STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVII
Číslo 4

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

vítáme vás v novém roce a přejeme, aby byl veselý, zdravý, šťastný, úspěšný a cokoliv dalšího si jen budete přát. Sněhu zima bohužel opět moc nepřinesla, tak až ho někde potkáte, užijte si ho a pozdravujte ho od nás. No a až se správně promrzlí vrátíte, pohodlně si sedněte s hrnkem něčeho teplého v ruce a pusťte se do řešení!

V topologii si zavedeme grafy, ale jiné, než znáte ze střední školy; ty naše budou mít vrcholy, hrany a stěny. Tyto grafy se budeme snažit kreslit na plochy, o kterých jsme se bavili dříve. Z optiky ukážeme možná řešení dříve zadaných problémů na příspěvcích, které jste nám poslali a za které moc děkujeme. Přidáme nová zadání týkající se barev.

V tématu olympiádní matematiky připomeneme nedořešené otevřené problémy z minulých čísel. Při stavbě počítače předneseme jednu obsáhlou otázku k zamyšlení – co kdybychom neměli elektřinu? Jak reprezentovat záporná čísla již mnoho z vás zjistilo, proto tento problém uzavřeme, stejně jako řešení počítadla. U čeho naopak ještě zůstaneme je stavba kalkulačky, ukážeme několik vašich návrhů, za které též děkujeme, a přidáme návodné úlohy pro další vylepšení.

Ať je rok 2021 ve všem lepší než ten předchozí!

Vaši organizátoři

Obsah

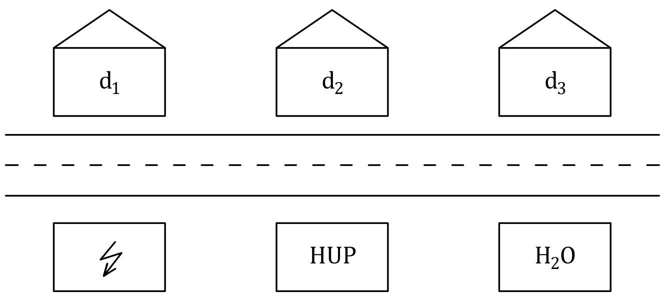
Zadání a řešení témat

1. deadline: 16. 2. 2021 | 2. deadline: 9. 3. 2021

Téma 1 – Topologie

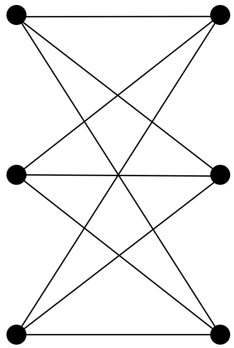
Díl 4: Eulerova formule a kreslení grafů

Úloha 1 [2b]: *V ulici stojí tři nově postavené domy, které je potřeba připojit k elektřině, vodě a plynu. Přípojky elektřiny, vody a plynu jsou na druhé straně ulice. Každý dům musí být připojen ke každé přípojce vlastním vedením, které se nemůže větvit. Domy stojí na tvrdé skále, do které není možné vedení zahloubit. Vzhledem k silným bouřkám a hurikánům v dané oblasti není možné vést vedení vzduchem. Vedení je možné vést pouze v* 10 *cm vysoké vrstvě štěrku, který je nasypaný na hrubé skále. Jelikož mají trubky všech vedení vnější průměr* 10 *cm, nemůžou se ve štěrku křížit, protože jinak by jedna z trubek čouhala ven, kde by ji mohla přejíždět auta a pošlapávat chodci, čímž by se zničila. Je možné za těchto okolností připojit všechny domy ke všem přípojkám? Svou odpověď (pokud možno formálně) zdůvodni.*

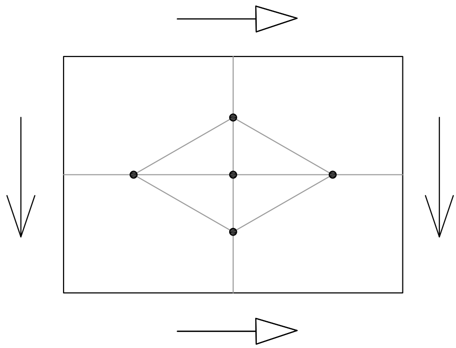


Obrázek 1: Ilustrace k Úloze 1.

Abychom se o úlohách tohoto typu mohli bavit formálněji, tak si zadefinujeme *graf* $G = (V,E)$ jako množinu bodů $V(G)$, kterým budeme říkat *vrcholy*, a jako množinu spojení $E(G)$ propojujících dva vrcholy. Těmto spojením budeme říkat *hrany*. V definici grafu je důležité jen to, které vrcholy jsou spojené kterými hranami. Graf z Úlohy 1 má šest vrcholů, které si můžeme označit jako $\{d_1, d_2, d_3, e, p, v\}$. Hrany tohoto grafu jsou dvojice $(d_i, e), (d_i, v), (d_i, p)$ pro všechna $i \in \{1,2,3\}$. Jedná se o *úplný bipartitní graf* s dvěma partitami velikosti 3, značený jako $K_{3,3}$, který si můžete prohlédnou na obrázku 2. Graf $K_{a,b}$ má obecně $a + b$ vrcholů rozdělených na dvě disjunktní množiny A a B takové, že $|A| = a$ a $|B| = b$. V $K_{a,b}$ jsou spojené hranou všechny dvojice vrcholů obsahující jeden vrchol z A a druhý z B. V našem $K_{3,3}$ tvoří jednu množinu domy a druhou přípojky.



Obrázek 2: Bipartitní graf $K_{3,3}$.



Obrázek 3: K_5 nakreslený na toru.

Následující problém se ještě nikomu nepovedlo definitivně vyřešit.

Problém 2 (otevřený): *Kolik křížení je potřeba při nakreslení $K_{a,b}$ do roviny?*[1]

Dalším důležitým typem grafu je *úplný graf K_n* na n vrcholech. V takovém grafu je každý vrchol spojený hranou se všemi ostatními.

V Úloze 1 jsme se však potýkali s fyzickou realizací grafu. Typicky se snažíme grafy nakreslit v rovině. Takové nakreslení si můžeme představit tak, že každý vrchol grafu dostane unikátní dvojici souřadnic v rovině a mezi vrcholy spojenými hranou vede souvislá křivka. Řekneme, že nakreslení grafu je *rovinné*, pokud se křivky nekříží.

Grafy však můžeme kreslit i na zajímavější plochy, třeba torus. Aby se nám to lépe dařilo, můžeme využít reprezentaci ploch pomocí orientovaných zipů, kterou jsme zavedli v minulém díle, viz obrázek 3.

Při kreslení grafů na plochy je důležité, aby se hrana kresleného grafu objevila na druhé části zipu ve stejné vzdálenosti od jeho začátku (tj. od začátku šipky), jako na první části.[2]

Úloha 3 [2b]: *Nakresli $K_{3,3}$ na torus bez křížení hran.*

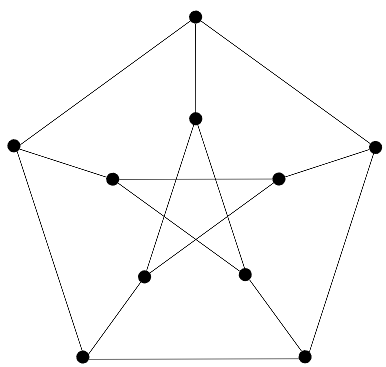
Ve druhém díle jsme definovali projektivní rovinu jako sféru s dírou, na kterou našijeme Möbiovu pásku a ve třetím díle jsme si ukázali, že je ekvivalentní křížítku (neboli sféře s křížítkem), které vznikne slepením dvou polovin kružnice v nesouhlasném směru. Z toho dostáváme dva způsoby, jak reprezentovat projektivní rovinu. Prvním způsobem je rovina s kruhovým křížítkem. Kruhové křížítko je kruh, který má tu vlastnost, že když přijde hrana k jeho okraji, tak vyleze z jeho okraje na druhé straně, jako by byla v daném místě přerušena. Kruhovým křížítkem tedy může vést libovolné množství hran, aniž by se protínaly. Druhý

[1] Více informací viz například `https://en.wikipedia.org/wiki/Tur%C3%A1n%27s_brick_factory_problem`

[2] Přesně vzato je hlavně důležité, aby hrany z druhé části zipu vycházely ve stejném pořadí vzhledem k začátku šipky, v jakém vcházejí do první části. Dodržovat vzdálenosti je ale nejjednodušší způsob, jak to zajistit.

způsob reprezentace je kruhová plocha, ze které když se snažíme vylézt v jednom místě, tak se dostaneme znovu dovnitř na místě přesně opačném. Jednou možností, jak nahlédnout ekvivalenci těchto dvou přístupů, je provést kruhovou inverzi. Kruhová inverze je spojité zobrazení, které pro pevně zvolený kruh (pro nás to bude kruhové křížidlo anebo kruhová plocha) zobrazí vnitřek kruhu ven a vnějšek dovnitř. Přesnou definici kruhové inverze a ukázkové příklady si můžete projít na stránkách našeho spřáteleného semináře.[3] Pro nás bude důležitá vlastnost, že čím blíže středu kružnice se nějaký bod nalézal, tím dále od středu bude jeho obraz. Speciálně, vnější body daleko od kruhu se zobrazí blízko středu a body zvenku blízko okraji kruhu se zobrazí dovnitř blízko okraji. Ještě je dobré si uvědomit, že naše reprezentace ploch pomocí mnohoúhelníků a zipů nám umožňuje o nich uvažovat jako o kusu roviny, jejíž okraje mají speciální vlastnosti, takže při provádění kruhové inverze můžeme „předstírat“, že se jedná o zcela normální rovinu. Nakreslení grafu na projektivní rovinu v jedné reprezentaci můžeme pomocí kruhové inverze snadno převést na nakreslení v druhé reprezentaci.

Úloha 4 [3+2b]: *Nakresli Petersenův graf (jak vypadá si můžeš prohlédnout na obrázku 4) na projektivní rovinu bez křížení hran. Dva body navíc za nakreslení v obou možných reprezentacích projektivní roviny.*



Obrázek 4: Petersenův graf z úlohy 4 nakreslený v rovině.

