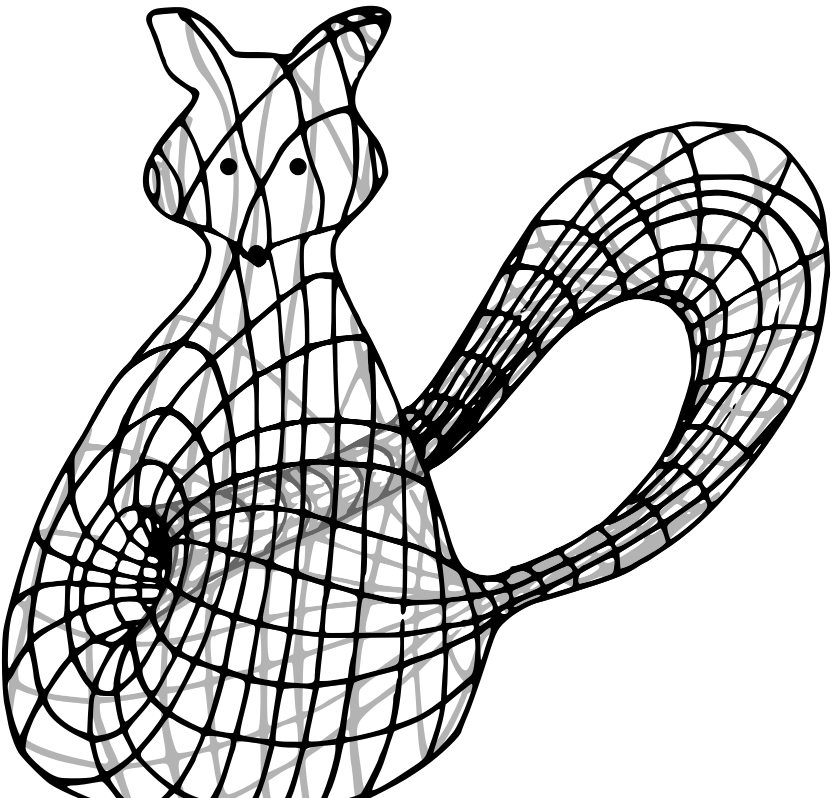
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVII
Číslo 5

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

snad vám v tuhých mrazech nezamrzly všechny mozkové buňky a těch několik slunečných dní je správně nabudilo, takže se už těšíte na nové M&M. Z našeho pera v něm najdete poslední zadání tohoto ročníku, z řešitelských příspěvků především řešení Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Kláry Grinerové z topologie a optiky a článek Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Vojtěcha Gaďurka s názvem *Počítače a jednoduché programovací jazyky*. Všechny vaše příspěvky nás moc těší, jen tak dál!

Zobecnění topologie na mnoho dimenzí nebylo dostatečně obecné, a tak budeme ještě obecnější a zaměříme se na *Obecnou topologii*, která nevyžaduje, aby prostory byly metrické, a stačí jí jakékoliv obecné prostory. Obecnější budeme i v optice, kde rozšíříme záběr od viditelného světla na obecné vlnové délky.

Z olympiádní matematiky se budeme zabývat dělitelností, prvočísly a teorií čísel obecně. Náš počítač se také budeme snažit zobecnit, tedy navrhnout další vylepšení, aby byl schopen provádět úlohy obecnějšího typu. Obecněji budeme chtít umět také reprezentovat čísla, kromě celých i reálná. Nakonec připomeneme, že ke spolupráci a řešení obecně můžete využívat e-mailové konference.

Že by byl tenhle díl úplně nejobecnější? Mnoho obecné zábavy při obecném vymýšlení!

Vaši obecní organizátoři

Obsah

Zadání a řešení témat

1. deadline: 27. 4. 2021| 2. deadline: 18. 5. 2021

Téma 1 – Topologie

Díl 5: Obecná topologie

Zatím jsme se bavili o *metrických* prostorech, neboli o prostorech, ve kterých je definovaná vzdálenost mezi každými dvěma body. Vzdálenosti se také občas říká *metrika* a prostor je množina bodů. S metrickými prostory se často setkáváme v praxi a vzdálenost v nich může být definována různými způsoby. Obecně chceme, aby metrika μ jako funkce dvou bodů z daného prostoru vracející jejich vzdálenost splňovala několik podmínek:

- $\mu(x, y) \geq 0$; rovnost nastává právě tehdy, když $x = y$
- $\mu(x, y) = \mu(y, x)$ (symetrie)
- $\mu(x, z) \leq \mu(x, y) + \mu(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Úloha 1 [2b]: *Mějme body v rovině reprezentované pomocí dvojice jejich x-ových a y-ových souřadnic. Ukaž, že funkce*

$$\mu'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

je metrikou v rovině, neboli že splňuje výše uvedené podmínky.

Úloha 2 [2b]: *Mějme diskrétní metriku δ definovanou jako*

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{pokud} \quad x = y \\ 1 & \textit{pokud} \quad x \neq y \end{cases}$$

Ukaž, že δ je metrika.

Topologie je ale pojem, který se netýká jen metrických prostorů. V tomto díle se podíváme na to, jak se topologie definuje na obecných prostorech. Budeme se tedy muset smířit s tím, že už nebudeme znát vzdálenost mezi dvěma body.

O co přijdeme? Ukazuje se, že jedna z nejdůležitějších věcí, kterou dokážeme z metriky spočítat, je *okolí* $\mathcal{U}$ daného bodu. Dokud máme metriku d, můžeme snadno zjistit, které body leží v nějakém blízkém či dalekém okolí každého bodu. Pro každé $r > 0$ je okolí bodu x dané otevřenou koulí $B_r(x) = \{y \mid d(x,y) < r\}$. V obecné topologii je to trochu složitější, protože místo metriky máme k dispozici pro každý bod x množinu všech jeho okolí $\mathcal{U}(x)$, kde okolí si můžeme představit jako množinu bodů, které bod x obklopují. Co to přesně znamená, uvidíme v definici níže.

Formálně tedy pro prostor X a bod $x \in X$ platí $\mathcal{U}(x) \subseteq 2^X$, kde 2^X značí množinu všech podmnožin množiny X. Aby prostor X společně s funkcí $\mathcal{U}$ vracející okolí každého bodu byla *topologie* definovaná pomocí okolí, musí splňovat následující axiomy:

(A_1) pro každou množinu $U \in \mathcal{U}(x)$ platí $x \in U$
(neboli každé okolí bodu x obsahuje x)

(A_2) $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(x)$
(neboli pokud U a V jsou okolími bodu x, pak i jejich průnik je okolím x)

(A_3) $U \in \mathcal{U}(x) \wedge U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$
(neboli pokud U je okolím bodu x, pak i všechny množiny obsahující U jsou okolími x)

(A_4) pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $W \in \mathcal{U}(x)$, $W \subseteq U$ takové, že pro každé $y \in W$ je $U \in \mathcal{U}(y)$
(neboli pro každé okolí bodu x existuje jeho podmnožina W, která je též okolím x a pro kterou platí, že U je okolím každého bodu ve W)

Úloha 3 [3b]: *Pomocí axiomů A_1 až A_4 dokaž následující silnější verzi axiomu A_4:*

(A_4') pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $W \in \mathcal{U}(x)$,$W \subseteq U$ takové, že pro každé $y \in W$ je $W \in \mathcal{U}(y)$

Nápověda: Položte $W = \{y \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$.

Topologii můžeme též definovat pomocí *otevřených množin*. Prostor X společně s množinou otevřených množin $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ je *topologie* definovaná pomocí otevřených množin, pokud:

(O_1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
(neboli prázdná množina a celý prostor jsou otevřené množiny)

(O_2) $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$
(neboli průnik otevřených množin je otevřená množina)

(O_3) $U_i \in \mathcal{O}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$
(neboli sjednocení otevřených množin je otevřená množina)

Zkráceně se dá říct, že naše množina otevřených množin musí obsahovat prázdnou množinu a celý prostor a dále být *uzavřená* vzhledem k sjednocení a průniku[1].

Úloha 4 [2b]: *Nechť $X = \{a, b, c\}$ je prostor obsahující tři body a nechť*

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}.$$

[1] Průnik uvádíme pouze pro dvě množiny a ne pro průnik libovolně mnoha množin, protože by to mohlo svádět k průniku nekonečně mnoha množin, který už otevřený být nemusí.

Ověř, že tento prostor splňuje axiomy O_1 až O_3, neboli že se jedná o topologický prostor.

Dá se ukázat, že obě definice jsou ekvivalentní.

Úloha 5 [3b]: *Předpokládejme, že máme topologii definovanou pomocí okolí. Nechť pro $\mathcal{O}$ platí, že $U \in \mathcal{O} \Leftrightarrow U \in \mathcal{U}(x)$ pro všechna $x \in U$, neboli že množina U je otevřená právě tehdy, když je okolím všech bodů, které do ní náleží. Ukaž, že takto definovaná množina otevřených množin splňuje axiomy O_1 až O_3.*

Úloha 6 [3b]: *Předpokládejme, že máme topologii definovanou pomocí otevřených množin. Mějme okolí $\mathcal{U}$ definované následovně: $U \in \mathcal{U}(x)$, pokud existuje $V \in \mathcal{O}$ taková, že $x \in V \subseteq U$; neboli množina U je okolím bodu x, pokud obsahuje otevřenou množinu obsahující x. Ukaž, že takto definovaná okolí bodů splňují axiomy A_1 až A_4.*

Uzavřené množiny definujeme jako doplňky otevřených množin. Přesněji, pokud je U otevřená množina prostoru X, pak $X \setminus U$ je uzavřená množina.

Úloha 7 [3b]: *Napiš všechny uzavřené množiny topologického prostoru z Úlohy 4. Obsahuje tento prostor nějaké množiny, které jsou otevřené i uzavřené? Najdeš otevřenou množinu, která není uzavřená? A existuje v něm uzavřená množina, která není otevřená?*

Úloha 8 [3b]: *Předpokládejme, že máme topologii definovanou pomocí otevřených množin. Ukaž, že*

- *konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina*
- *konečný průnik uzavřených množin je uzavřená množina*

Jak taková obecná topologie může vypadat? Jednoduchým příkladem je *diskrétní topologie*, kde za otevřené množiny vezmeme všechny podmnožiny X. V takovém případě jsou všechny podmnožiny X otevřené i uzavřené. Okolí bodu x pak tvoří všechny množiny obsahující x. Tato topologie je maximální co do počtu otevřených množin. Dalším jednoduchým příkladem je *indiskrétní topologie*, ve které jsou otevřenými množinami pouze $\emptyset$ a X. V této topologii je okolím každého bodu x pouze celý prostor X.

Abychom si práci s topologickými prostory zjednodušili, zavedeme *bázi* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ otevřených (ne nutně disjunktních) množin, pro kterou platí, že každá otevřená množina je tvořená sjednocením všech množin báze, které jsou jejími podmnožinami. Formálně zapsáno, pro každou $U \in \mathcal{O}$ platí $U = \bigcup\{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}$. Pokud máme topologii definovanou na přímce, pak bázi tvoří všechny otevřené intervaly. Na přímce můžeme definovat i jinou topologii, tak zvanou *Sorgenfreyovu přímku*, kde bázi tvoří intervaly $[a,b)$, tj. zleva uzavřené a zprava otevřené. Tato topologie má spoustu zajímavých vlastností a často může posloužit jako jednoduchý protipříklad pro některá zdánlivě platná tvrzení.

Úloha 9 [5b]: *Nechť $X = \{a, b, c\}$. Nad X můžeme definovat 29 topologií. Kolik jich dokážeš najít a popsat? Zkus přijít na jednodušší a elegantnější způsob, jak je popsat, než pouhým výčtem.*

Vzorová řešení 3. dílu

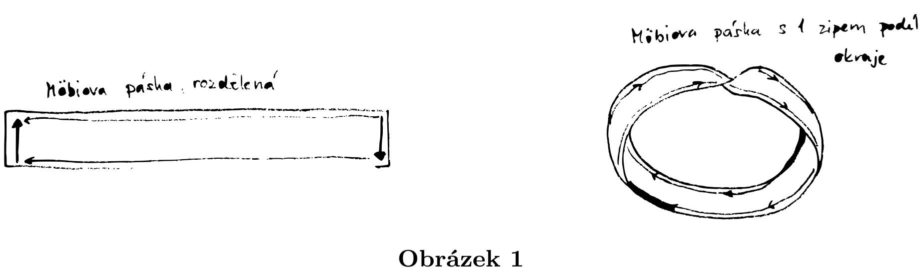
K prvním pěti úlohám 3. dílu tématka jsme obdrželi pěkná řešení od Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Kláry Grinerové, moc za ně děkujeme. Líbila se nám natolik, že je otiskujeme jako vzorová.

Úloha 1

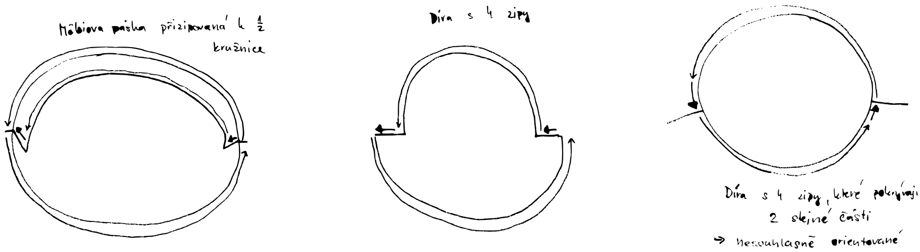
Zadání:
Uvědom si a zdůvodni, že křížítko (definované v předchozím díle jako Möbiova páska přizipovaná k okraji díry) je topologicky ekvivalentní křížidlu, které jsme právě definovali jako výsledek sezipování dvou polovin kruhové díry pomocí dvou stejně orientovaných zipů. (Tip: Zafixuj délku zipů tak, aby každý zabíral přesně půlku kružnice. Kam se zobrazí bod v nějaké konkrétní vzdálenosti od jejich předělu?)

