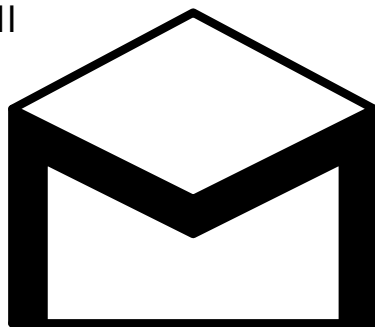
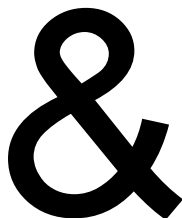
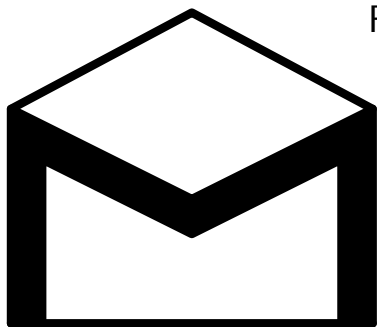


STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVII

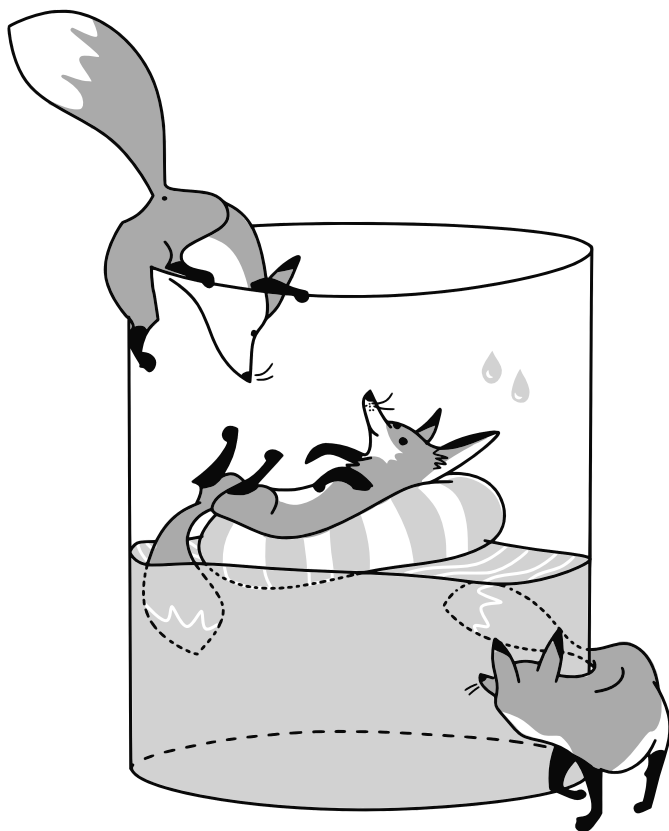
Číslo 6



MATEMATIKA

FYZIKA

INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milý čtenáři,

do rukou se ti dostává poslední číslo 27. ročníku, a tak nám nezbyvá než se slzou v oku zavzpomínat na minulý rok a nakonec i vyhlásit výsledky.

Bohužel po druhé vlně Nemoci přišla třetí a po ní i čtvrtá, a tak jsme se po celý rok nemohli setkat tváří v tvář na tradičních soustředěních. Akce se tak musely přesunout na internet. Doufáme, že jste si je i tak užili. Nezbyvá nám než si přát, abychom se příští rok se již mohli setkávat osobně a abychom mohli vás, naše milé účastníky, poznat i mimo obrazovky počítačů.

Naštěstí jste i přes nepřízeň osudu k naší velké radosti v hojném počtu řešili úlohy i psali články. Zabrouzdali jsme tak do hlubin počítačů, kalkulaček a jiných výpočetních přístrojů. Lámali jsme světlo i jsme zapínali zipy na látkách či stavěli plynovody na toru a nakonec jsme trénovali na královnu matematických sportů, na matematickou olympiádu. Doufáme, že každý se snažil tak, jak mohl, a že jste se naučili něčemu novému.

Přestože se náš seminář nese v přátelském duchu, stále zůstává soutěží. A je nám tedy potěšením za vítěze vyhlásit Doc.^{MM} Kláru Grinerovou s úctyhodnými 284,3 body. V závěsu za ní se pak umístil Doc.^{MM} Martin Fof a třetím se stal Dr.^{MM} Jan Engler. Vy ostatní najdete své výsledky na konci čísla. M&Mvšak jen a pouze o řešení úloh, ale také o psaní článků o problémech, se kterými se při své pouti seminářem setkáváte. V této soutěži o nejlepší text zvítězil Mgr.^{MM} Vojtěch Gadurek, který ve svém článku navrhnul a popsal jednoduchý počítač. Svojí pílí si tak vybojoval chutný dort od nejlepších M&Mích cukrářů.

Nakonec vzpomeňme na ty, pro něž byla tato výprava za vzděláním poslední. Nesmutněme však, protože všechno má svého konce a každý musí někdy opustit základní tábor, aby dobyl horu, o jejíž pokoření v nocích snil. A někteří se dozajista vrátí, aby pomohli vám začínajícím i pokročilým dobrodruhům ve vaší cestě krajinou poznání a doprovázeli vás na našich výpravách.

Vaši Organizátoři

P. S. Pomozte nám M&Mdál zlepšovat! Vyplňte prosím anketu k 27. ročníku našeho semináře <https://forms.office.com/r/BBCenkzbfB>.

Obsah

Téma 1 – Topologie	3
Téma 2 – Optika	20
Téma 3 – Olympiádní matematika	31
Téma 4 – Počítač z nul a jedniček	38

Řešení témat

Téma 1 – Topologie

Díl 6: Závěrem

V průběhu tohoto tématka jsme si udělali představu o tom, čím se zabývá topologie. Nejdříve jsme si trochu pohráli s Möbiovou páskou a dimenzemi prostoru. Poté jsme si představili variety a operace nad nimi. Ve třetím díle jsme si ukázali pomocí zapínání zipů, že všechny rozumně se chovající plochy můžeme popsat čistě pomocí počtu křížítek a uší. V následujícím díle jsme těchto znalostí využili a naučili se na plochy kreslit grafy. Zjistili jsme, že křížítka a uši nám umožňují nakreslit bez křížení grafy, které se do roviny bez křížení nakreslit nedají. Nakonec jsme se v pátém díle ponořili hlouběji do toho, jak můžeme formálně matematicky zadefinovat topologii, protože pod tuto formální definici toho spadá mnohem více, než jsme si do té doby stihli ukázat.

Doufám, že vás výlet do tohoto zajímavého zákoutí matematiky zaujal a bavil. Pokud chcete o topologii zjistit více, najdete níže některé zdroje, ze kterých jsem při přípravě tématka čerpal. Většina z nich je pochopitelná se středoškolskými znalostmi.

Nyní již slíbené zdroje:

- Série přednášek *Topology & Geometry* od doktora T. Tokiedy [1] je velice pěkná a srozumitelně podaná. Poskytla volnou inspiraci pro převážně první dva díly tématu.
- Článek *Conway's zip proof* od G. K. Francise a J. R. Weekse [2] jsme probrali ve třetím díle, jak už bylo uvedeno u vzorového řešení. Mimo jiné obsahuje velmi pěkné ilustrace.
- Prezentace *Grafy na plochách* od profesora Z. Dvořáka [3], obsahuje názorné zavedení potřebných pojmů a mnoho názorných obrázků. Společně s částí učiva z předmětu Kombinatorika a grafy II se stala částečnou inspirací pro čtvrtý díl tématu.
- Texty k přednášce *Matematické struktury* od profesora A. Pultra [4] patří k hutnějším textům z těch zde uvedených, ale je jedním z mála rozumných českých zdrojů. Použila jsem jej k připomenutí si definic uvedených v pátém díle tématu.
- Kniha *Topology Now!* od R. Messera a P. Straffina [5] obsahuje několik témat souvisejících s topologií popsaných poměrně přístupným způsobem a množstvím relativně snadných úloh k procvičení. Část této knihy sloužila jako zdroj k pátému dílu tématu.

- Knížka *Mathematics++: Selected Topics Beyond the Basic Courses* od I. Kantor, M. Matouška a R. Šámala [6] se věnuje několika matematickým tématům, která mají aplikace v informatice. Tato velmi pěkně napsaná kniha a odpovídající přednášky na MFF UK stojí za nápadem na vznik tohoto tématu a stala se inspirací pro části některých dílů. Též stojí za několika úlohami.
- Kniha *A Topological Picturebook* od G. K. Francise [7] inspirovala vzorovou verzi vizualizace objektu dunce hat, ale obsahuje mnoho názorných a výborně propracovaných ilustrací dalších ztřeštěných topologických objektů.
- Kniha *Computational topology: An introduction* od H. Edelsbrunnera a J. Harera [8] obsahuje také poměrně přístupný úvod do topologie, zejména pro informatiky. Od teorie grafů a teorie uzlů pokračuje zavedením ploch a jejich triangulace až ke složitějším pojmům typu homologie. Vše je ilustrováno poměrně názornými obrázky.

Jestliže se budete chtít pustit do zkoumání některého ze zdrojů, ale narazíte na nějakou část, která vám nebude jasná, nebo budete-li mít problém s dostupností některého ze zdrojů, neváhejte mi napsat.

Krásnou zimu přeje

Anet; aneta.pokorna@matfyz.cz

Zdroje

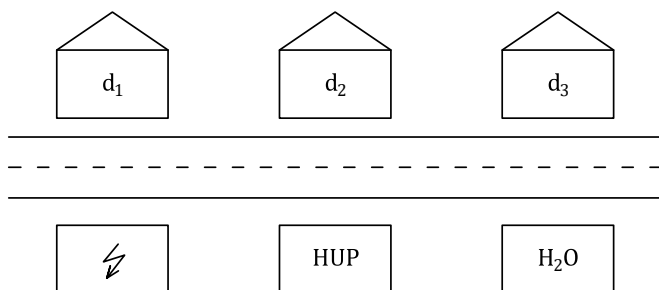
- [1] T. Tokieda *Topology & Geometry*. https://youtube.com/playlist?list=PLTBqohhFNBE_09L0i-1f3fYXF5woAbrzJ (Youtube, 2014)
- [2] G. K. Francis & J. R. Weeks *Conway's ZIP Proof*. The American Mathematical Monthly. **106**, 393–399 (1999)
- [3] Z. Dvořák *Grafy na plochách*. <https://iuuk.mff.cuni.cz/~rakdver/prez/plochy.pdf> (MFF UK, 2016)
- [4] A. Pultr *Matematické struktury*. <https://kam.mff.cuni.cz/~pultr/ms.pdf> (MFF UK, 2005)
- [5] R. Messer & P. Straffin *Topology Now! (Classroom Resource Material)*. (American Mathematical Society, 2006)
- [6] I. Kantor, J. Matousek & R. Samal *Mathematics++: Selected Topics Beyond the Basic Courses*. (American Mathematical Society, 2015)
- [7] G. K. Francis *A Topological Picturebook*. (Springer-Verlag New York, 2007)
- [8] H. Edelsbrunner & J. L. Harer *Computational Topology: An Introduction*. (American Mathematical Society, 2009)

Vzorová řešení 4. dílu

Úloha 1

Zadání:

V ulici stojí tři nově postavené domy, které je potřeba připojit k elektřině, vodě a plynu. Přípojky elektřiny, vody a plynu jsou na druhé straně ulice. Každý dům musí být připojen ke každé přípojce vlastním vedením, které se nemůže větvit. Domy stojí na tvrdé skále, do které není možné vedení zahluubit. Vzhledem k silným bouřkám a hurikánům v dané oblasti není možné vést vedení vzduchem. Vedení je možné vést pouze v 10 cm vysoké vrstvě štěrku, který je nasypáný na hrubé skále. Jelikož mají trubky všech vedení vnější průměr 10 cm, nemůžou se ve štěrku křížit, protože jinak by jedna z trubek čouhala ven, kde by ji mohla přejíždět auta a pošlapávat chodci, čímž by se zničila. Je možné za těchto okolností připojit všechny domy ke všem přípojkám? Svou odpověď (pokud možno formálně) zdůvodni.


Obrázek 1: Ilustrace k úloze 1

Řešení:

Nerovinnost bipartitního grafu $K_{3,3}$ je možné dokázat pomocí Eulerovy formule a faktu, že bipartitní grafy neobsahují liché cykly, tudíž ani trojúhelníky a každá stěna je tak ohraničena alespoň čtyřmi hranami.

Doc.^{MM} Martin Fof však důkaz provedl přímo pomocí následující jednoduché úvahy:

Podíváme se, jak by úloha vypadala, kdybychom nemuseli připojovat plyn. V takovém případě nám stačí zakreslit bipartitní graf $K_{3,2}$. Tento graf má celkem tři stěny a každá se dotýká právě dvou domů. Pokud tedy vrchol s plynem umístíme do kterékoliv stěny, tak přípojka k jednomu z domů bude procházet již existující přípojkou.

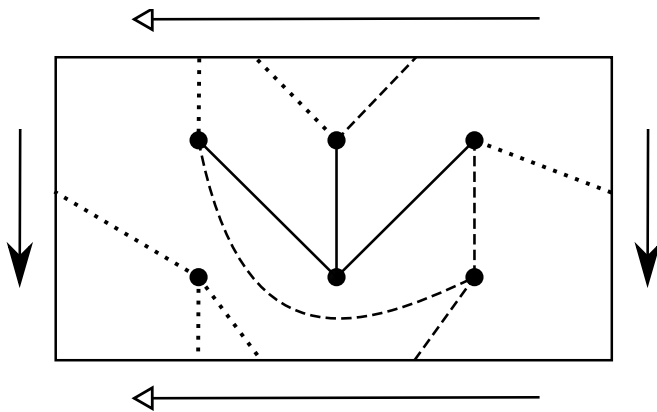
Úloha 3

Zadání:

Nakresli $K_{3,3}$ na torus bez křížení hran.

Řešení:

Rovinné nakreslení $K_{3,3}$ na reprezentaci toru podle řešení Mgr.^{MM} Veroniky Jůzkové ukazuje obrázek 2.

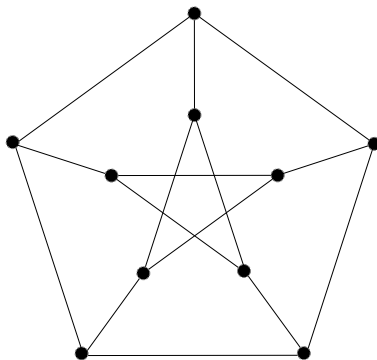


Obrázek 2: Rovinné nakreslení $K_{3,3}$ na toru

Úloha 4

Zadání:

Nakresli Petersenův graf (jak vypadá si můžeš prohlédnout na obrázku 3) na projektivní rovinu bez křížení hran. Dva body navíc za nakreslení v obou možných reprezentacích projektivní roviny.



Obrázek 3: Petersenův graf z úlohy 4 nakreslený v rovině

Řešení:

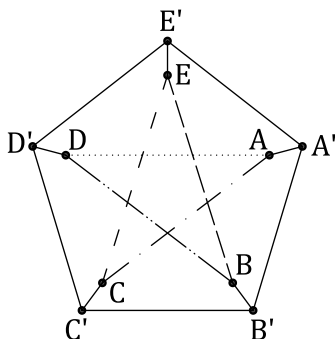
Zde otiskujeme řešení Dr.^{MM} Jana Englera.

