koncovky postatných jmen při skloňování

Většinu pádů znáte z češtiny a ablativ již byl popsán výše. Ještě doplníme, co je vlastně allativ. Používá se ve smyslu směr do nějakého místa. Nejčastěji ho potkáte s předložkami, které mají stejný nebo podobný význam jako české *k* nebo *na*.

Nyní máme za sebou tři hlavní stavební kameny chetitštiny. Na závěr přidáme ještě pár předložek. Nebo snad záložek? Chetitština totiž nepokládá předložku před větný člen jako čeština, nýbrž je zapisuje až za podstatné jméno. Příkladem budiž třeba éri anda → *v domě* a éri andan → *do domu*. Na více příkladů chetitštiny se můžete podívat v následující úloze.

**Úloha 4** [2b]: *Podívejte se na následující příklady vět a ty, u kterých překlad chybí, přeložte:*

- *Králova vojska bojovala na barikádách. → Lugala tuzzia senahhas hullanzi.*
- *Když je čisté nebe v noci, tak se ochladí. → Mān harkis nepis ispanti eszi, nu ekunesszi.*

- *Pojď! → Ehu!*
- *Dává mi chleba. → Appas ammuk san piyanāizi.*
- *Meteority jsou žhavé. → Kunkunuzza anta assanzi.*
- *Bohové se na nás zlobí. → Siuzaas anzās kartimyiazza.*
- *Řekl jsem: „Dost!“ → Ammuk tarsikkimi: dalawa!*
- *Nepřátelé jsou zlí cizinci. → Kūrures huwappes arahzenes assanzi.*
- *Modrá voda je dobrá. → Anataran wataran aran eszi.*
- *Vycházíme. → Anzās uwanweni.*
- *Ráno jsme šli do města. → Anzās anzāsila happyrian andan lukta yiaweni.*
- *Obětujeme zvířata bohům. → Anzās suppalus Siuas sipantanzi.*
- *Špinavý dům kněží nebudou mít rádi. → Kītes iskunanzan éri ul iwarezzi.*
- *Král hází zub. → Lugals gagan parā ūssiezzi.*
- *Čekám na tebe. → Ammuk tuk istandāimi.*
- *Údolní cesta je dlouhá. → Hārin palsan dalukis eszi.*
- *Máte dost boje. → Sumās hullanzas dala harkeni.*

? *Bohové mají rádi modrý chléb.*

? *Král čeká na ráno.*

? *Cizinci šli domů.*

? *V údolí je zima.*

**Problém 5**: *Vraťte se na začátek dílu a s pomocí nově nabytých znalostí se pokuste přeložit chetitský text v obrázku 10. Nemusíte přeložit úplně celý text; body můžete získat i za částečný překlad.*

**Problém 6**: *Všimli jste si v textu nějaké větné stavby, kterou jsme nezmiňovali v jiných úlohách? Jaký by mohl být její význam?*

*Honza;* jan@piroutek.eu
*Lucka;* lucy.kuncarova@gmail.com
*e-mailová konference:* lingvistika@mam.mff.cuni.cz
*odevzdávejte do odevzdávátka*

# Téma 4 – Pozoruhodné jevy v atmosféře

V tomto tématku se budeme zabývat více či méně známými optickými jevy, které lze v oblasti viditelného spektra pozorovat v zemské atmosféře. Stejně jako u ostatních tématek, i zde budou kromě úloh s jasným jednoznačným řešením zadány také obecnější problémy, které vás mají spíše navést k zamyšlení nad nějakou konkrétní tématikou, kterou můžete dle vlastního uvážení dále rozvíjet a doplňovat vlastními otázkami, které vám přijdou zajímavé. Tyto problémy nejsou časově omezené, jejich řešení můžete posílat kdykoli do konce ročníku. Případně pokud si vzpomenete na atmosférický jev, který s tímto tématem souvisí a přesto zde nebyl uveden, určitě nám napište a ideálně ho rovnou popište formou článku. Nejlepší články v pozdějších číslech otiskneme.