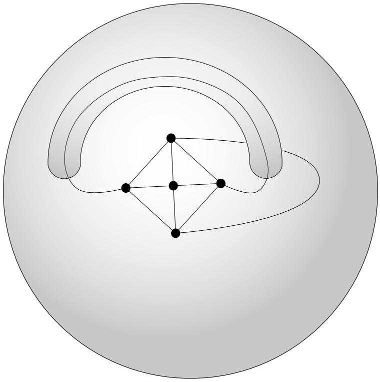
Úloha 5 [2b]: *Nakresli K_6 na Kleinovu lahev bez křížení hran.*

Můžeme si všimnout, že některé grafy není možné nakreslit do roviny bez křížení hran, ale na jiné plochy už to jde. Proč to tak je? Souvisí to s klasifikací ploch z minulého dílu. Tam jsme si ukázali, že všechny plochy jsou vytvořené ze sféry přidáváním uší a křížítek.[4] Pro každou plochu definujeme její *rod* g jako dvakrát počet uch plus počet křížítek. Například sféra má rod 0, torus 2, projektivní rovina 1 a Kleinova lahev 2.

[3] `https://prase.cz/library/KruhovaInverzePT/KruhovaInverzePT.pdf`

[4] Toto je silnější verze klasifikační věty z úlohy 6.

Proč tedy hraje rod plochy roli v tom, zda na ní můžeme rovinně nakreslit nějaký graf? Speciálně, když máme graf nakreslený na sféře s jedním křížením, můžeme sféře přidat ucho a kolizní hranu vést po povrchu nově přidaného ucha, čímž křížení zabráníme (na obrázku 5 si toto můžete prohlédnout pro K_5). Podobně to můžeme udělat s křížítkem.



Obrázek 5: K_5 nakreslený na sféře s uchem bez křížení hran.

Dokonce se dá přesně kvantifikovat, jak moc nám rod plochy pomůže. Na to potřebujeme pár definic. Mějme nějaké rovinné nakreslení grafu G na nějakou plochu. *Stěna* nakreslení je souvislý kus plochy ohraničený hranami grafu. Označme počet stěn rovinného nakreslení grafu G jako $F(G)$. *Eulerova formule* říká, že pro každý souvislý graf G (tj. existuje cesta po hranách mezi libovolnými dvěma vrcholy) rovinně nakreslený na plochu rodu g platí:

$$|E(G)| - |V(G)| - |F(G)| + 2 = g$$

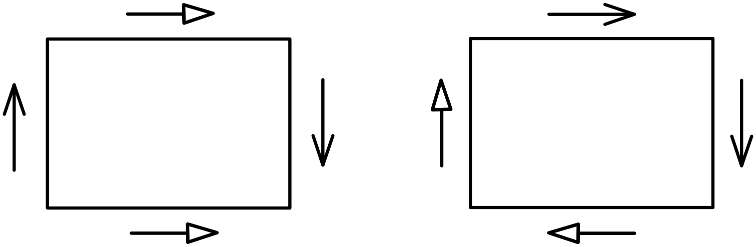
A jak konkrétně tedy rod plochy pomáhá? Pánové Ringle a Youngs ukázali, že úplný graf s $\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24g}}{2} \rfloor$ vrcholy lze nakreslit bez křížení na libovolnou plochu rodu g různou od Kleinovy lahve. Z této věty tedy například plyne, že K_4 je možné nakreslit na sféru. Kvůli výjimce pro Kleinovu lahev nám tvrzení neříká, že by například K_7 bylo možné nakreslit na Kleinovu lahev. A skutečně, je možné dokázat, že K_7 není možné nakreslit bez křížení na Kleinovu lahev.

Úloha 6 [2b]: *Uveď, které největší úplné grafy je možné nakreslit na projektivní rovinu, torus a povrch nafouknuté číslice* 8 *podle výše uvedené věty.*

Další důležitou vlastností ploch je *orientovatelnost*. *Orientovatelné plochy* vznikají ze sféry přidáváním uší. *Neorientovatelná* je naopak každá plocha obsahující alespoň jedno křížítko. V řeči orientovaných zipů to odpovídá tomu, že mnohoúhelník obsahuje dvě opačně orientované šipky stejného typu. Můžeme pozorovat, že každá jednoduchá uzavřená smyčka má okolí homeomorfní plášti válce nebo Möbiově pásce, obojí bez okrajů. Pokud je plocha orientovatelná, pak je okolí každé jednoduché uzavřené smyčky homeomorfní plášti válce bez okrajů, neboli neexistuje smyčka, jejíž okolí by bylo homeomorfní Möbiově pásce bez okrajů. Rozmysli si, že na neorientovatelných plochách není možné definovat, co je vlevo a vpravo.

Nyní už můžeme říci, že dvě plochy jsou homeomorfní, pokud mají stejný rod a orientovatelnost. Společně s výše uvedeným to platí díky klasifikační větě z minulého dílu.

Úloha 7 [3b]: *Ukaž, že spojováním zipů z obrázku 6 vznikne stejná plocha. Která plocha to je? Jakou má orientovatelnost?*



Obrázek 6: Dvě různé reprezentace plochy z Úlohy 7.

Vzorová řešení 2. dílu

Problém 1

Zadání:
Vezmi nějakou varietu. Co je jejím okrajem? A co je okrajem tohoto okraje? Jak dlouho můžeme hledat okraje okrajů? Čím naše hledání skončí? Nemáme prostředky na formální důkaz, stačí, když si to vyzkoušíš na pár příkladech a uvedeš svou hypotézu.

Řešení:
Začneme pár příklady. Vezměme si jednotkový interval. Jeho okrajem jsou body 0 a 1. Body mají dimenzi 0 a nemají žádný okraj, protože „po nich nemůžeme nikam jít“. Když si vezmeme kruh, tak jeho okrajem je kružnice. Vydáme-li se po kružnici libovolným směrem, tak po ní můžeme běhat donekonečna a nic nás nezastaví. Kružnice tedy též nemá okraj. Co třeba koule? Okrajem koule je kulová plocha neboli sféra. Ze zkušenosti s životem na povrchu Země víme dobře, že okolo ní můžeme kroužit v kterémkoli směru a pokud máme soukromý tryskáč a domluvu se všemi řízeními letového provozu a počasím, nic nás nezastaví.

Jak nám příklady napovídají, skutečně platí, že okraj okraje nemá okraj, respektive jeho okraj je prázdná množina.[5] Tento fakt je velmi důležitý při defino-

[5] Toto ale platí, pouze pokud je původní objekt dostatečně celistvý, například to platí pro libovolnou varietu.

vání homologie, kohomologie a homologických grup. Tyto pojmy jsou důležitou součástí algebraické topologie.

Velmi podobné tvrzení platí v teorii vektorového počtu, který se často používá ve fyzice. Speciálními příklady tvrzení, že okraj okraje je prázdný jsou například následující dvě tvrzení. První říká, že divergence z rotace skalární funkce je nula. To si zjednodušeně můžeme přestavit tak, že cokoli, co se točí, má nulovou rychlost vzhledem ke středu. Druhé tvrzení říká, že rotace gradientu vektorového pole je nula. Tato tvrzení si můžeme představit tak, že když se něco pohybuje od středu (nebo ke středu), má nulový rotační pohyb. Fundamentální věta vektorového počtu pak říká, že každé hladké, dvakrát diferencovatelné vektorové pole (což v zásadě znamená, že se každý bod chová v jistém smyslu podobně, jako jeho okolí) můžeme vyjádřit právě pomocí divergentní a rotační složky. Tyto skutečnosti, které jsme spíše naznačili než vysvětlili, jsou ve fyzice velmi důležité a je zajímavé, že s nimi má topologie takovou souvislost.

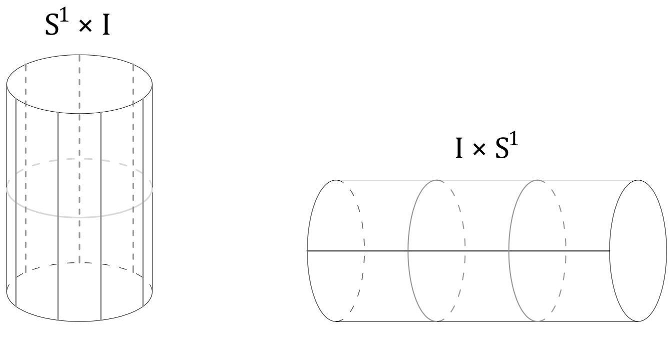
Úloha 2

Zadání:
Co je výsledkem $S^1 \times I$? Je výsledek homeomorfní $I \times S^1$?

Řešení:
Kartézským součinem $S^1 \times I$ vznikne plášť válce stojícího na jedné z podstav (obrázek 7a). Vezmeme totiž kružnici a každému jejímu bodu přidáme ve svislém směru úsečku.

Kartézským součinem $I \times S^1$ je plášť válce ležícího na boku (obrázek 7b), který vznikne tak, že každému bodu úsečky přidáme kružnici ve směru kolmém k dané úsečce.

Jelikož se výsledek liší jen otočením, získáváme, že $S^1 \times I = I \times S^1$.



(a) **(b)**

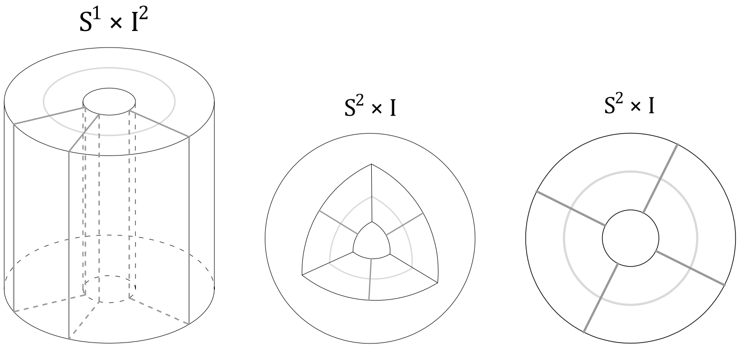
Obrázek 7: Řešení Úlohy 2.

Úloha 3

Zadání:
Jaký je výsledek $S^1 \times I^2$ a $S^2 \times I$? Jsou tyto objekty homeomorfní nějakým již zmíněným objektům?

Řešení:
$S^1 \times I^2$ si můžeme představit jako tlustostěnný válec (obrázek 8a) a je homeomorfní vyplněnému toru, protože čtverec I^2 je homeomorfní B^2.

Uvědomíme si, že S^2 je okraj třídimenzionální koule B^3, kterému se říká kulová plocha, sféra nebo sférická plocha. Můžeme si ji představit jako povrch míče. $S^2 \times I$ je tedy homeomorfní kouli s kulovou dírou uprostřed (obrázky 8b a 8c). Něco jako kdybyste vzali Zemi a odstranili tekuté jádro. S trochou představivosti si můžete ověřit, že když přidáme každému bodu sféry úsečku kolmou k povrchu, tak tyto úsečky vytvoří ono „ztluštění“.