V Petersenově grafu jsou dva „důležité“ cykly: vnitřní hvězda a vnější pětiúhelník. Vrcholy „uvnitř“ označím A, B, C, D, E tak, aby byla hvězdička popsána cyklem $ACEBDA$. Ve vnějším pětiúhelníku si označím vrcholy A', B', C', D', E' tak, aby A' sdílel hranu s A , B' s B atd. a aby byl pětiúhelník popsán cyklem $A'B'C'D'E'A'$. Zavedené značení je ilustrováno na obrázku 4.

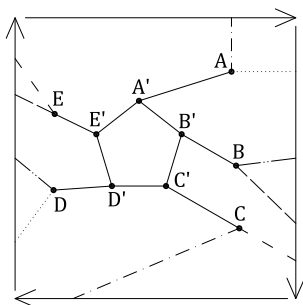
Nakreslení grafu na projektivní rovině je na obrázku 5.

Nyní budu tento obrázek naivně brát jako rovinu a provedu na ni kruhovou inverzi okolo kruhu s malým poloměrem, který leží cca uprostřed pětiúhelníku $A'B'C'D'E'$. Prostor „mimo“ obdélník se zobrazí na díru uprostřed, vrcholy A, B, C, D, E se zobrazí blízko díry a vrcholy A', B', C', D', E' se zobrazí dál od díry.

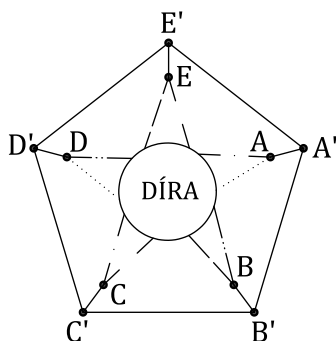
Výsledek popsané operace je zobrazený na obrázku 6.



Obrázek 4: Petersenův graf s vrcholy označenými písmeny a vybranými hranami označenými různým stylem čar



Obrázek 5: Nakreslení Petersenova grafu na projektivní rovinu reprezentovanou pomocí žipů, označení vrcholů a hran je stejné jako na obrázku 4



Obrázek 6: Nakreslení Petersenova grafu na projektivní rovinu reprezentovanou jako plocha s křížítkem, označení vrcholů a hran je stejné jako na obrázku 4

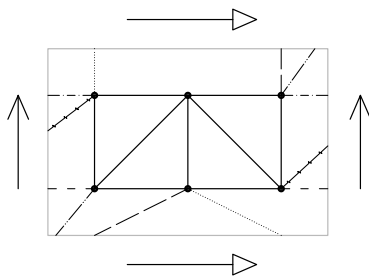
Úloha 5

Zadání:

Nakresli K_6 na Kleinovu lahev bez křížení hran.

Řešení:

Nakreslení K_6 na reprezentaci Kleinovy lahve z řešení Mgr.^{MM} Anny Cmielové můžete vidět na obrázku 7.



Obrázek 7: Řešení úlohy 5

Úloha 6

Zadání:

Uveď, které největší úplné grafy je možné nakreslit na projektivní rovinu, torus a povrch nafouknuté číslice 8 podle následující věty:

Úplný graf s $\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24g}}{2} \rfloor$ vrcholy lze nakreslit bez křížení na libovolnou plochu rodu g různou od Kleinovy lahve.

Řešení:

Využijeme tvrzení z textu, že úplný graf s

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24 \cdot g}}{2} \right\rfloor$$

vrcholy je možné bez křížení hran nakreslit na libovolnou plochu rodu g s výjimkou Kleinovy lahve. Také použijeme fakt, že rod plochy je roven $2u + k$, kde u je počet uch a k je počet křížítetek.

Projektivní rovina obsahuje jedno křížítko a tedy má rod $g = 1$. Dosazením do vzorce dostáváme, že na ni dokážeme nakreslit úplný graf na šesti vrcholech K_6 :

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{25}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12}{2} \right\rfloor = 6$$

Torus je homeomorfní sféře s jedním uchem, jeho rod je tedy $g = 2$. Dosazením do vzorce dostáváme, že největší úplný graf nakreslitelný na torus je K_7 :

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{14}{2} \right\rfloor = 7.$$

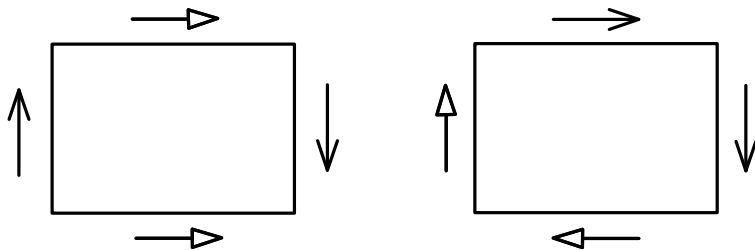
Nafouknutá osmička, neboli dvojitý torus, je homeomorfní sféře se dvěma uchy, rod g je tedy $2 \cdot 2 = 4$. Opět použijeme vzorec:

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24 \cdot 4}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{97}}{2} \right\rfloor = 8.$$

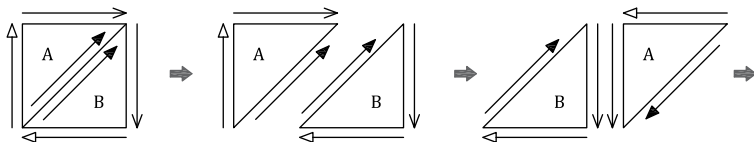
Na nafouknutou osmičku tedy můžeme rovinně nakreslit K_8 .

Úloha 7
Zadání:

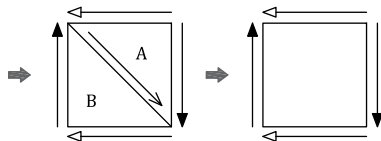
Ukaž, že spojováním zipů z obrázku 8 vznikne stejná plocha. Která plocha to je? Jakou má orientovatelnost?



Obrázek 8: Dvě různé reprezentace plochy z úlohy 7



Obrázek 9: Rozříznutí plochy a převrácení jedné části



Obrázek 10: Spleení transformovaných částí podle jiného typu zipu

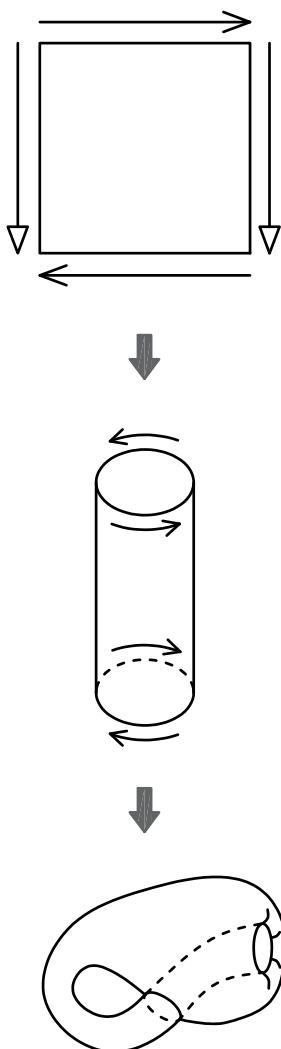
Řešení:

Toto řešení nám zaslala Doc.^{MM} Klára Grinerová.

Jelikož z předchozího dílu víme, že na pořadí spojování zipů nezáleží, můžeme homeomorfismus obou ploch dokázat právě tím, že druhou plochu rozřízneme a opět spojíme, jen to udělám jinou dvojicí zipů. Tedy po úhlopříčce jsem druhou plochu rozdělila na plochy A a B , čímž vznikl jeden nový zip. Plochu A pak přesuneme a převrátíme tak, že se zamění „rub a líc“ jako na obrázku 9.

Poté spojíme zip, ale jiný než ten, který vznikl rozdělením na dvě plochy. Dostaneme tak kosočtverec, který snadno můžeme pomačkat na čtverec. U daného čtverce pak vidíme, že má dvě protilehlé dvojice zipů, kdy jedna dvojice je souhlasně orientovaná a druhá dvojice je nesouhlasně orientovaná, jak můžeme vidět na obrázku 10. Dostaneme tak ekvivalentní plochu k té první, jelikož první plocha má také souhlasnou a nesouhlasnou dvojici protilehlých zipů.

Tím jsme dokázali, že spojováním zipů v obou případech vznikne stejná plocha. Pokud spojíme nejprve souhlasně orientované zipy, získáme povrch válce bez podstav, na jehož koncích jsou nesouhlasně orientované zipy, jak je znázorněno na první části obrázku 11. V předchozím díle jsme si ukázali, že spojením těchto zipů vznikne Kleinova láhev. A jelikož Kleinova láhev obsahuje křížítko, je neorientovatelná.



Obrázek 11: Spojením souhlasných zipů získáme plášť válce ohraničený nesouhlasně orientovanými kružnicemi, který je z předchozího dílu homeomorfní Kleinově lahvi

Vzorová řešení 5. dílu

Úloha 1

Zadání:

Mějme body v rovině reprezentované pomocí dvojice jejich x -ových a y -ových souřadnic. Ukaž, že funkce

$$\mu'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

je metrikou v rovině.

Řešení:

Do zadání se nám vloudila chyba ve značení, a tak funkce, o které jste měli dokázat, že je to metrika, ve skutečnosti metrikou není. Doc.^{MM} Martin Fof nejenom opravil tuto chybu, ale dokonce uhodl, jak jsme chtěli úlohu původně zadat, a novou úlohu vyřešil. Uvádíme adaptaci jeho povedeného řešení.

Blíže se podíváme, co tato funkce vlastně dělá. Bere maximum dvou hodnot, kde každá závisí pouze na jednom z bodů. Hodnotu $|x_1 - y_1|$ můžeme popsat jako o kolik musíme změnit jednu ze souřadnic, aby platilo $x_1 = y_1$, a bod tedy ležel na přímce $x = y$. Výsledek výrazu $|x_1 - y_1|$ je tedy přímo úměrný vzdálenosti bodu od přímky $x = y$, což znamená, že hodnota $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ je přímo úměrná vzdálenosti vzdálenějšího bodu od přímky $x = y$.

Nyní už můžeme poměrně jednoduše vidět, že symetrie i trojúhelníková nerovnost platí, ale první podmínka nikoliv. Protože metrika dvou bodů vychází nula právě tehdy, když oba leží na přímce $x = y$, a nemusí být nutně stejné (například metrika bodů $(0, 0)$ a $(1, 1)$ vychází nula).

Z této funkce můžeme udělat metriku, pokud budeme brát hodnotu

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Jelikož bereme maximální hodnotu absolutních hodnot, tak zřejmě musí metrika vždy vyjít nezáporně, a nula vyjde právě tehdy, když mají body stejnou jak x -ovou, tak y -ovou souřadnici, a jsou tak stejným bodem.

Symetrie taky zřejmě platí, protože obě absolutní hodnoty vyjdou stejně, $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$, pro y analogicky. Nakonec dokážeme i nejtěžší ze tří podmínek, a to trojúhelníkovou nerovnost. Pro účely toho uvažujme obecné body $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, $w = (x_3, y_3)$. Chceme dokázat, že platí $\mu(u, w) \leq \mu(u, v) + \mu(v, w)$. Bez újmy na obecnosti můžeme říct, že $\mu(u, w) = |x_1 - x_3|$ (pokud tomu tak není a naopak platí $\mu(u, w) = |y_1 - y_3|$, pak celou rovinu zobrazíme podle osy $x = y$ a dostaneme rovnost, kterou chceme). Nyní všechny body zobrazíme na x -ovou osu. Jelikož $\mu(u, w) = |x_1 - x_3|$, tak tím vzdálenost bodů u a w nezměníme, a vzdálenost všech ostatních bodů možná zmenšíme, ale rozhodně nezvětšíme. Takže pokud nyní platí

$$\mu(u, w) \leq \mu(u, v) + \mu(v, w),$$

pak tato nerovnost musela platit i před zobrazením na osu x . Po zobrazení na osu x je ale vzdálenost již definována tak, jak ji známe (absolutní hodnota rozdílu x -ové souřadnice) a trojúhelníková nerovnost v ní platí.

Úloha 2

Zadání:

Mějme diskrétní metriku δ definovanou jako

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = y \\ 1 & \text{pokud } x \neq y \end{cases}$$

Ukaž, že δ je metrika.

Řešení:

Pro důkaz prvních dvou podmínek jsme si vypůjčili pěkné řešení Doc.^{MM} Kláry Grinerové, pro trojúhelníkovou nerovnost zase elegantní důkaz Doc.^{MM} Martina Fofa:

První podmínkou je $\mu(x, y) \geq 0$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = y$. Jelikož pro $x \neq y$ je $\delta(x, y) = 1$ a pro $x = y$ je $\delta(x, y) = 0$, je tato podmínka splněna. Druhou podmínkou je $\mu(x, y) = \mu(y, x)$. Jelikož hodnota $\delta(x, y)$ závisí pouze na tom, zda jsou si hodnoty x a y rovny nebo ne, jistě platí, že $\delta(x, y) = \delta(y, x)$, protože rovnost je symetrická. Trojúhelníkovou nerovnost $\mu(x, z) \leq \mu(x, y) + \mu(y, z)$ dokážeme sporem. Předpokládejme nějaké tři body, pro které trojúhelníková nerovnost neplatí. Jelikož je hodnota levé strany maximálně jedna a hodnota pravé strany je nezáporná, tak aby nerovnost neplatila, musí být levá strana jedna a pravá strana nula, a tedy $x = y$ a zároveň $y = z$. To ale znamená, že platí i $x = z$, a tudíž levá strana nevyjde jedna. Pro všechny trojice bodů tedy musí trojúhelníková nerovnost platit.

Úloha 3

Zadání:

Pomocí axiomů A_1 až A_4 dokaž následující silnější verzi axiomu A_4 :

(A'_4) pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $W \in \mathcal{U}(x)$, $W \subseteq U$ takové, že pro každé $y \in W$ je $W \in \mathcal{U}(y)$

Nápověda: Položte $W = \{y \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$.

Řešení:

Otiskujeme výstižné řešení od Dr.^{MM} Jana Englera.

Nechť $W = \{y : U \in \mathcal{U}(y)\}$. Pak z A_1 plyne, že všechna $y \in W$ patří do U , tedy $W \subseteq U$. Z A_4 plyne, že pro jakékoliv $U \in \mathcal{U}(y)$ existuje jeho podmnožina $W' \in \mathcal{U}(y)$ taková, že U je okolím všech jeho prvků, tedy W' je podmnožina množiny $\{y' : U \in \mathcal{U}(y')\}$, což je ale evidentně množina W , protože je jedno, jestli prvkům říkáme y nebo y' , takže $W' \subseteq W$. Z axiomu A_3 plyne, že pokud $W' \in \mathcal{U}(y)$ a $W' \subseteq W$, pak $W \in \mathcal{U}(y)$. Pro jakékoliv okolí U bodu x tedy množina $W = \{y : U \in \mathcal{U}(y)\}$ splňuje:

- $W \subseteq U$,
- $\forall y \in W : W \in \mathcal{U}(y)$,

což znamená, že platí i A'_4 .

