STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVII
Číslo 3

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

doufáme, že se vám daří co nejlépe. Začneme tentokrát čistě praktickou informací – chtěli bychom vás požádat, abyste své příspěvky posílali na e-mail `mam@matfyz.cz` a do předmětu ideálně uvedli názvy všech témat, ke kterým nám něco posíláte. Zjednoduší a zpřehlední nám to opravování.

Předposlední týden října se po večerech uskutečnilo historicky první online soustředění. Do budoucna to rozhodně není preferovaný formát, ale jsme rádi, že jsme s vámi mohli sdílet znalosti a zábavu bezpečně i v této nelehké době. Doufáme, že vás to těšilo stejně jako nás. Pokud jste se zapojili, budeme rádi, když nám vyplníte krátkou anketu, kterou byste již brzy měli najít ve své e-mailové schránce. Pokud jste se nezúčastnili, ale rádi byste to napravili, případně máte konkrétní návrh na aktivitu, také se o tom moc rádi dozvíme.

Co jsme si pro vás připravili v tomto čísle? V topologii si plochy proděravíme a zjistíme, že jiným pohledem v nich vlastně žádná díra není. A nebo přece jen je, a tak k sobě budeme okraje děr zase lepit. V optice zůstaneme u destruktivních metod, od rozkládání světla se přesuneme k jeho lámání, občas jemnějšímu odrážení. Navrhneme vám několik experimentů, ale nebojte se přijít s vlastními!

Z olympiádní matematiky vám přinášíme řešení úloh z minulých dílů (i zasedacího pořádku, alespoň ten na online schůzích řešit nemusíme). Občas jsme použili příspěvky někoho z vás, děkujeme za ně! Paměť nám ještě slouží, a tak vaši navrhnutou nezapomeneme přidat našemu počítači, stejně jako vám ukázat řešení odčítačky a univerzálního hradla. A protože pokrok v čase je nezadržitelný, naučíme se s časem pracovat pomocí hodinového signálu. Možná někoho z vás napadlo, *Co se děje uvnitř hradel?* Do toho se ponořil Bc.[MM] Michal Pavlíček, který se rozhodl sepsat článek se stejným názvem.

Tak děrujte, lepte, lamte, odrážejte, rýsujte, upravujte, stavte, navrhujte, … a především se dobře bavte!

Vaši organizátoři

Obsah

Zadání a řešení témat

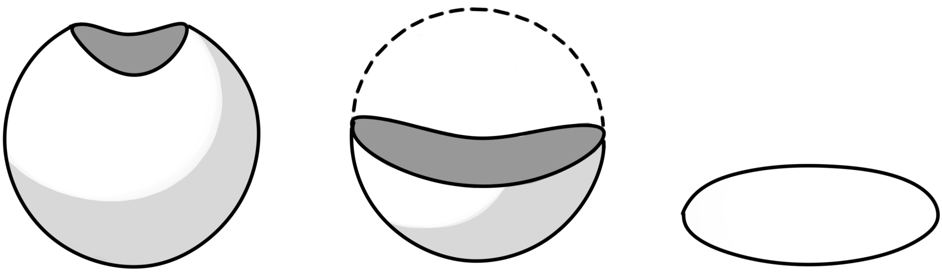
1. deadline: 15. 12. 2020 | 2. deadline: 12. 1. 2021

Téma 1 – Topologie

Díl 3: Klasifikace uzavřených ploch

Jak vypadá objekt, který nemá žádný okraj[1]? Vydáme-li se po něm kamkoli, nikdy nás nic nezastaví. To ovšem samozřejmě neznamená, že je daný objekt nekonečný, zkrátka a jednoduše můžeme prostě chodit v kruzích, jako například po povrchu toru. O objektech bez okraje říkáme, že jsou *uzavřené*. Objekty, které mají okraj, mají i vnitřek, což je přesně ta část objektu, která není okrajem.

Minule jsme si také zavedli operaci kvocientu, neboli lepení. Nyní se k němu vrátíme a místo lepení okrajů variety si budeme představovat, že k sobě lepíme okraje děr v něm. Ale co je taková díra? Díra vznikne ve varietě odebráním vnitřku koule, která má stejnou dimenzi jako daná varieta. Typickým příkladem vzniku díry je odebrání vnitřku kruhu ze sféry. Pojďme si uvědomit, že slepování okrajů děr je ekvivalentní slepování okrajů variety, jen pro nás bude jednodušeji uchopitelné. Vezměme si sféru S^2 (čili okraj B^3, což je třídimenzionální koule) s jednou dírou. Ta je homeomorfní disku, protože můžeme nejdříve zvětšovat díru a následně zplošťovat sféru, až se okraj díry pootočí tak, že uvnitř původní díry bude sféra a „prázdno“ bude všude okolo. Prohlédněte si obrázek 1. Pokud jsou díry dvě, můžeme mezi nimi sféru rozříznout a podél řezu přidat zipy určené ke spojení. Tím jsme problém převedli na případ s jednou dírou, která má na svém okraji dva kusy zipů určené ke spojení. Analogicky můžeme postupovat, pokud je děr více, ale to zatím dělat nebudeme.



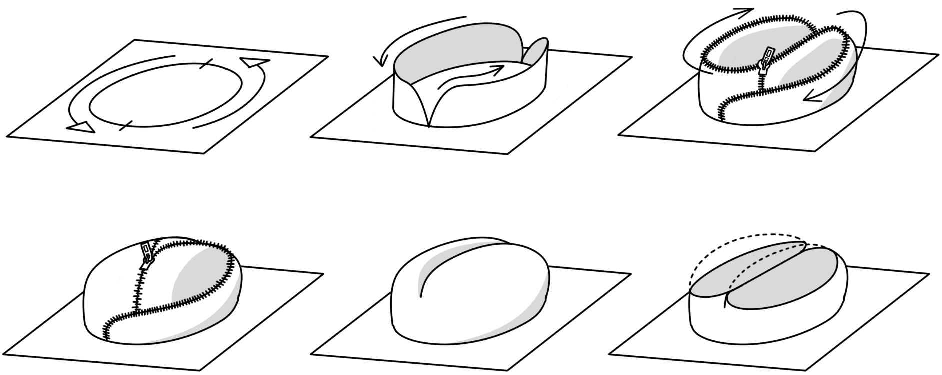
Obrázek 1: Nákres homeomorfismu mezi sférou s dírou a diskem.

Příklady níže budou pro jednoduchost ukázané na varietě homeomorfní uzavřenému disku. Všechno, co si ukážeme, ale platí obecně na každé ploše. Než si povíme, co je plocha, potřebujeme zadefinovat pár vlastností. Objekt je *omezený*,

[1] Okraj objektu jsme definovali v minulém díle.

pokud existuje nějaká fixní vzdálenost taková, že každé dva body tohoto objektu jsou nejvýše v této vzdálenosti. Jinými slovy, zakazujeme nekonečně rozlehlé objekty. *Limitní bod* x nějaké podmnožiny bodů S je takový bod, že každé jeho okolí (tedy speciálně libovolně malé okolí) obsahuje nějaký bod z S. Množina je *uzavřená*, pokud pro každou její podmnožinu bodů S obsahuje limitní bod S. Lidštěji, v uzavřené množině U pro každou posloupnost bodů, kde postupně zkracujeme jejich vzájemné vzdálenosti a tím „limitně" směřujeme do nějakého místa, U obsahuje to místo, ke kterému směřujeme. Příkladem uzavřené množiny je třeba kruh o poloměru r. Když odebereme jeden bod z okrajové kružnice, dostáváme množinu, která není uzavřená. Proč? Protože pro každý bod na okrajové kružnici existuje nekonečná posloupnost bodů, které mají v jednom směru vzdálenost od středu postupně $r-1, r-\frac{1}{2}, r-\frac{1}{3}, \ldots, r-\frac{1}{k}, \ldots$. Vidíme, že se pro zvyšující se k zlomek $\frac{1}{k}$ zmenšuje a pro obrovská k se blíží nule, takže vzdálenost od středu jde k r. Limitním bodem této posloupnosti je bod se vzdáleností r od středu, což je přesně bod na okraji kružnice, který jsme odebrali. To znamená, že kruh, kterému chybí byť jediný bod okrajové kružnice, už není uzavřený. Nyní se můžeme vrátit zpět k tomu, co je plocha. *Plocha* je topologický prostor, který je souvislý, omezený, uzavřený a kde je okolí každého bodu homeomorfní disku.