## Díl 1: Jevy v čisté atmosféře

V prvním díle se zaměříme na šíření paprsků světla čistou atmosférou bez přítomnosti dalších těles jako jsou kapky vody nebo krystalky ledu. K tomu je potřeba zavést index lomu $n$, který je definován jako poměr rychlosti světla ve vakuu $c$ ku rychlosti světla v daném prostředí $v$. V našem případě je tímto prostředím vzduch a index lomu závisí na jeho fyzikálních vlastnostech, které se mění mimo jiné s nadmořskou výškou. Pro viditelné světlo a vzduch popsaný stavovými rovnicemi ideálního plynu platí s vysokou přesností rovnice

$$\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1},$$

kde $n_1$ je index lomu vzduchu při tlaku $p_1$ a teplotě $T_1$ a $n_2$ je index lomu při tlaku $p_2$ a teplotě $T_2$.

**Úloha 1** [2b]: *Odvoďte výše uvedený vztah ze stavové rovnice ideálního plynu, pokud víte, že* $\frac{n_1-1}{n_2-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ *($\rho$ je hustota vzduchu).*

Závislost tlaku a teploty na nadmořské výšce stále není zdaleka triviální, předpokládejme však, že ji známe.

Představme si nyní, jak bude vypadat trajektorie paprsku v atmosféře, pro niž známe závislost indexu lomu na výšce, tj. závislost $n(z)$. Pro zjednodušení si rozdělme atmosféru na dostatečně tenké vrstvy a předpokládejme, že v rámci libovolné vrstvy jsou vlastnosti vzduchu konstantní (viz obr. 11a). Potom na rozhraní libovolných dvou vrstev lze uplatnit Snellův zákon lomu

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2,$$

kde $\alpha_1$ je úhel, pod kterým paprsek dopadá na rozhraní vrstev, a $\alpha_2$ úhel, pod kterým paprsek z rozhraní vystupuje, $n_1$ a $n_2$ pak indexy lomu jednotlivých vrstev. Z obr. 11a už je zčásti patrné, jak bude taková trajektorie paprsku vypadat. Lepší představu o ní však získáte při řešení úlohy 2.

**Úloha 2** [5b]: *Napište „program“ (stačí i numerické řešení v tabulkovém editoru, např. MS Excel), který vykreslí trajektorii paprsku světla prolétávajícího atmosfé-*

*rou. Vstupem nechť je úhel $\alpha_0$, pod kterým paprsek dopadá na povrch Země, a závislost teploty vzduchu na nadmořské výšce, tj. $T(z)$.*

*Tlak v $k$-té vrstvě určete rekurzivně jako*

$$p_k = p_{k-1} \exp\left(-\frac{g}{\tilde{R}T_k}\Delta z\right),$$

*kde $\exp(x)$ je alternativní zápis funkce $e^x$, $g$ je tíhové zrychlení, $\tilde{R}$ měrná plynová konstanta vzduchu o hodnotě přibližně $\tilde{R} = 287{,}1\,\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$, $\Delta z$ je tloušťka jedné vrstvy a $T_k$ je teplota v $k$-té vrstvě. Tlak v nulté vrstvě je $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.*

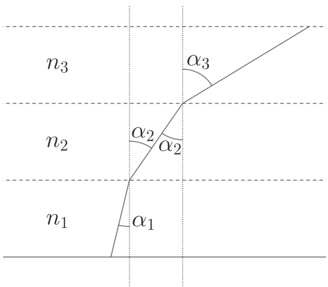
*Vykreslete trajektorii paprsku procházejícího atmosférou pro teplotní závislosti:*