Úloha 4

Zadání:

Nechť $X = \{a, b, c\}$ je prostor obsahující tři body a necht

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}.$$

Ověř, že tento prostor splňuje axiomy O_1 až O_3 , neboli že se jedná o topologický prostor.

Řešení:

Doc.^{MM} Martin Fof ověřil jednotlivé axiomy následovně:

(\mathcal{O}_1) Prázdná množina i celý prostor jsou otevřenými množinami, a první podmínka tak platí.

(\mathcal{O}_2) Pokud máme dvojici otevřených množin U a V takových, že U je podmnožinou množiny V , pak jejich průnik bude U , a tím pádem otevřená množina.

Stačí nám tedy zkontrolovat dvojice množin, kde jedna není podmnožinou druhé. Nemusíme tedy vůbec kontrolovat dvojice, ve kterých je jedna z množin prázdná, nebo celý prostor. Jediné dvojice, které musíme zkontrolovat jsou množiny $\{a\}$ a $\{b\}$, $\{b\}$ a $\{a, c\}$ a poslední dvojice je $\{a, b\}$ a $\{a, c\}$. Průnik prvních dvou dvojic je prázdná, a tím pádem otevřená množina. A průnik poslední dvojice je $\{a\}$, tedy také otevřená množina.

(\mathcal{O}_3) Pro sjednocení opět platí, že pokud je jedna z množin podmnožinou té druhé, pak bude výsledek stejný jako jedna z původních množin, tentokrát ta větší z nich. To ale znamená, že nám zase stačí zkontrolovat stejné tři

dvojice. Sjednocení množin $\{a\}$ a $\{b\}$ je $\{a, b\}$, která je jedna z otevřených množin, a sjednocení obou dvojic $\{b\}$, $\{a, c\}$ a $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ je celá rovina, tudíž opět otevřená množina.

Úloha 5

Zadání:

Předpokládejme, že máme topologii definovanou pomocí okolí. Necht' pro \mathcal{O} platí, že $U \in \mathcal{O} \Leftrightarrow U \in \mathcal{U}(x)$ pro všechna $x \in U$, neboli že množina U je otevřená právě tehdy, když je okolím všech bodů, které do ní náležejí. Ukaž, že takto definovaná množina otevřených množin splňuje axiomy O_1 až O_3 .

Řešení:

Otiskujeme drobně upravené řešení od Dr.^{MM} Jana Englera.

Prázdná množina neobsahuje nic, takže je skutečně okolím všech bodů, které obsahuje a je tedy otevřená. Pro X dokážu axiomy A_1 až A_4 :

(A_1) do X patří všechny body.

(A_2) pokud je $U \in \mathcal{U}(x)$, pak $X \cap U = U \in \mathcal{U}(x)$.

(A_3) jediná množina v $\mathcal{U}(x)$ obsahující X je X , takže podmínka se zjednoduší na $X \in \mathcal{U}(x) \implies X \in \mathcal{U}(x)$, což platí triviálně.

(A_4) všechny prvky $\mathcal{U}(x)$ jsou buď X , nebo podmnožiny X . Všechny prvky $\mathcal{U}(x)$ různé od X tedy splňují chtěnou podmínku.

Ukázal jsem, že prázdná množina a X splňují axiomy A_1 až A_4 , čímž jsem ukázal O_1 .

Dále si všimnu, že A_2 a O_2 jsou ekvivalentní.

O_3 plyne z A_3 velmi jednoduše: všechna sjednocení tvaru

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

splňují $U_i \subseteq U$. Pokud U je sjednocení otevřených množin (= všechna U_i jsou otevřená), pak je z A_3 otevřená i U . Tím jsem ukázal O_3 , protože je z A_3 okolím každého z bodů z každého U_i a tedy okolím všech svých bodů.

Úloha 6

Zadání:

Předpokládejme, že máme topologii definovanou pomocí otevřených množin. Mějme okolí \mathcal{U} definované následovně: $U \in \mathcal{U}(x)$, pokud existuje $V \in \mathcal{O}$ taková, že

$x \in V \subseteq U$; neboli množina U je okolím bodu x , pokud obsahuje otevřenou množinu obsahující x . Ukaž, že takto definovaná okolí bodů splňují axiomy A_1 až A_4 .

Řešení:

Postupně ověříme axiomy A_1 až A_4 :

- (A_1) Pro $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ ze zadání existuje $V_1 \in \mathcal{O}$ taková, že $x \in V_1$ a $V_1 \subseteq U_1$, z čehož plyne $x \in U_1$.
- (A_2) Opět ze zadání pro $U_2 \in \mathcal{U}(x)$ existuje $U'_2 \in \mathcal{O}$, $x \in U'_2$, $U'_2 \subseteq U_2$ a pro $V_2 \in \mathcal{U}(x)$ existuje $V'_2 \in \mathcal{O}$, $x \in V'_2$, $V'_2 \subseteq V_2$. Z axiomu O_2 pro otevřenou množinu víme, že existuje $W'_2 = U'_2 \cap V'_2 \subseteq U_2 \cap V_2$, $W'_2 \in \mathcal{O}$ a zároveň $x \in W'_2$. Díky W'_2 tedy $(U_2 \cap V_2) \in \mathcal{U}(x)$.
- (A_3) Když máme $U_3 \in \mathcal{U}(x)$, pak existuje $V_3 \in \mathcal{O}$, $V_3 \subseteq U_3$, $x \in V_3$. Pro každou $W_3 \supseteq U_3$ pak ale máme $V_3 \subseteq W_3$, takže díky stejné otevřené množině platí, že $W_3 \in \mathcal{U}(x)$.
- (A_4) Tento axiom vypadá nejsložitěji, ale ve skutečnosti platí z velmi jednoduchého důvodu. Pro $U_4 \in \mathcal{U}(x)$ je hledaným W právě množina $V_4 \in \mathcal{O}$ taková, že $x \in V_4$ a $V_4 \subseteq U_4$. Stačí si uvědomit, že pro každé $y \in V_4$ je splněna podmínka pro $U_4 \in \mathcal{U}(y)$ ze zadání.

Úloha 7

Zadání:

Napiš všechny uzavřené množiny topologického prostoru z úlohy 4. Obsahuje tento prostor nějaké množiny, které jsou otevřené i uzavřené? Najdeš otevřenou množinu, která není uzavřená? A existuje v něm uzavřená množina, která není otevřená?

Řešení:

Níže je správné a pěkně sepsané řešení této úlohy od Doc.^{MM} Martina Fofa.

Množina všech uzavřených množin v tomto prostoru bude vypadat následovně:

$$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

Prázdná množina a celý prostor jsou navzájem své doplňky, a jelikož jsou obě množiny otevřené, tak musí být ve všech prostorech i uzavřené. V tomto prostoru jsou jak otevřené, tak uzavřené i dvě další množiny, a to $\{b\}$ a $\{a, c\}$. Množiny $\{a\}$ a $\{a, b\}$ pak jsou pouze otevřené a $\{c\}$, $\{b, c\}$ zase pouze uzavřené. Množina, která by nebyla ani otevřená ani uzavřená v tomto prostoru neexistuje.

Úloha 8

Zadání:

Předpokládejme, že máme topologii definovanou pomocí otevřených množin. Ukaž, že

- konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina
- konečný průnik uzavřených množin je uzavřená množina

Řešení:

Ze zaslanych správných řešení nás nejvíce zaujala následující formulace od Dr.^{MM} Jana Englera.

Nechť S je sjednocení uzavřených množin topologického prostoru nad X , které jdou vyjádřit jako

$$X - U_1, X - U_2, \dots, X - U_n,$$

kde U_k jsou otevřené pro $1 \leq k \leq n$. Z de Morganova zákona o doplňcích množin platí

$$S = \bigcup_{k=1}^n X - U_k = X - \bigcap_{k=1}^n U_k.$$

Z O_2 víme, že $\bigcap_{k=1}^n U_k$ je otevřená množina, takže S je uzavřená.

Nechť Z je průnik těchto uzavřených množin. Využitím druhého de Morganova zákona o doplňcích dostanu

$$Z = \bigcap_{k=1}^n X - U_k = X - \bigcup_{k=1}^n U_k.$$

Z O_3 víme, že $\bigcup_{k=1}^n U_k$ je otevřená, takže Z je uzavřená.

Poznámka: O_2 je zadaná ve formě, která funguje jenom pro $n = 2$. Jednoduchou indukcí lze ovšem zobecnit na jakékoli $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 9

Zadání:

Nechť $X = \{a, b, c\}$. Nad X můžeme definovat 29 topologií. Kolik jich dokážeš najít a popsat? Zkus přijít na jednodušší a elegantnější způsob, jak je popsat, než pouhým výčtem.

Řešení:

Máme množinu $X = \{a, b, c\}$ a naším cílem je najít všechny topologie nad touto množinou. Budeme postupovat přes definování otevřených množin, i když podobně

bychom mohli postupovat i pro definici pomocí okolí. Jelikož množina otevřených množin je podmnožinou množiny všech podmnožin X , bude se nám hodit tyto podmnožiny vypsat:

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Dále potřebujeme zajistit platnost axiomů O_1 až O_3 . Aby platil O_1 , musí každá množina otevřených množin obsahovat \emptyset a X . Dále tedy budeme uvažovat jen to, jaké množiny k těmto dvěma budeme přidávat a tím budeme definovat \mathcal{O} konkrétních topologií.

- Nejdříve zkusíme nepřidat nic dalšího. Průnik prázdné množiny a celého prostoru je prázdná množina, která již je v našem seznamu otevřených množin, takže O_2 je splněn. Všimneme si, že toto platí pro průnik prázdné množiny s libovolnou jinou množinou, ne jen s X . Sjednocení prázdné množiny a X je X , což je též otevřená množina a platí i O_3 . Opět si všimneme, že sjednocení X a libovolné množiny vždy splňuje O_3 . Dostáváme topologii, která je minimální z pohledu počtu otevřených množin:

- 1) $\{\emptyset, X\}$

- Nyní zkusíme přidat jednu množinu z potenční množiny. Protože máme více různých prvků, zavedeme místo konkrétních množin typy množin, abychom mohli mluvit trochu univerzálněji. Třeba přidání pouze $\{a\}$ se bude chovat stejně, jako přidání $\{b\}$ nebo $\{c\}$, takže místo konkrétních písmen budeme uvažovat množiny typu $\{x\}$ pro $x \in \{a, b, c\}$. Stejně tak $\{a, b\}$ má typ množiny $\{x, y\}$, $x \neq y, x, y \in \{a, b, c\}$, do kterého spadají i množiny $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$. Můžeme si všimnout, že pokud přidáme právě jednu množinu k \emptyset a X , tak díky pozorováním z předchozího bodu budou O_2 i O_3 splněné, takže dostáváme topologie typu $\{\emptyset, \{x\}, X\}$ a $\{\emptyset, \{x, y\}, X\}$, kterých je celkem 6:

- 2) $\{\emptyset, \{a\}, X\}$

- 3) $\{\emptyset, \{b\}, X\}$

- 4) $\{\emptyset, \{c\}, X\}$

- 5) $\{\emptyset, \{a, b\}, X\}$

- 6) $\{\emptyset, \{a, c\}, X\}$

- 7) $\{\emptyset, \{b, c\}, X\}$

- V dalším kroku zkusíme k \emptyset a X přidat dvojice množin. Takových dvojic je $\binom{6}{2} = 15$. Může se stát, že abychom splnili O_2 či O_3 , budeme muset přidat další otevřené množiny. Některé dvojice by tedy mohly vygenerovat stejné topologie. Nicméně uvidíme, že se to nestane. Každá množina samostatně

s \emptyset a X splňuje O_2 a O_3 , stačí tedy zajistit, že tyto axiomy budou platit pro konkrétní dvojici množin.

Jaké tedy máme typy dvojic? Prvním typem je $\{x\}, \{x, y\}$. Všimneme si, že O_2 platí, protože $\{x\} \subseteq \{x, y\}$, a O_3 platí, protože $\{x, y\} \supseteq \{x\}$. Topologií tohoto typu je 6:

- 8) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$
- 9) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$
- 10) $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
- 11) $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$
- 12) $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$
- 13) $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$

Druhým typem je $\{x\}, \{y, z\}$. Vidíme, že O_2 platí, protože $\{x\} \cap \{y, z\} = \emptyset$ a O_3 platí díky $\{x\} \cup \{y, z\} = X$. Jsou 3 topologie tohoto typu:

- 14) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$
- 15) $\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$
- 16) $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}$

Třetím typem je $\{x\}, \{y\}$. Zde opět s O_2 není problém, protože průnik je prázdný. Pro splnění O_3 ale musíme přidat množinu $\{x, y\}$. Získáváme následující 3 topologie:

- 17) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
- 18) $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$
- 19) $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$

Čtvrtým typem dvojice je $\{x, y\}, \{x, z\}$. V tomto případě O_3 platí díky tomu, že $\{x, y\} \cup \{x, z\} = X$, ale pro platnost O_2 musíme do otevřených množin přidat ještě $\{x\}$. Tím získáme další 3 topologie:

- 20) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$
- 21) $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$
- 22) $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

- Nakonec se zamysleme, jestli můžeme přidat trojici množin tak, aby nám vygenerovala nějakou topologii, kterou ještě nemáme. Ještě nám zbývají dva typy trojic, které mají tuto vlastnost.

Prvním typem je $\{x\}, \{y\}, \{z\}$. Pro zajištění platnosti O_3 musíme k těmto množinám přidat $\{x, y\}, \{x, z\}$ a $\{y, z\}$. Všimneme si, že pro typ $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ bychom museli kvůli platnosti O_2 přidat $\{x\}, \{y\}$ a $\{z\}$,

čímž dostaneme stejnou topologii, takže tento typ nebudeme rozebírat zvlášť. Dostáváme jednu topologii, která je maximální co do počtu otevřených množin, protože otevřené jsou zkrátka všechny podmnožiny X :

$$23) \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Dalším typem trojice, který nám nageneruje topologii, kterou ještě nemáme, je typ $\{x\}, \{y\}, \{x, z\}$. Pozorujeme, že O_2 platí, protože průnik dvojic z této trojice je buď prázdný, nebo $\{x\}$. Aby platil O_3 , musíme přidat $\{x, y\}$. Tím dostaneme posledních 6 topologií:

$$24) \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$$

$$25) \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$$

$$26) \{\emptyset, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$$

$$27) \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$$

$$28) \{\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

$$29) \{\emptyset, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Tím jsme našli všech 29 topologií nad $X = \{a, b, c\}$.

Téma 2 – Optika

V tomto čísle najdete vzorová řešení úloh ze čtvrtého čísla od Mgr.^{MM} Jolany Knillové a Doc.^{MM} Kláry Grinerové. Můžete si počíst o spoustě hrátek s barvami, které provedly, nafotily a poslaly. K 5. číslu nám žádná řešení nepřišla.

Dále zbývá už jen poslední věc, chtěli bychom vám poděkovat. Děkujeme vám všem, kteří jste se do našeho tématka zapojili, děkujeme za všechna poslaná řešení, za všechny provedené pokusy a za všechny fotky, které jste poslali. Doufáme, že se nám povedlo naplnit cíl, který jsme si na začátku ročníku vytyčili a podařilo se nám ukázat vám optiku z experimentálního pohledu. Kéž byste teď viděli optické jevy všude kolem vás.