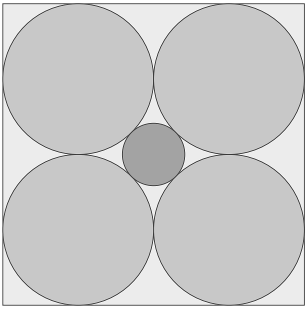
(a) **(b)** **(c)**

Obrázek 8: Řešení Úlohy 3.

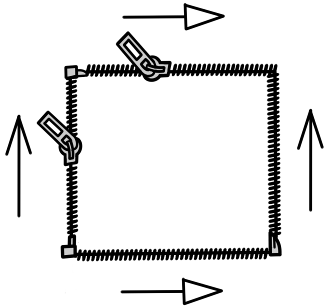
Úloha 4

Zadání:
Představ si jednotkový čtverec I^2, který vyplníme čtyřmi kruhy o průměru $1/2$. Doprostřed mezi kruhy pak přidáme pátý kruh tak, že se dotýká ostatních kruhů, jako na obrázku 9. Jaký je průměr vepsaného kruhu?

Řešení:
Pomocí Pythagorovy věty spočítáme, že úhlopříčka čtverce je $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Naskládejme tyto čtverce vedle sebe a nad sebe tak, aby zabíraly celou plochu. Můžeme si všimnout, že do místa, kde se potkávají rohy čtverců, můžeme vepsat další kopie menšího kruhu. Úhlopříčku čtverce pak zabírají dva průměry větších kruhů $D = 1/2$ a dva průměry menšího kruhu d. Dostáváme $\sqrt{2} = 2D + 2d = 1 + 2d$, z čehož plyne $d = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.



Obrázek 9: K zadání Úlohy 4.



Obrázek 10: Protilehlé strany obdélníka lepené v souhlasném směru.

Úloha 5

Zadání:
V zadání předchozí úlohy uvaž I^3 a další vyšší dimenze místo I^2. V I^3 budeme mít místo čtyř kruhů osm koulí, mezi které opět můžeme vepsat menší kouli, a podobně pro vyšší dimenze. Dokážeš zobecnit vztah pro velikost průměru vepsané koule? Zamysli se nad tím, jak se mění poměr velikosti vepsané koule vůči krabici v závislosti na dimenzi.

Řešení:
Když se přesuneme do vyšší dimenze, tak potřebujeme nejdříve zjistit, jak dlouhá bude tělesová úhlopříčka krychle v n dimenzích. Nejdříve ji spočítáme v krychli. Spočítáme ji jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek $\sqrt{2}$ a 1. Z Pythagorovy věty dostáváme, že velikost úhlopříčky je

$$\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Z toho můžeme zkusit odvodit, že v n-té dimenzi bude délka tělesové úhlopříčky $\sqrt{n}$. To můžeme dokázat například použitím matematické indukce. Už víme, že tvrzení platí v dimenzích 2 a 3. Nyní zbývá ukázat, že to platí i v dimenzi n za předpokladu, že tvrzení platí v dimenzi $n - 1$.

Stačí si všimnout, že krychle v n dimenzích vznikne tak, že vezmeme dvě krychle dimenze $n - 1$ a jednotkovými hranami kolmými k oběma krychlím spojíme odpovídající vrcholy krychlí. Tělesovou úhlopříčku pak získáme jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délky 1 a $\sqrt{n-1}$ (což je podle našeho indukčního předpokladu tělesová úhlopříčky krychle o dimenzi $n-1$). Podle Pythagorovy věty dostáváme délku tělesové úhlopříčky jako

$$\sqrt{\sqrt{n-1}^2 + 1^2} = \sqrt{n},$$

což jsme chtěli ukázat.

Představme si nyní n-dimenzionální koule o průměru $D = 1/2$ vepsané do jednotkové krychle v dimenzi n a menší kouli vyplňující prostor uvnitř krychle, podobně jako v předchozí úloze. Můžeme si všimnout, že z tělesové úhlopříčky krychle zabírají dvě koule o poloměru $1/2$ opět délku 1 a zbytek tvoří dvojnásobek průměru menší vepsané koule. Máme tedy

$$\sqrt{n} = 2D + 2d = 1 + 2d$$

a tedy

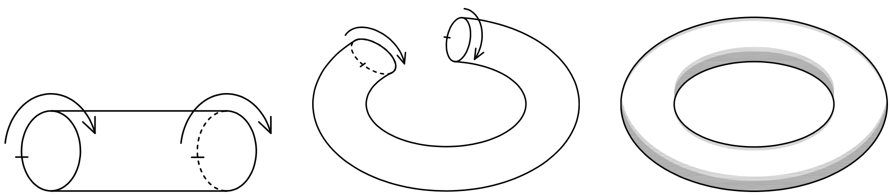
$$d = \frac{\sqrt{n} - 1}{2}.$$

Tento výraz roste s rostoucím n. Pro $n > 9$ dokonce dostáváme, že $d > 1$, neboli průměr koule vepsané uprostřed krychle je větší než délka strany krychle!

Úloha 6

Zadání:
Co vznikne, když slepíme ve stejném směru obě dvojice protilehlých stran obdélníka, viz obrázek 10?

Řešení:
Spojením hran označených bílými šipkami dostaneme plášť válce, na jehož okrajích jsou souhlasně orientované zipy. Jejich spojením útvar uzavřeme a dostáváme torus. Proces si můžete prohlédnout na obrázku 11.



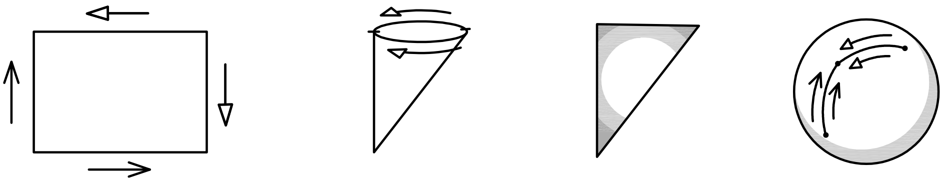
(a) **(b)** **(c)**

Obrázek 11: Obrázek k řešení Úlohy 6.

Úloha 7

Zadání:
Zipovat k sobě můžeme i strany, které nejsou protilehlé. Jaký je výsledek slepování z obrázku 13a?

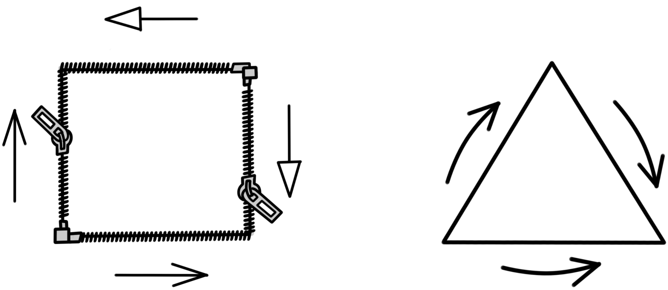
Řešení:
Proces můžeš sledovat na obrázku 12. Spojením prvního páru zipů získáváme tvar připomínající papírový kornout. Pokračováním lepení dostaneme útvar, který asi nejvíce připomíná piroh (který ale kuchař zapomněl před uzavřením naplnit). Tento útvar je homeomorfní sféře.



Obrázek 12: K řešení Úlohy 7.

Úloha 8

Zadání:
Slepovat v dané orientaci můžeme i více než dvě hrany, avšak tady už naše analogie se zipy začíná pokulhávat. Zkus si představit objekt z obrázku 13b, ve kterém se postupně ztotožňují všechny tři strany trojúhelníka. Svou představu co nejnázorněji popiš pomocí obrázku a případně doplňujícího textu. Nemyslíme si, že by se představa, jak daný objekt vypadá, dala popsat dostatečně jasně jen slovy, ale pokud to přeci jen zvládneš, body tě neminou. Pokud místo obrázků dodáš pěknou animaci, dostaneš plusové body.



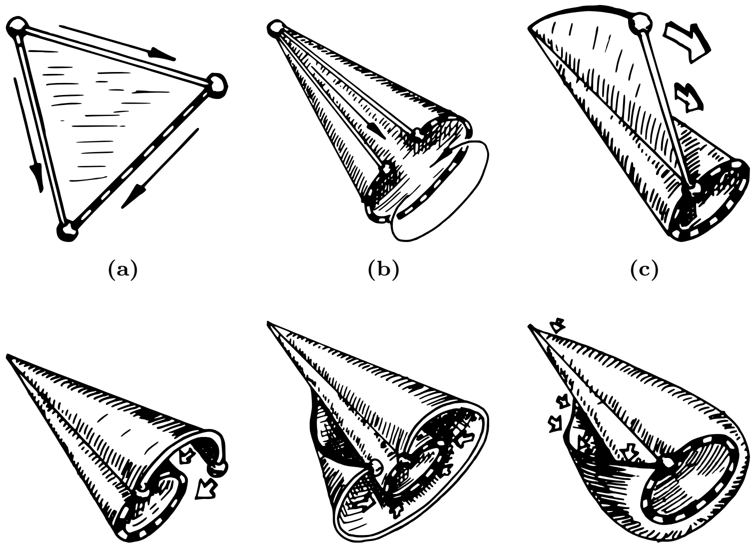
(a) Ztotožňovat můžeme i sousední strany.

(b) Ztotožňovat můžeme i více než dvě strany.

Obrázek 13: Obrázky k Úlohám 7 a 8.

Řešení:
Objekt z obrázku je poměrně známá topologická hříčka, které se říká anglicky *dunce hat*. Začátek je snadný. Ztotožníme dvě strany trojúhelníka a dostaneme tvar připomínající kornout (obrázek 14b). Poté nás ale ještě čeká ztotožnění obvodu kornoutu s podélným švem, díky kterému jsme kornout získali.