*a)* $T(z) = (300 - 0{,}01z)\,\mathrm{K}$

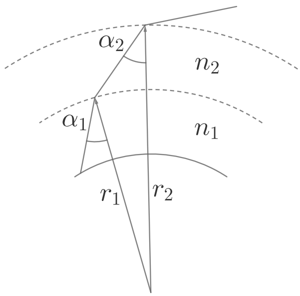
*b)* $T(z) = (300 - 0{,}034z)\,\mathrm{K}$

*c)* $T(z) = (300 - 0{,}05z)\,\mathrm{K}$

*Vykreslené trajektorie porovnejte s přímkou, po které by se paprsek šířil ve vakuu. Výsledky diskutujte.*




**(a)**




**(b)**

**Obrázek 11:** Grafické znázornění ohybu paprsku v atmosféře. Vlevo v rovinné aproximaci, vpravo při uvážení zakřivení Země.

**Úloha 3** [3b]: *V dostatečné výšce začíná hrát roli zakřivení Země a tím pádem i zemské atmosféry. Pak lze odvodit, že pro dvě sousedící vrstvy platí vztah $n_1 r_1 \sin\alpha_1 = n_2 r_2 \sin\alpha_2$ (viz obr. 11b). Odvoďte tento vztah.*

**Problém 4**: *V dostatečné výšce je vzduch natolik řídký, že ho nelze brát jako spojité prostředí, nýbrž jako samostatné molekuly. V takových podmínkách výše uvedený popis nelze už použít. Selhává zde teorie za lomem světla, protože paprsek v takových podmínkách snadno projde vrstvou vzduchu, aniž by při tom interagoval* *s některou z molekul. Navrhněte, jak takové podmínky pomocí známých veličin definovat. Jako bonus můžete odhadnout, v jakých výškách řádově takové podmínky nastávají.*

Jak jsme si ukázali výše, světlo od kosmických těles, jako jsou hvězdy, Měsíc nebo i naše Slunce, se atmosférou nešíří přímočaře, vždy se při průchodu trochu ohýbá. V důsledku toho vidíme tato tělesa o něco dál od obzoru, než doopravdy jsou. Tomuto jevu se říká astronomická refrakce a váže se k němu náš problém 5.

**Problém 5**: *Pozorujte Slunce nebo noční oblohu a zaznamenávejte polohu kosmických objektů v čase (nejlépe pomocí fotoaparátu nebo kamery). Jejich pohyb je způsoben rotací kolem zemské osy, měl by to proto být rovnoměrný pohyb po kružnici se středem v Polárce. Astronomická refrakce však sníží pozorovaným objektům složku rychlosti kolmou k obzoru, jejich pohyb tím lehce naruší a trajektorii deformuje. Vámi pozorovanou trajektorii vykreslete a zjistěte, jestli jste na ní schopni tento jev zaznamenat. Jaké další vlivy by mohly při deformaci trajektorie hrát roli?*

Ve výše uvedených příkladech jsme si vystačili s lomem světla na pomyslném rozhraní dvou vrstev. Když ale paprsek dopadá na toto rozhraní pod příliš velkým úhlem, může nastat situace, kdy platí $\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 > 1$, a v takovém případě dochází k úplnému odrazu. Pozorovatel na zemském povrchu může potom vidět převrácený obraz situace, která ve skutečnosti nastává někde jinde, v extrémním případě i za jeho geometrickým horizontem. Pokud k odrazu dojde při průchodu paprsku atmosférou směrem k zemskému povrchu, říká se tomuto jevu spodní zrcadlení (viz obr. 12a), v opačném případě se jev nazývá svrchní zrcadlení nebo též lidově Fata Morgana (viz obr. 12b).


**(a)** **(b)**

**Obrázek 12:** Spodní a svrchní zrcadlení. V bodě $B$ stojí pozorovatel a pozoruje světlo od objektu $A$, které se k němu šíří po trajektorii znázorněné plnou čarou. V důsledku zahnutí trajektorie k němu ale světlo doputuje z jiného směru, než ve kterém objekt $A$ doopravdy leží, a pozorovatel si proto představuje, že objekt leží v bodě $A'$.