Řešení Mgr.^{MM} Jolany Knillové

Úloha 1

Zadání:

Fotony s různou vlnovou délkou se v oblasti viditelného světla neliší jen svou barvou, ale i dalšími vlastnostmi. Například při lomu na rozhraní dvou optických prostředí se některé vlnové délky lámou více než jiné. Jedná se o přímou nebo nepřímou úměru? Svůj názor podpořte teorií nebo experimentem.

Řešení:

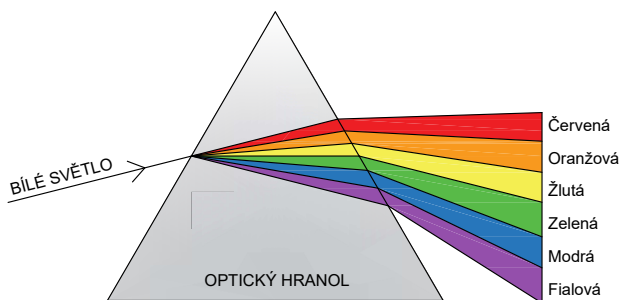
Abychom zvládli odpovědět na otázku, jak se lámou jednotlivé vlnové délky na rozhraní dvou prostředí, podíváme se na známý pokus s optickým hranolem.

Bílé světlo prochází hranolem a dvakrát (když do hranolu vstupuje a když z něj vystupuje) se láme. K disperzi světla dochází při vstupu do hranolu a při výstupu z něj. Z obrázku 12 můžeme vyčíst, že nejvíce od původního směru se budou lámat fialové paprsky.

Nejvíce se tedy budou lámat paprsky s vyšší frekvencí, tedy s menší vlnovou délkou. V tabulce 1, kde jsou zapsány zvyšující se vlnové délky a jejich absolutní indexy lomu $n = \frac{c}{v}$, lze vidět, že mezi vlnovou délkou a indexem lomu je nepřímá úměra.

λ (nm)	n
400	1,0002983
500	1,0002943
600	1,0002931
700	1,0002910
800	1,0002902

Tabulka 1: Vlnová délka a absolutní index lomu



Obrázek 12: Optický hranol

Úloha 2

Zadání:

Zkuste si vyrobit „káču“ ve tvaru kruhu, na které se bude pravidelně střídát několik výsečí různých barev (dvou, tří, celého spektra). Následně káču roztočte a pozorujte, jaká barva vznikne. Jaká hranice nejspíš rozhoduje o tom, že při nějaké úhlové rychlosti jsou ještě vidět jednotlivé barvy a při o něco vyšší už splynou v jednu?

Řešení:

Lidské oko je schopné vnímat zhruba 60 snímků za sekundu (což odpovídá 60 Hz). Jelikož se káča točí s určitou úhlovou rychlostí, má i frekvenci. Jakmile frekvence překročí 60 Hz, lidské oko není schopné vnímat jednotlivé barvy a ty tedy splynou.

60 Hz odpovídá úhlová rychlost přibližně 377 rad/s ($\omega = 2\pi f$). Jelikož se rychlost vypočítá jako součin úhlové rychlosti a poloměru ($v = \omega r$), můžeme usoudit, že aby naše oko stále vnímalo jednotlivé barvy, musí mít káča se zvyšující rychlostí v i větší poloměr.

Úloha 3

Zadání:

Přiveďte k varu vodu v konvici a v zatemněné místnosti umístěte za konvici zdroj světla tak, abyste ho viděli přes páru. Měli byste pozorovat slabé duhové kroužky okolo zdroje. Takové kroužky můžeme někdy pozorovat i kolem Slunce a Měsíce. Proč a jak kroužky vznikají?

Řešení:

V tomto případě prosvítá světlo vyzařované zdrojem (baterkou, Sluncem, v případě Měsíce světlo odražené) přes vrstvu drobných kapek v oblaku. Vzniká soustava soustředěných prstenců, které se říká koróna. Tento jev je způsoben ohýbáním světla na kapičkách, poloměr prstenců je tedy závislý na velikosti kapiček a vlnové délce světla. Protože mají modré paprsky menší vlnovou délku než červené, bude prstenec nejbližší zdroji zbarven modře. V případě, že jsou kapičky různě velké, nevzniknou barevné kroužky, ale pouze slabě zbarvený nebo bílý kruh.

Tento jev může být způsobený i pylem. Podobným případem je halo, které ale narozdíl od koróny vzniká lomem paprsků na ledových krystalcích obsažených v oblaku.

Při pokusu s vodní párou z varné konvice se bohužel nepodařilo vytvořit jasně barevné prstence, okolo zdroje byl viditelný jen slabě zbarvený kruh – vizte obrázek 13.



Obrázek 13: Koróna kolem světelného zdroje

Úloha 4

Zadání:

Proč je obloha modrá? Zjistit to můžete i pomocí experimentu. Naplňte akvárium (nebo jinou velkou nádobu) vodou s troškou rozmíchaného mléka (pokus nemusí vyjít hned napoprvé – zkuste změnit množství mléka a více ho rozmíchat). Pokud ve tmě akvárium z jedné strany prosvítíte silným zdrojem světla, tak byste měli zpozorovat zabarvení vody s mlékem do modra. Z čelního pohledu bude akvárium zabarveno do červena. Tomuto jevu se říká Rayleighův rozptyl. Popište, jak se vám pokus povedl a proč je obloha modrá.

Řešení:

Za to, že je obloha modrá, může tzv. Rayleighův rozptyl. Světlo se rozptýlí na molekulách plynu nebo na částicích menších, než je vlnová délka světla. K tomu, aby se světelné paprsky rozptýlily, je potřeba nahodilost rozptylových center. Molekuly se sráží, na nepatrnou dobu vzniknou shluky a světlo má ideální podmínky k rozptylu. A proč není obloha třeba červená nebo fialová? Modré paprsky se rozptylují více než ty červené. Slunce také vyzařuje více modrého (maximum vyzařování je v zelené oblasti spektra, ale modrá se lépe rozptyluje) světla než fialového a navíc lidské oko není na fialovou tolik citlivé.

Při pokusu jsem postupně přilávala mléko do průhledné nádoby s vodou. Prvně se světlo procházející nádobou zbarvilo do žlutooranžova, což napodobilo barvu Slunce, kterou vidíme, když se Slunce přiblíží obzoru. Poté se světlo začalo rozptylovat v nádobě a zbarvilo roztok vody a mléka do modra, jak můžete vidět na obrázku 14b.

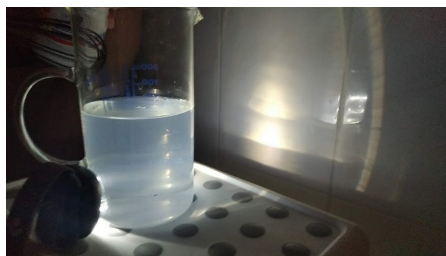
Zdroje

<https://kof.zcu.cz/st/dp/hosnedl/html/index.html>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Sn%C3%ADmkov%C3%A1_frekvence

<http://ukazy.astro.cz/korona.php>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Rayleigh%C5%AFv_rozptyl



(a) Začátek pokusu



(b) Napodobení zbarvení modré oblohy

Obrázek 14: Proč je obloha modráŘešení Doc.^{MM} Kláry Grinerové

Úloha 1

Zadání:

Fotony s různou vlnovou délkou se v oblasti viditelného světla neliší jen svou barvou, ale i dalšími vlastnostmi. Například při lomu na rozhraní dvou optických prostředí se některé vlnové délky lámou více než jiné. Jedná se o přímou nebo nepřímou úměru? Svůj názor podpořte teorií nebo experimentem.

Řešení:

Zopakovala jsem pokus z minulého dílu – tedy lom bílého světla na rozhraní vody a vzduchu. Úhel dopadu 40° jsem zachovala a pokus jsem zopakovala v tmavé místnosti, takže dopadající rozložené spektrum bylo výrazně lépe vidět. Naměřila jsem různé úhly dopadu pro jednotlivé části barevného světla a pokusila se určit více různých vlnových délek dopadajícího spektra, díky lépe viditelnému rozkladu to šlo o dost snadněji.

Z tohoto experimentu jsme už v minulém díle viděli rozdíl v lámavosti světla podle barvy. Jak můžete vidět v tabulce 2, s rostoucí vlnovou délkou se úhel dopadu zmenšuje, tedy vyšší vlnové délky se lámou méně. Mezi vlnovou délkou a lomivostí světla dané vlnové délky je tedy nepřímá úměra.

barva	vlnová délka (nm)	úhel dopadu α	úhel lomu β
fialová	420	40°	64°
modrá	450	40°	62°
modrozelená	480	40°	61°
zelená	525	40°	60°
žlutá	600	40°	58°
oranžová	630	40°	56°
červená	650	40°	55°

Tabulka 2: Závislost indexu lomu na vlnové délce

Úloha 2

Zadání:

Zkuste si vyrobit „káču“ ve tvaru kruhu, na které se bude pravidelně střídát několik výsečí různých barev (dvou, tří, celého spektra). Následně káču roztočte a pozorujte, jaká barva vznikne. Jaká hranice nejspíš rozhoduje o tom, že při nějaké úhlové rychlosti jsou ještě vidět jednotlivé barvy a při o něco vyšší už splynou v jednu?

Řešení:

Při roztočení káči se nám barvy slijí v jednu souvislou barvu. Jak káča zpomaluje, začínáme v rychlém sledu pozorovat „problíkávání“ barev jednotlivých výsečí ale ne příliš ostře, jelikož káča záhy poté ztratí balanc a skutálí se bokem na stůl. Z pozorovaných změn v závislosti na rychlosti otáčení káči můžeme odvodit, k čemu dochází. Při pomalém otáčení by naše oko bez obtíží pozorovalo střídání jednotlivých barev. S rostoucí rychlostí se ale tato schopnost zhoršuje, jelikož oko má jen omezenou schopnost vnímání v čase. Přenos signálu z oka do mozku nějakou dobu trvá, proto pokud se pozorovaný objekt mění rychleji, než jsou jednotlivé signály vyhodnoceny, nevidíme již jednotlivé změny, ale jednotlý pohyb. Pokud tedy káča dosáhne určité úhlové rychlosti, naše oko již „nestíhá“ zpracovat všechny změny barev a pozoruje tak ve své podstatě v jednom místě všechny barvy zároveň. Takto pro naše oko barvy splynou a pozorujeme barvu vzniklou složením použitých barev. Limitujícím faktorem se tak stávají schopnosti našeho oka a jeho setrvačnost.

Použila jsem již existující káču, na kterou jsem pouze vyráběla různá barevná kolečka. Při daných kombinacích vznikaly na káče různé barvy. Při focení káči je zde drobný zádrhel, kdy foťák zachytí barvy ne úplně spojené, takže místy vidíme jednotlivé barvy výsečí. Ale z použitých barevných koleček bylo vidět, že mísení barev zde funguje jako u světel. Tedy červenozelené kolečko vypadá žlutě, celé spektrum v závislosti na použitých odstínech dává šedou až bílou a podobně (vizte obrázek 15).

Úloha 3

Zadání:

Přiveďte k varu vodu v konvici a v zatemněné místnosti umístěte za konvici zdroj světla tak, abyste ho viděli přes páru. Měli byste pozorovat slabé duhové kroužky okolo zdroje. Takové kroužky můžeme někdy pozorovat i kolem Slunce a Měsíce. Proč a jak kroužky vznikají?



Obrázek 15: Rotující barevné kruhy

Řešení:

Tento jev můžeme pozorovat nejen při tomto experimentu, kolem Slunce a Měsíce, ale běžně se s ním setkáme během mlhavého počasí nebo mrholení u nejrůznějších zdrojů světla, například u reflektorů vozidel nebo u lampy na ulici. Ve všech případech k jevu dochází díky drobným kapičkám vody, přes které daný svítící objekt pozorujeme. Tyto kapičky se stávají překážkou pro procházející světlo a dochází na každé jednotlivé kapce k ohybu, díky němuž se světlo rozkládá. Bílé světlo zdroje se tak z pohledu pozorovatele rozloží do jednotlivých duhových kroužků, které může pozorovat kolem zdroje.

Úloha 4

Zadání:

Proč je obloha modrá? Zjistit to můžete i pomocí experimentu. Naplňte akvárium (nebo jinou velkou nádobu) vodou s troškou rozmíchaného mléka (pokus nemusí vyjít hned napoprvé – zkuste změnit množství mléka a více ho rozmíchat). Pokud ve tmě akvárium z jedné strany prosvítíte silným zdrojem světla, tak byste měli pozorovat zabarvení vody s mlékem do modra. Z čelního pohledu bude akvárium zabarveno do červena. Tomuto jevu se říká Rayleighův rozptyl. Popište, jak se vám pokus povedl a proč je obloha modrá.

Řešení:

Jelikož akvárium nemáme, vyzkoušela jsem pokus s obyčejnou větší sklenicí. Do vody jsem nalila trochu mléka, zamíchala a posvítila baterkou do dna sklenice. Bylo vidět krásné mléčné bílo. Obsah sklenice jsem tak opakovaně ředila, svítila a zase ředila, až tekutina vypadala na první pohled téměř průhledně. Při posvícení v tmavé místnosti pak pozorovaný obsah konečně změnil barvu z bílé na modrou.

V atmosféře dochází stejně jako v naší sklenici s mlékem k zmíněnému Rayleighovu rozptylu. Světlo se může rozptylovat z různých důvodů, k rozptylu dochází na zrnících prachu, shlucích molekul různých plynů, částicích mléka ve vodě, ... Rozptyl světla závisí na jeho vlnové délce a k největšímu rozptylu dochází u malých vlnových délek, které odpovídají modrému a fialovému zbarvení.

V atmosféře se pohybuje mnoho molekul plynu, které se navzájem srážejí a jejich shluky následně rozptylují sluneční světlo. Jelikož se malé vlnové délky snadněji rozptylují, tak v rozptýleném světle převládají modré a fialové vlnové délky. A to je důvod, proč je obloha modrá a fialová. Ale počkat, obloha přece není fialová. . .

Do hry tak vstupuje citlivost lidského oka i intenzita jednotlivých vlnových délek slunečních paprsků. Naše oko má větší citlivost na modrou barvu než fialovou, proto při zastoupení modré i fialové pozorujeme spíše modrou. Sluneční světlo má největší zastoupení ve vlnových délkách odpovídajících zelené barvě a s klesající vlnovou délkou také značně klesá intenzita. Modré vlnové délky jsou tak zastoupeny více než fialové a my pozorujeme modrou oblohu.

Problém 5

Zadání:

Zkuste si mísení barev s barevnými papíry a barevnými fóliemi. Položte fólie na papíry a pozorujte, jak se mění barvy. Experimentujte s různými překrytími a kombinacemi fólií na různých barvách papíru. Své pokusy zdokumentujte a popište.

Řešení:

Našla jsem doma modrou, zelenou, žlutou a růžovou/červenou fólii. Chvilí jsem si s nimi hrála a přestalo mě bavit fólie pořád přeskládávat. Z každé barvy jsem tedy ustříhla proužek a ty jsem poslepovala dohromady tak, že vzniklo 16 políček, kde na každém políčku je jiná kombinace čtyř fólií a jsou tam obsaženy všechny možné kombinace, jak znázorňuje tabulka 3.

	modrá	modrá zelená	zelená
žlutá	modrá žlutá	modrá zelená žlutá	zelená žlutá
žlutá červená	modrá žlutá červená	modrá žlutá zelená červená	zelená žlutá červená
červená	modrá červená	modrá zelená červená	zelená červená

Tabulka 3: Všechny možné kombinace fólií

V levém horním rohu je tak vidět původní barva papíru, na který fólii položíme, a v ostatních čtverečcích můžeme vidět, jak barvu ovlivní různé kombinace fólií. Nafotila jsem překrytí různých barevných papírů touto fólií a vznikla z toho velká kupa pestrobarevných fotek – vizte obrázek 16.