Řešení:

Jelikož víme, že na pořadí zazipování zipů nezáleží, lze si Möbiovu pásku představit jako pruh, který má na kratších okrajích nesouhlasně orientované zipy a na delších okrajích má zipy jdoucí stejným směrem. (Můžete sledovat na obrázcích 1 a 2.) Pokud pak jednu část pásky přilepíme k první polovině kružnice, budeme mít díru s přilepeným páskem po polovině obvodu. Na pásku jsou dva kratší zipy a jeden stejně dlouhý jako je polovina kružnice. Pomocí spojité transformace můžeme pásku „rozplácnout“ do roviny sféry, ve které je díra. Budeme tak mít díru, kde jsou čtyři zipy, ale dvojice na sebe navazují. A jelikož mají stejnou délku, tak se jedná v podstatě o sezipování jedné díry, kolem které jsou nesouhlasně orientované zipy. A víme, že takovýmto sezipováním vznikne křížidlo.



Obrázek 1



Obrázek 2

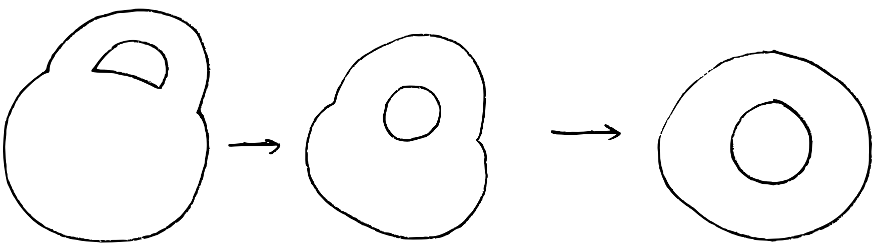
Úloha 2

Zadání:
Kterým již známým objektům jsou homeomorfní:

- *sféra s uchem*
- *sféra s kříživým uchem?*

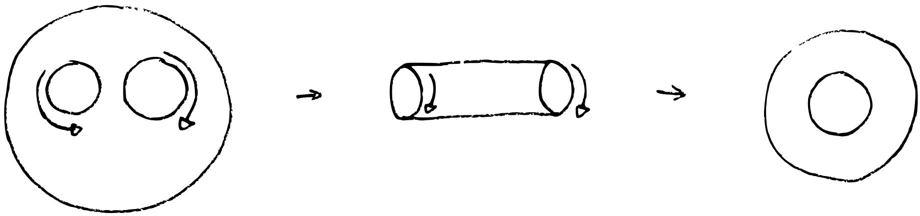
Řešení:

Sféra s uchem Vezmeme sféru S^2 na které bude ucho, což je povrch koule na kterém je ucho. Taková sféra je pak homeomorfní s torem. Pokud budeme průměr ucha zvětšovat, až bude mít stejný průměr jako kulová plocha (sféra S^2), získáme torus, viz obrázek 3. Sféru, na které bude ucho, můžeme reprezentovat jako plášť válce bez podstav (obrázek 4). Okraje jsou právě dvě díry ve sféře, které mají souhlasně orientované zipy, jejich spojením tak vznikne ucho a zároveň torus, jak víme z minulého dílu.

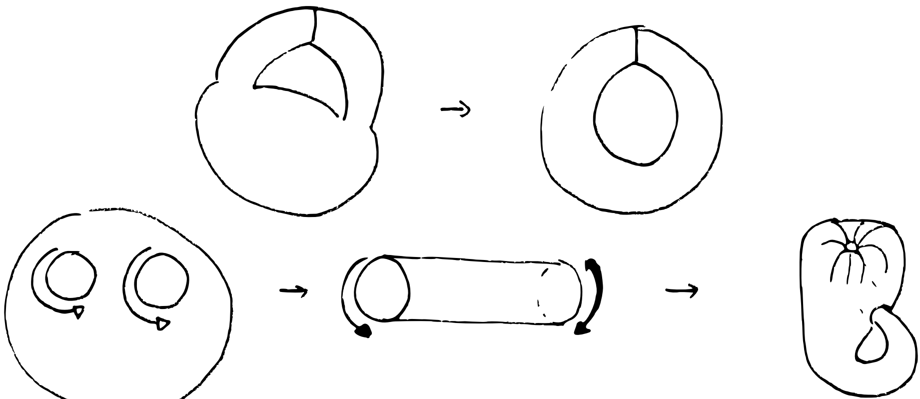


Obrázek 3: Sféra s uchem jako torus

Sféra s kříživým uchem Pokud opět vezmeme sféru S^2, na které bude kříživé ucho, dostaneme torus prokřížený sám do sebe, který je Kleinovou lahví. (Můžete sledovat na obrázku 5.) Sféru, na které bude ucho, lze opět reprezentovat jako plášť válce bez obou podstav. Okraje s nesouhlasně orientovaným zipem tvoří dvě díry ve sféře, jejichž spojením vzniká kříživé ucho. Po spojení tak vznikne sféra s kříživým uchem neboli Kleinova láhev, jak jsme si ukázali v minulém díle.



Obrázek 4: Sféra s uchem jako plášť válce

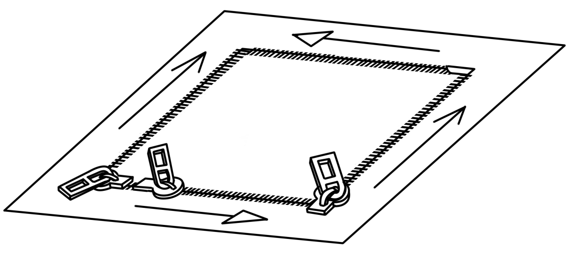


Obrázek 5: Sféra s křížívým uchem

Úloha 3

Zadání:

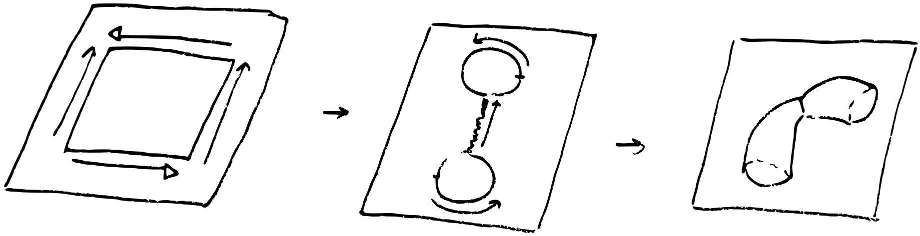
Co vznikne, pokud slepíme nejdříve souhlasné strany obdélníkové díry z obrázku 6 a poté její dvě nesouhlasné strany?



Obrázek 6: Obrázek k zadání Úlohy 3.

Řešení:

Při spojení souhlasných stran získáme v podstatě sféru se dvěma dírami, které mají nesouhlasně orientované zipy, viz obrázek 7. No a při spojení dvou děr s nesouhlasně orientovanými zipy získáme křížívé ucho, jak už bylo v tomhle díle ukázáno.

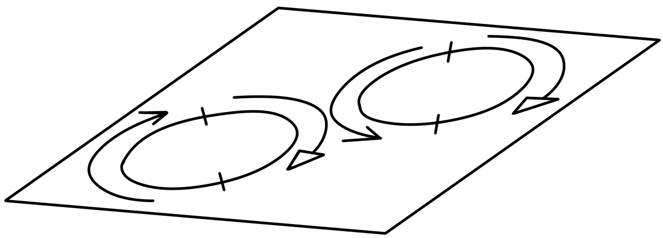


Obrázek 7

Úloha 4

Zadání:

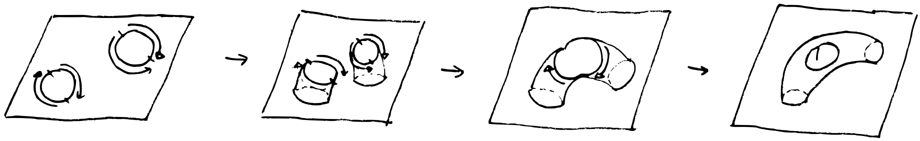
Mějme dvě kruhové díry a dva druhy zipů, bílé a černé, přičemž každá díra má půlku okraje pokrytou jedním druhem zipu a druhou půlku druhým druhem zipu. Černé zipy jsou orientované souhlasně, tedy proti sobě, bílé nesouhlasně, tedy oba stejně. Situace je nakreslena na obrázku 8. Co vznikne, když slepíme nejdříve černé zipy a poté bílé? A co když slepíme nejdříve bílé zipy a teprve poté černé? Kombinaci kterých již známých prvků jsou takto získané objekty homeomorfní? Co se z toho dozvídáme?



Obrázek 8: Obrázek k zadání Úlohy 4.

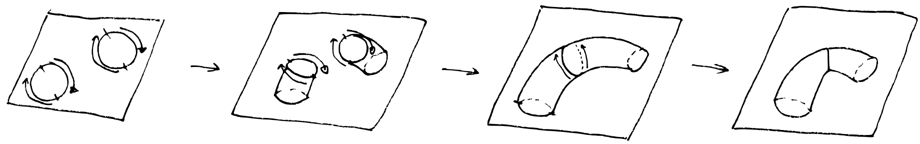
Řešení:

Nejprve černé, pak bílé Pro zjednodušení představy díry opět vytáhneme z povrchu sféry a pootočíme je tak, že souhlasné zipy budou blíže k sobě, viz obrázek 9. Při spojení souhlasných zipů tak vznikne ucho s dírou. Díra bude ohraničena nesouhlasně orientovanými zipy. Když je spojíme, vznikne nám křížítko. Dostaneme tak sféru s uchem, na kterém je křížítko.



Obrázek 9

Nejprve bílé, potom černé Opět si pomůžeme vytažením děr z povrchu sféry. Díry nebudeme nijak otáčet a spojíme nesouhlasně orientované zipy. Vznikne ale díra, kde jedna polovina bude nad a druhá pod rovinou spoje druhých dvou zipů. Při jejich zazipování tedy spoje projdou skrz sebe, viz obrázek. Tím vznikne křížívé ucho. Z čehož plyne, že křížívé ucho je ekvivalentní uchu s křížítkem.



Obrázek 10

Pozn. redakce

Přesnější formulace toho, co jsme v předchozí úloze dokázali, je následovná: Ucho je homeomorfní křížívému uchu v přítomnosti křížítka. Důvodem je to, že si můžeme představit spojitou transformaci, která smrští část plochy mezi uchem a křížítkem. Dále můžeme podobným smršťováním a natahováním „protáhnout“ ucho přes křížítko. Z ucha, které projde křížítkem, se stane křížívé ucho. V přítomnosti křížítka tedy můžeme tímto způsobem měnit ucha na křížívá ucha a zpět.

Úloha 5

Zadání:
Představ si plochu, která má ke dvěma částem svého okraje přidělané zipy. Dokaž, že pokud se před spojením zipů jedná o běžnou plochu, je to běžná plocha i po jejich spojení. Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že okraj je tvořený sjednocením kružnic. Důkaz se dá provést rozmyšlením toho, co se stane v následujících případech:

- *každý zip pokrývá jednu celou kruhovou část okraje, tj. kružnici, a*

  - *zipy spojují dvě nesouvislé části plochy*[2]
  - *obě ozipované díry leží na stejné souvislé části plochy*
- *dva zipy jsou součástí stejné okrajové kružnice a dohromady ji zcela pokrývají*
- *zipy pokrývají jen část kruhového okraje (vyřešeno v textu níže)*

Řešení:

Předpokládejme, že každý zip pokrývá jednu celou část kružnice. Jedná-li se o dvě nesouvislé plochy, pak spojením těchto zipů kolem děr vytvoříme ucho nebo křížívé ucho, kterým se obě části plochy propojí. Vznikne tak propojená plocha, na které se lze pohybovat z jedné části na druhou přes ucho nebo křížívé ucho.

Leží-li obě ozipované díry na jedné souvislé ploše, situace se příliš nezmění. Dle orientace zipů jejich sezipováním opět vznikne ucho. Budeme tak mít stejnou běžnou plochu, jen na ní bude nové ucho nebo křížívé ucho, tedy opět běžná plocha.

Ve chvíli, kdy dva zipy jsou součástí jedné okrajové kružnice, kterou zcela pokrývají, nezávisle na jejich velikosti je lze roztáhnout tak, že budou oba stejně velké. Takto dva stejně velké zipy spojíme podle jejich orientace a buď se díra jen „zalepí“, nebo tam vznikne křížítko. A plocha je běžná, pokud obsahuje křížítko, tudíž takto dostaneme opět běžnou plochu.

A jak jsme se dozvěděli v textu, situace, kdy zipy pokrývají jen část díry, lze připodobnit k situaci se zipy pokrývajícími celou okrajovou kružnici. Budeme tedy mít stále díru a k ní nově vzniklý kus spojené plochy nebo křížítko v závislosti na orientaci zipů. A jelikož díry i křížítka jsou v běžných plochách, i takto dostaneme běžnou plochu. Jelikož zipováním dvou zipů vzniknou vždy ucha, křížívá ucha, kusy plochy nebo křížítka, takovýmto zipováním vždy dostaneme opět běžnou plochu, pokud byla běžná před zipováním.

Úloha 6

Zadání:
Použijte výsledky Úlohy 3 a Úlohy 4 společně s informacemi v textu k dokázání silnější verze klasifikační věty pro plochy. (Nápověda: Rozdělte si úlohu na části podle toho, zda je přítomné alespoň jedno křížívé ucho či křížítko, nebo nikoli.)

Řešení:
Už jsme si ukázali, že každá běžná plocha je homeomorfní sféře s uchy, křížívými uchy, křížítky a dírami. Vezměme si nyní nějakou běžnou plochu. Můžou nastat dva případy:

[2] Dvě části plochy jsou nesouvislé, když se nedá pohybem po dané ploše dostat z jedné části na druhou.