Stejně jako v minulém díle doporučujeme vyzkoušet si slepování na kusu pružné látky pro získání přesnější představy o tom, co se bude dít. Simulace na kusu látky má své limity, ale i tak může hodně pomoci tvojí představivosti.



Obrázek 2: Vznik křížidla slepením díry se dvěma nesouhlasně orientovanými zipy.

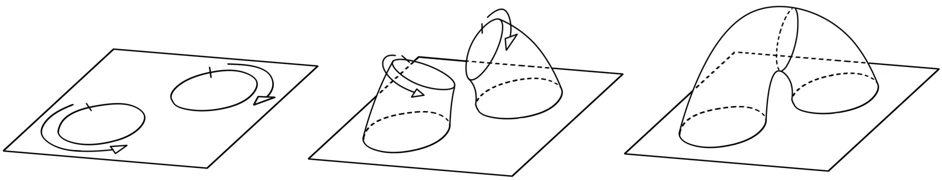
Pro jednoduchost budeme jako zip označovat kus ozubené části zipu před projetím jezdce. U zipů budeme rozlišovat různé druhy různými druhy šipek. Různé druhy jsou navzájem nekompatibilní a odpovídají několika různým slepováním. Začneme sférou s jednou dírou, jejíž okraj je olemovaný dvěma zipy. Toto si ještě relativně snadno můžeme představit i jako okraj disku se dvěma zipy. Pokud mají zipy stejnou orientaci, jednoduše uzavřou díru, čímž získáme sféru. U disku si představíme, že je z pružné látky a trochu se vyboulí. Taková ozipovaná díra nás už dál nebude zajímat, protože se po jejím slepení nestane nic zajímavého, jako kdyby tam nebyla.

Co se ale stane, pokud zipy přidáme tak, že pokrývají každý polovinu díry a jsou orientované nesouhlasně? V takovém případě ztotožňujeme každý bod s jeho protějškem. Můžeme si to představit tak, že koncové části zipů vytáhneme nahoru a začneme jet jezdcem, po chvíli se ale dostaneme do situace, kdy se plocha musí zkřížit sama se sebou, a teprve pak je možné okruh uzavřít, viz obrázek 2. Tomuto typu slepovací díry budeme říkat *křížidlo*.

Úloha 1 [3b]: *Uvědom si a zdůvodni, že křížítko (definované v předchozím díle jako Möbiova páska přizipovaná k okraji díry) je topologicky ekvivalentní křížidlu, které jsme právě definovali jako výsledek sezipování dvou polovin kruhové díry pomocí dvou stejně orientovaných zipů. (Tip: Zafixuj délku zipů tak, aby každý zabíral přesně půlku kružnice. Kam se zobrazí bod v nějaké konkrétní vzdálenosti od jejich předělu?)*

Nadále tedy budeme mluvit pouze o křížítku, ale podle situace si pod ním představíme přišitou Möbiovu pásku či díru sezipovanou zipy se stejnou orientací.

Podívejme se na čtverec se dvěma dírami, kde každá obsahuje jeden zip. Výsledkem zipování bude slepení těchto dvou děr k sobě, nikoli spojování díry sama se sebou. Mají-li zipy souhlasnou orientaci, můžeme je souvislou transformací vytáhnout z povrchu sféry nahoru, natočit k sobě a sezipovat, čímž dostaneme ucho jako na obrázku 3.

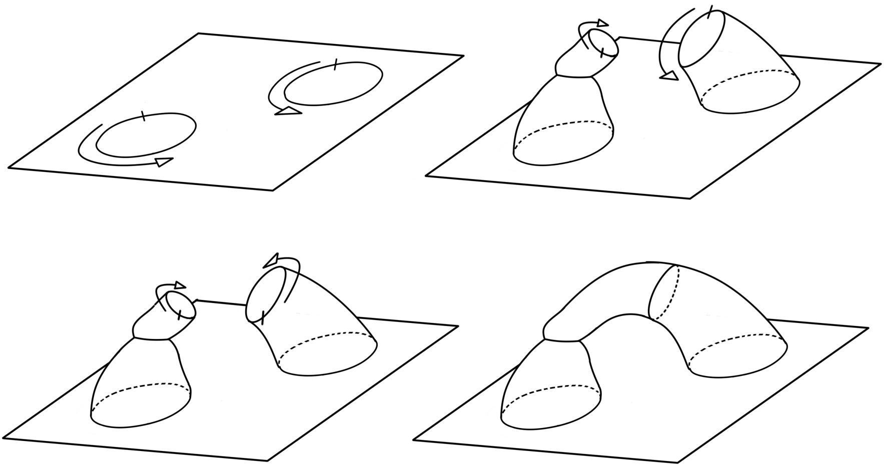


Obrázek 3: Vznik ucha spojením dvou děr se souhlasně orientovanými zipy.

Situace je složitější, když mají zipy na okrajích nesouhlasnou orientaci, tedy oba stejnou, například jako dva levé kusy zipů od bundy. Abychom mohli zipy sezipovat, musíme jednu díru vytáhnout a protočit vzhůru nohama podél jejího průměru, čímž se překříží sama se sebou (viz obrázek 5). Zipy pak můžeme spojit a získáme objekt z obrázku 4, který nazveme křížívé ucho.

Úloha 2 [2b]: *Kterým již známým objektům jsou homeomorfní:*

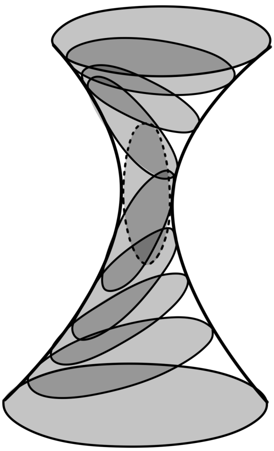
- *sféra s uchem*
- *sféra s křížívým uchem?*



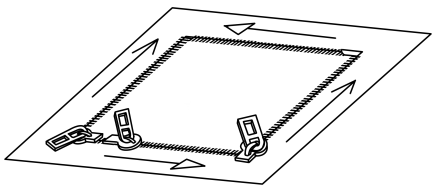
Obrázek 4: Vznik křiživého ucha slepením dvou děr s nesouhlasně orientovanými zipy.

Nyní si vezmeme čtverec s obdélníkovou dírou a zkusíme slepovat protilehlé strany díry, dvě v souhlasném směru, dvě v opačném.

Úloha 3 [1,5b]: *Co vznikne, pokud slepíme nejdříve souhlasné strany obdélníkové díry z obrázku 6 a poté její dvě nesouhlasné strany?*



Obrázek 5: Nákres toho, jak vypadá prokřížení ucha se sebou samým.



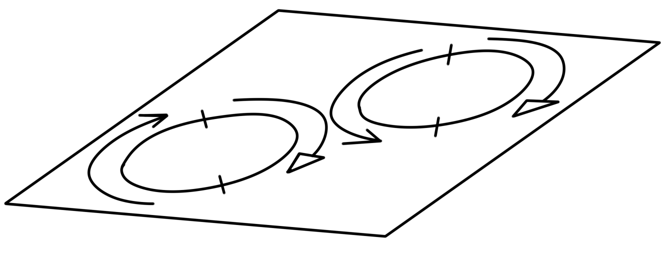
Obrázek 6: Obrázek k zadání Úlohy 3.

Můžeme ale také nejdříve slepit dvě strany s nesouhlasnými směry, které jsou na obrázku 8a znázorněné bílými zipy. Bílé zipy spojí nejdříve konce protilehlých stran, a poté postupně i další části těchto stran až k jejich opačným koncům, jako je to na obrázcích 8b a 8c.