Celkem důležitý je poznatek, že u barevných fólií a papírů pozorujeme trochu odlišné mísení barev. Například ze zelené fólie a červeného papíru nevznikne žlutá, jako je tomu u skládání světél, ale vznikne hnědá. A stejně tak u červené fólie a zeleného papíru. Tento způsob mísení barev je blízký tomu, jak funguje mísení barev, když něco malujeme třeba temperkami.

Barvy světél, se kterými jsme doposud pracovali, se totiž od barev na malování (a tím pádem i překrývá fólií) dost liší. U světél máme základní barvy RGB – tedy červenou, zelenou a modrou. U barev na malování jsou základní barvy žlutá, modrá a červená, kromě nich ještě bílá a černá, které ze základních barev namíchat nelze. Jiné než základní barvy tak u světél a u barevných papírů a fólií vznikají jinými kombinacemi, jejich srovnání je znázorněno tabulkou 4.

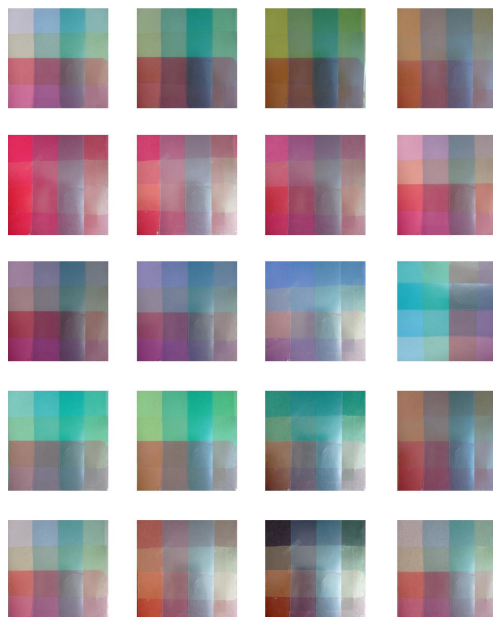
U barevných fólií je trochu škoda, že při více vrstvách fólie už vidíme převážně vrchní z fólií, barva papíru již příliš neprosvítá. Pokud použijeme všechny čtyři fólie, vidíme téměř jakoukoliv barvu jako šedohnědou. Jelikož pokud smícháme základní barvy jako červenou, modrou a žlutou, dostaneme v závislosti na poměru hnědou, nebo šedohnědoošklivou, když poměr moc nevyčytáme. Jinak

na fotkách (obrázek 16) můžeme vidět, že červená a žlutá nám dají oranžovou, zelená a červená hnědou, modrá a červená fialovou a podobně.

	R	G	B	Barvy fólií a papírů ^a
bílá	255	255	255	bílá
žlutá	255	255	0	žlutá
oranžová	255	128	0	žlutá + červená
červená	255	0	0	červená
růžová	255	0	255	červená + bílá
fialová	128	0	255	červená + modrá
modrá	0	0	255	modrá
zelená	0	255	0	žlutá + modrá
hnědá	100	50	0	žlutá + modrá + červená
černá	0	0	0	černá

^abílá, žlutá, červená, modrá, černá

Tabulka 4: Barvy jako kombinace barevných fólií



Obrázek 16: Míchání barev pomocí fólií

Problém 6

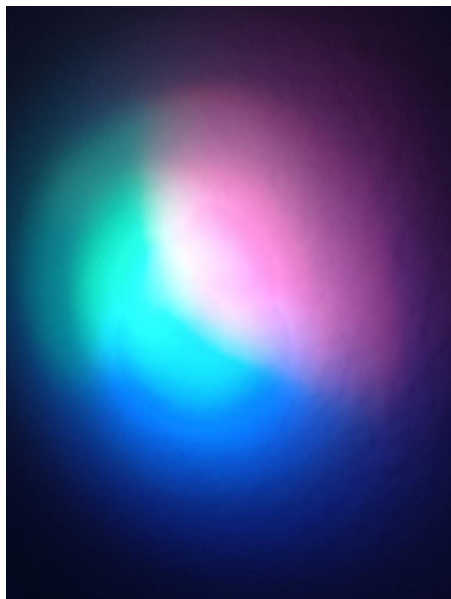
Zadání:

Zkuste na bílé pozadí svítit červeným a zeleným světlem. Experimentujte s mícháním barev. Použít můžete také modré světlo. Své pokusy zdokumentujte a popište.

Řešení:

Jelikož doma nemáme moc nějakých barevných světél, použila jsem obyčejnou baterku. Nalepila jsem na baterku průhlednou lepenku a lepenku jsem barvila červenou, zelenou a modrou lihovou fixou. Chvilí jsem si hrála s různými barevnými vzory, ale výsledek byl trochu zklamáním, jelikož při rozsvícení se vzory dost slily do sebe a byla vidět jen kombinace daných barev. Na fotce (obrázek 17) se ale povedlo zachytit, jak se mísí barvy – kolečko jsem rozdělila do modré, červené a zelené výseče.

Při svícení těmito třemi barvami pak bylo krásně vidět mísení barev. Na pomezí červené a zelené vznikla žlutá, mezi modrou a červenou vznikla růžová a mezi zelenou a modrou můžeme vidět zelenomodrou.



Obrázek 17: Mísení barevného světla

Téma 3 – Olympiádní matematika

Díl 6: Vzorová řešení teorie čísel

Úloha 1

Zadání:

Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 3$ platí $60 \mid n^6 - n^2$.

Řešení od Mgr.^{MM} Anny Cmielové

- Nejdříve si rozložím výraz $n^6 - n^2$ do tvaru $n^2(n-1)(n+1)(n^2+1)$
- Dále rozkladem na prvočinitele zjistím, že aby bylo číslo dělitelné 60, musí být dělitelné 3, 5, 4
- Pokud je jeden z činitelů dělitelný určitým číslem, bude jím dělitelný celý mnohočlen
- Sudá n
 - Každé sudé n^2 bude vždy dělitelné 4 (sudé číslo = $2x$, $(2x)^2 = 4x^2$)
 - Každé třetí číslo je dělitelné 3, a proto buď $n-1$, $n+1$ nebo n (a tedy n^2) musí být dělitelné 3
 - Pokud n končí na 0, bude dělitelné pěti;
pokud končí na 4 nebo 6, pak $5 \mid n+1$ nebo $n-1$;
pokud končí na 2 nebo 8, bude n^2 končit na 4 a tedy $5 \mid n^2+1$
 - Pro každé sudé n bude platit, že $n^6 - n^2$ bude dělitelné 60
- Lichá n
 - Každé druhé sudé číslo je dělitelné 4, a proto buď $n-1$ nebo $n+1$ musí být dělitelné 4
 - Ze stejného důvodu jako u sudých n bude výraz dělitelný 3
 - Pokud n končí na 5, bude dělitelné pěti;
pokud končí na 9 nebo 1, $5 \mid n+1$ nebo $n-1$;
pokud končí na 3 nebo 7, bude n^2 končit na 9 a tedy $5 \mid n^2+1$
 - Pro každé liché n bude platit, že $n^6 - n^2$ bude dělitelné 60

Úloha 2

Zadání:

Co mají společného všechna složená čísla, která mají právě 3 (přirozeno-číselné) dělitele?

Řešení od Bc.^{MM} Michaely Valtrové

Pokud má číslo lichý počet dělitelů, pak je to druhá mocnina čísla. Každé číslo má jako dva dělitele 1 a samo sebe, pokud má tedy tři dělitele, přidá se ještě jeho odmocnina. Tato odmocnina ale nesmí být složené číslo, protože tím by přibylí dělitelé hledaného čísla. Všechna čísla s právě třemi děliteli jsou druhé mocniny prvočísel.

Úloha 4

Zadání:

Dokažte, že každé prvočíslo větší rovno 5 lze napsat ve tvaru $6k \pm 1$, kde k je přirozené číslo.

Řešení od Mgr.^{MM} Anny Cmielové

Označíme hledané číslo n .

- Zápis $6k \pm 1$ znamená, že číslo n dává po dělení 6 zbytek buď 1, nebo 5
- Po dělení 6 můžeme kromě těchto dvou dostat zbytek 0, 2, 3 nebo 4
- Pokud bude zbytek 0, 2 nebo 4, znamená to, že číslo n je sudé a musí být dělitelné 2
- Pokud bude zbytek 3, musí být číslo n dělitelné 3
- Prvočíslo tedy skutečně dostaneme jen tehdy, když bude zbytek 5 nebo 1

Úloha 5

Zadání:

Proč se zbytky po dělení mocnin čísla b číslem a cyklicky opakují? Není potřeba formální důkaz, stačí dostatečně rozumně zdůvodnit. Klidně si pomozte tabulkou nebo obrázkem.

Řešení od Dr.^{MM} Jana Englera

Nenulových zbytků po dělení a je pouze $a-1$. Když budu umocňovat více než $a-1$ krát, musím se dostat na zbytek, který jsem už předtím dostal. Z vlastností kongruence vyplývá, že jakmile dostanu dvakrát stejný zbytek, musí se opakovat všechny zbytky mezi nimi. Pokud je totiž nějaké k, l

$$b^k \equiv c \pmod{a}, \quad b^l \equiv c \pmod{a},$$

pak

$$b^{k+d} \equiv b^{l+d} \pmod{a}$$

Umocňování tedy probíhá cyklicky, cykly mají délku $a-1$ nebo kratší.

Úloha 6

Zadání:

1. Jaký zbytek dává číslo 2^{30} po dělení 5?
2. Jaký zbytek dává výraz $2^{16} + 3^{27} + 5^{25}$ po dělení 22?

Řešení od Bc.^{MM} Michaely Valtrové

1)

$$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$2^5 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\vdots$$

$$2^{29} \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^{30} \equiv 4 \pmod{5}$$

2^{30} dává po dělení 5 zbytek 4.

2) $2^{16} + 3^{27} + 5^{25}$ si můžeme rozdělit na tři samostatné mocniny, kde chceme zjistit zbytek po dělení 22 a následně tyto zbytky sečíst. Můžeme to rozdělit, protože dělení se zbytkem je vlastně odečítání, sčítání a odčítání nám to umožňuje.

$$2^{16} \equiv 20 \pmod{22} \quad \text{opakování zbytků (2, 4, 8, 16, 10, 20, 18, 14, 6, 12)}$$

$$3^{27} \equiv 9 \pmod{22} \quad \text{opakování zbytků (3, 9, 5, 15, 1)}$$

$$5^{25} \equiv 1 \pmod{22} \quad \text{opakování zbytků (4, 3, 15, 9, 1)}$$

$$2^{16} + 3^{27} + 5^{25} \equiv 20 + 9 + 1 \pmod{22}$$

$$2^{16} + 3^{27} + 5^{25} \equiv 8 \pmod{22}$$

Výraz dává po dělení 22 zbytek 8.

Úloha 7

Zadání:

1. Najděte všechny celočíselné nezáporné dvojice (m, n) , pro které platí $1 + 2^n = 3^m$.
2. Najděte všechny celočíselné nezáporné dvojice (m, n) , pro které platí $1 + 3^m = 2^n$.

Řešení:

1) Při řešení první z dvojice úloh využijeme krom kongruencí i lehkou práci se vzorci. Začneme tím, že správně zvolíme číslo, jehož dělitelnost budeme u obou stran rovnice zkoumat. Jelikož je jednoduché nahlédnout, že rovnice má nějaká triviální řešení, budeme se snažit vybrat takové číslo, u kterého se jedna ze stran rovnice bude chovat „zajímavě“, tedy jinak, než se jen klasicky cyklit. V tomto případě je vhodná vyšší mocnina jedné ze dvou mocnin v rovnici (v tomto případě 2, 3) – a za chvíli uvidíte proč. Nyní už vám prozradím, že v tomto případě použijeme dělitelnost 4.

$$\begin{array}{ll}
 2^1 + 1 \equiv 3 \pmod{4} & 3^1 \equiv 3 \pmod{4} \\
 2^2 + 1 \equiv 1 \pmod{4} & 3^2 \equiv 1 \pmod{4} \\
 2^3 + 1 \equiv 1 \pmod{4} & 3^3 \equiv 3 \pmod{4} \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Jak vidíme, použitím kongruencí podle mocniny dvojky jsme po určitém počtu kroků ukončili cyklení zbytků a ustálili se na jedné hodnotě. To může být výhodné především v případě, že chceme ukázat, že úloha má nějaký konečný počet řešení a žádné jiné.

A co nám to říká v tomto konkrétním případě? Pro $n = 1$ jednoduše ověříme, že řešení existuje – $(m, n) = (1, 1)$, můžeme tedy dále předpokládat, že $n \geq 2$. V takovém případě musí být m sudé, jinak se obě strany nemohou rovnat.

Pamatujete si, jak jsme na začátku mluvili o úpravě vzorců? Nadešel správný čas. Necht existuje k takové, že $m = 2k$.

$$\begin{aligned}
 1 + 2^n &= 3^{2k} \\
 2^n &= 3^{2k} - 1 \\
 2^n &= (3^k + 1)(3^k - 1)
 \end{aligned}$$

Teď už je řešení zřejmé. Na levé straně máme nějakou mocninu dvojky, obě závorky na straně pravé tedy také musí být mocninami dvojky. Tato čísla se ovšem liší jen o 2 – a jediné dvě mocniny dvojky, které se liší právě o 2, jsou 2 a 4.

Po dosazení

$$\begin{aligned}2^n &= 4 \cdot 2 \\n &= 3 \\8 + 1 &= 3^m \\m &= 2\end{aligned}$$

získáváme druhou sadu řešení.

Úloha má tedy právě dvě řešení, dvojice (1,1) a (2,3).

2) I při řešení druhé z úloh použijeme stejný trik se správně zvolenou kongruencí. Tentokrát to ovšem bude číslo 8.

$$\begin{array}{ll}3^1 + 1 \equiv 4 \pmod{8} & 2^1 \equiv 2 \pmod{8} \\3^2 + 1 \equiv 2 \pmod{8} & 2^2 \equiv 4 \pmod{8} \\3^3 + 1 \equiv 4 \pmod{8} & 2^3 \equiv 0 \pmod{8} \\& \vdots \\& 2^4 \equiv 0 \pmod{8}\end{array}$$

V této úloze nám to k řešení prakticky stačí. Vidíme, že levá strana rovnice nikdy nebude dělitelná 8 – platí tedy, že $n \leq 2$. Stačí tedy vyšetřit tři jediné možné hodnoty $n = 0, 1, 2$. Jednoduše pak dostáváme opět dvě sady možných řešení – (0,1) a (1,2).