1. Plocha obsahuje alespoň jedno křížítko či křížive ucho. Předpokládejme nejdříve přítomnost kříživého ucha. Výsledným objektem z Úlohy 3 bylo právě kříživé ucho, a v textu zadání jsme ukázali, že je tento objekt homeomorfní dvěma křížítkům. Nadále tedy můžeme předpokládat, že naše plocha obsahuje jen křížítka a ucha. V Úloze 4 jsme si však ukázali, že ucho je v přítomnosti křížítka totožné s kříživým uchem, které můžeme dále přetransformovat ve dvě křížítka. Dostáváme tak jen sféru s dírami a křížítky.

2. Plocha neobsahuje křížítko ani kříživé ucho. V takovém případě dostáváme sféru s dírami a uchy.

Výsledkem našeho rozboru případů je tedy následující silnější verze klasifikační věty: Každá běžná plocha je homeomorfní buď sféře s dírami a křížítky, anebo sféře s dírami a uchy. Právě z této věty plyne klasifikace ploch na *neorientovatelné*, tedy ty obsahující nějaké křížítko, a *orientovatelné*, které obsahují pouze ucha. O této klasifikaci jsme si už řekli na konci čtvrtého dílu.

Dovětek

Obsah 3. dílu je převzatý ze článku Convay's zip proof od G. K. Francise a J.R. Weekse [1]. Pokud tě tento díl zaujal, článek doporučuji k přečtení. Mimo jiné obsahuje též velmi vydařené verze obrázků ze zadání i vzorových řešení.

Zdroje

[1] FRANCIS, George K. a Jeffrey R. WEEKS. *Conway's ZIP Proof* The American Mathematical Monthly [online]. Taylor & Francis 1999, 106(5), 393-399 [cit. 2021-03-04]. ISSN 0002-9890. Dostupné z: `https://doi.org/10.1080/00029890.1999.12005061`

Anet; `aneta.pokorna@matfyz.cz`
Viktor; `vskoupy@gmail.com`
e-mailová konference: `topologie@mam.mff.cuni.cz`
e-mail pro zasílání řešení: `mam@matfyz.cz`

Téma 2 – Optika

Díl 5: Elektromagnetické záření

V předchozích dílech jsme se dívali na optiku a světlo z mnoha různých pohledů.

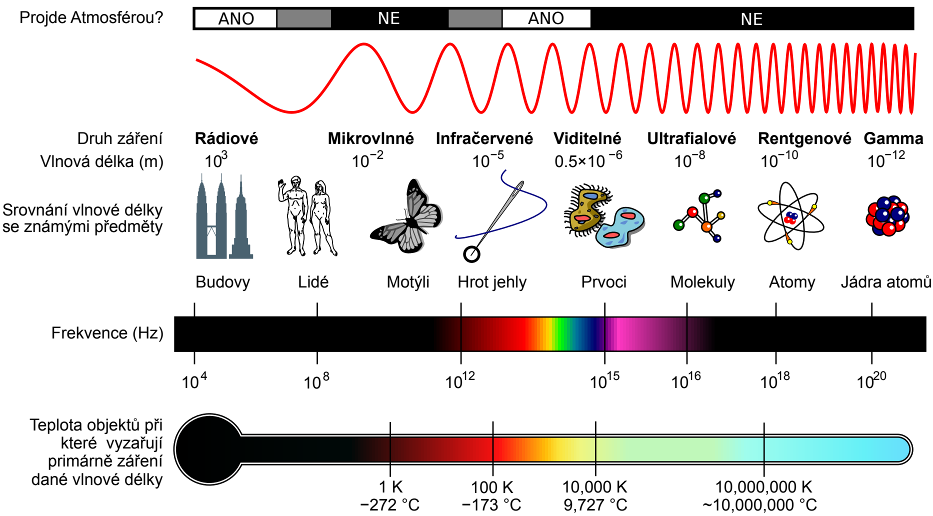
V prvním a druhém dílu témátka jsme se zabývali vlnovou podstatou světla a spektry různých světelných zdrojů (jako třeba obrazovky, žárovky nebo Slunce). K tomu nám sloužil náš vlastní spektrometr, který jsme si sestavili a nakalibrovali, abychom mohli vlnové délky a spektrum zkoumat s větší přesností. Třetí díl byl zaměřený na lámání a odrážení světla. Zkoušeli jsme různými způsoby měřit index lomu látky, podívali jsme se na několik optických jevů souvisejících s lomem světelných paprsků a v závěru jsme si hráli s lupou a tím, jakým způsobem skrz ni prochází světlo. Minulý díl nám představil světlo jako relativně úzký rozsah vlnových délek elektromagnetického záření. Prozkoumali jsme svět barev a podrobili ho spoustě experimentů.

Poslední díl tématka bude věnován elektromagnetickému záření a vašim vlastním experimentům. Nejprve vám krátce představíme, co to vlastně elektromagnetické záření je.

Řekněme, že postavíme anténu, nemusí být ani nijak moc složitá, stačí dva dráty v nějaké vzdálenosti od sebe. V okamžiku, kdy přivedeme na tuto anténu střídavý elektrický proud, začne vysílat do okolí elektromagnetické záření. Platí, že jakýkoli elektrický náboj, který má nenulové zrychlení, vyzařuje elektromagnetické záření.

Elektromagnetické záření jsou příčné vlny elektrického a magnetického pole. Co to znamená? Je to vlna, která se šíří rychlostí světla, v jednom směru kmitá elektrické pole, v druhém (kolmém) směru potom magnetické pole. Elektromagnetické záření je důkazem toho, že se opravdu elektrické a magnetické pole vzájemně ovlivňují. I v místech, kde se nevyskytuje žádný vodič, ani žádný náboj, se totiž může vyskytovat elektromagnetické záření.

Elektromagnetické záření existuje v širokém spektru frekvencí (a vlnových délek), jak můžete vidět na obrázku 11. Ty nejnižší frekvence jsou rádiové vlny a mikrovlny. To je elektromagnetické záření, které lidstvo používá zejména k přenosu informací a ohřívání oběda. Záření s vlnovou délkou mezi 1 mm a 760 nm se říká infračervené. Takové záření vyzařují všechna tělesa, je to tzv. tepelné záření. Podle toho, jakou vlnovou délku vyzařuje, se dá poznat teplota tělesa.



Obrázek 11: Elektromagnetické spektrum[3]

Mezi 760 nm a 340 nm je klasické viditelné světelné záření. Je to rozsah vlnových délek, které je schopné vnímat lidské oko. Tento úsek není pevně určený, různí živočichové vidí různé rozsahy vlnových délek. Elektromagnetické záření s ještě kratší vlnovou délkou se nazývá ultrafialové. Vyzařuje ho slunce a lidstvo ho používá zejména k opalování, dezinfekci a výrobě procesorů[4].

Největší frekvence mají rentgenové a gamma záření. Rentgenové používáme k diagnostice úrazů a materiálů, gamma záření jsou vysokoenergetické fotony vznikající při radioaktivních přeměnách.

Problém 1: *Vyberte si nějakou vlnovou délku elektromagnetického záření (nebo nějaké pásmo vlnových délek, jehož šířka může být maximálně 40 nm). Popište v krátkém článku, proč je právě vámi vybraná vlnová délka lepší než všechny ostatní. Svá tvrzení zkuste podložit fakty.*

Problém 2: *Ve svém okolí určitě najdete spoustu optických jevů, které vám přijdou běžné, a také spoustu těch, u kterých nevíte, jak přesně fungují. Zkuste si vybrat nějaký konkrétní optický jev, zdokumentujte ho, vyfoťte a popište. Pokud víte, jak jev vzniká, vysvětlete jej. Uvítáme i částečná řešení tohoto problému, nápady i různé postřehy, které vám přijdou zajímavé. Prosíme, nehledejte jevy na internetu, zajímají nás vaše pozorování reálného světa.*

Problém 3: *Rádiové a mikrovlnné záření používá lidstvo k přenosu informací. Pro kódování této informace se používá tzv.* modulace *(většinou je amplitudová, nebo frekvenční). Zkuste o modulaci něco zjistit, napište nám, jak fungují různé typy modulace, a ideálně si zkuste i něco zakódovat. Pošlete nám potom předpis nebo obrázek funkce.*

Problém 4: *Pokud nemáte žádný nápad na optický jev, přinášíme vám několik inspirativních a zajímavých témat, nad kterými se můžete zamyslet a napsat o nich krátký článek pro ostatní řešitele.*

- *Jakým způsobem byla vyfocena černá díra?*
- *Jak fungují přístroje oftalmologů na měření zraku?*
- *Co se stalo se zrcadlem v Hubbleově teleskopu a co s ním museli vědci udělat?*
- *Co se stane, pokud si laserový fyzik zasvítí do oka pulsním laserem?*
- *Co se stalo se slavným londýnským mrakodrapem Walkie Talkie?*
- *Jak funguje měření intenzity světla pomocí porovnávání „šedých kroužků“?*
- *Jak funguje mikroskop, lupa, elektronový mikroskop, …?*

[3]Zdroj: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM_Spectrum_Properties_cz.svg`
[4]`https://cs.wikipedia.org/wiki/Nanolitografie`

Vzorová řešení 3. dílu

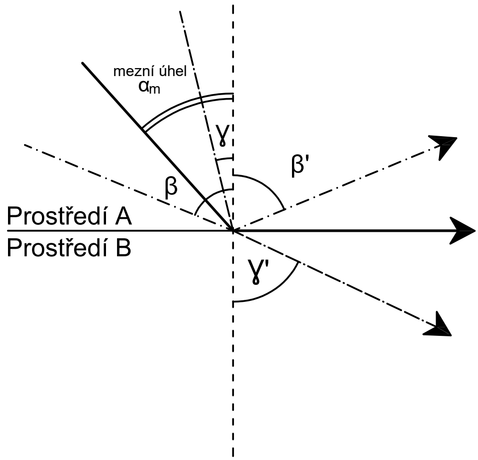
Spousta řešitelů nám zaslala velmi pěkná řešení, za něž děkujeme. Nejvíce se nám líbilo zpracování Doc.[MM] Kláry Grinerové, uvádíme vám je tu proto jako vzorové s občasnými poznámkami.

Problém 1

Zadání:
Uvažme situaci, kdy se paprsky šíří z opticky hustšího (vyšší index lomu) do opticky řidšího (nižší index lomu) prostředí, jako třeba z vody do vzduchu. Když budeme zvětšovat úhel dopadu, bude se úhel lomu blížit pravému úhlu. Nastává totiž tzv. lom od kolmice a funkce sinus je pro hodnoty menší než 90° rostoucí, takže při přechodu z hustšího do řidšího prostředí bude vždy úhel lomu větší než úhel dopadu. Musí tedy existovat hranice, kdy úhel dopadu je menší než 90°, ale úhel lomu už je větší než 90°. Tuto situaci znázorňuje obrázek 12. Když potom budeme i nadále zvětšovat úhel dopadu, nebude už docházet k lomu, ale pouze k odrazu, který pak proto nazýváme totální odraz. *Úhel dopadu, při kterém je úhel lomu pravý, se nazývá* mezní úhel α_M, *a platí vzorec*

$$\sin(\alpha_M) = \frac{n_2}{n_1},$$

kde n_1 je index lomu opticky hustšího prostředí a n_2 index lomu opticky řidšího prostředí.



Obrázek 12: Mezní úhel

Pokud znáte jeden z indexů lomu, můžete pomocí měření mezního úhlu vypočítat ten druhý. Zkuste tímto způsobem pomocí laserového ukazovátka změřit index lomu vody, oleje, případně nějakých dalších látek. Zkuste dosáhnout co největší přesnosti a vyfoťte svůj experiment.

Řešení:

Mezní úhel jsem měřila svícením do sklenice, která byla až po okraj naplněna kapalinou. Část sklenice jsem oblepila papírem, protože jinak se světlo odráželo všude možně po stěnách a těžko se něco pozorovalo. Ke sklenici jsem také přilepila papír do místa, kam dopadalo světlo po lomu, a úhloměr na měření úhlu dopadu (viz obrázek 13).

Obrázek 13: Aparatura na měření úhlu lomu

Takto jsem měřila vodu a pivo. Slunečnicový olej, technický líh (etanol) a med jsem měřila v menší nádobě (Med jsem původně zkoušela prosvěcet ve velké sklenici, kde jej skladujeme, ale světlo po lomu nešlo zachytit. I u menší nádoby nebylo vidět tak dobře jako u ostatních kapalin). Laserovým ukazovátkem jsem svítila tak, aby dopadalo na střed povrchu kapaliny, kudy procházela moje pomyslná kolmice lomu. Světlo z ukazovátka buď dopadlo na plochu papíru nad sklenicí, pouze se odráželo a bylo vidět na stěně sklenice na druhé straně, nebo dopadalo na hranici povrchu kapaliny a papíru nad sklenicí – což je právě bod, kde je úhel lomu pravý. Dané situace lze po řadě vidět na obrázku 14, nejprve dokonalý odraz, pak mezní úhel a nakonec lom.

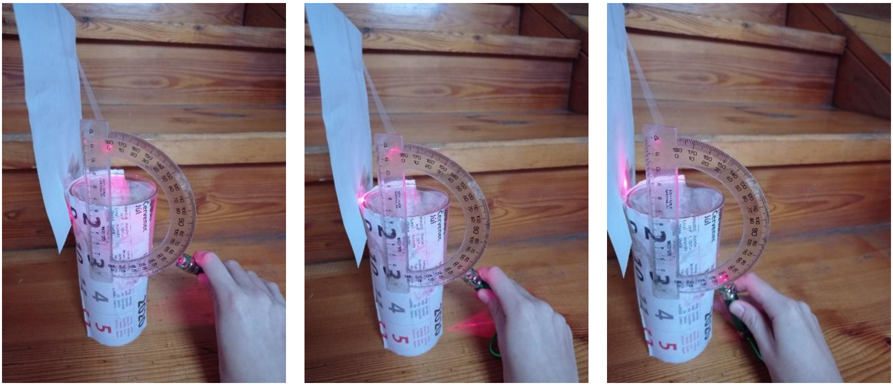
Naměřený mezní úhel má dle mého odhadu přesnost cca 3°. Index lomu vypočteme:

$$\sin \alpha_M = \frac{n_2}{n_1}$$

Vyjádříme n_1 a za n_2 dosadíme index lomu vzduchu:

$$n_1 = \frac{1}{\sin \alpha_M}$$

Naměřené úhly a z nich vypočtené indexy lomu můžete vidět v tabulce 1.