Poslední jev, který v tomto čísle uvedeme, je důsledkem závislosti indexu lomu na vlnové délce světla. Pro kratší vlnové délky (fialové světlo) je index lomu větší než pro delší vlnové délky (červené světlo). Fialová a modrá složka viditelného spektra se proto lámou víc než červená a žlutá složka a také astronomická refrakce je pro ně proto silnější. Proto když pozorujeme západ Slunce, je jeho spodní část zbarvena více do červena než vrchní, která je tvořená všemi barvami (ty se smíchají do barvy, kterou má Slunce po většinu dne). V jistou chvíli pak nastane situace, kdy je Slunce už za obzorem a červené světlo z něj vycházející už není vidět, zato zbývající složky se stále dokáží přes obzor přehoupnout díky astronomické refrakci. Modré a fialové světlo má velkou tendenci k rozptylu v atmosféře, proto v takové chvíli bývá patrná pouze zelená složka slunečního světla. Takový stav trvá jen zlomek sekundy a lze ho pozorovat jen ve velmi čisté atmosféře. Díky jeho barvě se mu říká zelený záblesk (anglicky *green flash*).

**Problém 6**: *Pokuste se v přírodě najít výše uvedené jevy a vyfoťte je.*

**Problém 7**: *Pokud máte napsaný program z úlohy 2, hrajte si s ním a dál ho dle vlastního uvážení vylepšujte. Níže nabízíme možná vylepšení. Můžete se jimi inspirovat, nebo vymyslet jiná vlastní.*

- *Co když je teplota závislá nejen na výšce, ale také na zeměpisné šířce a délce?*
- *Upravte program, aby bral v úvahu zakřivení zemského povrchu (viz úloha 3).*
- *Je možné ve vašem programu dosáhnout svrchního zrcadlení?*
- *Vyzkoušejte, co se stane, když vykreslíte trajektorii světla velmi dlouhou, zamyslete se, jestli je výsledek programu reálný, a případně program upravte, aby jeho výsledek reálný byl.*
- *Jedním ze vstupů programu je úhel, pod kterým paprsek dopadá na zem. Upravte program, aby dával jako výsledek úhel, pod kterým by na povrch Země dopadal paprsek od stejného objektu ve vakuu.*
- *Vykreslete závislost úhlu dopadu paprsku ve vakuu na úhlu dopadu paprsku v atmosféře. Výsledek diskutujte.*
- *Vykreslete deformovanou trajektorii kosmických objektů, kterou byste mohli pozorovat při řešení problému 5.*

*Evžen & Karel;* `Janskvara@email.cz`
*e-mailová konference:* `atmosfera@mam.mff.cuni.cz`
*odevzdávejte do odevzdávátka*

# Téma 5 – Nekonečna

Zajímalo vás už někdy, proč nedefinujeme $\frac{1}{0}$ jako nekonečno? Vždyť přece, když dělíme čím dál menšími nezápornými čísly, dostáváme čím dál větší čísla. Tak proč vydělením tím „nejmenším“ nedostaneme to „největší“, tedy $\infty$? Nebo proč Achilles doběhne želvu, přestože mezitím, co doběhne na místo, kde želva stála, už želva odťapká dále? Víte třeba, zda je více celých nebo přirozených čísel? Myslíte, že je racionálních čísel více než celých? A kterých byste řekli, že je víc – racionálních nebo reálných? Ukazuje se, že pokud počítáme s nekonečny, můžou některé banální věci dopadnout naprosto nečekaně.

V tomto tématku se podíváme na zoubek všem možným nekonečnům, které můžete v matematice potkat. Tento a další díl bude o nekonečném množství. Následně se podíváme na nekonečně velké, nekonečně malé a jiné nekonečně zajímavé věci. Tak hurá do toho!