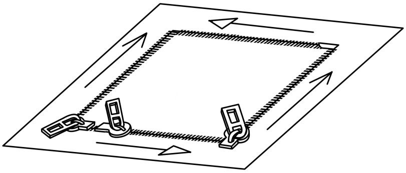
Slepením bílých zipů se „zkrátí“ okraj díry o jejich délku. Kdyby bílé zipy byly orientované souhlasně, tak by jejich slepením vznikly dvě kruhové díry a okraj každé z nich by tvořil jeden černý zip. Tím, že jsou bílé zipy nesouhlasně orientované, dostaneme jedinou díru, jejíž okraj je tvořený dvěma černými zipy, které na sebe navazují, viz obrázek 8d. Všimněte si, že kdybychom „roztáhli“ původní plochu čtverce do větších rozměrů, tak jej tato díra protíná. Celý okraj výše zmíněné díry můžeme vytáhnout nahoru na stejnou výškovou úroveň, jak je to ukázané na obrázku 8e. Tím se místo protnutí přesune tak, že místo povrchu původní plochy okraj díry protíná sebe sama. Tento sebeprotínající okraj je řezem křížítka. Představme si nyní, že je useknutý kus křížítka na místě, jen neviditelný, jak je to naznačené na obrázku 8f. V takovém případě po něm můžeme díru „posouvat“, až dokud ji neposuneme úplně mimo křížítko, což je zobrazeno na obrázku 8g. Reálně takové posouvání realizujeme natahováním plochy v místě, odkud se chceme vzdálit, a smršťováním v místě, kam se chceme dostat. Tím dostaneme křížítko a vedle něj díru se dvěma souhlasně orientovanými zipy, jejich sezipováním dostaneme další křížítko. Celý postup je zobrazený na obrázku 8.

Díky tomu, že na pořadí slepování stran nezáleží, teď víme, že plocha se dvěma křížítky je ekvivalentní výslednému objektu z Úlohy 3.

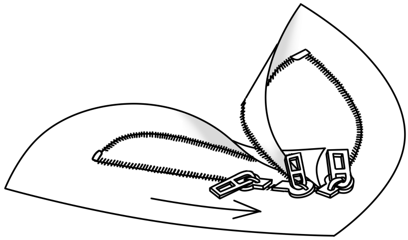
Úloha 4 [4b]: *Mějme dvě kruhové díry a dva druhy zipů, bílé a černé, přičemž každá díra má půlku okraje pokrytou jedním druhem zipu a druhou půlku druhým druhem zipu. Černé zipy jsou orientované souhlasně, tedy proti sobě, bílé nesouhlasně, tedy oba stejně. Situace je nakreslena na obrázku 7. Co vznikne, když slepíme nejdříve černé zipy a poté bílé? A co když slepíme nejdříve bílé zipy a teprve poté černé? Kombinaci kterých již známých prvků jsou takto získané objekty homeomorfní? Co se z toho dozvídáme?*



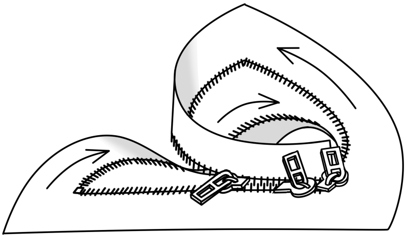
Obrázek 7: Obrázek k zadání Úlohy 4.



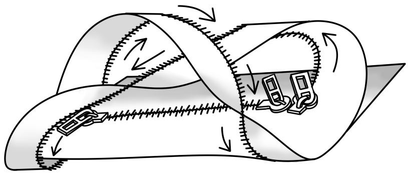
(a) Čtvercová plocha s obdélníkovou dírou na začátku.



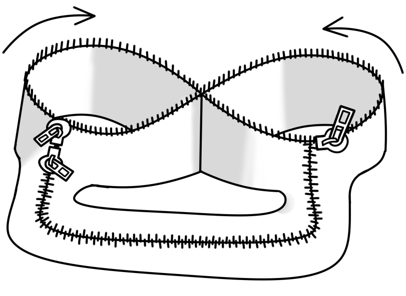
(b) Začátek spojování bílých zipů.



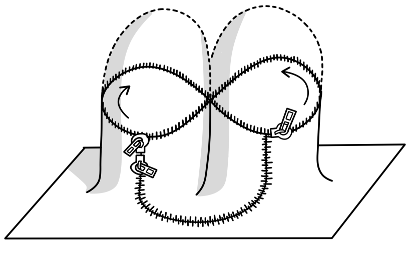
(c) Průběh spojování bílých zipů.



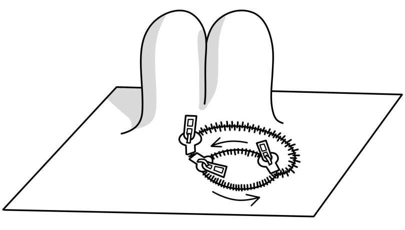
(d) Výsledek spojení bílých zipů.



(e) Uvedení okraje díry na stejnou výškovou úroveň.



(f) Roztáhnutí podkladové plochy a dokreslení „neviditelné“ části křížítka.



(g) Posunutí díry mimo křížítko.

Obrázek 8: Pokud slepíme nejdříve nesouhlasně orientované strany obdélníkové díry uvnitř čtverce, získáme křížidlo s ozipovanou dírou, jejímž slepením vznikne další křížidlo.

Řekneme, že plocha je *běžná*, pokud je homeomorfní sféře s konečně mnoha uchy, kříživými uchy a dírami.

Úloha 5 [6b]: *Představ si plochu, která má ke dvěma částem svého okraje přidělané zipy. Dokaž, že pokud se před spojením zipů jedná o běžnou plochu, je to běžná plocha i po jejich spojení. Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že okraj je tvořený sjednocením kružnic. Důkaz se dá provést rozmyšlením toho, co se stane v následujících případech:*

- *každý zip pokrývá jednu celou kruhovou část okraje, tj. kružnici, a*
  - *zipy spojují dvě nesouvislé části plochy* [2]
  - *obě ozipované díry leží na stejné souvislé části plochy*
- *dva zipy jsou součástí stejné okrajové kružnice a dohromady ji zcela pokrývají*
- *zipy pokrývají jen část kruhového okraje (vyřešeno v textu níže)*

Poslední případ můžeme vyřešit malým trikem. Představíme si, že kruhovou díru v některých částech natáhneme a v některých smrskneme tak, že části díry nepokryté zipem jsou tak prťavé, že je vůbec nevidíme. Celá situace tak vypadá úplně stejně, jako kdyby zipy pokrývaly díru nebo díry úplně. Po jeho vyřešení části neozipované části okraje zase natáhneme a natažené smrskneme, čímž se ve vzniklém objektu objeví nové díry, což je ale v pořádku, protože běžné plochy můžou mít díry. Pokud tedy byla plocha získaná zazipováním zipů zcela pokrývajících díry běžná, bude běžná i plocha získaná zazipováním zipů, které pokrývají díry jen z části.

Klasifikační věta říká, že každá plocha s konečným počtem děr je běžná, čili je homeomorfní sféře s konečně mnoha uchy, kříživými uchy, křížítky a dírami. Jak ji dokázat? Dostaneme nějakou plochu. Použijeme tvrzení, že každá plocha může být rozřezána na konečný počet trojúhelníků. Důkaz tvrzení je ale složitý, takže ho nebudeme uvádět. Představte si získanou triangulaci plochy jako patchworkovou[3] deku, na které odpáráme švy spojující kusy látky k sobě. Plocha se nám tedy rozpadne na hromadu trojúhelníků. Podél každého odpáraného švu přidáme dvojici zipů. Nyní si všimneme, že trojúhelníky jsou běžné plochy a že sezipováním dvou trojúhelníků dostaneme podle Úlohy 5 opět běžnou plochu. Z toho plyne, že i postupným sezipováním všech zipů vznikne běžná plocha, čímž je důkaz hotov.

Úloha 6 [4b]: *Použijte výsledky Úlohy 3 a Úlohy 4 společně s informacemi v textu k dokázání silnější verze klasifikační věty pro plochy. (Nápověda: Rozdělte si úlohu na části podle toho, zda je přítomné alespoň jedno kříživé ucho či křížítko, nebo nikoli.)*

[2] Dvě části plochy jsou nesouvislé, když se nedá pohybem po dané ploše dostat z jedné části na druhou.

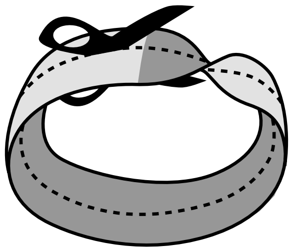
[3] *Patchwork* je textilní technika, při které se sešívají kusy různě barevných látek do složitějších vzorů. Kusy látek bývají ve tvaru trojúhelníků a čtverců.

Vzorová řešení 1. dílu

Úloha 1

Zadání:
Jak vypadá okraj Möbiovy pásky?

Řešení:
Möbiova páska je dvojrozměrný objekt a její okraj je tedy jednorozměrný, tj. křivka. Když se po okraji vydáme jedním směrem, po chvíli se vrátíme na stejné místo, jako kdybychom šli po kružnici. Okraj Möbiovy pásky je tedy z topologického hlediska kružnice.