Obrázek 14: Dokonalý odraz, mezní úhel a lom

kapalina	měřený úhel α_M	vypočtený index lomu kapaliny	tabulková hodnota	odchylka od tabulkové hodnoty
voda	50°	1,3054	1,3300	0,0246
rostlinný olej	41°	1,5243	1,4730	0,0513
etanol	46°	1,3902	1,3600	0,0302
pivo	48°	1,3456	1,3450	0,0006
med	40°	1,5557	1,4900	0,0657
			průměrná odchylka	0,0344

Tabulka 1: Naměřené úhly a z nich vypočtené indexy lomu

Vzhledem k naměřeným indexům lomů mají naměřené úhly odchylku menší než $\pm 3°$.

Pozn. redakce

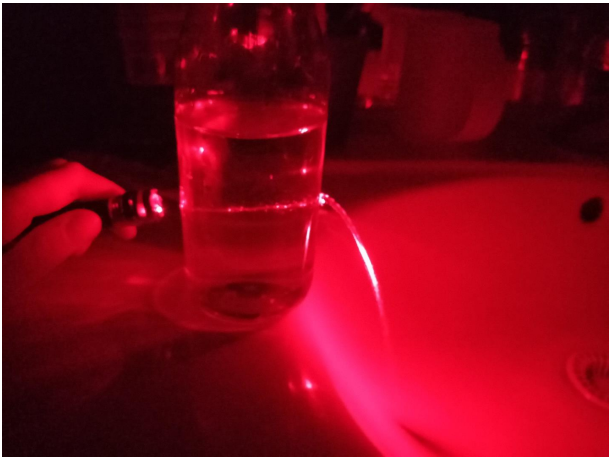
V tomto pokusu měřila Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Klára Grinerová lom paprsku pouze z kapalin do vzduchu. Paprsek se však také láme už při vstupu do sklenice, což by teoreticky mělo způsobit větší nepřesnosti v měření. Vzhledem k tomu, že Kláře Grinerové vyšly indexy lomu opravdu hezky, tak lom paprsku bude nejspíše celkem malý.

Úloha 2

Zadání:
To, že při překročení mezního úhlu dochází k totálnímu odrazu, se využívá pro konstrukci optických vláken. Zkuste si takové optické vlákno vytvořit. Vezměte PET lahev, naplňte ji vodou a propíchněte do jejího boku v dolní části díru dostatečně velkou na to, aby voda vytékala malým proudem. Následující část pokusu bude lépe vidět, pokud ho budete provádět v zatemněné místnosti. Když posvítíte laserovým ukazovátkem přímo skrz lahev do místa, odkud voda vytéká, uvidíte, že se bude světlo šířit pouze proudem, který z lahve vytéká. Vyfoťte svůj experiment, popište, jak jste postupovali, a zkuste nakreslit, jakým způsobem se ve vytékající vodě světlo šíří.

Řešení:

Pomocí nůžek nahřátých nad svíčkou jsem udělala do PET lahve díru o průměru cca 3 mm. V místnosti bez oken jsem pak na umyvadle do lahve nalila vodu a nechala ji vytékat otvorem v PET lahvi. Na lahev jsem svítila laserovým ukazovátkem tak, aby světlo procházelo lahví a vycházelo z ní pod pravým úhlem v místě otvoru. Paprsek světla byl poté velmi dobře vidět v nejméně zahnuté části proudu vody vytékajícím z PET lahve (viz obrázek 15).

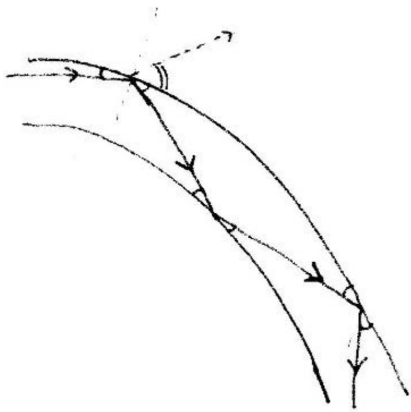


Obrázek 15: Totální odraz v proudu vody

K tomuto jevu dochází, protože je voda opticky hustší prostředí. Na rozhraní vody a vzduchu dochází k lomu světla. Pokud je úhel dopadu větší než mezní úhel, tak dochází k úplnému odrazu. V hodně zahnutých částech proudu vody dochází k lomu i odrazu a část světla se dostává ven. V méně zahnuté části proudu (na obrázku výrazně svítí) dochází k úplnému odrazu, proto je také světelně tak výrazný. Lom a odraz světla v proudu můžete vidět na obrázku 16.

Pozn. redakce:

Doc.^{MM} Klára Grinerová provedla pokus zcela správně, ale vyvodila z něj opačné závěry. Pokud se veškeré světlo v proudu vody odrazí, tak žádné neunikne ven. V tom případě ani nedorazí k našim očím a tedy ho nemůžeme vidět. Jak vidíme, k úplnému odrazu dochází v počáteční části. V rovné části se však světlo lomí do vzduchu, a proto tuto část vidíme zřetelně. Jedním z možných vysvětlení je trhání proudu vody v tomto místě, respektive začátek turbulentního proudění.



Obrázek 16: Nákres lomu a odrazu světla v proudu vody

Problém 3

Zadání:

Když ponoříte skleničku do vody, stále ji velice dobře uvidíte. Když ji ale ponoříte do vhodného oleje, bude vidět velice špatně. Nalezněte vhodný olej a vysvětlete tento jev. Vyfoťte váš výsledek.

Řešení:

Pro skleničku, kterou jsem použila, se ukázal jako vhodný slunečnicový olej. Když ponoříme sklenici do vody, je to celkem podobné, jako když sklenice jen tak stojí na vzduchu. Sklo je průhledné, ale na vzduchu a ve vodě jej vidíme, protože má jiný index lomu než voda nebo vzduch. Světlo se tak na okrajích sklenice láme a my sklenici vidíme. Pokud ale sklenici ponoříme do oleje, který má podobný index lomu jako použité sklo, nebude téměř vidět, jelikož světlo bude procházet olejem a sklem stejně, nedojde k lomu ani odrazu (viz obrázek 17). Světlo se bude šířit prostředím s jednotným indexem lomu a sklenice tak nebude v oleji vidět.

Obrázek 17: Sklenička v oleji

Problém 4

Zadání:

Index lomu závisí na vlnové délce světla, tomuto jevu se říká disperze. Zkuste změřit různé indexy lomu pro různé barvy světla. Použít můžete buď laserová ukazovátka různých barev, přičemž změříte úhel dopadu a lomu, nebo můžete svítit bílým světlem, které se vám pomocí lomu rozloží na jednotlivé barvy. V tom případě měříte jeden úhel dopadu a různé úhly lomu, podle toho, jak se vám vytvoří spektrum po lomu. Doporučujeme měřit disperzi tak, že budete svítit skrz nádobu s vodou a světlo se bude lámat do vzduchu, ideálně se vám promítne na stěnu.

Řešení:

Naměřila jsem jeden úhel dopadu a několik úhlů lomu, jelikož jsem použila bílé světlo. Zvolila jsem úhel dopadu dost velký (40°), jelikož úhly lomu se pak od sebe liší více než u malého úhlu dopadu. Rozklad byl dost nepatrný a odchylky velmi malé, podařilo se mi určit úhly pro 4 výrazné barvy ve spektru, k nimž jsem dohledala vlnové délky a určila index lomu. Index lomu jsem vypočítala ze vzorce:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

Odkud jsem vyjádřila n_1 (voda) a dosadila za n_2 hodnotu 1 (vzduch):

$$n_1 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

barva	vlnová délka (nm)	úhel dopadu α	úhel lomu β	index lomu
modrá	450 nm	40°	62°	1,3736
zelená	525 nm	40°	60°	1,3473
žlutá	600 nm	40°	59°	1,3335
červená	650 nm	40°	57°	1,3047

Tabulka 2: Indexy lomu vody pro různé barvy světla

Naměřené hodnoty (viz tabulku 2) jsou blízké tabulkové hodnotě indexu lomu vody. Čím větší je vlnová délka, tím je index lomu menší, tedy větší vlnové délky jsou méně lomivé, malé vlnové délky se naopak lámou pod větším úhlem.

Problém 5

Zadání:

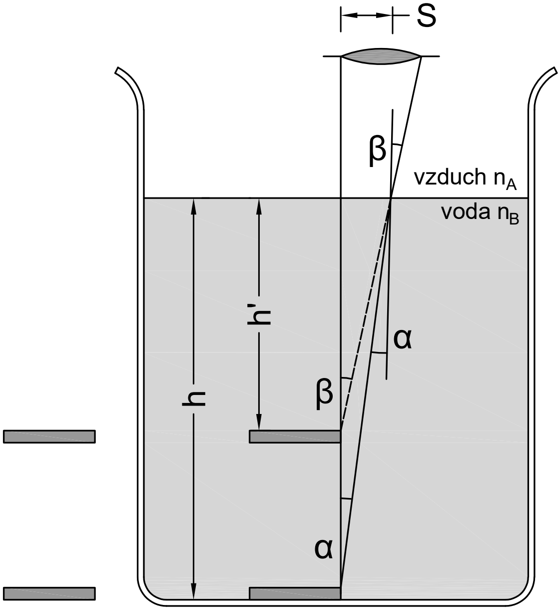
Určitě jste si někdy všimli, že pokud se díváte na nějaký předmět ve vodě, zdá se vám, jako by byl blíže hladině, než ve skutečnosti je. Následujícím pokusem si zkusíte změřit index lomu vody. Potřebujete dvě stejné mince. Jednu umístíte do nádoby s plochým dnem naplněné vodou. Druhou umístíte vedle nádoby. Pokud se budete na nádobu a minci koukat svrchu, tak se vám mince ve vodě bude zdát větší než mince na stole. Zkuste si minci na stole postupně zvedat, až najdete takovou výšku, kde se obě mince budou zdát stejně velké. Výslednou konfiguraci můžete vidět na obrázku 18. Změřte svislou vzdálenost mince od roviny hladiny (h') a hloubku vody (h).

Pro výpočet n_B dle Snellova zákona potřebujeme znát hodnoty $\sin\alpha$ a $\sin\beta$. Ty sice neznáme, ale můžeme si trošku pomoci zanedbáním rozměrů čočky oka. Jelikož budou úhly α a β malé, tak můžeme tvrdit, že $\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha; \sin\beta \approx \beta \approx \tan\beta$. (Úhly na obrázku 18 jsou oproti originálnímu znění Snellova zákonu prohozené, takže si je také musíme prohodit ve vzorci.)

Po upravení tedy vyjde:

$$\tan\beta \cdot n_A = \tan\alpha \cdot n_B$$
$$\frac{S}{h'} \cdot n_A = \frac{S}{h} \cdot n_B$$

Víme, že index lomu vzduchu je $n_A = 1$. Dokončete výpočet indexu lomu vody. Popište své provedení pokusu a zhodnoťte, jak se vám dařilo. Zkuste si podobným způsobem změřit index lomu jiných kapalin a porovnat je s tabulkovými hodnotami. Jak přesná je metoda? Kde nepřesnosti vznikly?



Obrázek 18: Zadání problému 5

Řešení:

Měřila jsem takto index lomu vody, piva, slunečnicového oleje a technického lihu (etanol). Jelikož jsem nechtěla trvale znehodnotit některé z kapalin, použila jsem místo mincí knoflíky. Velikost knoflíků jsem porovnávala pomocí pravítka, kterým jsem měřila zdánlivou velikost obou knoflíků v rovině horního okraje sklenice. Tím se značně zpřesnilo měření oproti odhadu zdánlivé velikosti pouze okem, jelikož se dařilo naměřit správnou výšku na nějakou hodnotu, nikoliv jen rozptyl cca 10–15 milimetrů, mezi kterými se nacházela správná hodnota. Výpočet indexu lomu, kde $n_1 = 1$:

$$\frac{S}{h'}n_1 = \frac{S}{h}n_2; \quad \frac{n_1}{h'} = \frac{n_2}{h}; \quad n_2 = \frac{h}{h'}$$

Jak můžete vidět v tabulce 3, odchylky od tabulkových hodnot jsou o dost větší než u předchozího měření lomu. Nepřesnosti vznikají zejména ve srovnávání zdánlivé velikosti objektů v určité výšce. Odhadnout to pouze okem jde jen hodně hrubě a nepřesně, při měření velikosti v jednotné výšce je to výrazně snadnější a lze přesněji určit takovou výšku, kde si zdánlivé velikosti odpovídají. Zároveň měření jsou přesnější, pokud je sloupec kapaliny nad objektem vyšší.

kapalina	výška h (mm)	výška h' (mm)	index lomu n_2	tabulková hodnota	odchylka
voda	100	78	1,2500	1,3300	0,0800
pivo	100	76	1,3158	1,3450	0,0292
olej	30	22	1,3636	1,4750	0,1114
technický líh	40	31	1,2903	1,3600	0,0697
				průměrná odchylka	0,0726

Tabulka 3: Index lomu pomocí knoflíku

Úloha 6

Zadání:

K provedení experimentu je potřeba skleněná nádoba, nejlépe s rovnými stěnami, sůl, voda a laserové ukazovátko. Do nádoby nasypeme sůl do výšky kolem jednoho centimetru a na ni velmi pomalu a opatrně nalijeme vodu. Je dobré nalévat vodu tak, aby pomalu stékala po stěnách (např. pomocí injekční stříkačky) a co nejméně rozvířila sůl nasypanou na dně. Nádobu necháme alespoň hodinu odstát – čím déle, tím bude efekt výraznější. Posvítíme-li poté (nejlépe v zatemněné místnosti) laserovým ukazovátkem do nádoby v blízkosti vrstvy soli, pozorujeme, že se stopa laserového paprsku ve vodě ohýbá. Sůl se ve vodě pomalu rozpouští a koncentrace iontů se stoupající výškou nad vrstvou soli klesá. Tím se mění i index lomu vody. Vyfoťte váš experiment. Popište, jak tento pokus souvisí s pravou fata morganou, vznikající třeba v poušti. Převzato z webu[5]*.*

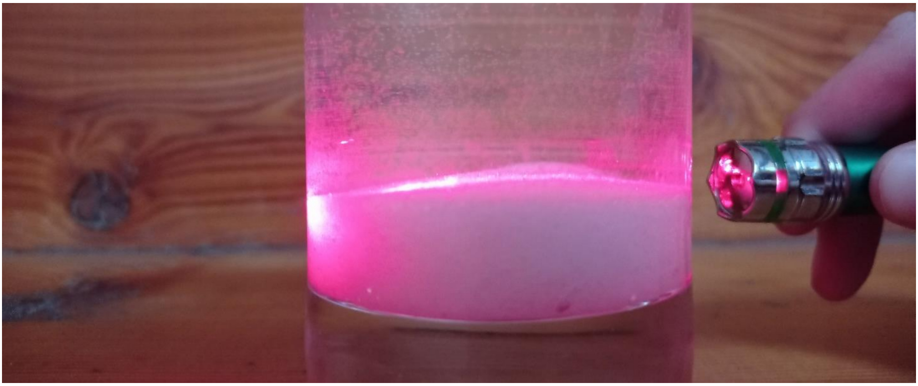
Řešení:

Nejprve jsem fotila na světle, poté v tmavé místnosti (viz obrázky 19 a 20). Ohyb je nejlépe vidět, pokud svítíme laserovým ukazovátkem ve tmě (tam ale nelze svítit blízko vrstvy soli, protože světlo se od nerozpuštěných krystalů odráží úplně všude a nelze toho moc pozorovat).

Fata morgana je jev, kdy lze pozorovat zrcadlení objektu ve vzduchu. Obdobně jako u našeho pokusu je to způsobeno růzností indexu lomu v jednom prostředí. Nad horkou silnicí nebo například v poušti je během bezvětří různě teplý vzduch rovnoměrně rozvrstvený. Vzduch, který se liší v teplotě, se liší i v hustotě a indexu lomu. Díky tomu také dochází k ohybu a můžeme pozorovat zrcadlení objektů, existuje více typů (například zrcadlení na povrchu, který je pod úrovní pozorovatele, kde vzniká dojem vodní hladiny), ale za pravou fata

[5] `https://www.matfyz.cz/clanky/fyzikalni-pokus-fata-morgana`

morganu je považován jev, kdy je objekt nad úrovní pozorovatele. Pozorovatel pak vidí ve vzduchu obraz velmi vzdáleného objektu, který by byl mnohdy vzhledem k vzdálenosti od pozorovatele téměř nebo zcela neviditelný.



Obrázek 19: Fata morgana na světle

Obrázek 20: Fata morgana ve tmě

Úloha 7

Zadání:
V této úloze si vyzkoušíte vyrobit stříbro. Vezměte si kovovou lžičku (nebo jakýkoli kovový předmět) a pokryjte ji sazemi nad plamenem svíčky. Poté lžičku ponořte do nádoby s vodou a při správném natočení uvidíte, jak je na lžičce „stříbro“. Popište, co se stalo a jak takové „stříbro“ vzniká.

Řešení:

Na lžíci se vytvoří vrstvička sazí, které jsou mastné a díky tomu nesmáčivé. V blízkosti vrstvy sazí se při ponoření do vody vytvoří velmi tenká vrstva vzduchu. Když lžíci ve vodě správně pootočíme, bude světlo na tenkou vrstvu vzduchu dopadat pod velkým úhlem, a na rozhraní vody a vzduchu tak dojde k absolutnímu odrazu světla. Díky tomu pak pozorujeme zrcadlení vodní vrstvy a špinavou lžíci vidíme na obrázku 21 krásně čistou a stříbřitě lesklou.

Obrázek 21: „Stříbro“ na lžičce

Problém 8

Zadání:

Připravte si lesklou plochu, na které je dobře vidět odraz světelného zdroje, například žárovky nebo svíčky. Zkuste se na odraz dívat skrz polarizační filtr[6]*. Filtrem pomalu otáčejte v jednom směru. Co pozorujete? Jaké máte pro pozorovaný jev vysvětlení? Zkuste jev zdokumentovat fotoaparátem a změřit úhel, pod kterým je jev nejlépe pozorovatelný. Nezapomeňte nám napsat, jaký jste použili světelný zdroj a povrch, a další relevantní podmínky experimentu.*

[6] Ideální je polarizační filtr z fotoaparátu, měly by fungovat také „3D brýle“ z kina.

Řešení:

Jako zdroj světla jsem použila LED diodu a její světlo se odráželo od skleněné desky, polarizační filtr jsem použila z foťáku. Při otáčení polarizačním filtrem bylo světlo vidět slaběji. Při úhlu dopadu mezi deskou a světlem cca 30°(tzn. úhlu od kolmice dopadu kolem 60°) a při správném natočení filtru nebylo vidět téměř vůbec. K tomuto jevu by mělo docházet, protože při odrazu světla dochází k jeho částečné nebo úplné polarizaci v závislosti na vlnové délce a úhlu dopadu. Při správném úhlu dopadu je tedy odražené světlo zcela polarizované, což znamená, že dochází k vlnění v podstatě pouze v jedné rovině kolmé ke směru šíření, ne do různých směrů kolmých ke směru šíření. Polarizační filtr díky své specifické pruhovité struktuře propouští světelné vlnění ležící v jedné konkrétní rovině. Tím dochází k polarizaci světla. Když pak světlo polarizované odrazem pozorujeme polarizačním filtrem, který vhodně otočíme, nebude propouštět světlo, jelikož se již polarizované světlo bude vlnit v jiné rovině, než kterou filtr při dané orientaci propouští. Proto světlo přes filtr vidíme slaběji a při správném úhlu a natočení filtru jej nevidíme téměř vůbec.

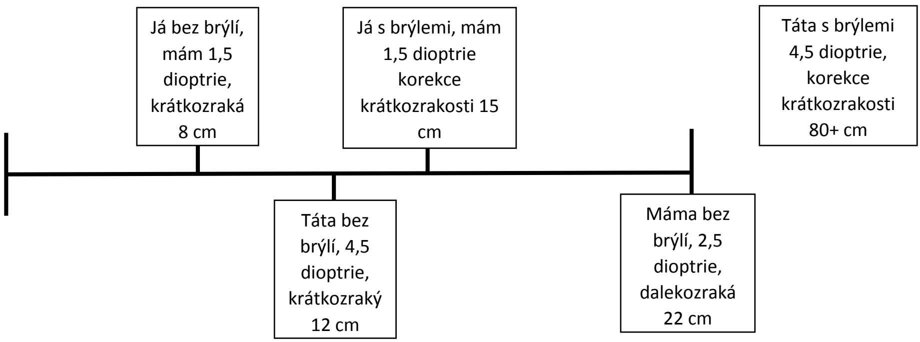
Problém 9

Zadání:
Lupa je nejjednodušší optický systém používaný na optické zvětšení pozorovaného předmětu. Nás bude v tomto experimentu zajímat, kolikrát taková lupa dokáže pozorovaný předmět zvětšit. Vezměte si lupu, umístěte ji velmi blízko oka a pohybujte s ní společně s hlavou, dokud nezískáte nejostřejší obraz pozorovaného předmětu. Změřte vzdálenost, ve které předmět pozorovaný lupou popsaným způsobem vidíte nejostřeji a zkuste odhadnout pozorované zvětšení. Následně poproste například členy společné domácnosti, nejlépe z výrazně jiných věkových skupin, aby stejný experiment zopakovali. Dokážete v získaných výsledcích pozorovat nějakou závislost? Čím si myslíte, že by mohla být způsobena? Zkuste ke svému řešení přiložit nákres nebo výpočet, kterým své domněnky podpoříte.

Řešení:

Experiment jsem provedla na sobě, mámě a tátovi. Rodiče se sice od sebe věkem příliš neliší, ale zato se velmi výrazně liší v počtu dioptrií, které popisují, jak dobře vidí blízké předměty. Pozorované zvětšení lupy jsem odhadla na 1,5. Z naměřených vzdáleností jsem sestavila osu, na jakou vzdálenost kdo za jakých podmínek vidí objekt ostře:

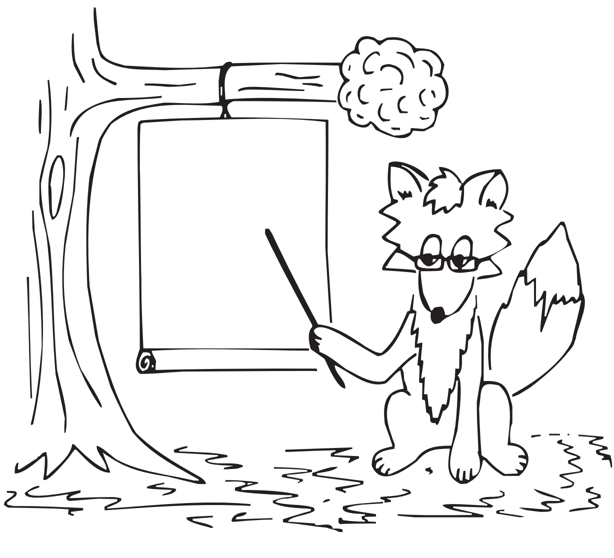
Je zde závislost v tom, jak oko běžně i bez lupy vidí předměty blízko ve své blízkosti. Se stoupajícím věkem se lidská čočka deformuje a snižuje se její schopnost dívat se na velmi blízké předměty, rozvíjí se dalekozrakost, tedy paprsky obrazu se protínají až za sítnicí. U starších lidí tak můžeme pozorovat, že při čtení oddalují knihu od očí, seč jim ruce stačí.



Obrázek 22: Diagram ostřících vzdáleností

Ve srovnání lze vidět, že já bez brýlí vidím blízké předměty velmi dobře. Pokud si ale vezmu brýle (korekce krátkozrakosti), ve kterých je rozptylná čočka, musím předmět dát dál. Dalším je táta, který je bez brýlí krátkozraký a kromě toho se mu vlivem stárnutí zhoršilo vidění na blízké předměty. Pokud si ale vezme brýle, má před okem již celkem silnou rozptylku a předměty v blízkosti nevidí ostře až do vzdálenosti cca 80 centimetrů. Poslední je mamka, která je přirozeně dalekozraká a blízké předměty bez brýlí (spojek) nevidí ostře.

Faník; `frantisek.zajic@matfyz.cz`
e-mailová konference: `optika@mam.mff.cuni.cz`
e-mail pro zasílání řešení: `mam@matfyz.cz`



Téma 3 – Olympiádní matematika

Díl 5: Teorie čísel

V minulých dílech tohoto tématka jsme zběžně zabrousili do dvou ze čtyř nejvýznamnějších okruhů příkladů matematické olympiády – geometrie a algebry. Dnes se budeme věnovat okruhu třetímu, a to teorii čísel. Na pojmy dělitelnost a prvočíslo, na které jste při svém studiu už jistě narazili, se podíváme více do hloubky a ukážeme si pár zajímavých úložek. Těžištěm tohoto dílu pak budou kongruence. Že vám to slovo nic neříká? Nezoufejte. Vysvětlíme si, o co se jedná a k čemu se nám to hodí – a věřte, že toho není málo – a na závěr použijeme všechny nově nabyté znalosti při řešení několika obtížnějších úloh.

Než se vrhneme k samotným pojmům, jen pár slov obecně k teorii čísel. Jedná se o úlohy, které se skoro vždy točí okolo přirozených nebo celých čísel a využívají jejich vlastností, nejčastěji dělitelnosti. Zadání často zní „dokažte, že …“ anebo „najděte všechna čísla, pro která platí …“. Jelikož pracujeme s celými čísly, je možné si prvních pár čísel dosadit – a pokud nemáte jasnou představu, jak dokázat to, co se po vás chce, doporučuji to. Ačkoliv se to může zdát jako „plýtvání času“ a dost pravděpodobně tím nezískáte žádné body, pomůže vám to do úlohy více nahlédnout, zjistit, jak se daný výraz chová pro různé hodnoty (třeba pro sudá čísla, čísla dělitelná pěti, čísla vyšší než sedm …). To vám dost často pomůže k utvoření hypotézy, například že daný vztah bude platit jen pro lichá čísla. A je mnohem snazší takovou hypotézu potvrdit (nebo vyvrátit) než přemýšlet, co s tím asi tak můžu dělat.

Dělitelnost

Nejjednodušeji si dělitelnost[7] můžeme představit jako vztah dvou přirozených nenulových čísel a, b, pro která platí následující – číslo b dává po dělení číslem a nulový zbytek, nebo také $b = ka$, kde k je celé nenulové číslo. Tento vztah budeme značit $a \mid b$. Bude se nám hodit obzvláště v případě, že se budeme bavit o nějakých neznámých (a nebo nechutně velkých číslech). V mnoha případech nás totiž nezajímá číslo (nebo výraz) samotný, ale pouze to, jaké má vlastnosti – v tomto případě jaké číslo ho dělí.

Cvičná úloha: *Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí, že* $2 \mid 2n^2+7$.

Na tomto jednoduchém příkladě vidíme, že ačkoliv by n mohlo být jakékoliv přirozené číslo, příklad nemá řešení – výraz $2n^2$ je určitě sudý, zatímco 7 je liché, jejich součet je tedy jistě lichý, a tím pádem není nikdy dělitelný dvěma.