## Díl 1 – Hilbertův hotel

Představme si, že spravujeme hotel[7], kde je nekonečně mnoho jednolůžkových pokojů. Covid-19 ustupuje, takže nám konečně bylo umožněno otevřít, což způsobilo obrovský zájem, tudíž máme všechny pokoje obsazené. Abychom se v hotelu vyznali, očíslovali jsme pokoje čísly $\{1, 2, 3, \dots\}$ tak, že každé číslo je využito právě jednou a každý pokoj má právě jedno číslo. Tedy máme tolik pokojů, kolik je přirozených čísel. Tento počet (tedy naše nekonečno) označme[8] jako $\aleph_0$.

Najednou nám na vchodové dveře zaklepe nový host. Nejprve ho chceme odmítnout, vždyť přece máme všechny pokoje obsazené, ale pak se nám ho zželí. Někam ho ubytovat přece musíme. Tak třeba do pokoje 1. Tam už však host bydlí. Nedá se nic dělat, musíme původního obyvatele pokoje 1 přesunout jinam. Třeba do pokoje 2. Původního hosta z pokoje 2 můžeme přestěhovat do 3 a tak dále. A hle, opravdu se nám povedlo ubytovat nového hosta do našeho plného hotelu, sice jsme u toho museli každého hosta přestěhovat z pokoje $i$ do pokoje $i+1$, ale na to si zkrátka hosté musí zvyknout. Můžeme si všimnout, že jsme tím ukázali, že $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, jelikož nyní máme $\aleph_0 + 1$ hostů v $\aleph_0$ pokojích.

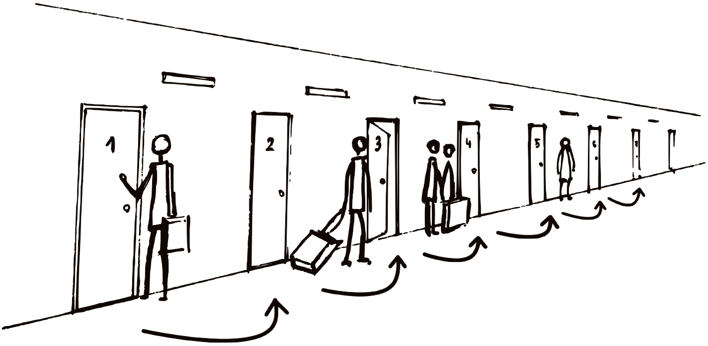
Navíc pokud nám na dveře zaklepe libovolný přirozený počet, například $n$, hostů, můžeme matematickou indukcí[9] každého odbavit jako jednotlivce (to už umíme z minulého odstavce), tedy

$$\aleph_0+n = (\aleph_0+1)+(n-1) = \aleph_0+(n-1) = (\aleph_0+1)+(n-2) = \dots = \aleph_0+(n-n) = \aleph_0.$$

[7] S tímto myšlenkovým experimentem přišel v přednášce „O nekonečnu“ roku 1924 německý matematik David Hilbert, jemuž v matematice vděčíme za mnoho poznatků. Viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_paradox_of_the_Grand_Hotel`

[8] Symbol $\infty$ se obecně pro nekonečný počet nepoužívá, protože jak uvidíme dále, není nekonečno jako nekonečno. Symbol $\aleph$ (alef, první písmeno hebrejské abecedy) jsme nevybrali náhodně, o tom tu však nechceme vyprávět. Zvídavé jen odkážeme na `https://en.wikipedia.org/wiki/Aleph_number`

[9] `https://matematika.cz/matematicka-indukce`




**Obrázek 13:** První stěhování (uvolnění prvního pokoje)

Nový host napsal na náš hotel tak dobrou recenzi, že se jedna cestovní kancelář rozhodla k nám vypravit autobus. A jelikož to byla cestovní kancelář podobná našemu hotelu, autobus měl $\aleph_0$ sedadel očíslovaných 1, 2, 3, … Kdybychom se tedy pokusili ubytovat do našeho plného hotelu nové hosty po jednom jako výše, nikdy bychom neubytovali celý tento autobus. Stěhování by totiž nebralo konce a hosté nemají nekonečně mnoho trpělivosti. Musíme na to jít chytřeji a na nekončící stěhování si dát pozor.