Obrázek 9: Stříhání Möbiovy pásky

Úloha 2

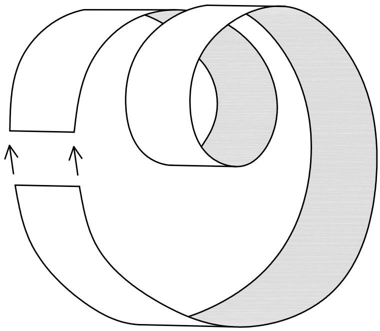
Zadání:
Vezmi Möbiovu pásku a stříhej ji podélně kolem dokola (viz obrázek 9), dokud se neprostřihneš až k místu, kde jsi začal. Ještě než dostříháš, co si myslíš, že se stane? Až dostříháš, prozkoumej, co se stalo. Je to v souladu s tvým očekáváním? Jaké objekty dostaneš? Jaké mají okraje? Pokud jsou zakroucené, kolikrát? A co se stane, když nezačneš stříhat v půlce, ale třeba ve třetině? A co třeba když před slepením otočíš konec pásky vícekrát (tj. ne o 180°, ale o 360°, 540° atd.)? Zamysli se nad tím, proč se to děje, a zkus přijít s vysvětlením.

Řešení:
Když podélně rozstřihneme Möbiovu pásku, intuice nám říká, že dostaneme dva nesouvislé objekty, jako když rozstřihneme obruč. Avšak díky tomu, že jsme při lepení jeden konec otočili o 180°, pásky, které vznikly rozstřihnutím obruče, jsou spojené a dostaneme jeden souvislý objekt. Tato smyčka má dva okraje: jeden z původní Möbiovy pásky a druhý, který vznikl rozstřihnutím. Na první pohled se může zdát, že vzniklá smyčka je otočená se dvěma otáčkami o 180°. Po rozstřihnutí je vzniklá smyčka dvakrát ovinutá dokola a na rozmotání potřebujeme zavést jednu otáčku o 360° navíc. Výsledná smyčka je tedy otočená o 4 otáčky, neboli 720°. To můžeme vidět i tak, že vezmeme proužek papíru, dvakrát jej ovineme

a slepíme bez otoček podobně jako obruč (znázorněno na obrázku 10). Takový objekt má po rozvinutí dvě otáčky o 180°.

Nyní začneme Möbiovu pásku stříhat ve třetině šířky, po jednom obkroužení podél nenavážeme na začátek střihu, ale budeme stříhat ve druhé třetině, než pásku obkroužíme podruhé a dostaneme se na začátek. Vzniknou nám dvě smyčky, které sebou prochází. Povšimněme si, že se jejich vlastnosti nezmění, když změníme vzdálenost od okraje, ve které stříháme. Když je vzdálenost menší, prostřední část bude širší. V limitním případě, kdy je vzdálenost od okraje nulová, nám zůstane původní Möbiova páska s jednou otáčkou. Prostřední část má tudíž jednu otočku. V druhém limitním případě, kdy stříháme v jedné polovině, vznikne dlouhá páska otočená o 720°, jak jsme ukázali dříve. Druhá smyčka má tedy 4 otáčky.

Podobný případ nastane pokud před slepením otočíme papír o lichý počet otáček. Výsledný objekt má opět jen jeden okraj a po rozstřihnutí se chová podobně, jako Möbiova páska po rozstřihnutí, akorát s více otočkami. Pokud však před slepením uděláme sudý počet otáček, výsledný objekt bude podobný obruči a po rozstřihnutí v polovině nebo ve třetině se rozpadne na dva objekty, které budou pro dvě a více otáček provázané.



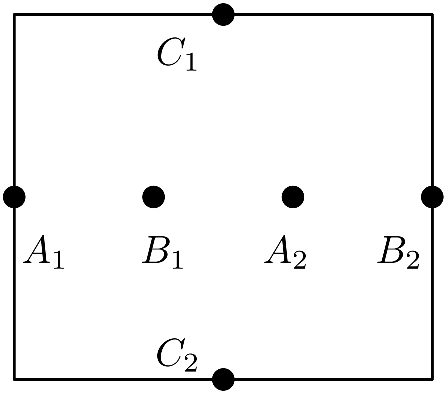
Obrázek 10: Dvakrát ovinutý proužek papíru lepený bez otoček

Úloha 3

Zadání:

Je možné vzít dvě Möbiovy pásky a přilepit je k sobě tak, že v místě slepení jsou k sobě kolmé. (Tip: Je možné vystřihnout velké „+“ a slepit vždy protilehlé konce.) Pokud si hned neumíš představit, jak to myslíme, podívej se na krátké video: `https://youtu.be/31BtbYKGFHU`

Co se stane, když takto slepené Möbiovy pásky prostřihneme stejně jako v předchozí úloze? Hraje nějakou roli to, jakým směrem natočíme konec pásky před slepením? Co když takto zkombinujeme Möbiovu pásku a obruč? Nebo dvě obruče?



Obrázek 11: Obrázek k úloze 5

Řešení:
Po prostřihnutí dvou slepených Möbiových pásek výsledek závisí na tom, jestli jsou před slepením otočeny stejným, nebo opačným směrem. Pokud jsou stejné, dostaneme dvě smyčky, které nejsou propojené. Jedna je bez otáček (homeomorfní trubce) a druhá je se dvěma otáčkami. Tvoří je dva proužky spojené pod pravým úhlem. Pokud rozstřihneme dvě pásky, které jsou zrcadlově převrácené, výsledné smyčky jsou propojené. Každá má jednu otočku a navzájem jsou zrcadlově převrácené.

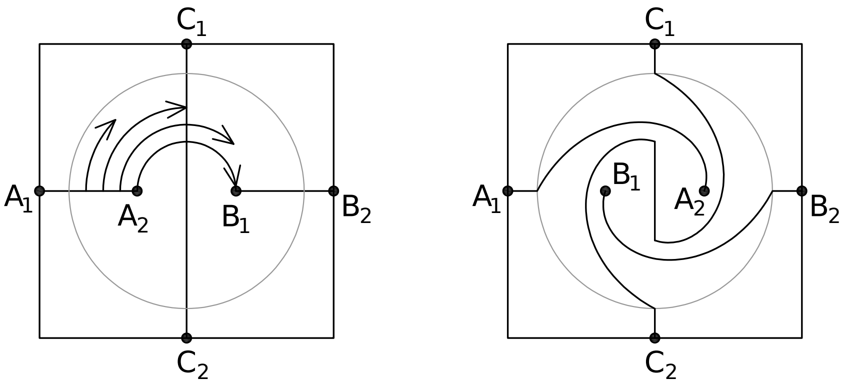
Prostřihnutím Möbiovy pásky s obručí získáme ohraničení čtverce. Pozoruhodné je, že tento objekt získáme i prostřihnutím dvou slepených obručí. To můžeme vidět tak, že když prostřihneme obruč, aniž bychom prostřihli Möbiovu pásku, dostaneme dvě obruče spojené páskou, kde jedna obruč míří nahoru a druhá dolů. Jednu z těchto obručí můžeme převrátit naruby a přilepit k druhé obruči. Tím získáme dvě slepené obruče.

Úloha 5

Zadání:
Na obrázku 11 jsou body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Je možné spojit A_1 s A_2, B_1 s B_2 a C_1 s C_2 tak, aby se jejich propojení neprotínala a nepoužívala oblast mimo vyznačený obdélník? Vyřešte problém pomocí řešení jednoduššího, ale topologicky ekvivalentního problému, a jeho následnou transformací do tvaru původního zadání. Můžete též nejdříve najít řešení a na jeho základě popsat uvedenou transformaci.

Řešení:
Triviální topologicky ekvivalentní problém je takový, kde jsou prohozeny body B_1 a A_2. Tento problém je možné vyřešit úsečkami spojujícími příslušné body. Nyní popíšeme transformaci, která problém převede na problém ze zadání, znázorněna

je na obrázku 12. Vezměme kružnici se středem mezi body B_1 a A_2 a poloměrem takovým, aby byly body B_1 a A_2 uvnitř. Transformace je taková, že vnitřek kružnice rotujeme o určitý úhel závislý na poloměru. Vnější okraj zafixujeme (rotujeme o $0°$) a kružnici obsahující body B_1 a A_2 s jejím vnitřkem rotujeme o $180°$. Kružnice ve vzniklém mezikruží rotujeme tak, aby funkce vyjadřující úhel otočení v závislosti na poloměru byla spojitá.