Úloha 8

Zadání:

Najděte všechna přirozená n , pro která platí

$$(11^n + 2^n + 1) \mid (11^{n+1} + 2^{n+1} + 1).$$

Řešení:

Pro řešení úlohy využijeme jednoduchých kongruencí. Pokud má platit, že $(11^n + 2^n + 1) \mid (11^{n+1} + 2^{n+1} + 1)$ pro nějaké n , musí očividně všechny dělitelé $11^n + 2^n + 1$ dělit i $11^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

První využijeme dělitelnosti 3 a podíváme se, jaké dávají výrazy zbytky po dělení 3.

$$\begin{array}{lll}11^1 \equiv 2 \pmod{3} & 2^1 \equiv 2 \pmod{3} & 11^1 + 2^1 + 1 \equiv 2 \pmod{3} \\11^2 \equiv 1 \pmod{3} & 2^2 \equiv 1 \pmod{3} & 11^2 + 2^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3} \\11^3 \equiv 2 \pmod{3} & 2^3 \equiv 2 \pmod{3} & 11^3 + 2^3 + 1 \equiv 2 \pmod{3} \\& \vdots & \vdots\end{array}$$

Tedy vidíme, že pro každé sudé n trojka dělí $11^n + 2^n + 1$. Pokud tedy takové n ze zadání existuje, musí být určitě liché – v opačném případě $3 \mid 11^n + 2^n + 1$, ale $3 \nmid 11^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Nyní jen snadno za pomoci dělitelnosti 4 ukážeme, proč n nemůže být ani liché číslo větší než 1.

$$\begin{array}{lll} 11^1 \equiv 3 \pmod{4} & 2^1 \equiv 2 \pmod{4} & 11^1 + 2^1 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \\ 11^2 \equiv 1 \pmod{4} & 2^2 \equiv 0 \pmod{4} & 11^2 + 2^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \\ 11^3 \equiv 3 \pmod{4} & 2^3 \equiv 0 \pmod{4} & 11^3 + 2^3 + 1 \equiv 0 \pmod{4} \\ 11^4 \equiv 1 \pmod{4} & 2^4 \equiv 0 \pmod{4} & 11^4 + 2^4 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Co nám vyplývá z této dělitelnosti? Pro každé liché n , které je větší rovno 3, je výraz $11^n + 2^n + 1$ dělitelný 4, ale výraz $11^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ už ne – n tedy určitě nemůže být ani liché číslo větší než 1.

Zbývá nám tedy jedna možná hodnota pro n , u které lze jednoduše otestovat, jestli dělitelnost platí.

$$\begin{aligned} 11 + 2 + 1 & \mid 121 + 4 + 1 \\ 14 & \mid 126 \end{aligned}$$

Získáváme tedy řešení, kdy jediná přípustná hodnota n je 1.

Úloha 9

Zadání:

Najděte všechna přirozená n , pro která platí

$$4^{n-1} + 7 \cdot 2^2 + 48 = n!$$

Řešení od Doc.^{MM} Kláry Grinerové

$$4^{n-1} + 7 \cdot 2^2 + 48 = n!$$

$$4^{n-1} + 28 + 48 = n!$$

$$4^{n-1} + 76 = n!$$

Pravou stranu rovnice tvoří faktoriál, musí tedy platit

$$1 \mid 4^{n-1} + 76, \quad 2 \mid 4^{n-1} + 76, \quad 3 \mid 4^{n-1} + 76, \quad \dots, \quad n \mid 4^{n-1} + 76.$$

Nyní na chvíli zanedbáme rovnosti levé a pravé strany a podíváme se, čím je levá strana dělitelná, pokud uvažíme nějaké obecné n .

$2 \mid 4^{n-1} + 76$ platí jistě pro všechna $n > 1$ (a pro $n = 1$ nemá cenu uvažovat).
Dělitelnost 3:

$$4^{n-1} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$76 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$4^{n-1} + 76 \equiv 2 \pmod{3} \rightarrow 3 \text{ nikdy nedělí } 4^{n-1} + 76.$$

Tedy pro obecné n rovnice nemá řešení, jelikož pro $n \geq 3$ nelze a pro 1, 2 jednoduše vyzkoušíme, že neplatí.

Úloha 10

Zadání:

Dokažte, že pokud je pro celočíselná a, b výraz $a^2 + 9ab + b^2$ dělitelný 11, pak je i výraz $a^2 - b^2$ dělitelný 11.

Řešení od Bc.^{MM} Michaely Valtrové

$$11 \mid a^2 + 9ab + b^2$$

$$11 \mid a^2 - 2ab + b^2 + 11ab$$

$$11 \mid (a - b)^2 + 11ab$$

Pokud je součet dvou členů dělitelný 11 a druhý člen je dělitelný 11, musí být i první člen dělitelný, proto $11 \mid (a - b)^2$.

Protože je 11 prvočíslo, je samotný rozdíl a a b dělitelný 11 (dělitelnost u mocniny jinak nezískáme).

$$(a - b) = 11k$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 11k(a + b)$$

$$11 \mid 11k(a + b)$$

Protože dokazovaný výraz je součinem dvou členů, z nichž jeden je dělitelný 11, je celý výraz 11 dělitelný také.

Jane; pallova.jane@gmail.com

Téma 4 – Počítač z nul a jedniček

Díl 6: Závěr

Je to tady. Právě čtete poslední díl tématka Počítač z nul a jedniček. Na začátku ročníku jsme plánovali, jak tématko pojmenujeme. Není ten *počítač* moc ambiciózní? Na co všechno řešitelé přijdou? Neskončíme náhodou u hloupé kalkulačky, které bude umět stěží násobit?

Tímto bychom vám tedy chtěli poděkovat za nadšení, se kterým jste se do řešení pustili. Díky vám, řešitelům, jsme z nul a jedniček (a hradel v prvním čísle) ten počítač nakonec postavili.

Vaše návrhy počítačů a v čem se liší od těch reálných

V minulém čísle otištěný návrh Mgr.^{MM} Vojtěcha Gaďurka doplnil i procesor postavený Dr.^{MM} Václavem Tichým. Jeho konstrukci vám dáváme k dispozici ke stažení¹, v odkazovaném archivu kromě samotné konstrukce naleznete i popis příkazů, překladač, návod k použití a ukázkový program na počítání Fibonacciho čísel. Václavův návrh se od Vojtěchova často liší, což přímo odpovídá na zadanou otázku, zda jde počítač postavit i jinak, než jak jej Vojtěch představil ve svém článku.

Také bychom chtěli stručně porovnat oba návrhy s realistickou představou jednoduchého procesoru na úrovni Arduina². Oba návrhy se shodují s realitou v základní myšlence, že budeme úpravy dat nějak kódovat do jedniček a nul v podobě *instrukcí*. Instrukce pak budou tvořit nějakou posloupnost a v tomto pořadí se budou zpracovávat. Kromě změny dat lze také měnit pořadí vykonávání instrukcí buď *nepodmíněnými skoky* (Vojtěchova instrukce LOOP, Václavova JUMP_T), nebo v závislosti na nějaké *podmínce*. Obě došlá řešení k tomu používají nějaký *ukazatel* na aktuální instrukci (u Václava pojmenovaný INS_REF, v praxi často *program counter* nebo *instruction pointer*), který se automaticky posouvá vždy na další instrukci, jen při skoku je přepsán.

Oba návrhy oddělují paměť s daty, kterou lze číst i měnit (*datovou paměť*) a paměť obsahující instrukce, která se jen čte (*programovou paměť*). Tomuto principu se odborně říká *Harvardská architektura* a vedle ní existuje *Von Neumannova architektura*, kdy jsou program i data uloženy ve společné paměti na různých místech. Oba typy architektur se používají a ve skutečnosti mezi nimi není ostrá hranice.

Modely se od sebe liší v tom, jak mají uložená data: Vojtěchův počítač pracuje přímo nad datovou pamětí, Václav používá „přídavné“ paměťové buňky (*registry*), ve kterých provádí změny dat, a již zpracovaná data kopíruje do paměti pomocí

¹<https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27.6/tichy-procesor.zip>, popis procesoru byl mírně upraven

²<https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction>

separátní instrukce. Ve světě Logisimu lze použít oba způsoby, reálně je praktičtější návrh s registry, neboť paměť je oproti registrům vestavěným v procesoru výrazně pomalejší. Je běžné, že procesory mají i desítky registrů.

Oba návrhy umí pracovat pouze s daty v paměti. Jak ale ovládat nějaká vnější zařízení, jako jsou klávesnice a obrazovky? Jistě je možné přidat nějaké další dráty, po kterých bychom těmto zařízeními posílali signály (a nějak zakódovaná data). Dá se tomu ale vyhnout trikem: zařízení se může tvářit jako část paměti. V takovém případě lze například číst data z klávesnice prostým čtením z příslušné části paměti a podobně zobrazovat výstup zápisem do paměti. I přesto se ale bude hodit pár drátů navíc, aby nám zařízení mohlo poslat signál (tzv. *interrupt* neboli *přerušeni*), že má nějaká data ke zpracování.

Naším modelům ale přece jen jedna schopnost chybí – neumíme volat funkce. Konkrétně není problém funkci *zavolat* – na to stačí na nějak dohodnuté místo uložit parametry a pak skočit na tělo funkce – ale pak se z ní neumíme *vrátit*. Neumíme si totiž uložit hodnotu program counteru do paměti (ani do jiného registru), ani ji pak obnovit (tj. pokračovat tam, kde jsme před voláním funkce skončili). Skutečné procesory to řeší velmi přímočaře: mají zvlášť instrukce pro „skok s uložením program counteru“ a pro „skok na adresu uloženou v paměti“. Aby bylo možné volat funkce i rekurzivně, tyto *návratové adresy* se ukládají do *zásobníku*³.

Procesory v počítačích a telefonech se od výše popsaného liší především v zabudované podpoře pro střídavý běh více programů (*multitasking*) a použitím velmi velkého množství triků na zrychlení.

Samozřejmě, výše uvedené porovnání se skutečnými procesory je do velké míry zjednodušené⁴. Pokud byste měli zájem se dozvědět víc, můžeme doporučit buď knížku *Computer Organization and Design: The Hardware/Software Interface* od pánů Pattersona a Hennessyho nebo předmět Architektura počítačů⁵ na MFF UK.

Také je dobré podotknout, že to, že reálné procesory takhle fungují, vůbec neznamená, že nemohou fungovat nějak úplně jinak. Možností je mnoho, každá z nich má své výhody a svá úskalí a rozhodně nejde obecně říct, že je některá z nich lepší či horší.

Mechanická hradla naposledy

I tentokrát jsme obdrželi příspěvek k prvnímu problému ze čtvrtého čísla, který vybízel ke stavbě mechanických hradel. Doc.^{MM} Klára Grinerová z provázeků postavila hradla NOT, AND a OR a dokonce i půlsčítačku. Její příspěvek se nám moc líbil, proto jej zde otiskujeme a velmi doporučujeme podívat se na příložené video⁶.

³<https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/zakladni-algoritmy/>

⁴Běžné manuály na *použití* procesorů mívají stovky či tisíce stran a popisují stovky instrukcí.

⁵<https://is.cuni.cz/studium/predmety/index.php?do=predmet&kod=NSWI143>

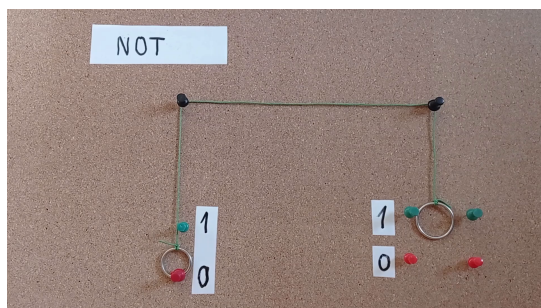
⁶<https://youtu.be/LCdQ3Dq6Zb4>

Hradla z provázků

5 bodů

Doc.^{MM} Klára Grínerová

Pro reprezentaci mechanických hradel jsem se inspirovala videem⁷. Využila jsem reprezentaci, kde se signál přenáší pomocí provázku, na jehož koncích jsou kroužky. Ty jsou buď v poloze 0 nebo 1. Při konstrukci jsem využila korkovou nástěnku, na které jsem pomocí špendlíků a závaží (matiček) stavěla hradla. Postavila jsem jednoduchá hradla NOT, AND a OR. Jejich provedení tímto způsobem nebylo nijak obtížné. Poté jsem sestavila pulsčítačku s výstupy součet a přenos do vyššího řádu. U ní se již začaly projevovat hlavní nedostatky takového řešení. Jednotlivá závaží bylo třeba udělat vzájemně správně těžká, aby obvod bylo možné opakovaně používat, tedy aby se výstup stále měnil podle hodnot na vstupu. Zároveň oproti videu, kterým jsem se inspirovala, jsem neměla k dispozici očka, kterými by provázky procházely, a tak volně ležely přes špendlíky. V okamžiku, kdy tak konkrétní provázek nebyl napnutý, často se zcela uvolnil. Další problém by nastal, pokud bychom chtěli výstup jednoho hradla použít jako vstup druhého. Tak, jak byla hradla postavena, by nebylo možné je na sebe napojovat, jelikož mechanismus dalšího napojeného hradla by ovlivňoval svůj vstup, jelikož hradla využívala hmotnost závaží a pevné ukotvení vstupu, které by nebylo možné zachovat při napojování hradel na sebe.



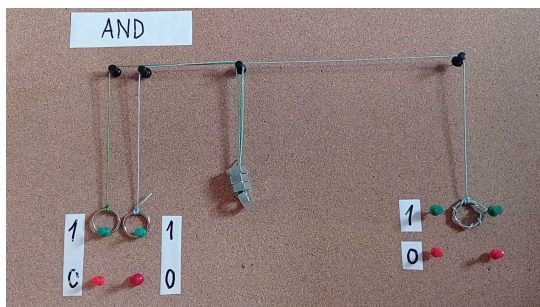
Obrázek 18: NOT

Hradlo NOT jednoduše přenáší signál ze vstupu. Jelikož provázek má pevnou délku a vstup a výstup má stejně umístěné hodnoty 0 a 1, při změně vstupu se posune rovnou výstup.

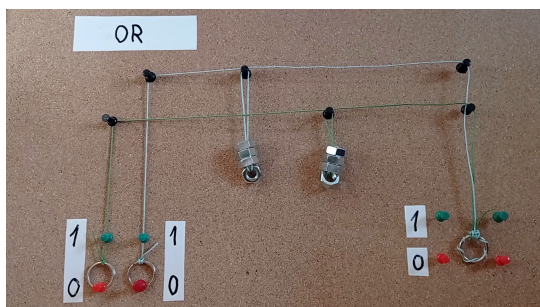
Hradlo AND už využívá závaží, které je navázané pevně na oba vstupy. Pokud se povolí pouze jeden vstup, závaží zůstane drženo na druhém vstupu a klesne až pokud se oba vstupy povolí na hodnotu 1. Pokles závaží způsobí zvednutí výstupu na hodnotu 1.

Hradlo OR oproti tomu obsahuje závaží dvě, každé navázané na jednom vstupu. Obě závaží jsou navázána také na výstup, jakmile se tak alespoň jeden ze vstupů

⁷<https://www.youtube.com/watch?v=CNbScb8v-MI>



Obrázek 19: AND

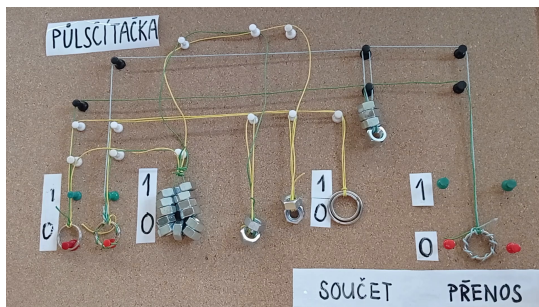


Obrázek 20: OR

posune na hodnotu 1, závaží tohoto vstupu klesne a zvedne se výstup na hodnotu 1.