Jeden ze způsobů, jak si to představit, pochází z knížky [1]. Vezmeme šev a dostaneme ho do stejné roviny jako okraj kornoutu. To se dá udělat například tak, že „roztáhneme“ špičku kornoutu, čímž získáme takovou trojúhelníkovou plachtu, jako na obrázku 14c. Okraj této plachty obtočíme okolo okraje kornoutu a ztotožníme jej s ním, jak je ukázáno na obrázcích 14d, 14e a 14f. Výsledný



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Obrázek 14: Řešení Úlohy 8.

obrázek 14f ještě není přímo dunce hat, protože mu přebývají dvě hrany - první je v místě, kde se plachta potkává s kornoutem a druhá je tvořená volnou hranou plachty. První hrany se můžeme zbavit tak, že dovolíme, aby se od sebe odlepily dvě strany plachty a prostor mezi nimi byl přístupný z kornoutu. Volnou hranu plachty přitom považujeme za šev, který dvě vrstvy plachty spojuje, takže vzduch zevnitř kornoutu se touto hranou nemůže dostat ven. Pro lepší představivost můžeme ještě fouknout do dunce hat, aby se patřičně vyboulil (viz obrázek 15b a 15d).

Druhý způsob je vzít kornout a jeho okraj postupně spojovat se švem, přičemž se kornout přirozeně ohýbá a dostaneme útvar z obrázku 15c, kde bod uprostřed placaté osmičky je vrchol původního kornoutu.

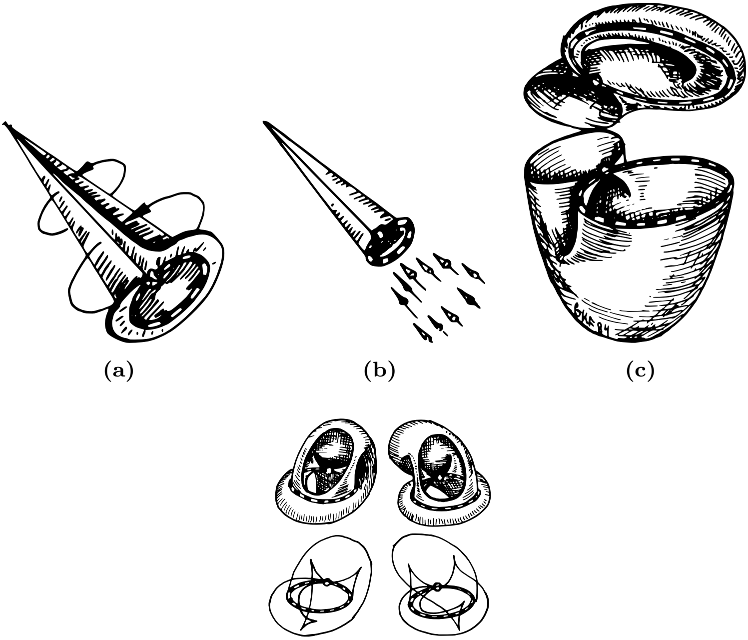
Dunce hat je nejmenší příklad mnohostěnu, který je kontrahovatelný, ale není kolapsibilní. Tyto pojmy nyní nebudeme definovat a vysvětlovat, jen prozradíme, že tyto vlastnosti mají spojitost se slavnou Poinkarého domněnkou.

Dunce hat je dokonce možné ušít za použití zipů.[6]

Zdroje

[1] FRANCIS, George K. *A Topological Picturebook* New York: Springer-Verlag, 2007. ISBN 978-0-387-68120-7. DOI 10.1007/978-0-387-68120-7.

[6] Ukázka je například na videu `https://youtu.be/34j4CppfRTA`



(a) (b) (c)

(d)

Obrázek 15: Řešení Úlohy 8.

Anet; aneta.pokorna@matfyz.cz
Viktor; vskoupy@gmail.com
e-mailová konference: topologie@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz

Téma 2 – Optika

Díl 4: Barvičky

V minulém díle jsme si představili základy teorie šíření světla v prostoru. Zatím jsme si vystačili s představou homogenního světla, která se chová vždy stejně. Tato představa je nicméně v přímém rozporu s každodenní zkušeností – svět kolem nás, který hraje všemi barvami, by nám homogenní světlo zprostředkovat nedokázalo. Světlo není homogenní. Ve skutečnosti se jedná o elektromagnetické vlnění, které je kvantováno na fotony s vlnovou délkou z intervalu 390 až 760 nm. Naše oči dokážou jednotlivým vlnovým délkám z tohoto intervalu přiřadit různé barvy. Elektromagnetické vlnění s kratší vlnovou délkou nazýváme ultrafialové, s delší vlnovou délkou potom infračervené. Ani jedno už naše oči nevidí, a proto se mu zde nebudeme věnovat.

Jak přesně vlastně naši oči fungují? Podobně jako jakákoliv jiná optická soustava, jejímž cílem je vytvořit na určitém místě ostrý obraz. Skutečně podivuhodný proces se odehrává až na sítnici, v místě, kam je v případě zdravého oka obraz okolí promítán. Nenachází se zde nějaké univerzální receptory na různé vlnové délky, jak by se možná dalo očekávat, ale pouze dva základní typy: tyčinky reagující na světlo a tmu a čípky, které jsou citlivé na nějaký konkrétní velmi úzký rozsah vlnových délek. Člověk má celkem tři druhy čípků citlivé primárně na modrofialovou, zelenou a oranžovou barvu. Výsledný obraz okolního světa se skládá až v mozku na základě elektrochemických signálů dodaných tyčinkami a čípky. Tomu se říká *trichromatické vidění*.

Podobně „úsporně“ pracují i všechny přístroje a techniky, které pro práci s barvami vyvinul v průběhu staletí člověk. V tiskárně nemáme jeden toner pro každou s několika milionů barev, které je schopna vytisknout na papír, a ani středověcí malíři se kvůli každému požadovanému odstínu nevydávali hledat nový pigment. Tajemství spočívá podobně jako v případě oka v kombinování několika málo (obvykle 3 až 4) základních barev, díky kterému jsme schopni získat prakticky libovolnou myslitelnou barvu.

Svět barev je fascinující a stále velmi málo prozkoumaný. Teprve nedávno jsme se dozvěděli o tom, že existují lidé, kteří mají čtvrtý druh čípků a díky tomu mohou vidět až stokrát více barev než ostatní lidé disponující pouze trichromatickým viděním. S rozvíjející se zobrazovací technikou se objevují stále nové a nové způsoby, jak při maximálním zužitkování dostupných technologií doručit uživatelům co nejvěrnější barevný zážitek. V tomto čísle jsme si pro vás připravili experimenty, díky kterým si budete moci některé zajímavé vlastnosti světla vyzkoušet sami doslova na vlastní oči.

Úloha 1 [3b]: *Fotony s různou vlnovou délkou se v oblasti viditelného světla neliší jen svou barvou, ale i dalšími vlastnostmi. Například při lomu na rozhraní dvou optických prostředí se některé vlnové délky lámou více než jiné. Jedná se o přímou nebo nepřímou úměru? Svůj názor podpořte teorií nebo experimentem.*

Úloha 2 [3b]: *Zkuste si vyrobit „káču“ ve tvaru kruhu, na které se bude pravidelně střídat několik výsečí různých barev (dvou, tří, celého spektra). Následně káču roztočte a pozorujte, jaká barva vznikne. Jaká hranice nejspíš rozhoduje o tom, že při nějaké úhlové rychlosti jsou ještě vidět jednotlivé barvy a při o něco vyšší už splynou v jednu?*

Úloha 3 [3b]: *Přiveďte k varu vodu v konvici a v zatemněné místnosti umístěte za konvici zdroj světla tak, abyste ho viděli přes páru. Měli byste zpozorovat slabé duhové kroužky okolo zdroje. Takové kroužky můžeme někdy pozorovat i kolem Slunce a Měsíce. Proč a jak kroužky vznikají?*

Úloha 4 [5b]: *Proč je obloha modrá? Zjistit to můžete i pomocí experimentu. Naplňte akvárium (nebo jinou velkou nádobu) vodou s troškou rozmíchaného mléka* *(pokus nemusí vyjít hned napoprvé – zkuste změnit množství mléka a více ho rozmíchat). Pokud ve tmě akvárium z jedné strany prosvítíte silným zdrojem světla, tak byste měli zpozorovat zabarvení vody s mlékem do modra. Z čelního pohledu bude akvárium zabarveno do červena. Tomuto jevu se říká Rayleighův rozptyl. Popište, jak se vám pokus povedl a proč je obloha modrá.*

Problém 5: *Zkuste si mísení barev s barevnými papíry a barevnými fóliemi. Položte fólie na papíry a pozorujte, jak se mění barvy. Experimentujte s různými překrytími a kombinacemi fólií na různých barvách papíru. Své pokusy zdokumentujte a popište.*

Problém 6: *Zkuste na bílé pozadí svítit červeným a zeleným světlem. Experimentujte s mícháním barev. Použít můžete také modré světlo. Své pokusy zdokumentujte a popište.*

Problém 7: *Vyfoťte pixely na obrazovce a experimentálně ověřte, jaké kombinace dávají dohromady jednotlivé barvy. Ideální je na to USB mikroskop, experiment lze ale provést i s kvalitním foťákem v makro režimu, nebo obyčejným telefonem a lupou.*

Úloha 8 [2b]: *Internetový hoax říká, že člověk zvládne rozlišit pouze 256 odstínů zelené. Jednoduchým experimentem vyvraťte.*

Vzorová řešení 1. série

Úloha 1

Zadání:
Sestavte spektrometr podle návodu a pošlete nám jeho fotku. Napište nějaké tipy, ať můžeme zlepšit návod.

Řešení:
Největším problémem, se kterým jste se setkali, bylo světlo prosvítající skrz tenký papír, na kterém byl návod vytištěn. Někteří z vás použili více vrstev papíru, lepších výsledků jste dosáhli použitím černé čtvrtky. Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Daniel Čtvrtečka vyřešil tento problém jednou provždy, když si navrhl a na 3D tiskárně vytiskl vlastní spektrometr – můžete ho vidět na obrázku 16. S ním potom vyřešil většinu úloh. Dalšími problémy, se kterými jste se setkávali, byly obtíže s odloupnutím reflexní vrstvy z CD/DVD a obtíže s vytvořením dostatečně tenké štěrbiny. To vyřešil Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Daniel Čtvrtečka použitím žiletkových břitů.

Obrázek 16: Spektrometr Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Daniela Čtvrtečky

Úloha 2

Zadání:
Jak se změní obraz spekter ve spektrometru, když nalepíme kus DVDčka otočený o 90° oproti tomu, jak je popsáno v návodu?

Řešení:
Většina z vás zjistila, že když nalepíte kus DVD o 90° otočený oproti návodu, nerozvine se vám spektrum do linie, ale soustředí se do jednoho bodu.

Další úlohy jsme dostali vyřešené od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Dana Čtvrtečky a Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Ondřeje Piroutka.