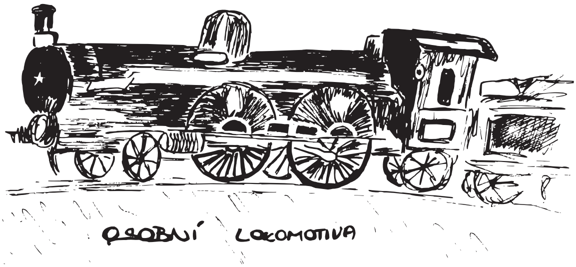
Obrázek 12: Obrázek k řešení úlohy 5

Úloha 6

Zadání:
Existuje nějaký objekt bez okraje? Podpoř svůj názor důkazem nebo příkladem. Za topologický objekt můžeš pro účel této úlohy považovat libovolný reálný objekt, který znáš ze života. Tím se omezujeme jen na konečné objekty v 1D, 2D a 3D. Neboj, k těm složitějším se dostaneme později.

Řešení:
Příkladem objektu, který nemá okraj, je kružnice. Kružnice je jednorozměrný objekt (můžeme se po ní pohybovat jen dopředu nebo dozadu), tedy její okraj musí být bezrozměrný, což je bod nebo množina bodů. Takový bod, ze kterého se můžeme pohybovat jen jedním směrem, však nemůže na kružnici existovat, protože každý bod na ní má neprázdné okolí zleva i zprava. Dalším příkladem je povrch koule nebo torus. Můžeme si povšimnout, že když objekt je okrajem nějakého jiného objektu (kruhu, vyplněné koule, nebo vyplněného toru), tak už nemá okraj.

Anet; aneta.pokorna@matfyz.cz
Viktor; vskoupy@gmail.com
e-mailová konference: topologie@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz



Téma 2 – Optika

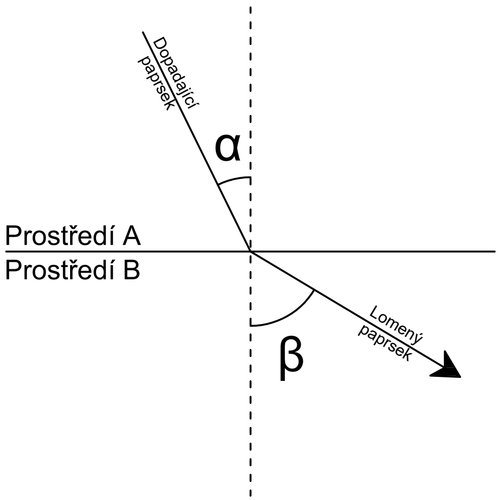
Díl 3: Lámání a odrážení

Popis chování světla ve volném prostoru je poměrně přímočarý, a to doslova, světlo se šíří stále stejnou rychlostí a po přímých trajektoriích. Způsob, jakým se chová světlo na rozhraní různých prostředí, je oproti tomu o něco zajímavější. Světlo se v závislosti na úhlu dopadu láme, odráží, nebo obojí.

Teorie, která se učí na středních školách, je poměrně jednoduchá. Nejprve definujeme index lomu nějakého materiálu n jako poměr rychlosti světla v tomto materiálu a rychlosti světla ve vakuu. Když potom dopadá světlo na rozhraní dvou prostředí s různými indexy lomu, tak se láme podle Snellova zákona tak, že platí

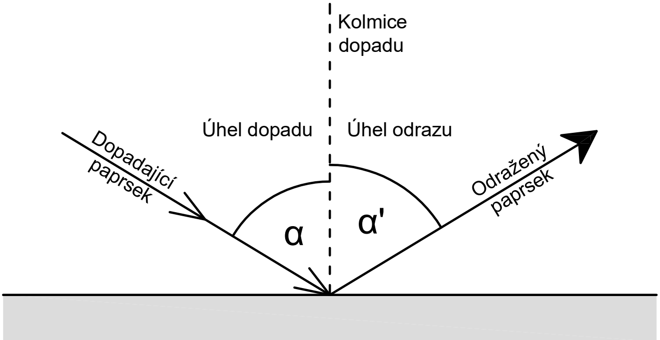
$$n_A \sin(\alpha) = n_B \sin(\beta)$$

kde n_A a n_B jsou indexy lomu jednotlivých prostředí a úhly jsou počítány od kolmice, viz obrázek 13.



Obrázek 13: Snellův zákon

Pokud je rozhraní prostředí alespoň trochu odrazivé, dochází také k odrazu světla, kdy platí, že úhel dopadu je stejný jako úhel odrazu, viz obrázek 14.



Obrázek 14: Odraz

Tyto poznatky vás většinou ve škole naučí, byť až v třetím ročníku. My vám ale chceme dát možnost si tuto část optiky vyzkoušet, osahat a experimentálně prověřit. Dále najdete návrhy na několik experimentů, které vám s tím mohou pomoci. Snažili jsme se vymýšlet úlohy tak, aby je bylo možno uskutečnit v domácím prostředí a bez použití speciálních pomůcek. Pusťte se směle do nich, tvořte, zkoumejte, analyzujte a napište nám, jak vám to šlo!

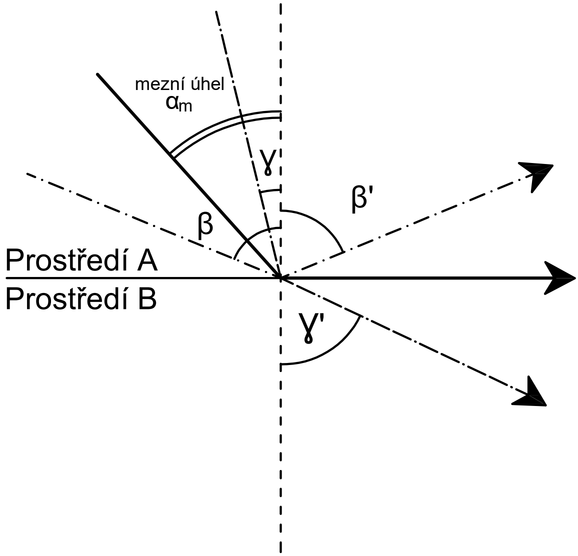
Body v hranatých závorkách jsou uváděny ve formátu [Body za provedení experimentu/Body za teoretickou část].

Problém 1 – Měření indexu lomu [2b+/1b+]: *Uvažme situaci, kdy se paprsky šíří z opticky hustšího (vyšší index lomu) do opticky řidšího (nižší index lomu) prostředí, jako třeba z vody do vzduchu. Když budeme zvětšovat úhel dopadu, bude se úhel lomu blížit pravému úhlu. Nastává totiž tzv. lom od kolmice a funkce sinus je pro hodnoty menší než 90° rostoucí, takže při přechodu z hustšího do řidšího prostředí bude vždy úhel lomu větší než úhel dopadu. Musí tedy existovat hranice, kdy úhel dopadu je menší než 90°, ale úhel lomu už je větší než 90°. Tuto situaci znázorňuje obrázek 15. Když potom budeme i nadále zvětšovat úhel dopadu, nebude už docházet k lomu, ale pouze k odrazu, který pak proto nazýváme* totální odraz. *Úhel dopadu, při kterém je úhel lomu pravý, se nazývá* mezní úhel α_M, *a platí vzorec*

$$\sin(\alpha_M) = \frac{n_2}{n_1},$$

kde n_1 je index lomu opticky hustšího prostředí a n_2 index lomu opticky řidšího prostředí.

Pokud znáte jeden z indexů lomu, můžete pomocí měření mezního úhlu vypočítat ten druhý. Zkuste tímto způsobem pomocí laserového ukazovátka změřit index lomu vody, oleje, případně nějakých dalších látek. Zkuste dosáhnout co největší přesnosti a vyfoťte svůj experiment.