Jeden z hezkých způsobů je, že necháme každého starého hosta z pokoje $i$ přestěhovat se na pokoj $2i$. Tím se nám uvolnili pokoje 1, 3, 5, … Tedy nového hosta ze sedadla $i$ přesuneme do pokoje $2i - 1$. Jinými slovy staré hosty přestěhujeme do sudých pokojů a nové do lichých. Tím jsme ubytovali všechny nové hosty a nevyhodili žádného starého. Tedy jsme ukázali, že $\aleph_0 + \aleph_0 =$ počet starých plus počet nových hostů $= \aleph_0 =$ počet pokojů. Matematickou indukcí lze dokázat, že $\forall n$ přirozené je $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

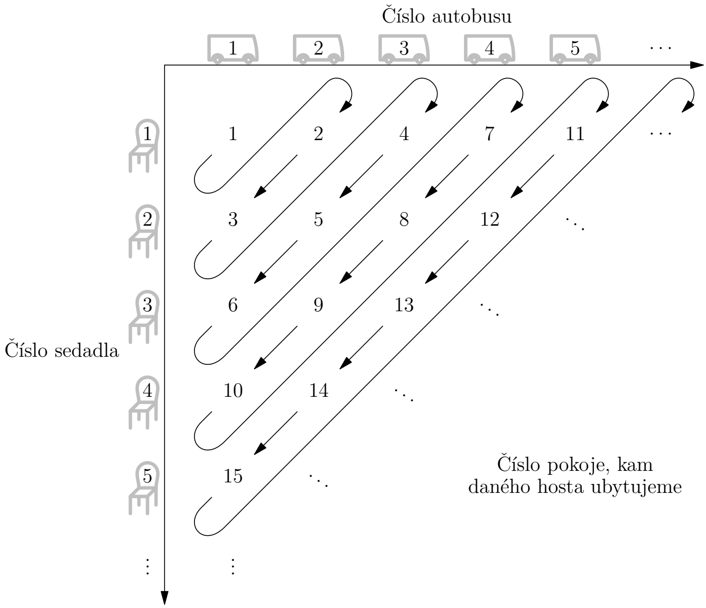
**Úloha 1** [1b]: *Tak co, už víte, jestli je více přirozených, nebo celých čísel? Odpověď zdůvodněte.*

**Úloha 2** [3b]: *Nechť je n přirozené. Pokud* $\aleph_0 = \aleph_0 + n$*, tak zřejmě* $\aleph_0 - n = \aleph_0$*. Stejně tak pokud* $\aleph_0 = n \cdot \aleph_0$*, potom* $\aleph_0 = \frac{\aleph_0}{n}$*. Speciálně tedy víme, že když* $q$ *je kladné racionální, pak* $q \cdot \aleph_0 \pm n = \aleph_0$*. Dokážete to ukázat bez použití úpravy rovnic, pouze s „hotelovým argumentem“?*

Cestovní kancelář si náš hotel oblíbila, a tak k nám vyslala $\aleph_0$ autobusů, každý s $\aleph_0$ lidmi. Nejprve se zhrozíme, že tolik lidí přece nemůžeme nikdy ubytovat, pak nás ale napadne, že všechny předchozí hosty se nám ubytovat podařilo, tak proč by to nešlo i s těmito. Prozatím zapomeneme, že už máme plno, a budeme nové hosty ubytovávat postupně do pokojů 1, 2, 3, …