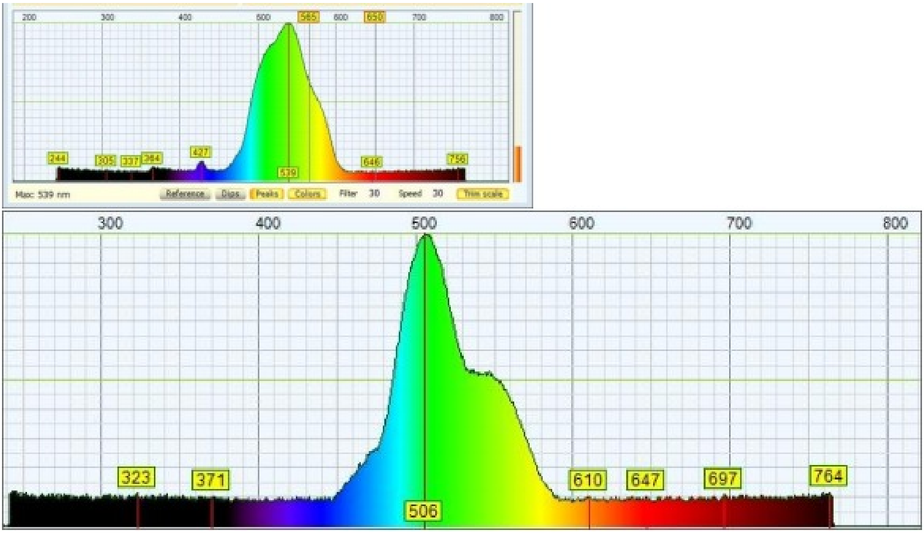
Úloha 4

Zadání:
Rozložte světlo žárovky a bíle rozsvíceného monitoru. Popište, jaké rozdíly vidíte.

Řešení:
V úloze 4 popsal Ondřej, že u monitoru převažuje modrá část spektra, kdežto u studené LED převažovala modrá, ale i zelená část. Daniel porovnával obrazovku mobilu s halogenovou žárovkou, spektra vidíte na obrázku 17. Popsal u obrazovky užší maximum a posun ke kratším vlnovým délkám.

Úloha 5

Zadání:
Pozorujte několik světelných zdrojů, které byste označili jako teplé, a několik takových, které byste označili jako studené. Které vlnové délky převládají v kterých rozkladech? Rozepište se o tom, které zdroje jste použili a jak spektra vypadala.



Obrázek 17: Srovnání spektra obrazovky mobilu a halogenové žárovky

Řešení:
Pro porovnání různých zdrojů světla vybral Ondřej žárovku, zapálenou svíčku, studenou žárovku a sluneční světlo, Daniel potom LED 2700K[7], LED 5700K a svíčku. Oba pozorovali převahu delších vlnových délek u teplých zdrojů světla a převahu kratších u studených zdrojů. Daniel u LED pozoroval spojité spektrum okolo zelené a žluté barvy a potom peak v modré oblasti. Je to dáno konstrukcí LED, s modrou barvou byl dlouho problém, za modrou LED byla dokonce uděleno Nobelova cena za fyziku 2017[8]. Daniel poté ještě naměřil spektrum obrazovky počítače v normálním stavu a v nočním režimu. Pozoroval posun celého spektra směrem k červené – rozdíl znázorňuje obrázek 18.

Úloha 7

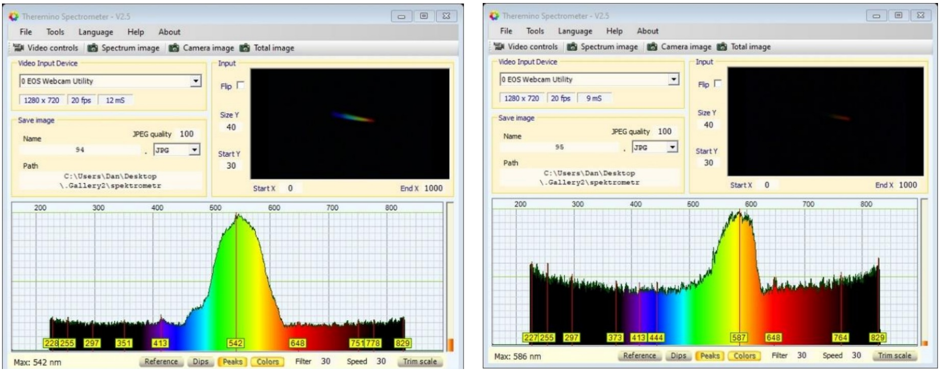
Zadání:
Pozorujte přes spektrometr jasné sluneční záření. Měli byste spatřit celé spektrum a v něm nějaké černé proužky. Co je to za proužky? Přiložte fotku a zkuste identifikovat jejich vlnové délky (lze to i bez kalibrace popsané v Problému 11).

Řešení:
V úloze 7 se povedlo Danielovi pozorovat a identifikovat Fraunhoferovy čáry[9], které, jak správně popsal, vznikají absorpcí určitých vlnových délek ve fotosféře

[7] Toto značení říká, že dioda by měla svítit stejným spektrem jako absolutně černé těleso s teplotou 2700 Kelvinů.

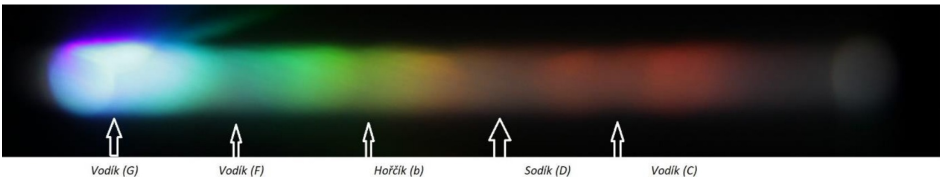
[8] `https://www.fzu.cz/aktuality/pribeh-modre-ledky`

[9] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Fraunhoferovy_%C4%8D%C3%A1ry`



Obrázek 18: Srovnání spektra obrazovky v normálním a nočním režimu

Slunce. Čáry na obrázku 19 jsou G – 431 nm, F – 486 nm, b – 518 + 517 nm, D – 588 + 589 nm, C – 656 nm. Vlnová délka je uvedena přibližně, vzhledem k neostrosti čar.



Obrázek 19: Fraunhoferovy čáry identifikované ve slunečním spektru

Úloha 8

Zadání:
Máte-li doma barevné fólie, zkoumejte je. Popište, které vlnové délky v nich chybí a které jsou naopak výrazné, když je prosvítíte slunečním světlem?

Řešení:
Při zkoumání barevných fólií bylo experimentálně zjištěno, že fólie pohlcuje vlnové délky jiné než své barvy, svou barvu a její okolí potom propouští.

Problém 11

Zadání:
Připojte spektrometr k vaší webkameře nebo fotoaparátu. Pomocí laserového ukazovátka nebo barevné LED ho nakalibrujte. Zdokumentujte průběh kalibrace a sepište krátký textík, ve kterém zmíníte všechny tipy a triky, na které jste přišli, abychom ho mohli otisknout a ostatní to měli jednodušší.

Zdroj	Vlnová délka [nm]
Červená LED	623 – 630
Modrá LED	440 – 430
Žlutá LED	574 – 587
Svíčka	579
Zelená obrazovka	484
Modrá obrazovka	453

Tabulka 1: Tabulka naměřených hodnot vlnových délek pro různé zdroje

Řešení:
Daniel poté nakalibroval svůj spektrometr pomocí laserového modulu Arduina (650 nm) a zelené LEDky (565 nm). Se zkalibrovaným spektrometrem zkoumal množství dalších světelných zdrojů, v tabulce 1 můžete vidět jím naměřené hodnoty. U LED je uveden peak od-do, u ostatních zdrojů maximum.

Faník; frantisek.zajic@matfyz.cz
e-mailová konference: optika@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz

Téma 3 – Olympiádní matematika

Díl 4: Stále otevřené problémy

Vítáme vás u dalšího čísla tématka o olympiádní matematice. Ani tentokrát se nepustíme do žádného nového tématu, naopak bychom vám rádi připomněli otevřené problémy, které jsme zadali v prvním čísle. Budeme moc rádi, pokud se nad danou problematikou zamyslíte a napíšete nám o ní článek. O tom, jak napsat článek, se můžete dočíst na našich stránkách. Pokud si chcete osvěžit paměť ohledně olympiádní geometrie, můžete se vrátit k prvnímu číslu našeho tématka, kde jsme se právě geometrii věnovali.

Problém 2 (27.1): *Jedním z nejběžnějších úkolů je dokázat, že nějaké dvě úsečky jsou na sebe kolmé (popřípadě, že nějaký trojúhelník je pravoúhlý). Jakými všemi způsoby můžeme dokázat, že se někde nachází pravý úhel? Nebojte se být kreativní a rozepsat se.*

Problém 5 (27.1): *Zkuste co nejlépe popsat, co je to tětivový čtyřúhelník, jaké vlastnosti má a s jakými dalšími větami nebo tvrzeními ho můžeme spojit. Čerpat můžete z libovolných zdrojů, použijte ale svá slova a nezapomeňte zdroj uvést.*

Jane; pallova.jane@gmail.com
e-mailová konference: olymp@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz

Téma 4 – Počítač z nul a jedniček

Navrhli jste a postavili mnoho zajímavých vylepšení kalkulaček, od zavedení záporných čísel přes další operace a funkce až po zadávání a vypisování čísel. Pokud by se všechny vaše nápady daly dohromady, kalkulačky už by se téměř nelišily od kalkulaček, které si můžete koupit v obchodě. V tomto dílu vaše nápady shrnujeme a budeme se snažit naučit kalkulačky složitější výpočty. Dostaneme tak chytřejší kalkulačky, které se později mohou začít podobat počítačům.

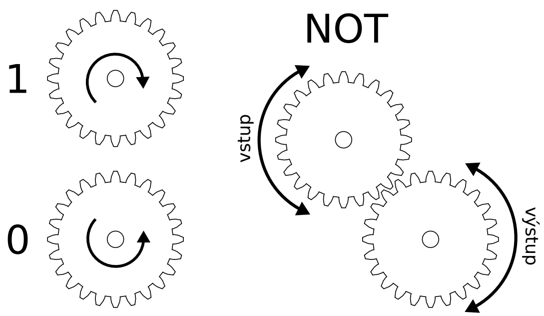
Nejprve si ale představme „apokalyptický“ svět, ve kterém není elektřina, a pojďme postavit kalkulačku v něm…

Postavme si hradla! Zn. mechanická

V minulém dílu jsme vydali článek[10] od Bc.[MM] Michala Pavlíčka, který se věnoval tomu, jak fungují hradla uvnitř. Co kdyby však byly podmínky jiné? Co kdybychom neměli tranzistory ani elektřinu?