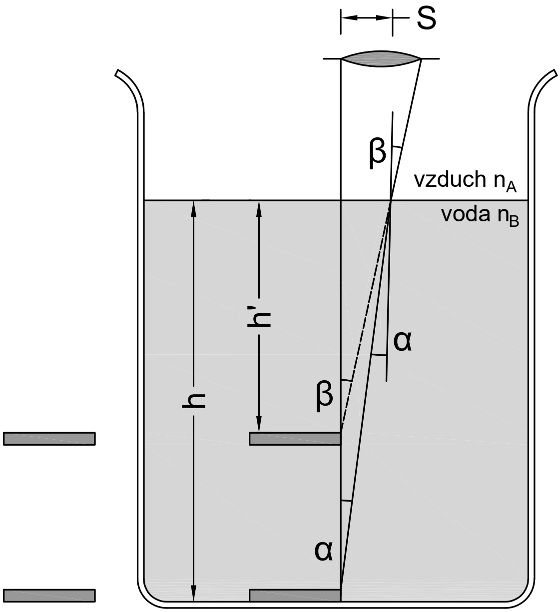
Obrázek 15: Mezní úhel

Úloha 2 – Optické vlákno [2b/1b]: *To, že při překročení mezního úhlu dochází k totálnímu odrazu, se využívá pro konstrukci optických vláken. Zkuste si takové optické vlákno vytvořit. Vezměte PET lahev, naplňte ji vodou a propíchněte do jejího boku v dolní části díru dostatečně velkou na to, aby voda vytékala malým proudem. Následující část pokusu bude lépe vidět, pokud ho budete provádět v zatemněné místnosti. Když posvítíte laserovým ukazovátkem přímo skrz lahev do místa, odkud voda vytéká, uvidíte, že se bude světlo šířit pouze proudem, který z lahve vytéká. Vyfoťte svůj experiment, popište, jak jste postupovali, a zkuste nakreslit, jakým způsobem se ve vytékající vodě světlo šíří.*

Problém 3 – Neviditelná sklenička [2b+/1b+]: *Když ponoříte skleničku do vody, stále ji velice dobře uvidíte. Když ji ale ponoříte do vhodného oleje, bude vidět velice špatně. Nalezněte vhodný olej a vysvětlete tento jev. Vyfoťte váš výsledek.*

Problém 4 – Disperze [2b+/1b+]: *Index lomu závisí na vlnové délce světla, tomuto jevu se říká disperze. Zkuste změřit různé indexy lomu pro různé barvy světla. Použít můžete buď laserová ukazovátka různých barev, přičemž změříte úhel dopadu a lomu, nebo můžete svítit bílým světlem, které se vám pomocí lomu rozloží na jednotlivé barvy. V tom případě měříte jeden úhel dopadu a různé úhly lomu, podle toho, jak se vám vytvoří spektrum po lomu. Doporučujeme měřit disperzi tak, že budete svítit skrz nádobu s vodou a světlo se bude lámat do vzduchu, ideálně se vám promítne na stěnu.*

Problém 5 — Určení indexu lomu podruhé [2b+/1b+]: *Určitě jste si někdy všimli, že pokud se díváte na nějaký předmět ve vodě, zdá se vám, jako by byl blíže hladině, než ve skutečnosti je. Následujícím pokusem si zkusíte změřit index lomu vody. Potřebujete dvě stejné mince. Jednu umístíte do nádoby s plochým dnem naplněné vodou. Druhou umístíte vedle nádoby. Pokud se budete na nádobu a minci koukat svrchu, tak se vám mince ve vodě bude zdát větší než mince na stole. Zkuste si minci na stole postupně zvedat, až najdete takovou výšku, kde se obě mince budou zdát stejně velké. Výslednou konfiguraci můžete vidět na obrázku 16. Změřte svislou vzdálenost mince od roviny hladiny (h′) a hloubku vody (h).*



Obrázek 16: Zadání problému 5

Pro výpočet n_B *dle Snellova zákona potřebujeme znát hodnoty* $\sin\alpha$ *a* $\sin\beta$. *Ty sice neznáme, ale můžeme si trošku pomoci zanedbáním rozměrů čočky oka. Jelikož budou úhly* α *a* β *malé, tak můžeme tvrdit, že* $\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha; \sin\beta \approx \beta \approx \tan\beta$. *(Úhly na obrázku 4 jsou oproti originálnímu znění Snellova zákonu prohozené, takže si je také musíme prohodit ve vzorci.)*

Po upravení tedy vyjde:

$$\tan\beta \cdot n_A = \tan\alpha \cdot n_B$$

$$\frac{S}{h'} \cdot n_A = \frac{S}{h} \cdot n_B$$

Víme, že index lomu vzduchu je $n_A = 1$. *Dokončete výpočet indexu lomu vody. Popište své provedení pokusu a zhodnoťte, jak se vám dařilo. Zkuste si podobným* *způsobem změřit index lomu jiných kapalin a porovnat je s tabulkovými hodnotami. Jak přesná je metoda? Kde nepřesnosti vznikly?*

Úloha 6 — Fata morgana [3b/1b]: *K provedení experimentu je potřeba skleněná nádoba, nejlépe s rovnými stěnami, sůl, voda a laserové ukazovátko. Do nádoby nasypeme sůl do výšky kolem jednoho centimetru a na ni velmi pomalu a opatrně nalijeme vodu. Je dobré nalévat vodu tak, aby pomalu stékala po stěnách (např. pomocí injekční stříkačky) a co nejméně rozvířila sůl nasypanou na dně. Nádobu necháme alespoň hodinu odstát – čím déle, tím bude efekt výraznější. Posvítíme-li poté (nejlépe v zatemněné místnosti) laserovým ukazovátkem do nádoby v blízkosti vrstvy soli, pozorujeme, že se stopa laserového paprsku ve vodě ohýbá. Sůl se ve vodě pomalu rozpouští a koncentrace iontů se stoupající výškou nad vrstvou soli klesá. Tím se mění i index lomu vody. Vyfoťte váš experiment. Popište, jak tento pokus souvisí s pravou fata morganou, vznikající třeba v poušti. Převzato z webu*[4].

Úloha 7 — Výroba stříbra [2b/1b]: *V této úloze si vyzkoušíte vyrobit stříbro. Vezměte si kovovou lžičku (nebo jakýkoli kovový předmět) a pokryjte ji sazemi nad plamenem svíčky. Poté lžičku ponořte do nádoby s vodou a při správném natočení uvidíte, jak je na lžičce „stříbro“. Popište, co se stalo a jak takové „stříbro“ vzniká.*

Problém 8 – Polarizace odraženého světla [1b+/3b+]: *Připravte si lesklou plochu, na které je dobře vidět odraz světelného zdroje, například žárovky nebo svíčky. Zkuste se na odraz dívat skrz polarizační filtr*[5]*. Filtrem pomalu otáčejte v jednom směru. Co pozorujete? Jaké máte pro pozorovaný jev vysvětlení? Zkuste jev zdokumentovat fotoaparátem a změřit úhel, pod kterým je jev nejlépe pozorovatelný. Nezapomeňte nám napsat, jaký jste použili světelný zdroj a povrch, a další relevantní podmínky experimentu.*

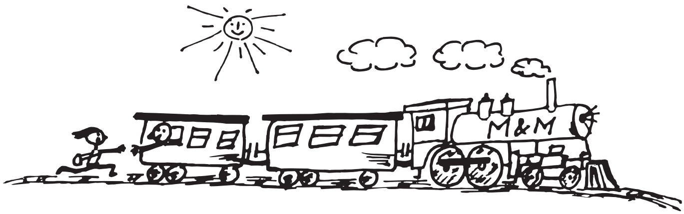
Problém 9 — Podivná lupa [1b+/2b+]: *Lupa je nejjednodušší optický systém používaný na optické zvětšení pozorovaného předmětu. Nás bude v tomto experimentu zajímat, kolikrát taková lupa dokáže pozorovaný předmět zvětšit. Vezměte si lupu, umístěte ji velmi blízko oka a pohybujte s ní společně s hlavou, dokud nezískáte nejostřejší obraz pozorovaného předmětu. Změřte vzdálenost, ve které předmět pozorovaný lupou popsaným způsobem vidíte nejostřeji a zkuste odhadnout pozorované zvětšení. Následně poproste například členy společné domácnosti, nejlépe z výrazně jiných věkových skupin, aby stejný experiment zopakovali. Dokážete v získaných výsledcích pozorovat nějakou závislost? Čím si myslíte, že by mohla být způsobena? Zkuste ke svému řešení přiložit nákres nebo výpočet, kterým své domněnky podpoříte.*

[4] `https://www.matfyz.cz/clanky/fyzikalni-pokus-fata-morgana`

[5] Ideální je polarizační filtr z fotoaparátu, měly by fungovat také „3D brýle“ z kina.