Cvičná úloha: *Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí* $5 \mid 4n + 20$.

Postupujme obdobně jako ve výše popsaném příkladě. Dvacet je určitě dělitelné pěti, takže aby mohl být pěti dělitelný celý výraz, musí být pěti dělitelné

[7] pro účely tohoto dílu si dělitelnost definujeme pouze jako vztah dvou přirozených čísel (ačkoliv je dělitelnost běžně definována na číslech celých)

i $4n$. Čtyři není dělitelné pěti, tím pádem musí být pěti dělitelné n. Výraz tedy platí pro všechna n, která jsou dělitelná pěti, tedy napsatelná ve tvaru $5k$, kde k je přirozené nenulové číslo.

Teď ještě k pár pojmům, které se nám v řešení následujících úloh budou hodit – a to je soudělnost a nesoudělnost. Co to znamená, že dvě čísla jsou *soudělná*? Je to vzájemný vztah (na rozdíl od *dělitelnosti* – tam platí, že $a \mid b$ a zároveň $b \mid a$ pouze v případě, že $a = b$), který říká, že daná čísla mají alespoň jednoho společného dělitele různého od 1. Naopak *nesoudělnost* nám říká, že daná čísla nemají jiného společného dělitele než 1. Čísla 4 a 6 jsou tedy soudělná (mají společného dělitele 2), ale čísla 4 a 15 jsou nesoudělná.

U malých čísel tento vztah vidíme většinou „od oka", u velkých čísel nám k určení soudělnosti může pomoci rozložení na prvočinitele (neboli prvočísla). O těch si více povíme v další kapitole, nicméně všichni asi víte, že se jedná o čísla, jež mají právě dva dělitele, 1 a sebe sama. Rozkládání velkých čísel na prvočinitele může být užitečná schopnost, obzvlášť pak v případě, že sedíte na nějakém kole matematické olympiády a nemůžete použít kalkulačku, doporučuji ji tedy občas procvičovat (ještě užitečnější může být pamatovat si rozklad na prvočísla roku, kdy se olympiády účastníte).

Soudělná a nesoudělná čísla si ještě chvíli zapamatujme, budou se hodit při počítání s kongruencemi. Na závěr této kapitoly ještě přidáme jednoduchý trik, který vás ale ne vždy napadne – pokud je číslo N dělitelné navzájem nesoudělnými čísly $n_1, n_2, \dots, n_k$, pak je dělitelné i číslem $n_1 n_2 \dots n_k$.

Úloha 1 [3b]: *Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 3$ platí $60 \mid n^6 - n^2$.*

Prvočísla

V tomto díle se prvočíslům moc věnovat nebudeme, byla by ovšem chyba je opomenout. V teorii čísel jsou totiž téměř nekonečnou studnou nových příkladů.

Pár slov na úvod, které drtivá většina z vás již bude znát. Jak již bylo řečeno výše, prvočísla jsou taková přirozená čísla, která mají právě 2 přirozeno-číselné dělitele, 1 a sebe sama. Opakem jsou pak čísla složená, která mají alespoň 3 přirozeno-číselné dělitele.

Úloha 2 [1b]: *Co mají společného všechna složená čísla, která mají právě 3 (přirozeno-číselné) dělitele?*

Zvláštní výjimkou je pak číslo 1, které má pouze jednoho přirozeno-číselného dělitele. Takže ne, 1 opravdu není prvočíslo.

Problém 3: *Znáte nějaké zajímavé vlastnosti prvočísel? Nějakou si vyberte a něco nám o ní napište. Fantazii se meze nekladou, nebojte se tedy připojit třeba důkaz, něco o historii, a nebo dokonce zajímavý příklad, ve kterém se tato vlastnost využije. Čerpat můžete z libovolných zdrojů, použijte ale svá slova a nezapomeňte zdroj uvést.*

Úloha 4 [1b]: *Dokažte, že každé prvočíslo větší rovno* 5 *lze napsat ve tvaru* $6k \pm 1$, *kde* k *je přirozené číslo.*

Kongruence

Tím se dostáváme k těžišti tohoto tématka. Takže co že vlastně jsou ty kongruence?

Každý z vás jistě zná symbol „=“. Ten značí, že výrazy na pravé i levé straně jsou si rovny. Je tedy indikátorem nějakého vztahu rovnosti mezi těmito výrazy. Kongruence se značí „≡“, takže takové tlustší rovnítko, a podobně jako to také indikuje vztah mezi svou levou a pravou stranou. V kongruenci nás ale nezajímá absolutní váha stran, ale jejich zbytek po dělení nějakým číslem – modulem (to se značí slovy „mod“ v závorce za výrazem).

$$5 \equiv 17 \pmod 3$$

Tato kongruence nám tedy říká, že 5 a 17 dávají po dělení 3 stejný zbytek.

Někteří z vás už možná začínají vidět výhody takového nástroje. Opět nám to dává možnost pracovat buď s velmi velkými, a nebo neznámými čísly, neboť známe jejich vlastnosti – je to tedy takové „rozšíření“ dělitelnosti. Například dělitelnost $a \mid b$ nám jinými slovy říká, že $b \equiv 0 \pmod a$, nebo také $a \equiv b \pmod n$ je ekvivalentní $n \mid (a - b)$.

Další výhodou kongruencí je fakt, že se s nimi dá poměrně lehce manipulovat, stejně jako s rovnicemi. Je možné například

a) k oběma stranám kongruence přičíst nebo odečíst celočíselnou konstantu

b) k libovolné straně kongruence přičíst nebo odečíst celočíselný násobek modula

c) obě strany vynásobit celočíselnou nenulovou konstantou

d) celočíselně obě strany vydělit společným dělitelem, který je nesoudělný s modulem

e) celočíselně obě strany a modulo vydělit společným dělitelem, který je soudělný s modulem

f) obě strany kongruence umocnit

S tím si prozatím vystačíme.

Cvičná úloha: *Jaký zbytek po dělení* 3 *dává* 5^4*?*

5^4 není tak velké číslo, aby se tato úloha nedala vyřešit pomocí „brutální síly“. Jak ale dále uvidíte v úlohách, spočítat 5^{20} už by šlo poměrně těžko – zkusíme i takto „snadnou“ úlohu vyřešit chytře pomocí kongruencí.

$$5^1 \equiv 2 \pmod 3$$

Obě strany můžeme vynásobit 5.

$$5^2 \equiv 10 \pmod 3$$

Aby nám pravá strana moc rychle nerostla, můžeme si od ní odečíst násobek modula, tedy 3 – v tomto případě 9.

$$5^2 \equiv 1 \pmod 3$$

Opět vynásobíme 5.

$$5^3 \equiv 5 \pmod 3$$

Opět odečteme násobek modula od pravé strany.

$$5^3 \equiv 2 \pmod 3$$

A naposled vynásobíme obě strany 5.

$$5^4 \equiv 10 \pmod 3$$

Odečteme násobek modula a získáme odpověď.

$$5^4 \equiv 1 \pmod 3$$

Vidíme, že místo výpočtu 5^4 a následného dělení třemi jsme byli schopni úlohu spočítat jen za pomocí jednoduchého násobení dvou jednociferných čísel a odčítání.

Na následujícím příkladu si ukážeme ještě jednu vlastnost kongruencí mocnin, kterou budeme hojně využívat. Někteří z vás si možná již všimli, ostatním pomůžeme tímto zápisem.

$$\begin{aligned} 5^1 &\equiv 2 \pmod 3 \\ 5^2 &\equiv 1 \pmod 3 \\ 5^3 &\equiv 2 \pmod 3 \\ 5^4 &\equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

Nyní už snadno odhadnete, jaký zbytek po dělení třemi bude dávat 5^5. A není to jen vlastnost dělení třemi.

Úloha 5 [2b]: *Proč se zbytky po dělení mocnin čísla b číslem a cyklicky opakují? Není potřeba formální důkaz, stačí dostatečně rozumně zdůvodnit. Klidně si pomozte tabulkou nebo obrázkem.*

A teď je to na vás.

Úloha 6 [2b]:

a) Jaký zbytek dává číslo 2^{30} po dělení 5?

b) Jaký zbytek dává výraz $2^{16} + 3^{27} + 5^{25}$ po dělení 22?

Nejčastějším typem úlohy, se kterou se v rámci použití kongruencí v matematické olympiádě setkáte, jsou právě rovnice nebo určování dělitelnosti s mocninami. Zpočátku zde může být využití kongruencí poměrně neintuitivní – vždyť tam nejsou žádné operace se zbytky, ne? – ale mnohdy jsou naopak nejjednodušším nebo i jediným řešením.

Cvičná úloha: *Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a,b), pro které platí $2^a + 3^{a+1} = 5^b$.*

Prvním krokem je nalezení modula, podle kterého budeme strany dané rovnice zkoumat. V tomto příkladu je to nasnadě – pravá strana musí být dělitelná pěti, hledáme tedy takové a, pro které bude i levá strana dělitelná 5. Mnohdy ale hledané modulo není tak jasné – a nebo, v pokročilejších příkladech, nestačí jedno (například podle modula 4 ukážeme, že hledané číslo nemůže být sudé, a podle modula 7, že nemůže být liché = úloha nemá řešení). Nebojte se tedy zkoušet a modula klidně „tipovat“.

Ale teď zpět k cvičnému příkladu. Jak vypadají zbytky mocnin dvojky a trojky po dělení 5?

$$\begin{array}{llll}
a = 1: & 2^1 \equiv 2 \pmod 5 & \to \quad 3^2 \equiv 4 \pmod 5 & \to \quad 2^1 + 3^2 \equiv 6 \pmod 5 \\
a = 2: & 2^2 \equiv 4 \pmod 5 & \to \quad 3^3 \equiv 2 \pmod 5 & \to \quad 2^2 + 3^3 \equiv 6 \pmod 5 \\
a = 3: & 2^3 \equiv 3 \pmod 5 & \to \quad 3^2 \equiv 1 \pmod 5 & \to \quad 2^3 + 3^4 \equiv 4 \pmod 5 \\
a = 4: & 2^4 \equiv 1 \pmod 5 & \to \quad 3^2 \equiv 3 \pmod 5 & \to \quad 2^4 + 3^5 \equiv 4 \pmod 5 \\
a = 5: & 2^5 \equiv 2 \pmod 5 & \to \quad 3^2 \equiv 4 \pmod 5 & \to \quad 2^5 + 3^6 \equiv 6 \pmod 5 \\
 & & \vdots &
\end{array}$$

Vidíme, že takovýto součet mocnin nikdy nebude dělitelný 5. Úloha proto nemá řešení.

Úloha 7 [4b]:

a) Najděte všechny celočíselné nezáporné dvojice (m,n), pro které platí $1 + 2^n = 3^m$.

b) Najděte všechny celočíselné nezáporné dvojice (m,n), pro které platí $1 + 3^m = 2^n$.

Podobně si budeme počínat v případě, že nemáme zadanou rovnici, ale pouze dělitelnost. Ačkoliv zadání často zní „najděte všechna čísla/dvojice, pro které platí …“, řešení je v drtivé většině konečně mnoho a ještě k tomu poměrně málo, pokud vůbec nějaké. Dává nám to prostor „odhadnout“ řešení – nemějte ale iluze, že takovéto uhodnuté řešení bez odůvodnění by vám v olympiádě přineslo nějaké body – a změnit zadání z „najděte z nekonečna čísel ty pravé“ na „dokaž, proč pro žádné jiné/vyšší/menší číslo to neplatí“, což je výrazně jednodušší. Dobrým způsobem, jak tohoto dosáhnout, je třeba ukázat, že dělitel je dělitelný číslem, kterým není dělitelný podíl.

Úloha 8 [4b]: *Najděte všechna přirozená n, pro která platí*

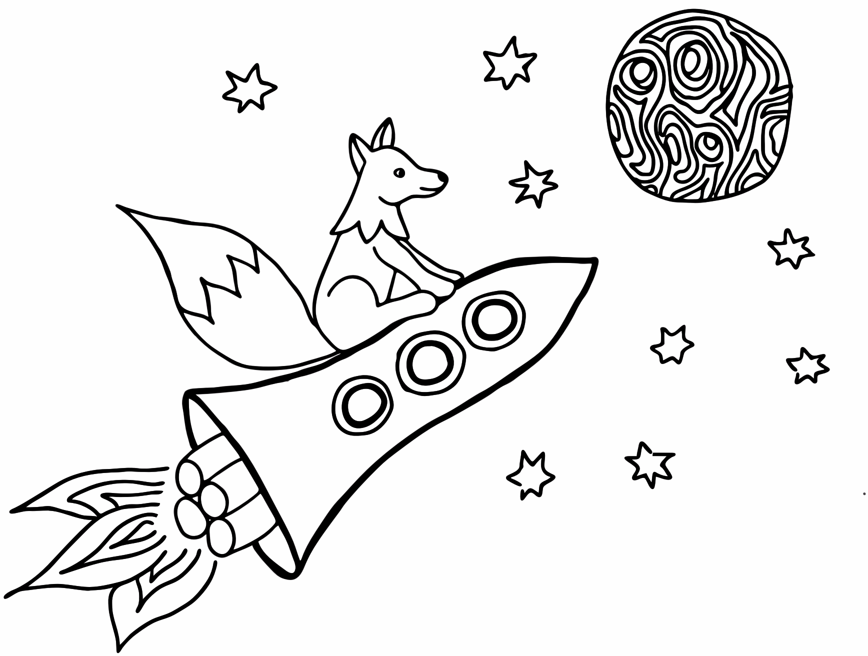
$$(11^n + 2^n + 1) \mid (11^{n+1} + 2^{n+1} + 1).$$

Úloha 9 [2+b]: *Najděte všechna přirozená n, pro která platí*

$$4^{n-1} + 7 \cdot 2^2 + 48 = n!$$

Úloha 10 [3b]: *Dokažte, že pokud je pro celočíselná a, b výraz $a^2 + 9ab + b^2$ dělitelný 11, pak je i výraz $a^2 - b^2$ dělitelný 11.*

Jane; pallova.jane@gmail.com
e-mailová konference: olymp@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz



Téma 4 – Počítač z nul a jedniček

Díl 5: První návrh počítače

Vítejte u posledního zadání našeho tématka! Hlavní částí tohoto dílu je článek Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Vojtěcha Gaďurka. Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Vojtěch Gaďurek byl totiž líný, jak ostatně ve článku sám píše, a tak se místo stavění zadaných hradlových sítí rozhodl, že si vymyslí rovnou počítač, který bude dělat všechnu práci za něj.