Půlscítačka je již konstrukčně složitější. Jeden z výstupů je přenos a druhý součet. S přenosem je to jednoduché, jedná se o hradlo AND, jelikož při vstupech 01, 10, 00 je přenos 0 a jen při vstupu 11 je výstup 1. U součtu je to již složitější. Tam platí, že při vstupech 01 a 10 je výstup 1 a jinak 0. Proto jsou dvě závaží na jednotlivých vstupech, která fungují stejně jako u hradla OR, tedy při hodnotě 1 na vstupu způsobí přesun výstupu na 1. Dále jsou ale obě závaží stejně jako oba vstupy navázány na jedno výrazně těžší závaží. Toto těžší závaží je na vstupy navázáno pevně, tudíž se posune dolů až v okamžiku, kdy obě hodnoty vstupů jsou jedna. Toto závaží je výrazně těžší právě proto, že pokud se spustí, svou hmotností převáží a vytáhne obě lehká závaží, čímž dojde k tomu, že výstup součtu opět poklesne na hodnotu 0.

Fungování všech hradel si také můžete prohlédnout na videu <https://youtu.be/LCdQ3Dq6Zb4>.



Obrázek 21: Půlscítačka

Řešení všeho druhu

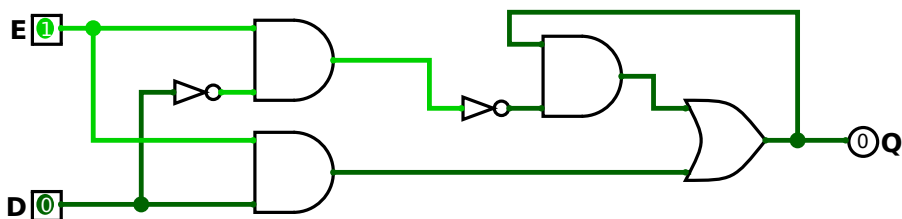
Stále jsme vám neprozradili řešení některých úloh a problémů z předchozích čísel. Pojďme tedy na to. Začneme úlohami o „Děčku“ ze třetího čísla.

Zadání:

Postavte D latch. Nezapomeňte popsat vstupy a napsat, jak jste k výsledku došli.

Doc.^{MM} Martin Fof k této úloze píše:

K vytvoření D latche vezmeme S-R latch a pouze ho trochu vylepšíme. Starý vstup R nyní zapneme, pokud budeme chtít přepnout výstup na nulu, tudíž pokud bude D nula a E zároveň jedna. Vstup S zase zapneme, když budou D i E jedna.



Obrázek 22: D latch

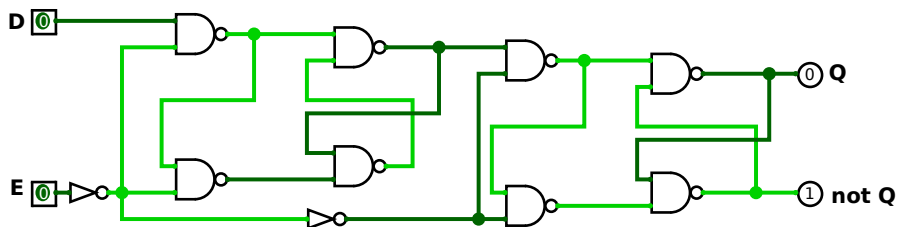
Dále jsme chtěli, abyste zkusili postavit „Děčko“, jež bude měnit výstup na náběžné hraně.

Zadání:

Postavte D obvod, jež na výstup propustí aktuální hodnotu vstupu ve chvíli, kdy se řídicí vstup změní z 0 na 1. Jinak je na výstupu poslední nastavená hodnota.

Řešení hezky sepsala Doc.^{MM} Klára Grinerová. Jak si můžete všimnout, její konstrukce samotného D latche je od té Martinovy trochu odlišná, existuje více možností, jak jej postavit.

Jelikož již sestavený D latch zadrží hodnotu podle vstupu, může jej využít při stavbě D obvodu, jelikož pomocí D latche si umíme podržet minulý vstup a tím pádem zhodnotit změnu situace. Chceme, aby náš nový D obvod zareagoval, když E se změní z 0 na 1, tedy když E bylo 0 a po změně je 1. Takový D obvod pak lze sestavit sériovým zapojením dvou D latchů, kde u prvního negujeme vstup E (chceme, aby nám držel hodnotu, pokud je E 0, negujeme a dostaneme 1 – tedy hodnotu na kterou D latch reaguje). Do druhého D latche pak jako vstup D půjde výstup předchozího a současný vstup E. Získáme tím obvod, který propouští hodnotu vstupu právě při změně E z 0 na 1, jinak vrací poslední nastavenou.



Obrázek 23: D latch reagující na náběžnou hranu

Ve čtvrtém čísle jsme zadali několik úloh týkajících se vylepšení naší kalkulačky v Logisimu.

Zadání:

Postavte hradlovou síť pro násobení 4bitových čísel pomocí Boothova algoritmu.

Popis algoritmu jsme otiskli již ve čtvrtém čísle a tato úloha na něj navazovala. Hradlovou síť postavil Doc.^{MM} Jiří Kalvoda, jeho řešení v Logisimu si můžete prohlédnout⁸.

Zadání:

Postavte hradlovou síť, která dostane dvě 4bitová čísla x , y a vrátí výsledek x^y . Jak si poradíte s množstvím bitů potřebných pro výstup?

Zadání:

Přidejte do kalkulačky ukládání výsledku a jeho následné použití pro další výpočty. Je třeba dát si pozor na počet bitů výsledku? Pokud ano, jak?

⁸<https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27.6/kalvoda-booth.circ> obvod BOO

Zadání:

Předělejte klávesnici tak, aby se na ní daly zadávat vstupy v desítkové soustavě pro alespoň 8bitová čísla.

Řešení těchto úloh implementoval v Logisimu Dr.^{MM} Václav Tichý. Otiskujeme jeho popis a vřele doporučujeme, abyste si ke čtení otevřeli Logisim a prozkoumali, jak přesně jeho konstrukce funguje⁹.

Mocnění

Hradlová síť dostane dvě čtyřbitová čísla X a Y , a vrátí osmibitový výsledek V . Bohužel výsledné číslo může mít mnohem více než osm bitů, proto celkový výsledek bude $V \cdot (X_{na})^N$. Příklady:

- $X = 2$ a $Y = 3$
výsledné hodnoty: $V = 8$, $X_{na} = 2$ a $N = 0$
celkově: $8 \cdot 2^0 = 8$
- $X = 15$ a $Y = 15$
výsledné hodnoty: $V = 225$, $X_{na} = 15$ a $N = 13$
celkově: $225 \cdot 15^{13} = 4.3789389e + 17$

Algoritmus postupně násobí $X \cdot X$ do té doby, dokud nedojde k přetečení, nebo dokud nenásobil právě Y krát, poté do V zapíše paměť, do X_{na} zapíše X a do N rozdíl mezi Y a počtem kolikrát násobil.

Jak ovládat kalkulačku – funkce ANS**Ovládání kalkulačky**

1. Zadejte první číslo na klávesnici, musí být menší než 255
2. Zmáčkněte jednu ze čtyř operací nad klávesnicí
3. Zadejte druhé číslo na klávesnici, musí být menší než 255 (číslo se začne samo zadávat znovu od 0)
4. Zmáčkněte „rovna_se“ pod klávesnicí

Na displeji se zobrazí výsledek vámi vybrané operace v kroku 2. pro první a druhé číslo. Zároveň se výsledek zapsal do paměti prvního čísla, takže když začnete od 2. kroku (vybrání operace), můžete využít funkce „ANS“. Pokud je výsledek větší než 255, menší než 0, nebo desetinné číslo, rozsvítí se „kontrolka“, to znamená že výsledek je neplatný.

Problém 5 (27.4): *Naše kalkulačka zatím umí počítat pouze příklady s jednou operací a nejvýše dvěma hodnotami. Co kdybychom ji chtěli naučit počítat i slo-*

⁹<https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27.6/tichy-reseni.circ>

žitější příklady, třeba $(3 * 9) - (2 + 3)$? Vymyslete způsob, jak by kalkulačka mohla takové příklady počítat, a popište, jakým způsobem je do ní vložit. Kalkulačka by měla podporovat alespoň sčítání a odčítání, včetně počítání se závorkami.

Jedna z možností je využít tzv. *postfixovou notaci*. Jde o způsob zápisu výrazů, který nepotřebuje závorky. Hlavní myšlenka je držet si zásobník čísel, do kterého ukládáme všechna čísla ve výrazu. Výraz kromě čísel obsahuje i operace, které se vyhodnotí tak, že se vytáhnou ze zásobníku dvě čísla a výsledek operace se do něj vrátí. Na konci výpočtu zbyde v zásobníku jen výsledek.

Výraz ze zadání by tak šel zapsat třeba jako $3\ 9\ *\ 2\ 3\ +\ -$. Vyhodnocení proběhne následovně:

Krok	znak	zásobník	komentář
1.	3		Čísla ukládáme na zásobník
2.	9	3	Taktéž na zásobník
3.	*	3 9	Vytáhneme 3 a 9, zapíšeme součin
4.	2	27	Na zásobník
5.	3	27 2	
6.	+	27 2 3	Sečteme dvojku s trojkou
7.	-	27 5	Spočítáme $27 - 5$
8.	Konec	22	Není co počítat, výsledek je 22.

Pro převod z klasického (tzv. *infixového*) do postfixového zápisu lze použít algoritmus označovaný jako Železničářský¹⁰.

Reprezentace různých čísel ve dvojkové soustavě – naposledy

Když už jsme se vymysleli, jak reprezentovat kladná i záporná celá čísla, rozhodli jsme se ještě zamyslet, co dělat s čísly necelými.

Zadání:

Jak reprezentovat ve dvojkové soustavě reálná čísla? Použijte pevný počet bitů.

Dr.^{MM} Václav Tichý našel¹¹ následující způsob:

Reálná čísla počítač většinou zapisuje jako čísla s exponenty ve tvaru \pm znaménko, exponent, mantisa. Takže vždy pracuje s čísly např. ve tvaru $2,1424 \cdot 10^2$ (samozřejmě v binární soustavě). Znaménko určuje, zda je číslo kladné, nebo záporné, exponent určuje na jaký řád se mantisa umocňuje a mantisa je číslo napsané ve tvaru 1,011 (desetinná čárka za první číslicí).

Určité datové typy mají pro reálná čísla vždy alokovaný přesný počet bitů, např. *float* v C++ je dlouhý 32 bitů, první bit je znaménkový, následuje 8 bitů exponentu a poté 23 bitů mantisy. Datový typ *double* (který je dlouhý 64 bitů, aby byl přesnější) má znaménkový bit, poté 11bitový exponent a nakonec 52

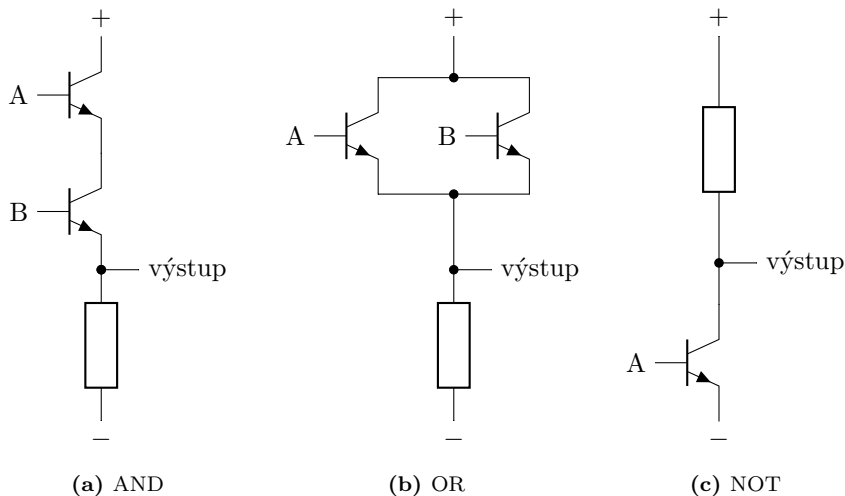
¹⁰https://cs.wikipedia.org/wiki/Algoritmus_shunting-yard

¹¹<http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/foluvux/node5.html>

bitů dlouhou mantisu. Tímto způsobem má číslo vždy přesně daný počet bitů a přesně rozdělené místo pro znaménko, exponent a mantisu, a umožňuje tak ukládat čísla s velkou přesností.

Problémy reálného světa

Problém 6 (27.3): *V článku autor navrhl a prakticky ověřil, že z tranzistorů lze postavit hradla dle uvedených schémat. Zanedbal ovšem některé vlastnosti reálných tranzistorů, které vedou k tomu, že složitější hradla by pravděpodobně nefungovala, pokud bychom je sestavili přesně podle těchto schémat. Dokážete vymyslet, kde je problém a jak by se snadno dal opravit? Případně dokážete schémata sami postavit a změřit, jak se chovají, když se z nich pokusíme postavit složitější hradlo?*



Obrázek 24: Schémata zapojení hradel ve článku

Řešení:

Budeme se zabývat především napětími. Aby se NPN tranzistor „otevřel“, tedy mezi kolektorem a emitorem začal téci proud, nestačí mít na bázi libovolné napětí, ale je (u dnes obvyklých křemíkových tranzistorů) potřeba, aby bylo napětí na bázi alespoň 0,7 V, protože přechod báze-emitor se chová jako dioda. Je-li tato podmínka splněna, pak tranzistor vede proud od kolektoru k emitoru a velikost proudu kolektor-emitor je závislá na velikosti proudu báze-emitor. Pro naše účely nás velikost protékajícího proudu nebude příliš zajímat, budeme spoléhat na to, že pomocí ochranných rezistorů je proud omezen tak, že je dostatečně velký na to, aby rozsvítil diodu a zároveň dostatečně malý na to, aby diodu nebo tranzistor

nezničil. Výpočty těchto rezistorů jsou nad rámec tohoto tématka, proto se jimi dále zabývat nebudeme.

Pokud tedy víme, že k otevření NPN tranzistoru potřebujeme, aby napětí na bázi bylo alespoň o 0,7 V vyšší, než je napětí na emitoru, jakým způsobem to ovlivní chování ve článku uvedených hradel? Budeme se vždy zabývat dvěma situacemi, a to když je na vstupu logická 0, tedy 0 V proti zápornému pólu zdroje (ve schématech označen $-$) a když je na vstupu logická 1, tedy 5 V proti záporném pólu zdroje.

Hradla budeme probírat v opačném pořadí, než byla uvedena v článku, protože hradlo NOT je nejjednodušší a hradlo AND nejsložitější na úvahy.

Hradlo NOT

Pokud je na vstupu hradla NOT logická 0, pak je tranzistor zavřený, tedy má nekonečný odpor a vzhledem k tomu, že rezistor připojený k 5 V má odpor konečný, tak z principu rezistorového děliče bude na výstupu 5 V, tedy obvod funguje tak, jak má.