Někteří z vás možná si možná pamatují počítač z kartonu z jarního soustředění 2019 v Domašově.[11] Co dalšího by se dalo ke stavbě mechanických hradel využít? Podívejte se pro inspiraci na video `http://y2u.be/kQeDnFUNW-Q` a zkuste si něco takového taky!

Problém 1: *Postavte mechanická hradla či složitější hradlové sítě. Jako řešení můžete odevzdat i fotky nebo videa, vhodné je doplnit je nákresem a popisem funkce. Oceníme originální nápady i hezké zpracování, pokud se někde inspirujete, nezapomeňte uvést zdroj. Příklad mechanického hradla NOT můžete vidět na obrázku 20.*



Obrázek 20: Hradlo NOT z ozubených koleček

[10] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-3.pdf#page=56`
[11] `https://mam.mff.cuni.cz/soustredeni/40/fotogalerie/518/17044`

Záporná čísla naposledy – dvojkový doplněk

Již od začátku tématka nás provází otázka, jak reprezentovat celá čísla, tedy kladná i záporná. Sešlo se nám mnoho různých nápadů, které jste si mohli přečíst v předchozích dílech. Nyní jsme se rozhodli problém uzavřít, neboť mnozí z vás již zjistili, jak se záporná čísla v dnešní době běžně reprezentují a proč.

K reprezentaci záporných čísel se využívá dvojkový doplněk.[12] Bc.MM Dominik Farhan nám ve svém řešení hezky popsal, jak funguje:

> Pro reprezentaci záporných čísel použijeme negaci, jak skvěle navrhuje Bc.MM Kristýna Petrlíková. A jak to uděláme? Využijeme dvojkového doplňku, což je vcelku chytrý způsob reprezentace čísel, který umožňuje, aby sčítání kladných čísel bylo implementováno stejně jako záporných. Umíme tedy odčítat pomocí sčítání! Nejvyšší bit čísla si necháme pro reprezentaci znaménka. Kladným číslům přiřadíme nejvyšší bit 0 (do této skupinky si ale zařadíme i číslo 0), záporné číslo pak poznáme dle 1 na pozici nejvyššího bitu. Nyní přichází ta asi nejhezčí část celé myšlenky, a to je výroba záporných čísel. Dělá se tak následujícím způsobem:
>
> 1. znegujeme číslo
> 2. přičteme k němu 1
>
> To nám vytvoří unikátní sérii bitů, která bude reprezentovat nějaké záporné číslo. Všimněme si pár věcí, které tato reprezentace nutně přináší. Máme jen jeden zápis pro 0 (některé jiné reprezentace svádí k zavádění záporné 0). Rozsah je asymetrický – záporných čísel je o 1 více než kladných. Musíme si dávat pozor na přetečení. Může se totiž snadno stát, že nám sčítání dvou čísel vrátí záporné číslo, protože jejich sečtení změní nejvyšší bit. Obdobný problém pak může nastat i při odčítání.

Bc.MM Václav Tichý doplnil pozorování, že čím je číslo větší, tím menší bude „skutečná“ hodnota čísla k němu opačnému ve dvojkovém doplňku.

Zkuste si napsat pár čísel ve dvojkovém doplňku. Není vám to povědomé? Jde o úplně to samé, co popisovali v minulém dílu[13] Mgr.MM Martin Boček a Doc.MM Jiří Kalvoda, jen vysvětlené z jiného úhlu pohledu. Mgr.MM Martin Boček vyjádřil obavu, že v této reprezentaci bude sčítání a odčítání složitější, než při použití samotného znaménkového bitu, nyní však vidíme, že opak je pravdou.

Kalkulačka

Od 2. dílu nám přišlo veliké množství různých kalkulaček. Některé byly prosté a elegantní, jiné se zase mohly pyšnit řadou vychytávek od jejich tvůrců. Kromě

[12] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Dvojkov%C3%BD_dopln%C4%9Bk`
[13] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-3.pdf#page=45`

úžasných kalkulaček nám také přišla spousta návrhů na jejich vylepšení zabývajících se jak rozšiřováním funkcí kalkulačky, tak i zlepšováním jejího uživatelského rozhraní. Někteří z vás se dokonce rozhodli své nápady převést do praxe a vylepšit tak své kalkulačky.[14]

Bc.[MM] Dominik Farhan se pokusil zlepšit násobení v kalkulačce. Šel na to s pomocí Boothova algoritmu, který s pomocí dvojkového doplňku funguje i pro záporná čísla.

Bc.[MM] Dominik Farhan, upraveno

Tento algoritmus pro násobení dvou čísel vymyslel Brit Andrew Donald Booth a skládá se principiálně z 5 kroků:

1. **Určení hodnot čísel A, S, P.** Každé z čísel bude mít $x_b + y_b + 1$ bitů, kde x_b a y_b označuje počet bitů v násobených číslech. Hodnoty A, S, P pak určíme následovně:
   - **A.** zaplníme nejvyšších x_b bitů číslem x a do zbylých y_b+1 umístíme nuly
   - **S.** zaplníme nejvyšších x_b bitů číslem $-x$ a do zbylých zapíšeme nuly
   - **P.** zaplníme nejvyšších x_b bitů nulami, dalších y_b bitů číslem y a poslední bit nastavíme na nulu
2. V závislosti na tom, jaké bity se nacházejí na dvou nejnižších pozicích čísla **P**, provedeme následující:
   - **01**, nalezneme hodnotu $P + A$ a přetečení budeme ignorovat.
   - **10**, nalezneme hodnotu $P + S$ a přetečení budeme ignorovat.
   - **11**, nebo **00**, pokračujeme na další krok, v němž P bude použitou hodnotou
3. Posuneme aritmeticky hodnotu získanou v kroku 2 o jeden řád doprava (viz níže) a umístíme P rovné této hodnotě.
4. Budeme opakovat kroky 2 a 3, dokud je nezopakujeme právě y_b-krát.
5. Vrátíme $x_b + y_b$ nejvyšších bitů čísla P, ty představují součin $x \cdot y$

Nyní bych doporučil každému čtenáři tohoto textu, aby si vzal tužku a papír a zkusil si alespoň jednou nějaká čísla pomocí algoritmu vynásobit. Může si tak ověřit, že celé věci rozumí.

Celý algoritmus může působit složitě, ale ve skutečnosti se v něm zas až tak moc neděje. Opakovaně užíváme operaci sčítání, kterou již umíme implementovat, stejně tak kontrolu několika bitů pomocí logických bran a následné větvení programu.[15]

[14] `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27-4-hradla/resitelske_kalkulacky.zip`

Novinkou je zde operace aritmetického posunutí vpravo. Ta dělá to, že zahodí nejmenší bit čísla, všechny bity původního čísla o 1 posune a na nejvyšší bit nového čísla umístí nejvyšší bit starého. Nejlépe je to asi chápat na příkladu. Posuňme si například číslo 55 o 1 místo aritmeticky doprava.

$$110111 \to 111011$$

Abychom mohli čísla aritmeticky posouvat, musíme znát jejich bitovou šířku. Výsledek posunu totiž nezáleží jen na hodnotě čísla, ale i na jeho reprezentaci – jestli je číslo doplněno zleva nějakými nulami či nikoliv. Výše jsme tedy měli 55 jako 6bitové číslo.

Úloha 2 [3b]: *Postavte hradlovou síť pro násobení 4bitových čísel s pomocí výše popsaného Boothova algoritmu.*

Hodně nápadů na vylepšení se točilo kolem nových operací pro naši kalkulačku. Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Magdaléna Turinská navrhuje operaci mocnění. U ní si také povšimla problému s množstvím bitů potřebným pro výstup. Těch může být opravdu hodně, už při násobení 4bitových čísel mohou být potřeba desítky bitů.

Úloha 3 [3b]: *Postavte hradlovou síť, která dostane dvě 4bitová čísla x, y a vrátí výsledek x^y. Jak si poradíte s množstvím bitů potřebných pro výstup?*

Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Jiřího Kalvodu napadly operace dělení a modulo, neboli zbytek po dělení. Obě operace se mu povedlo sestrojit v Logisimu[16].

Ještě chvíli zůstaneme uvnitř kalkulačky. Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Martin Fof navrhuje možnost ukládání si předešlého výsledku, aby se dal později použít ve výpočtu.

Další vylepšení by mohla být možnost dále počítat s výsledkem. Například tlačítko „ANS“, které by vložilo výstup do jednoho ze vstupů. Díky tomu bychom mohli počítat příklady s více členy.

Tímto nápadem se zabýval i Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Václav Tichý, který navíc podotýká, že výsledek pak již nemusí být pouze 8bitové číslo a bude potřeba to nějak řešit.

Úloha 4 [4b]: *Přidejte do kalkulačky ukládání výsledku a jeho následné použití pro další výpočty. Je třeba dát si pozor na počet bitů výsledku? Pokud ano, jak?*

Problém 5: *Naše kalkulačka zatím umí počítat pouze příklady s jednou operací a nejvýše dvěma hodnotami. Co kdybychom ji chtěli naučit počítat i složitější příklady, třeba $(3*9)-(2+3)$? Vymyslete způsob, jak by kalkulačka mohla takové příklady počítat, a popište, jakým způsobem je do ní vložit.*[17] *Kalkulačka by měla podporovat alespoň sčítání a odčítání, včetně počítání se závorkami.*

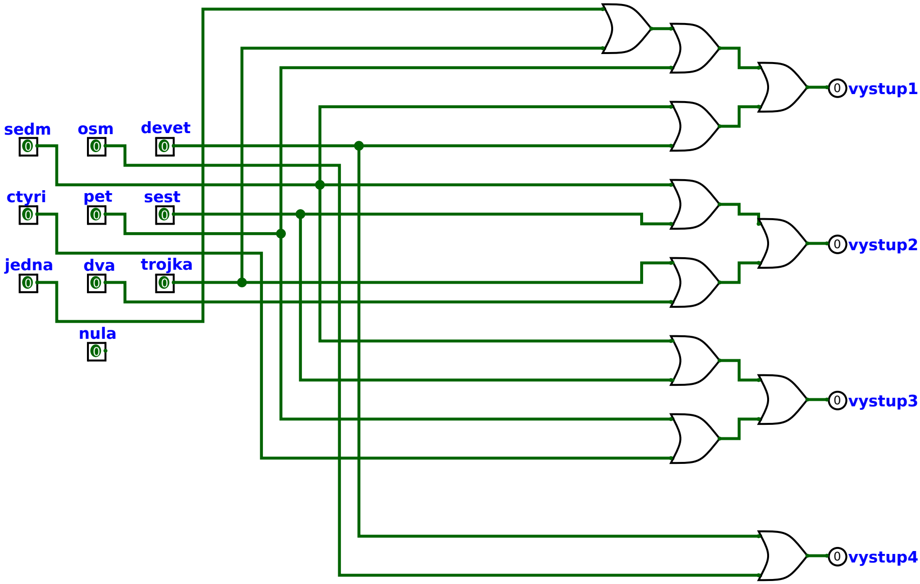
[15] Algoritmus je také hezky popsán na české Wikipedii: `https://cs.wikipedia.org/wiki/Booth%C5%AFv_algoritmus`

[16] `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27-4-hradla/JiriKalvoda.circ`

[17] Předpokládejte, že uživatel bude umět zadat vstup ve formátu, se kterým bude vaše kalkulačka pracovat. Nemusíte stavět klávesnici, může to být složité.