Tím nás velmi potěšil, neboť naším cílem je, abychom si takový malý počítač postavili společně. Nyní vás tedy chceme pozvat, abyste si článek přečetli.

Počítače a jednoduché programovací jazyky 16 bodů

Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Vojtěch Gaďurek

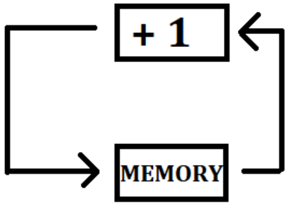
Úvod

Začátek může být trochu neobvyklý, přesto poskytuje nejlepší nadhled nad myšlenkami prezentovanými tímto článkem, tak se nelekněte a odvažte se vrhnout do víru lidské lenosti.

Pro začátek si představme, že jsme nekonečně líní a dostaneme za úkol vytvářet a pájet logické sítě. Pro každé jedno zadání tak vytvoříme jeden obvod. Jelikož nemáme rádi práci, začne nám vrtat hlavou, jestli si nemůžeme dílo nějak usnadnit. Možná nás napadne, zda bychom mohli nějak recyklovat předchozí obvody, abychom nemuseli tak často brát do ruky pájku. Jenomže brzy zjistíme, že je to ve skutečnosti ještě větší práce a že jsme si příliš nepomohli. Vrátíme se tedy k úmorné dřině vytváření nových obvodů, ale myšlenka na ulehčení práce nám nepřestane vrtat hlavou a po chvíli nás možná napadne, že bychom mohli mít jeden obvod na všechno. Pak bychom už nikdy nemuseli nic dělat a mohli bychom žít pohodlný život na Bahamách.

Jenomže toto řešení má jeden zásadní problém a ten je, že nevíme, jaké úkoly musí naše síť plnit. Ten nedokážeme snadno překonat, vrátíme se tedy zpět k dělnictví matematiky a následující týdny poslušně tvoříme další a další obvody. Až jednou nám přijde poptávka na velmi velký obvod a v něm si všimneme, že je tvořen spoustou stejných malých obvodů. Vtom se zamyslíme, zda bychom byli schopni nahradit tyto opakující se obvody jedním, kterým bychom data prohnali vícekrát.

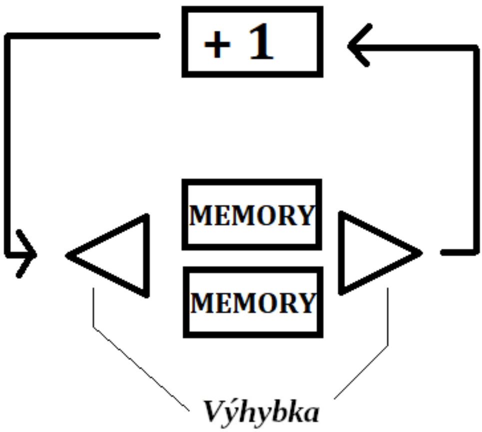
Chvíli nad tím přemýšlíme a v tu chvíli zazvoní naše digitální hodiny. Podíváme se na ně a v odrazu hodin uvidíme jiskřičky vítězství planoucí v našich očích. Nedělají digitální hodiny to samé? Tedy každou vteřinu přičtou jednu sekundu v nějakém vnitřním počítadle či COUNTERU? Ten jsme ale schopni sestrojit. Nyní se podívejme přesněji na to, co COUNTER dělá. COUNTER se skládá ze dvou částí, nějaké paměti, která uchovává současný stav, a logické funkce +1, která vždy, když je aktivována, přičte jedna (v případě hodin to bude třeba každá 1 sekunda). Viz obrázek 23.



Obrázek 23

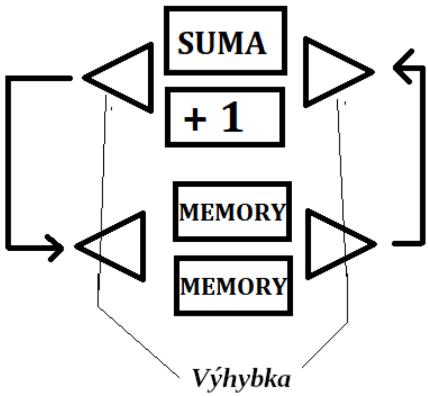
Se sladkým pocitem, že jsme na něco přišli, uzavřeme dílnu a vydáme se na kutě. Bohužel nám celá tato složitá problematika nedá spát, a tak zkusíme počítat ovečky, abychom se mohli ponořit do sladkého nevědomí. Počítáme 1, 2, 3, …, 2021, v tu chvíli přiběhne divoká kráva a my zapomeneme, kde jsme byli. Nezbývá nám tedy, než počítat znovu, ale protože jsme velmi líní, nechce se nám riskovat, že zase přiběhne kráva a my budeme muset počítat od začátku. Postavíme si tedy jednoduchý COUNTER, a přestože jsme neskutečně líní, rozhodneme se také počítat, kolik se za noc objeví kravek. Jenomže máme pouze jeden +1 obvod. Zamyslíme se, jak počítat dvě hodnoty na jednom počítadle.

Ale to přece není složité, stačí vždy vyměnit paměť, na které máme uložené číslo s počtem ovcí, za jinou, ve které je uložený počet krav – viz obrázek 24.



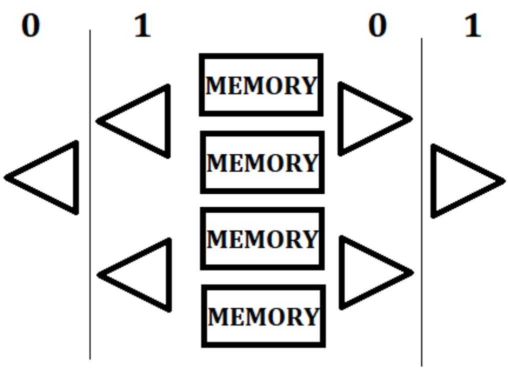
Obrázek 24

Pomocí našeho počítadla nás nepřekvapí ani příchod kravek. Ráno se probudíme a zjistíme, že na počítadle je 10 krav a 2021 ovcí. Ale kolik to je celkem? Nemohli bychom stejně, jako vyměňujeme paměti, vyměňovat i funkce (viz obrázek 25)? Nemohli bychom místo +1 dát třeba sumu? Rychle se vrhneme na předělání a všimneme si, že suma potřebuje dva vstupy. To ale můžeme snadno vyřešit přidáním ještě jedné cesty pro vstupy funkcí.



Obrázek 25

Velmi rychle si všimneme, že pokud jsme schopni uložit pouze dvě čísla, tak nějaké z nich musíme přepsat, abychom mohli uložit počet všech zvířat. To ale nechceme, potřebujeme tedy rozšířit paměť. Přidáme tedy další dvě paměti, zase propojené výhybkou. Ty dva paměťové bloky můžeme zas propojit výhybkou. Tedy v jakémsi výhybkovém stromu bude mít každá paměť unikátní cestu. Pokud na první výhybce půjdeme doleva, tak už nemůžeme skončit na dvou polích, které jsou nejvíce napravo – viz obrázek 26.



Obrázek 26

Pravo a levo můžeme nahradit zápisem v jedničkách a nulách, tedy cesty budou ve formátu XX (dva bity). Stejným způsobem můžeme zdvojnásobovat počet jednotlivých pamětí do nekonečna, jenom nesmíme zapomenout, že i unikátní cesta se bude prodlužovat.

Něco podobného dokážeme i s funkcemi, můžeme je takto rozdělit výhybkami a přiřadit unikátní cesty funkcím.

Počítač

Nyní jsme celkem spokojeni, ale stále musíme všechno dělat manuálně. Pokud chceme sečíst nějaká dvě čísla, musíme si sami přehodit výhybky a nastavit správné funkce. Nejhorší na tom je, že u toho pořád musíme být, nemůžeme si odskočit něco spočítat, protože pořád musíme něco měnit. Naštěstí máme mladší sourozence a ti, i když se to nezdá, zvládnou plnit jednoduché pokyny, i když neumí řešit nic složitějšího. To je super. Můžeme jim na lísteček napsat, co mají dělat. Například

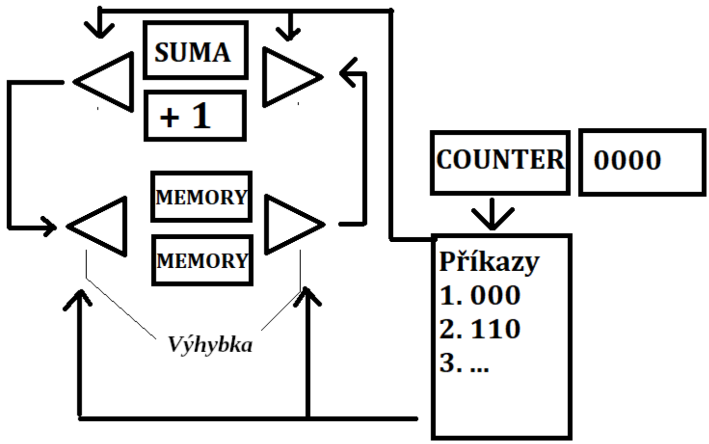
1. Přehodit výhybku 5
2. Přehodit výhybku 1
3. Pustit funkci
4. Přehodit …

Problém s levnou námezdní silou, jejíž odměnou je lízátko či malá sladkost, je malá duchapřítomnost. Brzy tak zjistíme, že buď sourozenec dávno odešel a nebo něco zkazil. V mém případě založil odbory a požadoval lízátka dvě, to je nepřípustné vydírání. Bohužel jsem nemohl odejít do ciziny, a tak jsem se rozhodl mého bratra nahradit strojem.

Zkusíme se zamyslet, jak stroji dát informace, co udělat. Co tedy potřebuje vědět? Musí vědět, odkud vzít vstupy, jakou funkci použít a kam data uložit. Informaci tedy můžeme zapsat nějakým následujícím způsobem. VEM DATA Z 0001 a VEM DATA Z 0000 POUŽIJ FUNKCI 10 ULOŽ NA 1100. Něco takového náš obvod stále nepochopí, protože jemu musíme dát informaci pouze v nulách a jedničkách. Slova jako VEM DATA tak musíme nahradit pozičně. Tedy vyhradíme, že první čtveřice čísel ovlivňuje výhybky pro první data, stejně tak druhou čtveřici vyhradíme pro výběr druhých dat, následující dvojici vyhradíme pro funkci, kterou používáme, a poslední čtveřice bude říkat, kam data uložíme. Zde si můžeme všimnout, že náš obvod může uložit maximálně 16 čísel a mít maximálně čtyři funkce s maximálně dvěma vstupy. To ale můžeme kdykoliv změnit.

Nyní stačí naše příkazy napsat do nějaké sekundární paměti a nechat jí obvod postupně projíždět. Výsledek můžete vidět na obrázku 27.

Po kvalitně provedené práci si zasloužíme lízátko, které jsme tak chytře na bratrovi ušetřili. Nyní je sice smutný, ale alespoň nebude tlustý. Jak tak lízáme, zjistíme, že náš obvod má stále zásadní problém. Při psaní příkazů se strašně



Obrázek 27

nadřeme. Pokud totiž nějakou sekvenci příkazů chceme provést vícekrát, tak ji musíme napsat vícekrát.

Nyní nás napadne, zda bychom nemohli i pomocí příkazů ovlivňovat, jak jsou ony samotné prováděny. Mohli bychom mít tedy příkaz, který řekne, VRAŤ SE NA PŘÍKAZ 2. To v konečném důsledku není až tak těžké, stačí nám upravit hodnotu, která počítá, odkud právě bereme příkaz. Jelikož jsme nadšeni, nazveme si tuto operaci LOOP.

Po chvilce zkoumání zjistíme, že by se nám občas hodilo v LOOPu nepokračovat. Řešením by bylo tento příkaz přeskočit. Tedy potřebujeme vymyslet jak. LOOP nám umožňuje skočit i dopředu. To ale není příliš dobré řešení, protože skočíme vždy, i když nechceme. Tedy potřebujeme získat LOOP s podmínkou. Prvně zavedeme operaci IF. Ta dostane cestu k nějaké buňce paměti, a pokud je hodnota té buňky pravda, bude pokračovat dalším příkazem, v opačném případě další příkaz přeskočí. Jejich spojením tak snadno získáme LOOP s podmínkou.

Ten se bude hodit, protože pomocí něho můžeme získat i funkce. Ale stále nejsme s naším počítačem spokojeni. Základní problém je, že celý kód musíme psát v jedničkách a nulách. Hodilo by se nám to vše převést do zápisu, ve kterém můžeme snadno číst.

Návrh jednoduchého programovacího jazyka

Pokud se vrátíme zpět v myšlenkovém toku, velmi brzy narazíme na to, že mladšímu bratrovi jsme dávali příkazy v jednoduchých větách. Nemuselo by tedy být těžké sestavit nějaký program, který převáděl naše příkazy do jazyka našeho počítače.

Co od našeho programovacího jazyka budeme potřebovat

- Definovat proměnné
- Definovat pole

Definovat proměnné je velmi snadné. Našemu programu, který bude překládat náš kód pro počítač, bude stačit, aby pro jednu neznámou sdílel tu samou a stejnou cestu a aby nedovolil tuto cestu používat nikomu jinému, podstatné je, abychom přidali počítači způsob, jak definovat proměnnou s nějakou hodnotou.