Vchází-li do hradla NOT logická 1, pak je tranzistor otevřený, protože $5\text{ V} > 0,7\text{ V}$ a tedy má nízký odpor a dokážeme zvolit velikost rezistoru připojeného k 5 V tak, aby výstupní napětí bylo nižší, než 0,7 V, tedy když bychom připojili za toto hradlo další hradlo s tranzistorem na vstupu, tak by toto další hradlo vidělo na vstupu logickou 0 a jeho tranzistor by se neotevřel.

Hradlo NOT tedy pracuje správně.

Hradlo OR

Pokud do hradla OR vstupují dvě nuly, je situace podobná jako při analýze hradla NOT výše. Protože ale připojujeme rezistor ke hladině 0 V, bude na výstupu také 0 V.

Uvažujme nyní jen vstup A nastavený na 1, pro vstup B platí stejné argumenty se stejným výsledkem. Pokud je na vstupu, tedy bázi tranzistoru, logická 1, tedy 5 V, pak na emitoru tranzistoru bude nejvýše 4,3 V. Víc tam být nemůže, protože pak by na přechod báze-emitor nezůstalo alespoň 0,7 V, tedy by byl tranzistor zavřený, měl by nekonečný odpor a tudíž by na emitoru (z principu rezistorového děliče) byla 0 V, což je ale spor s tím, že na emitoru je více než 4,3 V. Protože je ale emitor připojený rovnou na výstup, pak i na výstupu bude nejvýše 4,3 V.

To nám v tuto chvíli nevadí, samostatně hradlo funguje, ale když bychom začali tato hradla řetězit za sebe, na každém dalším hradle by výstupní napětí kleslo o 0,7 V, až by na výstupu sedmého hradla byla 0,1 V, což je logická 0, ačkoliv na vstupu byla logická 1. Tato nevhodná situace nastala, protože 0,7 V se vždy počítá mezi bázi a emitorem¹².

Hradlo OR v tomto provedení tedy nelze řadit vícekrát za sebe a tudíž by složitější obvody bylo náročné z takto vytvořených hradel složit.

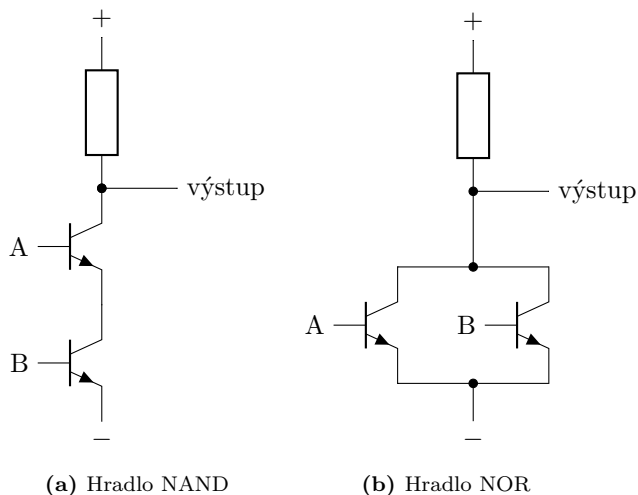
¹²V původním článku navíc byla logická jednička definovaná jako úroveň napětí mezi 5 V a 2 V, takže by napětí mimo tyto meze kleslo už po pěti hradlech. Toto rozmezí napětí, které neodpovídá logické nule ani jedničce, se nazývá *zakázané pásmo*.

Hradlo AND

Stejným argumentem jako u hradla OR určíme, že pokud je alespoň na jednom vstupu hradla AND nula, bude na výstupu 0 V.

Pokud zanedbáme vstup A a na vstup B pošleme jedničku, získáme stejný obvod, jako jsme analyzovali v minulém případě, tedy víme, že na výstupu bude o alespoň 0,7 V menší napětí, než na vstupu. Někteří by si nyní mohli myslet, že když budeme uvažovat i vstup A nastavený na jedničku, tak výstupní napětí bude dokonce o 1,4 V nižší, než napětí na logických vstupech, ale není tomu tak. Ač se to může zdát neintuitivní, obzvláště z některých vizualizací tranzistoru, úbytek napětí na přechodu kolektor-emitor není 0,7 V, ale mnohem méně (desítky až nižší stovky mV), protože tranzistor funguje na jiném principu, než že jsou to jen dvě diody „zády k sobě“. Napětí na výstupu bude tedy o něco málo nižší než v případě hradla OR, ale nikoliv o dalšího 0,7 V.

Ani hradlo AND v tomto provedení tedy nelze řadit vícekrát za sebe.



Obrázek 25: Tato hradla již lze řetězit libovolně

Jak z toho ven?

Pokud bychom chtěli stavět složitější hradla, jak odstranit problémy, které jsme popsali výše? Jednou z možností je za každé hradlo umístit „opravovač signálu“, který z 4,3 V udělá znovu 5 V. Všimněme si, že hradlo NOT funguje stejně, ať už má na vstupu 5 V nebo 4,3 V, tedy mohli bychom mezi každá dvě složitější hradla vřadit NOT dvakrát za sebe, které by nám opět udělaly správná napětí.

Druhá možnost je zkusit opravit samotná hradla. Toto bohužel nejde úplně snadno, nejjednodušší přístup je místo AND a OR postavit hradla NAND a NOR, které se liší tím, že výstupní logická úroveň je invertovaná (tedy NAND má na

výstupu 0 tehdy a jen tehdy, když jsou oba vstupy 1). NAND z AND pak uděláme jednoduše tak, že prohodíme stranu „nad výstupem“ a „pod výstupem“, viz obrázek 25. Když nyní bude na alespoň jednom vstupu logická 0, bude na výstupu 5 V, protože alespoň jeden z tranzistorů bude zavřený. Když bude na obou vstupech logická 1, budou oba dva tranzistory otevřené a na výstupu bude logická 0, tedy toto hradlo nemá problém s postupnou degradací napěťových úrovní.

Pavel, Káťa, Honza a Jethro; pa-ka@mail.ledoian.cz



Výsledková listina 6. čísla

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Témata				\sum_0	\sum_1
				1	2	3	4		
1.	Doc. ^{MM} K. Grinerová	4	300,8	11,5	16,0	16,0	5,0	48,5	284,3
2.	Doc. ^{MM} M. Fof	3	211,4	12,5				12,5	152,7
3.	Dr. ^{MM} J. Engler	2	134,7	17,0		15,5		32,5	134,7
4.	Dr. ^{MM} V. Tichý	1	113,7		8,0	10,0	17,3	35,3	113,7
5.	Mgr. ^{MM} D. Čtvrtečka	1	97,2						97,2
6.	Doc. ^{MM} J. Kalvoda	4	224,6						90,2
7.	Dr. ^{MM} V. Janáček	4	175,8						78,9
8.	Mgr. ^{MM} V. Gaďurek	4	70,0						70,0
9.	Dr. ^{MM} T. Flídr	3	102,9						59,0
10.	Mgr. ^{MM} J. Knillová	2	87,8		12,0			12,0	51,9
11.	Mgr. ^{MM} O. Piroutek	3	94,4		5,0			5,0	49,0
12.–13.	Mgr. ^{MM} K. Pernicová	4	90,3						48,5
	Bc. ^{MM} K. Petrlíková	3	48,5						48,5
14.	Bc. ^{MM} H. Nguyen	4	47,0						47,0

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Témata				\sum_0	\sum_1
				1	2	3	4		
15.	Mgr. ^{MM} A. Cmielová	2	71,3			8,7		8,7	45,7
16.	Mgr. ^{MM} V. Jůzková	3	50,9						42,4
17.	Bc. ^{MM} E. Beranová	1	39,0						39,0
18.	Mgr. ^{MM} J. Kvapil	3	54,5						38,8
19.–20.	Bc. ^{MM} M. Pavlíček	3	37,2						37,2
	Bc. ^{MM} M. Valtrová	2	37,2			14,2		14,2	37,2
21.–22.	Bc. ^{MM} D. Farhan	4	37,0						37,0
	Mgr. ^{MM} D. Perout	4	69,0						37,0
23.	Bc. ^{MM} D. Skýpala	3	33,1						33,1
24.	Mgr. ^{MM} L. Veškrna	3	63,1						31,3
25.	Bc. ^{MM} P. Hladík	3	43,0						30,0
26.	Mgr. ^{MM} M. Boček	2	59,1						29,9
27.	Bc. ^{MM} V. Polášková	2	29,5						29,5
28.	Bc. ^{MM} Š. Březovják	4	25,8						25,8
29.	K. Šedová	2	19,0						19,0
30.	Mgr. ^{MM} A. Opl	3	39,3						18,8
31.	O. Chwiedziuk	4	18,3						18,3
32.	A. Húštava	3	17,7						17,7
33.–34.	M. Štencel	4	16,0						16,0
	Bc. ^{MM} M. Turinská	4	19,0						16,0
35.	L. Kačenková	2	14,0						14,0
36.–37.	Mgr. ^{MM} O. Gonzor	4	58,4						13,0
	O. Skácel	2	13,0						13,0
38.	P. Jendele	2	12,3			6,0		6,0	12,3
39.	J. Křimská	2	9,0						9,0
40.	M. Chrostek	1	7,5		4,5	3,0		7,5	7,5
41.	P. Khartskhaev	4	6,0						6,0
42.	P. Herman	2	1,7						1,7
43.	A. Čechová	1	0,6						0,6

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina 27. ročníku

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Číslo						\sum_1
				2	3	4	5	6		
1.	Doc. ^{MM} K. Grinerová	4	300,8	72,8	43,0	55,5	64,5	48,5	284,3	
2.	Doc. ^{MM} M. Fof	3	211,4		103,9	20,3	16,0	12,5	152,7	
3.	Dr. ^{MM} J. Engler	2	134,7	42,5	45,7		14,0	32,5	134,7	
4.	Dr. ^{MM} V. Tichý	1	113,7	20,5	14,5	12,2	31,2	35,3	113,7	
5.	Mgr. ^{MM} D. Čtvrtečka	1	97,2	26,0	37,0		34,2		97,2	
6.	Doc. ^{MM} J. Kalvoda	4	224,6	31,0	45,2		14,0		90,2	
7.	Dr. ^{MM} V. Janáček	4	175,8	30,8	48,1				78,9	
8.	Mgr. ^{MM} V. Gadurek	4	70,0	39,0	31,0				70,0	
9.	Dr. ^{MM} T. Flidr	3	102,9	44,5	14,5				59,0	
10.	Mgr. ^{MM} J. Knillová	2	87,8		22,4		17,5	12,0	51,9	
11.	Mgr. ^{MM} O. Piroutek	3	94,4	10,0	14,5	2,5	17,0	5,0	49,0	
12.–13.	Mgr. ^{MM} K. Pernicová	4	90,3	20,5	28,0				48,5	
	Bc. ^{MM} K. Petrlíková	3	48,5	22,5	26,0				48,5	
14.	Bc. ^{MM} H. Nguyen	4	47,0	21,5	25,5				47,0	
15.	Mgr. ^{MM} A. Cmielová	2	71,3	13,0	12,0		12,0	8,7	45,7	
16.	Mgr. ^{MM} V. Jůzková	3	50,9	26,9	10,5		5,0		42,4	
17.	Bc. ^{MM} E. Beranová	1	39,0	13,0	26,0				39,0	
18.	Mgr. ^{MM} J. Kvapil	3	54,5	23,5	15,3				38,8	
19.–20.	Bc. ^{MM} M. Pavlíček	3	37,2		37,2				37,2	
	Bc. ^{MM} M. Valtrová	2	37,2	14,0	9,0		14,2		37,2	
21.–22.	Bc. ^{MM} D. Farhan	4	37,0	22,1	14,9				37,0	
	Mgr. ^{MM} D. Perout	4	69,0	18,5	18,5				37,0	
23.	Bc. ^{MM} D. Skýpala	3	33,1	6,5	26,6				33,1	
24.	Mgr. ^{MM} L. Veškrna	3	63,1	31,3					31,3	
25.	Bc. ^{MM} P. Hladík	3	43,0	30,0					30,0	
26.	Mgr. ^{MM} M. Boček	2	59,1		29,9				29,9	
27.	Bc. ^{MM} V. Polášková	2	29,5	24,5	5,0				29,5	
28.	Bc. ^{MM} Š. Březovják	4	25,8	8,0	17,8				25,8	
29.	K. Šedová	2	19,0	16,0	3,0				19,0	
30.	Mgr. ^{MM} A. Opl	3	39,3	16,0	2,8				18,8	
31.	O. Chwiedziuk	4	18,3	18,3					18,3	
32.	A. Húštava	3	17,7	17,7					17,7	
33.–34.	M. Štencel	4	16,0	16,0					16,0	
	Bc. ^{MM} M. Turinská	4	19,0		16,0				16,0	
35.	L. Kačenková	2	14,0	7,0	7,0				14,0	
36.–37.	Mgr. ^{MM} O. Gonzor	4	58,4	13,0					13,0	

Poř.	Jméno	R.	Číslo						
			Σ_{-1}	2	3	4	5	6	Σ_1
	O. Skácel	2	13,0	13,0					13,0
38.	P. Jendele	2	12,3		4,3		2,0	6,0	12,3
39.	J. Křimská	2	9,0	9,0					9,0
40.	M. Chrostek	1	7,5					7,5	7,5
41.	P. Khartskhaev	4	6,0	6,0					6,0
42.	P. Herman	2	1,7	1,7					1,7
43.	A. Čechová	1	0,6	0,6					0,6

$$t_1 \frac{c}{n_a} = L_1 - l_1, \quad t_2 \frac{c}{n_a} = l_2, \quad t_3 \frac{c}{n_a} = L_2 - d, \quad t_4 \frac{c}{n_a} = d$$

$$\frac{2d}{\lambda_a} \left(\frac{2t_1}{n_a} + 2t_2 - 2t_3 - 2t_4 \right) = k_x \lambda_a$$


$$\frac{2c}{n_a} \left(\sin \beta \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin^2 \beta - \sin \alpha \right) = \frac{2\lambda_a}{\lambda_a}$$

$$\left(L_1 - l_1 + l_2 \frac{n_2}{n_a} \sin \beta - d \frac{n_2}{n_a} \right) = L_2 - d$$

$$\left(d - l_1 + (l_2 - d) \frac{n_2}{n_a} \right) = k_x \lambda_a \sin \beta, \quad k_x = \frac{2d}{\lambda_a} \left(1 - \frac{\cos(\alpha - \beta) - \frac{n_2}{n_a} \left(1 - \frac{1}{\cos \beta} \right)}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \beta}} \right)$$

$$k_x = \frac{2d}{\lambda_a} \left(1 - \frac{n_2}{n_a} \frac{\sin \beta \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \beta}} \right) \left(1 - \frac{n_2}{n_a} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \right)$$

$$k_x = \frac{2d}{\lambda_a} \left(1 - \frac{n_2}{n_a} + \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \cos \beta} \right) = \frac{2d}{\lambda_a} \left(1 - \frac{n_2}{n_a} \frac{\beta - \cos \alpha}{n_a} \right)$$

$$k_x = \frac{2d}{\lambda_a} \left(1 - \cos \alpha - \frac{n_2}{n_a} (1 - \cos \beta) \right)$$


Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK E-mail: mam@matfyz.cz
 Ke Karlovu 3 Web: mam.matfyz.cz
 121 16 Praha 2 FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