Problém 10 – Lupa podruhé [1b+/2b+]: *Pokud jste si někdy hráli s lupou za slunečného dne, jistě víte, jak efektivně dokáže světlo soustředit do velmi malé plochy. Proč pozorujeme plochu a čočka všechno světlo nesoustředí do jednoho bodu, jak by se dalo v souladu s definicí ohniska ideální čočky očekávat? Navrhněte experiment, pomocí kterého se tuto plochu pokusíte změřit. Spočítejte z výsledků předchozího měření, jakému výkonu ve W/cm^2 tato plocha za podmínek letního slunečného dne odpovídá. Pokud by se podařilo vyrobit čočku, která by byla výrazně větší, ale světlo by stále soustředila do stejné plochy, kolikrát by musela mít větší průměr, aby bylo dosaženo plošného výkonu alespoň 700 W/cm^2, při kterém je už například možné tavit kovy?*

Fanda; frantisek.zajic@matfyz.cz
e-mailová konference: optika@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz



Téma 3 – Olympiádní matematika

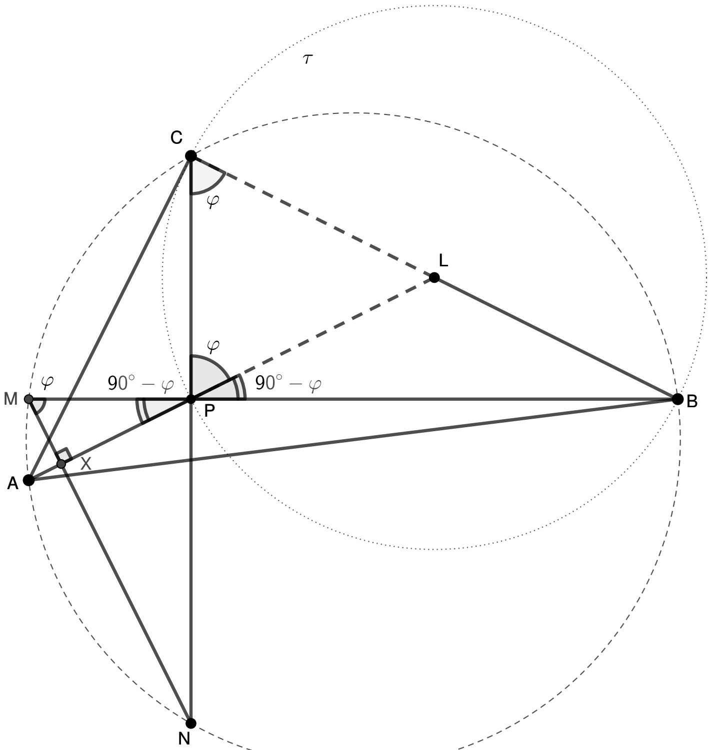
Díl 3: Vzorová řešení úloh z geometrie a nerovností

Vítejte u dalšího čísla olympiádního tématka. Tento díl se bude lišit od těch předchozích – nečekejte zde nové téma nebo obsáhlý studijní text. Místo toho se podíváme na vzorová řešení úloh z předchozích dvou čísel. V tomto díle nové zadání úloh nenajdete. Pokud ale budete mít chuť se olympiádní matematice věnovat, vřele doporučujeme se zapojit do matematické olympiády kategorie A, jež má termín odevzdání úloh domácího kola už 1. prosince a jejíž zadání naleznete na stránkách www.matematickaolympiada.cz. Účast na kategorii A se nevylučuje s řešením kategorií nižších (B, C), neváhejte se tedy zapojit i v případě, že jste z nižších ročníků.

Vzorová řešení 1. dílu – Geometrie

Úloha 1

Zadání:
Na těžnici AL ostroúhlého trojúhelníku ABC je zvolen bod P takový, že platí $|\sphericalangle BPC| = 90°$. Přímky BP a CP protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech M $(M \neq B)$ a N $(N \neq C)$. Dokažte, že $AL \perp MN$.



Obrázek 17: Náčrtek k Úloze 1

Řešení:

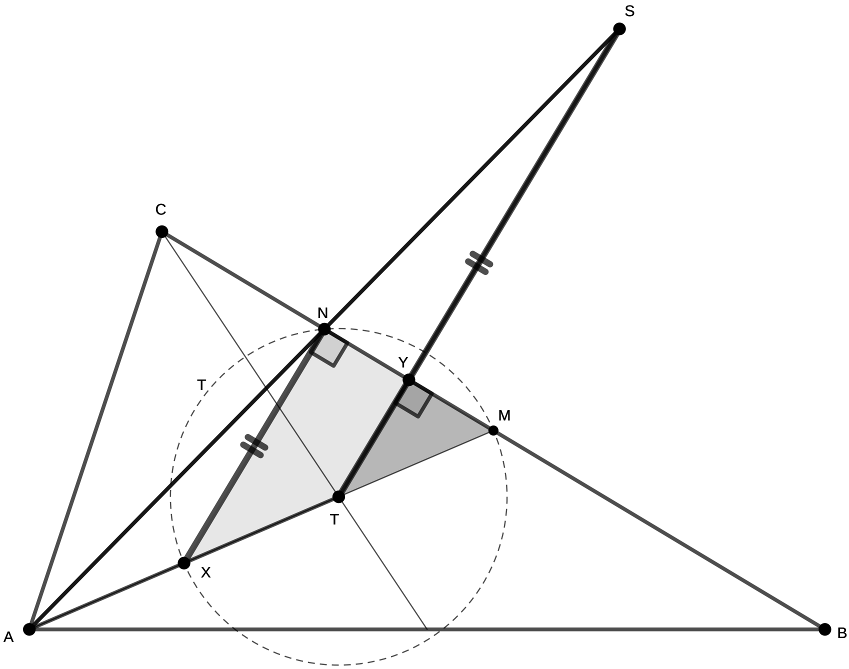
V důkazu si uvědomíme dvě důležité skutečnosti: trojúhelník PCL je rovnoramenný a úhly $\sphericalangle NCB$ a $\sphericalangle NMB$ jsou obvodové úhly příslušné úsečce NB. To nám dává vše, co potřebujeme.

Jelikož je trojúhelník BPC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu P, je délka jeho těžnice z bodu P do bodu L rovna polovině délky CB, tedy délce $|CL| = |BL|$ (nad průměrem BC existuje Thaletova kružnice o poloměru $|CL|$ procházející bodem P). Tedy trojúhelník PCL je rovnoramenný s rameny CL a PL. Označíme-li $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle LCP| = \varphi$, máme také $|\sphericalangle CPL| = \varphi$. Pak $|\sphericalangle BPL| = 90° - \varphi$. Úhly $\sphericalangle BPL$ a $\sphericalangle APM$ jsou vrcholové, takže $|\sphericalangle APM| = 90° - \varphi$. Dále úhly $\sphericalangle NCB$ a $\sphericalangle NMB$ jsou obvodové úhly příslušné úsečce NB na kružnici opsané trojúhelníku ABC, a tedy $|\sphericalangle NMB| = |\sphericalangle NCB| = |\sphericalangle PCB| = \varphi$. Označíme-li X průsečík MN s AL, dostáváme v trojúhelníku MPX úhly $|\sphericalangle XMP| = |\sphericalangle NMB| = \varphi$, $|\sphericalangle MPX| = |\sphericalangle MPA| = 90° - \varphi$, a tedy $|\sphericalangle MXP| = 180° - (\varphi + 90° - \varphi) = 90°$. Úhel $\sphericalangle MXP$ je pravý, tedy $MX \perp XP$, takže $MN \perp AL$.

Úloha 3

Zadání:
Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$, a T je jeho těžiště. Dále nechť M je střed jeho strany BC a k kružnice se středem T a poloměrem $|TM|$. Bod N je druhý průsečík kružnice k se stranou BC (různý od M). Konečně nechť S je bod souměrně sdružený s bodem A vzhledem k bodu N. Dokažte, že platí $TS \perp BC$.