Definovat pole také není těžké. Můžeme začít s tím, že si vytvoříme paměť, ve které budeme mít pouze pole. První pole tedy zapíšeme úplně nahoru a musíme mu přiřadit nějakou jednu neměnnou velikost (počet polí, které jsou za ním), další pole přiřadíme hned za něj a tak dále. Pak snadno najdeme prvek nějakého pole. Stačí nám znát jeho pořadí v poli a začátek daného pole.

Závěr

Podařilo se nám získat počítač, který umožňuje velmi mnoho. Můžeme využívat programovacího jazyka, který zná pole a proměnné.

Komentář redakce

Mgr.^{MM} Vojtěch Gaďurek dále zkoušel navrhnout i implementaci funkcí, narazil na problém s ukládáním místa, kam se pak vrátit, což jeho LOOP v aktuální podobě neumožňuje. O trochu těžší je pak umožnit funkcím volat samy sebe, na to Mgr.^{MM} Vojtěch Gaďurek navrhuje použít pole s návratovými pozicemi.

Co bude dál?

Jak jste právě viděli, Mgr.^{MM} Vojtěch Gaďurek toho vymyslel spoustu, ovšem i tak nám toho k funkčnímu počítači ještě hromada chybí. Funkční počítač je naším společným cílem, budeme se tedy těšit na jakékoliv příspěvky k tomuto tématu. Níže najdete pro inspiraci nějaké problémy, kterým se můžete věnovat, avšak rozhodně se jich nemusíte držet. Budeme moc rádi, pokud přijdete s vlastním nápadem!

Jaké jsou naše návrhy, co dál? Pokud vás baví stavět v Logisimu, máte šanci se zde uplatnit. Návrhu Mgr.^{MM} Vojtěcha Gaďurka totiž zatím úplně chybí implementace.

Problém 1: *Postavte jednoduchý počítač nebo některou z komponent, které dosud nemáme. Můžete se inspirovat návrhem Mgr.^{MM} Vojtěcha Gaďurka, nějak si jej upravit či si vymyslet vlastní.*

Je možné, že vám bude v počítači něco chybět. Budeme rádi, když napíšete, co byste chtěli přidat, a ještě raději, pokud vymyslíte jak, či dokonce svůj návrh implementujete v Logisimu.

Problém 2: *Chybí vám v návrhu počítače něco? Co a proč? Jak byste to vyřešili? Umíte své řešení implementovat?*

Nakonec možná při přemýšlení a implementaci zjistíte, že byste v některých ohledech postupovali úplně jinak, než Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Vojtěch Gaďurek navrhuje. Cest k cíli vede mnoho, můžete tedy navrhnout alternativní řešení.

Problém 3: *Šlo by to i jinak?*

Nejraději samozřejmě budeme, pokud své řešení sepíšete formou krátkého článku. Za nejlepší článek můžete vyhrát dort a to se vyplatí! Nebojte se ovšem poslat ani samotné nápady a Logisimové implementace.

Víc hlav víc ví!

Takový počítač, to už je vážně složitá věc. Chtěli bychom tedy připomenout, že při řešení můžete spolupracovat[8]. K tomuto účelu můžete využít e-mailovou konferenci `hradla@mam.mff.cuni.cz`, pomocí které můžete komunikovat se všemi ostatními řešiteli tématka i s autory.

Reálná čísla

Vzpomínáte si na problém, jak reprezentovat celá čísla, kladná i záporná? Vraceli jsme se k němu několikrát a stále bylo co vymýšlet. To ale není všechno. Jak už někteří z vás naznačili, občas by se nám hodila i čísla „necelá“.

Problém 4: *Jak reprezentovat ve dvojkové soustavě reálná čísla? Použijte pevný počet bitů.*

Mechanická hradla

Minule jsme vás pobídli k zamyšlení nad tím, jak postavit mechanická hradla.

Zadání:
Postavte mechanická hradla či složitější hradlové sítě. Jako řešení můžete odevzdat i fotky nebo videa, vhodné je doplnit je nákresem a popisem funkce. Oceníme originální nápady i hezké zpracování, pokud se někde inspirujete, nezapomeňte uvést zdroj.

Tento problém je stále otevřený, těšíme se na vaše řešení. Pro inspiraci otiskujeme hezký nápad od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Václava Tichého. Na našem YouTube kanálu můžete zhlédnout, jak dominová hradla fungovala v akci[9].

> Pro svoji reprezentaci logických hradel jsem si vybral domino. Inspiroval jsem se videem, na které byl odkaz v zadání, ale upravil jsem jejich reprezentaci – ve videu byla používána pro reprezentaci 1 i 0 spadlá kostka domina. V mé reprezentaci je konečná stojící kostka domina reprezentací 0 a spadlá kostka reprezentuje 1. Díky tomu nastává problém s reprezentací hradla

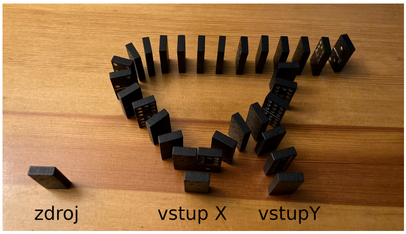
[8] Článek může samozřejmě mít více autorů.

[9] `https://youtu.be/Mgg3k8pyKfk`.

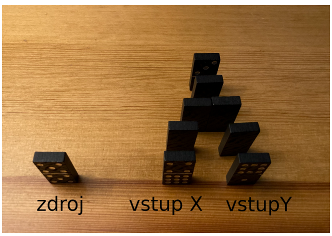
NOT, jelikož výsledek nemůže být spadlá kostka domina, pokud na začátku zůstaly všechny stát. Tento problém jsem vyřešil přidáním jedné kostky domina do každého obvodu, která se vždy shodí (pokud reprezentujeme například hradlo AND, můžeme kostku ignorovat), kostka reprezentuje jakýsi zdroj. Na všech hradlech kromě NOT zůstane zdroj nevyužitý.

- NOT: Využitím zdroje můžeme vytvořit hradlo NOT. Pokud je vstup $X = 1$, přeruší se signál zdroje a kostka zůstane stát.
- AND: Vstup X přeruší svůj signál, který by jinak nastavil výstup na 1. Vstup Y přerušuje přerušení signálu ze vstupu X, takže se na výstupu objeví 1.
- OR: Jednoduché spojení dvou vstupů, stačí aby jeden z nich byl 1 a výsledek bude 1.
- XOR: Hradlo XOR můžeme poskládat i pouze s předchozích hradel. S dominem se nám ale naskytuje mnohem jednodušší cesta, a to taková, že pouze k OR přidáme dráhu, po které musejí oba signály projít v opačném směru, takže když půjdou oba, zastaví se, a na výstupu zůstane 0.

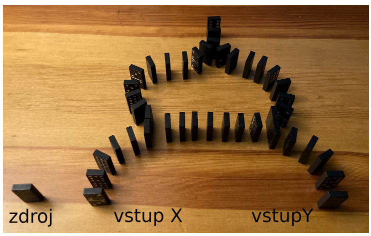
NOT



AND



OR



XOR

Obrázek 28: Hradla z domina podle Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Václava Tichého

Bohužel jsem neměl k dispozici dostatek dominových kostek na sestavení složitějších obvodů. Kdybychom však poskládali a správně načasovali tato hradla do sítí, které jsme vytvořili již dříve, fungovaly by správně (ale byly by pouze na jedno použití, byly by pomalé a také bychom spotřebovali neuvěřitelné množství dominových kostek).

V předchozích dílech jste viděli

Na závěr připomeňme, které ze starších úloh a problémů stále můžete řešit.

Ve 3. čísle jsme se poprvé setkali s pamětí a hodinami. Mimo jiné jsme zadali následující dvě úlohy týkající se takzvaného „Déčka“. Při stavbě obvodů v Logisimu jej nyní můžete používat, i pokud jste danou úlohu nevyřešili. Pokud vás však stále láká zamyslet se, jak funguje, máte možnost. Podrobnosti najdete v čísle se zadáním[10].

Úloha 1 (27.3) [2b]: *Postavte D latch. Nezapomeňte popsat vstupy a napsat, jak jste k výsledku došli.*

Úloha 4 (27.3) [2b]: *Postavte D obvod, jež na výstup propustí aktuální hodnotu vstupu ve chvíli, kdy se řídící vstup změní z 0 na 1. Jinak je na výstupu poslední nastavená hodnota.*

Stále se také můžete věnovat úlohám ze 4. čísla, kde jsme vylepšovali kalkulačku[11].

Úloha 2 (27.4) [3b]: *Postavte hradlovou síť pro násobení 4bitových čísel pomocí Boothova algoritmu.*

Úloha 3 (27.4) [3b]: *Postavte hradlovou síť, která dostane dvě 4bitová čísla x, y a vrátí výsledek x^y. Jak si poradíte s množstvím bitů potřebných pro výstup?*

Úloha 4 (27.4) [4b]: *Přidejte do kalkulačky ukládání výsledku a jeho následné použití pro další výpočty. Je třeba dát si pozor na počet bitů výsledku? Pokud ano, jak?*

Problém 5 (27.4): *Naše kalkulačka zatím umí počítat pouze příklady s jednou operací a nejvýše dvěma hodnotami. Co kdybychom ji chtěli naučit počítat i složitější příklady, třeba $(3*9)-(2+3)$? Vymyslete způsob, jak by kalkulačka mohla takové příklady počítat, a popište, jakým způsobem je do ní vložit[12]. Kalkulačka by měla podporovat alespoň sčítání a odčítání, včetně počítání se závorkami.*

Úloha 6 (27.4) [4b]: *Předělejte klávesnici tak, aby se na ní daly zadávat vstupy v desítkové soustavě pro alespoň 8bitová čísla.*

[10] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-3.pdf#page=42`

[11] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-4.pdf#page=23`

[12] Předpokládejte, že uživatel bude umět zadat vstup ve formátu, se kterým bude vaše kalkulačka pracovat. Nemusíte stavět klávesnici, může to být složité.

Úplně na závěr bychom chtěli připomenout článek Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Michala Pavlíčka otištěný ve 3. čísle[13] a s ním související problém.

Problém 6 (27.3): *V článku autor navrhl a prakticky ověřil, že z tranzistorů lze postavit hradla dle uvedených schémat. Zanedbal ovšem některé vlastnosti reálných tranzistorů, které vedou k tomu, že složitější hradla by pravděpodobně nefungovala, pokud bychom je sestavili přesně podle těchto schémat. Dokážete vymyslet, kde je problém a jak by se snadno dal opravit? Případně dokážete schémata sami postavit a změřit, jak se chovají, když se z nich pokusíme postavit složitější hradlo?*

Pavel, Káťa a Honza; `pa-ka@mail.ledoian.cz`
e-mailová konference: `hradla@mam.mff.cuni.cz`
e-mail pro zasílání řešení: `mam@matfyz.cz`

Výsledková listina 5. čísla

				Témata				
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**t1**	**t2**	**t4**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ K. Grinerová	4	218,9	16,0	27,5		43,5	202,4
2.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ M. Fof	3	182,9				0	124,2
3.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ D. Čtvrtečka	1	93,2		30,2		30,2	93,2
4.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ J. Kalvoda	4	224,6			14,0	14,0	90,2
5.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ J. Engler	2	88,2				0	88,2
6.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ V. Janáček	4	175,8				0	78,9
7.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ V. Tichý	2	78,4		12,0	19,2	31,2	78,4
8.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ V. Gaďurek	4	70,0				0	70,0
9.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ T. Flídr	3	102,9				0	59,0
10.–11.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ K. Pernicová	4	90,3				0	48,5
	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ K. Petrlíková	3	48,5				0	48,5
12.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ H. Nguyen	4	47,0				0	47,0
13.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ O. Piroutek	3	89,4		17,0		17,0	44,0
14.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ J. Knillová	2	75,8		17,5		17,5	39,9
15.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ E. Beranová	1	39,0				0	39,0
16.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ J. Kvapil	3	54,5				0	38,8
17.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ V. Jůzková	4	45,9				0	37,4
18.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ M. Pavlíček	3	37,2				0	37,2
19.–20.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ D. Farhan	4	37,0				0	37,0
	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ D. Perout	4	69,0				0	37,0

[13] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-3.pdf#page=56`

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata t1	t2	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
21.	Bc.$^{\text{MM}}$ D. Skýpala	3	33,1				0	33,1
22.	Mgr.$^{\text{MM}}$ L. Veškrna	3	63,1				0	31,3
23.	Bc.$^{\text{MM}}$ P. Hladík	3	43,0				0	30,0
24.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Boček	2	59,1				0	29,9
25.	Bc.$^{\text{MM}}$ V. Polášková	2	29,5				0	29,5
26.	Bc.$^{\text{MM}}$ Š. Březovják	4	25,8				0	25,8
27.	Mgr.$^{\text{MM}}$ A. Cmielová	2	50,6				0	25,0
28.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Valtrová	2	23,0				0	23,0
29.	K. Šedová	2	19,0				0	19,0
30.	Mgr.$^{\text{MM}}$ A. Opl	3	39,3				0	18,8
31.	O. Chwiedziuk	4	18,3				0	18,3
32.	A. Húšťava	3	17,7				0	17,7
33.–34.	M. Štencel	4	16,0				0	16,0
	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Turinská	4	19,0				0	16,0
35.	L. Kačenková	2	14,0				0	14,0
36.–37.	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Gonzor	4	58,4				0	13,0
	O. Skácel	2	13,0				0	13,0
38.	J. Křimská		9,0				0	9,0
39.	P. Khartskhaev	4	6,0				0	6,0
40.	P. Jendele		4,3				0	4,3
41.	P. Herman	2	1,7				0	1,7
42.	A. Čechová	1	0,6				0	0,6

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina obsahuje všechny body za řešení zaslaná do 1. deadlinu předchozí série. Body za řešení zaslaná později obsahovat nemusí.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M