Někteří se také pokusili o vytvoření uživatelského rozhraní pro kalkulačku. Dr.MM Martinu Fofovi se podařilo zjednodušit uživateli zadávání čísel. Konkrétně navrhl a sestavil pro kalkulačku klávesnici, která převádí čísla z desítkové do dvojkové soustavy.

K vytvoření klávesnice nám stačí zapojit jednotlivá čísla na jim odpovídající výstupové bity.



Obrázek 21: Klávesnice podle Dr.MM Martina Fofa

Klávesnice je užitečným zjednodušením zadávání vstupů, ale má jeden nedostatek. V tomto provedení na ní jdou zadávat pouze čísla v rozmezí 0–9.

Úloha 6 [4b]: *Předělejte klávesnici tak, aby se na ní daly zadávat vstupy v desítkové soustavě pro alespoň 8bitová čísla.*

Nakonec Mgr.MM Jiří Kvapil se více podíval na výstup z kalkulačky. Nejprve si sestavil 7segmentový displej. Při jeho tvorbě si pomohl Karnaughovými mapami[18] pro lepší znázornění, které části displeje má rozsvěcovat. Následně se pokusil převést výsledky výpočtů z binární soustavy do desítkové. Jako inspirace mu posloužilo video o algoritmu double dabble[19] a převod si následně sestrojil.[20] Vy si ho ale vytvářet nemusíte, Logisim totiž nabízí jeho implementaci mezi hradly v záložce

[18] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Karnaughova_mapa`
[19] `https://www.youtube.com/watch?v=eXIfZ1yKF1A`
[20] `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27-4-hradla/JiriKvapil_BCD.circ`

BFH mega functions. To vám ale nebrání v tom, abyste se ho pokusili sestavit sami.

Sedmisegmentový displej

Ve druhém čísle jsme zadali úlohu, jejímž cílem bylo, abyste si zkusili postavit hradlovou síť pro rozsvěcení sedmisegmentového displeje. Navazující problém vybízel zkusit to na co nejméně hradel.

Zadání:
Postavte hradlovou síť, která dostane na vstupu jednu číslici (0 až 9) zakódovanou jako čtyřbitové číslo a na každém ze sedmi výstupů reprezentujících segmenty displeje vrátí jedničku, pokud má daný segment svítit.

Poskládejte síť z předchozí úlohy z co nejméně hradel NOT, AND a OR. Zvládnete to s méně hradly než ostatní řešitelé? S méně než organizátoři?

Na úvod vám můžeme prozradit, že naše řešení potřebovalo 31 hradel. V tabulce uvádíme všechny, kteří tento počet překonali a získávají tak 0,5 bodu navíc k základním třem bodům za úlohu. Gratulujeme!

Kromě toho jsme se rozhodli udělit ještě 0,5 bodu Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Kláře Grinerové za 2. místo a 2 body Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Martinu Fofovi za 1. místo a výrazné překonání našeho řešení.[21]

1.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Martin Fof	23 hradel
2.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Klára Grinerová	29 hradel
3-4.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Jiří Kvapil	30 hradel
3-4.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Jiří Kalvoda	30 hradel

Tabulka 2: Nejmenší počet hradel při stavbě sedmisegmentového displeje

Řešení:
Nejprve popišme přímočarý způsob, který však určitě spotřebuje mnohem víc než 30 hradel.

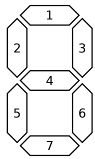
Pro každý segment displeje víme, ve kterých číslicích je rozsvícený, a pro každou čtveřici bitů na vstupu víme, kterou číslici vyjadřuje (pro čísla větší než 9 si řekneme, že žádná). Můžeme tedy vytvořit hradlovou síť složenou ze dvou částí. Vstupy první části budou zadané čtyři bity čísla. Tato část bude mít deset výstupů očíslovaných 0–9, na výstupu i bude 1, pokud je na vstupu číslo i. (Tomuto obvodu se říká 1 z n dekodér.) Ve druhé části pak rozsvítíme segment, když je na vstupu některá z číslic, která ho obsahuje. To můžeme udělat tak, že pomocí ORů spojíme výstupy první části odpovídající číslicím, ve kterých je daný segment rozsvícený.

Jupí, umíme rozsvítit displej! Jak to zlepšit?

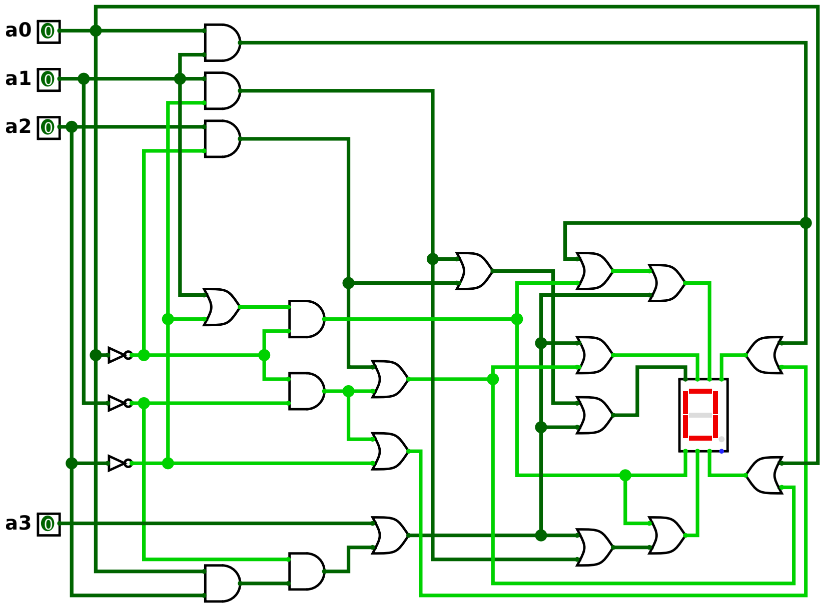
[21] Řešení Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Kláry Grinerové najdete na našem webu: `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27-4-hradla/KlaraGrinerova_displej.circ`

Nebudeme se dívat na konkrétní číslici na vstupu. Místo toho vymyslíme pro každý segment funkci čtyř proměnných, tedy bitů a_0 až a_3 čtyřbitového čísla a na vstupu. Například pravý dolní segment displeje pak můžeme rozsvítit pomocí funkce a_0 OR (NOT a_1) OR a_2. Pro ostatní segmenty postupujeme analogicky. Počet hradel pak můžeme ještě snížit tím, že pokud se některé části ve funkcích opakují, nebudeme je pokud možno stavět pokaždé znovu.

A jak tedy postupoval Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Fof při optimalizaci svého řešení?



Obrázek 22: Očíslování segmentů podle Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Fofa



Obrázek 23: Sedmisegmentový displej podle Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Martina Fofa

K tomuto obvodu jsem došel tak, že jsem si oddělil 4. bit, který bude 1 pouze u 8 a 9, což jsou dvě čísla, u kterých se musí rozsvítit skoro všechny diody. 4. bit by tedy mohl pouze rozsvítit celou devítku. Devítka by bez posledního bitu vypadala jako 1, proto by se poslední dioda nerozsvítila, ale naopak 8 by vypadala jako 0, a tudíž by se rozsvítila i poslední potřebná dioda. (Nakonec ale v obvodu 4. bit rozsvítí pouze číslo 5, a ne celé číslo 9, protože diodu 3 rozsvítí čísla 0 i 1).

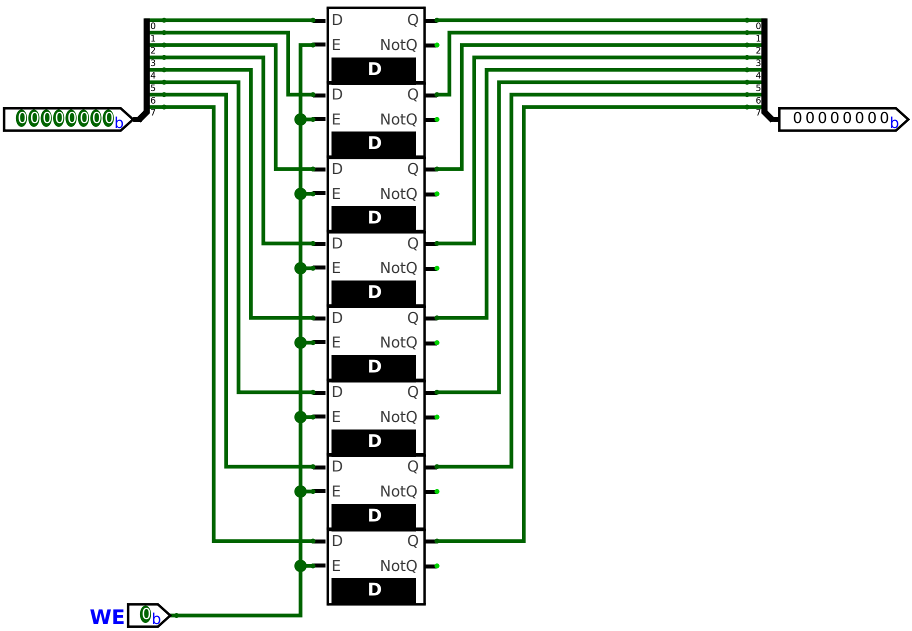
Poté jsem si ze zbylých tří vstupů udělal negace a hledal, které diody můžu rozsvítit pro různé dvojice vstupů, nebo pouze pro jeden ze vstupů. Z toho jsem si vytvořil tabulku, a z ní nejdřív vybral věci, které rozhodně musím využít, aby mi neunikla některá dioda některého čísla (například pokud je vstup 0, pak diody 5 a 7 nerozsvítí žádná dvojice, kromě NOT prvního a NOT třetího bitu). Poté jsem z tabulky vybral pár dalších dvojic, tak aby byly vždy rozsvícené požadované diody.