Pokud bychom ale začali prvním autobusem a ubytovali lidi ze sedadel 1, 2, 3, …, nikdy by se nedostalo na lidi z ostatních autobusů, protože v prvním autobusu pořád bude někdo, koho je třeba ubytovat. Proto budeme rozšiřovat počet autobusů, ze kterých ubytováváme lidi. Kdybychom ale chtěli například nejprve ubytovat všechny, kdo sedí na sedadle číslo 1 ve všech autobusech, pro změnu bychom nikdy neubytovali lidi z ostatních sedadel. Problém lze vyřešit například následujícím systémem ubytování hostů:

Jako první ubytujeme hosta z prvního sedadla prvního autobusu. Do druhého pokoje ubytujeme hosta z prvního sedadla druhého autobusu. Do dalšího pokoje ale nepůjde host ze třetího autobusu, nýbrž opět z prvního, konkrétně z druhého sedadla. Až pak ubytujeme hosta z prvního sedadla třetího autobusu, po něm hosta z druhého sedadla druhého autobusu, potom hosta z třetího sedadla prvního autobusu atd. Graficky znázorněné to můžete vidět na obrázku 14.




**Obrázek 14:** Ubytování $\aleph_0$ autobusů o $\aleph_0$ cestujících

Můžeme si všimnout, že v každé diagonále, kterou číslujeme, je konečně mnoho lidí (v první 1, v druhé 2, ve třetí 3, …), tedy na každou diagonálu se dostane, ale zároveň každý host je v nějaké diagonále, takže se opravdu dostane na všechny. Takto jsme tedy ubytovali nové hosty. Staré hosty bychom následně mohli ubytovat zpět díky tomu, že $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. To znamená, že jsme právě ukázali, že $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Matematickou indukcí to samozřejmě lze rozšířit na $\aleph_0^n = \aleph_0$.

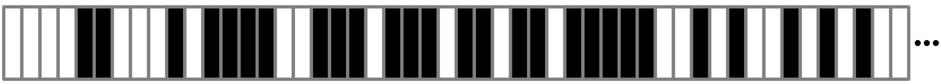
**Problém 3**: *Samozřejmě, že toto není jediná možnost ubytování $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ hostů. Pokud vás napadne jiný způsob, oceníme ho jistě body. Jen nezapomínejte, že můžeme pouze konečně mnohokrát říct libovolně mnoha (např. všem ze sudých pokojů) hostům, aby se přestěhovali, protože host stěhující se donekonečna je nevrlý host.*

**Úloha 4** [3b]: *Nyní už máme dostatek vhledu, abychom rozhodli další část otázky z prvního odstavce: Je více přirozených, či racionálních čísel?*

*Připomeňme, že racionální čísla jsou definována jako zlomky (tj. dvojice čísel) s nesoudělným čitatelem a jmenovatelem, kde jmenovatel je kladný. Můžete využít jako fakty, že (pro libovolné množiny $X$, $Y$) když je $X$ podmnožinou $Y$ (tedy $Y$ obsahuje všechny prvky z $X$), tak má $Y$ alespoň tolik prvků jako $X$. A že když má $X$ alespoň tolik prvků jako $Y$ a opačně, tak jsou $X$ a $Y$ stejně velké.*

**Problém 5**: *Pokud předchozí úlohu vyřešíte (korektně) bez použití zmíněných faktů, body navíc vás rozhodně neminou.*

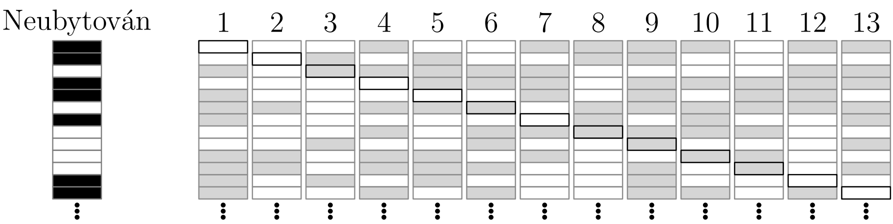
Po takovém úspěchu se nám ozvala další cestovní kancelář, že by u nás chtěla ubytovat svůj autobus hostů. Avšak nemá sedadla očíslovaná čísly, má je označena všemi nekonečnými čárovými kódy (tedy nekonečnými posloupnostmi černých a bílých úseků), jako třeba:



**Obrázek 15:** Čárový kód

Musím vás zklamat, takový autobus neubytujeme. Jak to ale dokázat? Představme si, že by se nám hosty z takového autobusu povedlo ubytovat (do prázdného hotelu). Následně vytvořme čárový kód tak, že první úsek tohoto kódu bude jiný než první úsek čárového kódu hosta v prvním pokoji (tj. bude černý, pokud první čárový kód začíná bíle, jinak bude bílý). Druhý úsek tohoto kódu bude jiný než druhý úsek čárového kódu hosta v druhém pokoji. Třetí bude jiný než třetí úsek třetího…

Tak jsme vytvořili čárový kód, který jistě přísluší nějakému hostovi, ale ten nemůže být ubytován v prvním pokoji, protože se neshodují v prvním úseku. Nemůže být ani v druhém, protože tam se neshodují v druhém úseku… Tedy tento host není ubytován.




**Obrázek 16:** Cantorova diagonální metoda

Tímto postupem (tzv. Cantorovou diagonální metodou) jsme dokázali, že v autobuse takové cestovní kanceláře není stejný počet lidí, jako pokojů u nás v hotelu.[10] Ale očividně jich je také nekonečno, značme[11] ho tedy $\aleph_1$.

**Úloha 6** [2b]: *Stejný argument lze použít pro dokázání, že reálných čísel (pro jednoduchost z intervalu* $[0, 1)$*, tedy menších než 1 a větších rovno 0) není stejně jako přirozených. Ukažte, jak na to. (Tím, že přirozená čísla patří mezi reálná, pak ukážeme, že je reálných čísel ostře více, ale o tom až v dalším díle.)*

**Úloha 7** [4b]: *Ukažte, že kdyby situace nastala opačně (tedy do plného hotelu s pokoji označenými čárovými kódy by přijel autobus se sedačkami očíslovanými přirozenými čísly), tak by se noví hosté mohli bez problému nastěhovat, tedy že* $\aleph_1 + \aleph_0 = \aleph_1$.

**Problém 8**: *V tomto díle jsme si ukázali, jak o nějakých dvou množinách říct, že jsou stejně velké. Nalezněte nějaké další příklady dvou nekonečných množin (tedy množin, jejichž počet prvků nelze zapsat přirozeným číslem), které jsou stejně velké, a tuto shodnost velikostí dokažte.*

Nakonec ještě zmíním, že korespondenční seminář PraSe zpracoval toto téma dopodrobna[12], dokonce s animovanou verzí[13]. My se však budeme tímto zabývat jen v příštím čísle, kde si ukážeme, jak porovnávat množiny. Dále se podíváme na nekonečna v jiných oblastech matematiky, zatímco seriál PraSete se dále věnuje množinám.

*Jidáš;* `jonas.havelka@volny.cz`
*e-mailová konference:* `nekonecna@mam.mff.cuni.cz`
*odevzdávejte do odevzdávátka*

[10] Možná vás napadlo, že je v tomto autobuse více lidí než v hotelu. A měli byste pravdu, ale není to vždy tak jednoduché a hlavně potřebujeme definovat, co to znamená „více“ při nekonečných počtech. To nás čeká v příštím díle.

[11] Tady tiše považujeme hypotézu kontinua za pravdivou, abychom měli hezké značení. O ní se více informací dozvíte na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Hypot%C3%A9za_kontinua`.

[12] `https://prase.cz/archive/35/uvod1s.pdf`

[13] `https://www.youtube.com/playlist?list=PL2m0OzES6Uw-7QDvuWxXnuyHj5BZT40hX`



## Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`