Zkoušel jsem i pár dalších způsobů, které by mohly pomoci, jako například rozpoznat dvojku a dát její negaci do diody 6 (všechna čísla kromě dvojky rozsvěcují diodu 6), nic už ale počet hradel nesnížilo.

Počítadlo

Zadání:

Vyrobte obvod, který bude v binární soustavě po jedné počítat, jak tikají hodiny. Co můžeme dělat, pokud napočítáme do nejvyššího čísla? Jak se takový stav pozná?

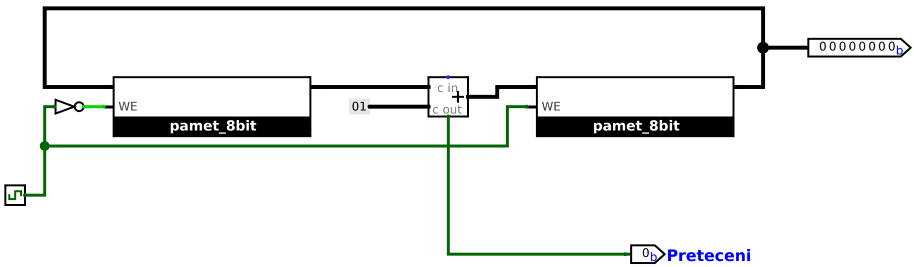


Obrázek 24: Osmibitová paměť (WE značí „Write Enable“ a je to ustálené označení tohoto signálu)

K vyřešení této úlohy budeme potřebovat dvě věci: vícebitovou paměť a umět střídat přičítání a ukládání do této paměti. Přičíst jedničku umíme, třeba jako součet aktuálního čísla a jedničkové konstanty.

D latch nám poskytuje jednobitovou paměť. Vícebitovou paměť si potom můžeme postavit jednoduše jako několik jednobitových pamětí paralelně vedle sebe (viz obrázek 24), přičemž řídicí vstup budou mít tyto paměti společný.

Klasické Déčko má ale tu nevýhodu, že pokud je vstup zapnutý, tak propouští aktuální hodnotu. Proto nemůžeme součet minulé hodnoty a jedničky rovnou ukládat do paměti, ze které jsme četli původní hodnotu – zvětšilo by to i vstupní hodnotu sčítačky a k té by se pak stihlo znovu přičíst. Jednu z možností znázorňuje obrázek 25. Použijeme dvě paměti – vstupní a výstupní. V jedné půlperiodě hodinového cyklu budeme přičítat jedničku ke vstupní paměti a ukládat výsledek do výstupní, v druhé zkopírujeme poslední výsledek z výstupní paměti do vstupní. Pro obojí stačí jen správně zapínat a vypínat řídicí vstupy pamětí.



Obrázek 25: Celé počítadlo

Co s přetečením

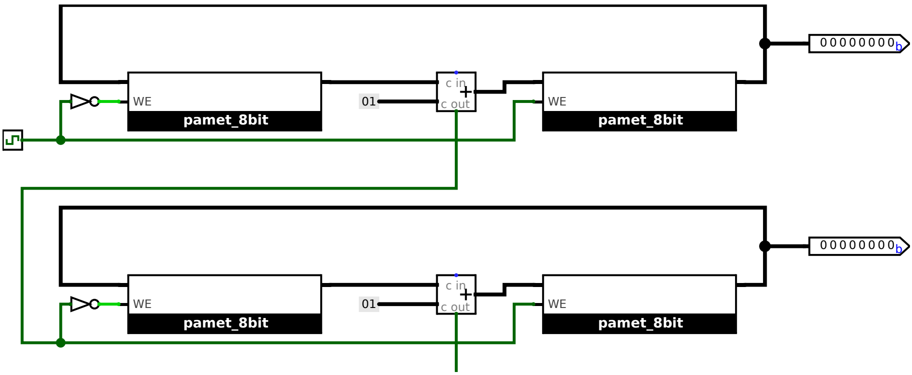
Také jsme se vás ptali, jak se pozná největší číslo v paměti. Největší číslo má samozřejmě všechny bity jedničkové, takže poznat jej můžeme třeba pomocí ANDu přes všechny bity. Někdy se ale může hodit si místo detekce nejvyššího čísla všimnout, že už jsme napočítali až za něj – přetečeme zpátky na nulu. V takovém případě má sčítačka 1 v přenosu výš, takže stačí si tento signál nějak zpracovat.

A co v takovém případě můžeme udělat? Možností je několik. Nejjednodušší je počítat znovu od začátku. Taky se může hodit si zapamatovat, že už jsme přetekli, třeba v nějaké paměti. Pak můžeme třeba zastavit hodiny a přestat tak počítat.

Zajímavá možnost je zapojit signál přetečení do dalšího počítadla místo hodin (viz obrázek 26). Tím v druhém počítadle dostaneme vyšší bity počítadla. Takto umíme dosáhnout libovolné šířky počítadla, i pokud jedno počítadlo tak vysoké hodnoty neumí.

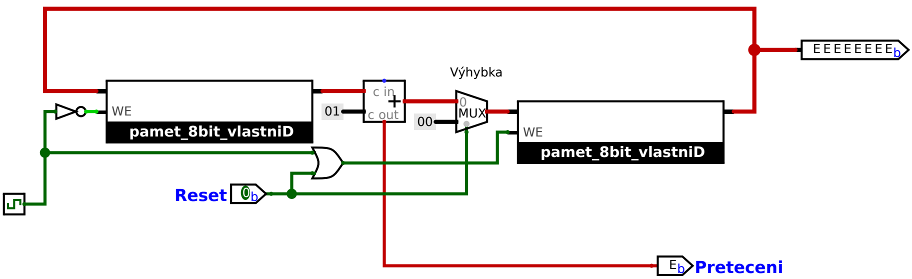
Implementační problémy

Pokud jste si Déčko postavili sami, nejspíš vám obvod ve výše zmíněném tvaru fungovat nebude. Déčko vestavěné v Logisimu (které samozřejmě smíte použít,



Obrázek 26: Zřetězení počítadel k vytvoření počítadla s větším rozsahem

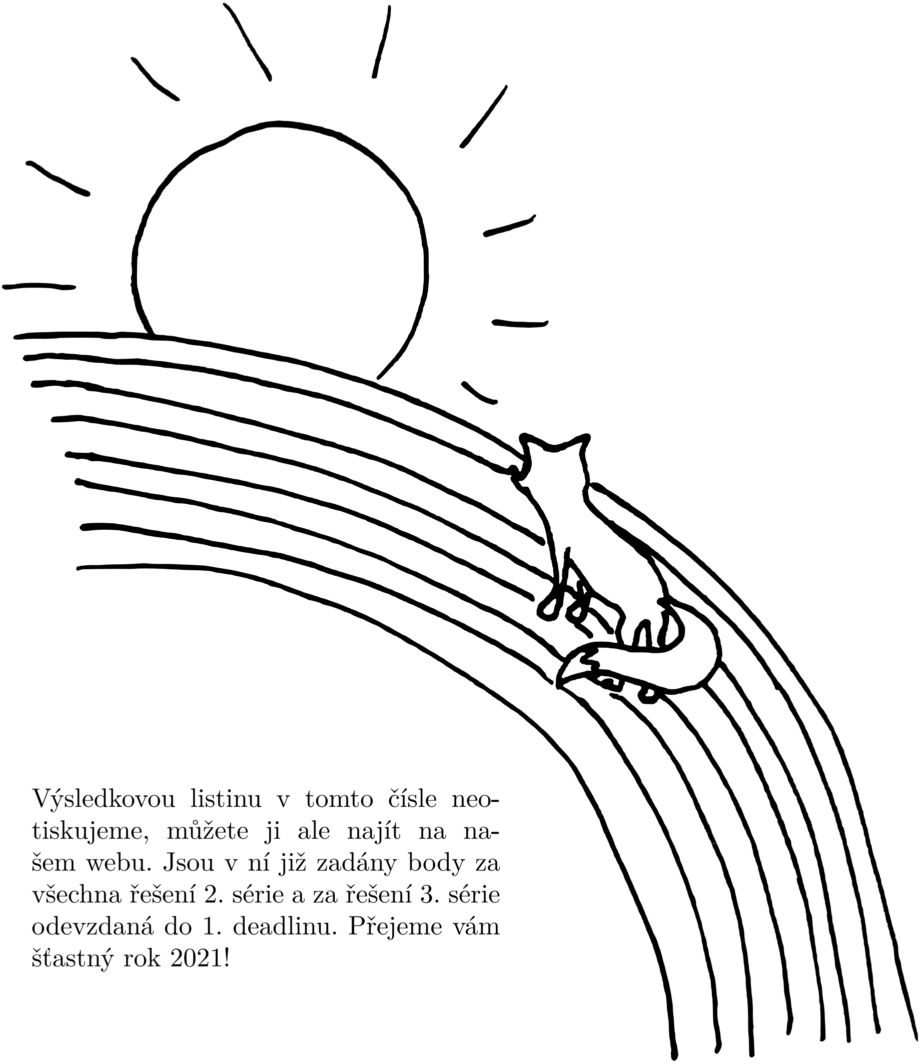
i když ho neumíte postavit) totiž ve výchozím stavu obsahuje nulu, kdežto vaše vlastní déčko takto nastavené není. Můžeme si ale pořídit signál na inicializaci[22] (viz obrázek 27), který třeba pomocí výhybky nastaví zdrojovou paměť na nějakou dobře definovanou hodnotu.



Obrázek 27: Opravené počítadlo pro použití vlastní implementace D latche

Pavel, Káťa a Honza; pa-ka@mail.ledoian.cz
e-mailová konference: hradla@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz

[22] Alternativně lze použít Logisimovou součástku „POR“, neboli „Power-on reset“, která má na začátku simulace na výstupu nějaký čas jedničku a pak už vždycky nulu.



Výsledkovou listinu v tomto čísle neotiskujeme, můžete ji ale najít na našem webu. Jsou v ní již zadány body za všechna řešení 2. série a za řešení 3. série odevzdaná do 1. deadlinu. Přejeme vám šťastný rok 2021!

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`