Řešení od Mgr.$^{\text{MM}}$ Klárky Grinerové



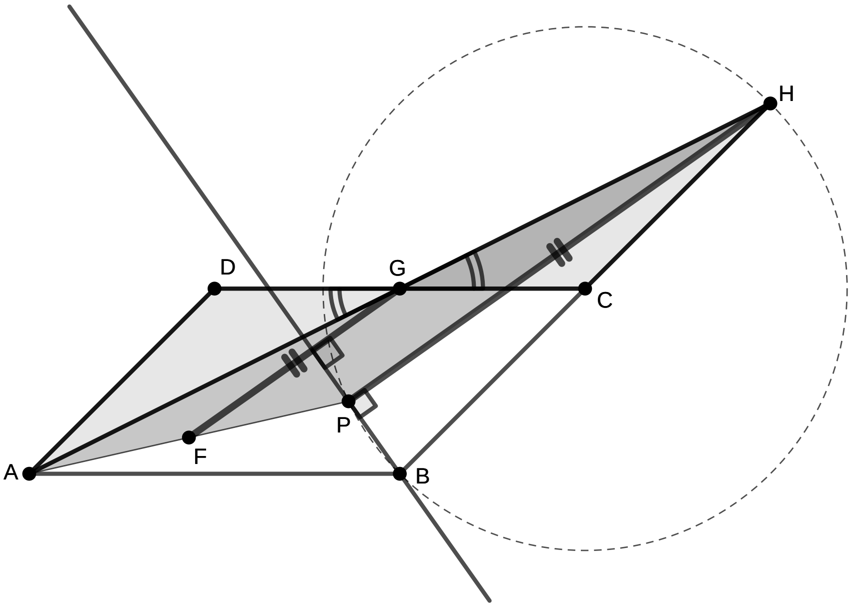
Obrázek 18: Náčrtek k Úloze 3

Bod Y je průsečík přímek TS a BC. Bod X je střed AT a zároveň druhý průsečík kružnice k s těžnicí t_a, protože těžiště dělí těžnici v poměru $1:2$, platí $|AX| = |XT| = |TM|$. Bod N je střed AS. Bod X je střed AT. XN je tedy střední příčka v trojúhelníku ATS. Proto přímka XN je rovnoběžná s přímkou TS. Trojúhelníky XMN a TMY jsou podobné. Strana XM je průměr Thaletovy kružnice k, proto je úhel $\sphericalangle MNX$ pravý. Protože trojúhelníky XMN a TMY jsou podobné, úhel $\sphericalangle MYT$ je také pravý. Úhel $\sphericalangle MYT$ je úhel mezi přímkou TS a přímkou, na které leží body Y a M, tedy přímkou BC. Přímka TS je kolmá na BC.

Úloha 4

Zadání:
Uvažujme rovnoběžník $ABCD$ s delší úhlopříčkou AC. Nechť P je vnitřní bod tohoto rovnoběžníku, pro nějž platí $|PC| = |BC|$. Dokažte, že přímka BP je kolmá k přímce, na níž leží středy úseček AP a CD.

Řešení od Mgr.^{MM} Honzy Englera:



Obrázek 19: Náčrtek k Úloze 4

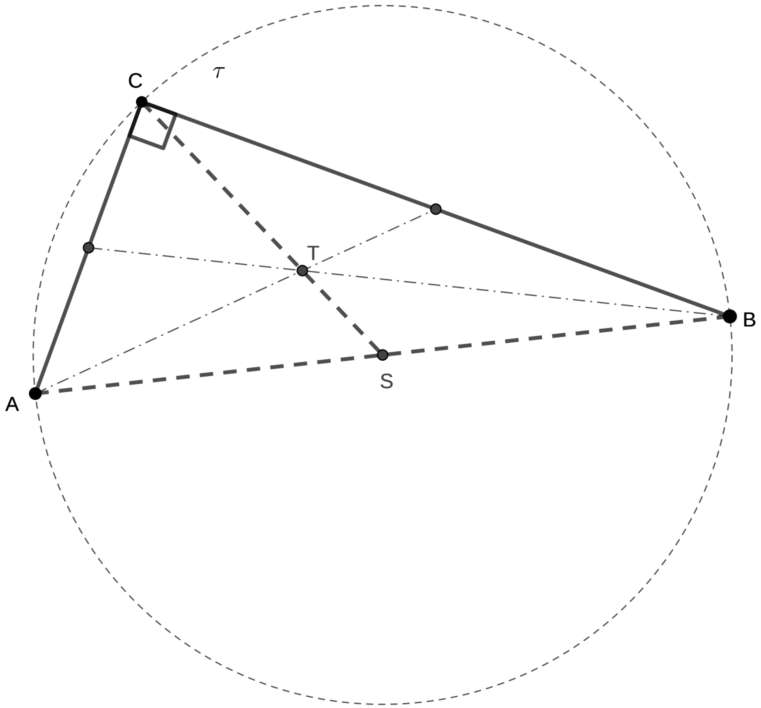
Prvně pojmenuji 3 nové body: F je střed strany AP, G střed strany CD a H je bod středově souměrný s B vzhledem k C. Pak platí $|HC| = |BC| = |AD|$ ($ABCD$ je ze zadání rovnoběžník). Úhly $|\sphericalangle DGA|$ a $|\sphericalangle CGH|$ jsou vrcholové. vrcholové. Z definice G plyne $|DG| = |GC|$, a z rovnoběžnosti $ABCD$ $|\sphericalangle ADG| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle HCG|$. Trojúhelníky ADG a HCG jsou podle *sus* shodné.

Ze shodnosti ADG a HCG plyne $|AG| = |GH|$, takže FG je střední příčka v trojúhelníku APH a $FG \parallel PH$. Nakonec BH je průměr kružnice opsané trojúhelníku BPH ($|BC| = |PC| = |HC|$), platí tedy $|\sphericalangle BPH| = 90°$, a protože PH a FG jsou rovnoběžné, platí, že FG je kolmé na BP.

Úloha 6

Zadání:

V trojúhelníku ABC je délka těžnice spojující vrchol C a střed strany AB rovna polovině délky strany AB. Dokažte, že těžiště trojúhelníku ABC, střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a vrchol C leží na jedné přímce.



Obrázek 20: Náčrtek k Úloze 6

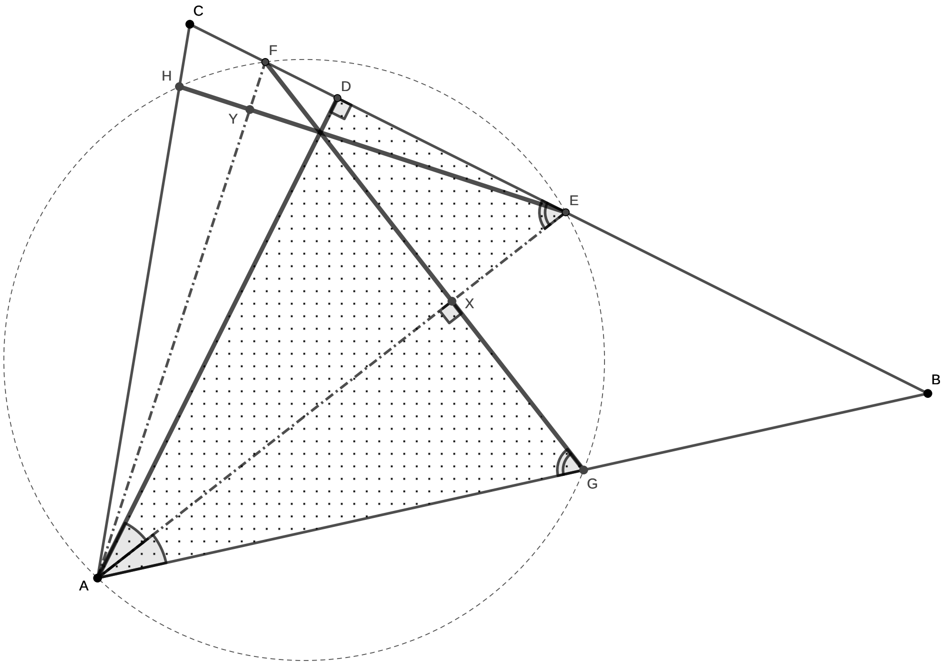
Řešení:

Označíme-li S střed strany AB, zadání nám říká, že $|CS|$ (délka těžnice z bodu C) je stejně dlouhá jako $|AS| = |BS|$ (polovina délky strany AB). Tedy $|CS| = |AS| = |BS|$, S je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Nyní chceme dokázat, že tento střed, těžiště a bod C leží na jedné přímce – tedy stačí ukázat, že těžiště leží na přímce určené bodem C a středem kružnice opsané. Jelikož je však střed kružnice opsané zároveň středem strany AB, přímka CS je těžnicí, a tedy na ní nutně musí ležet těžiště.

Úloha 7

Zadání:
Nechť je AD výška v ostroúhlém trojúhelníku ABC. Průsečíky os úhlů BAD, CAD se stranou BC nazvěme po řadě E, F. Uvažujme kružnici opsanou trojúhelníku AEF. Ta protíná strany AB, AC po řadě v bodech G, H. Přímky AD, EH a FG se pak protínají v jednom bodě. Dokažte.

Řešení Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Tomáše Nguyena:



Obrázek 21: Náčrtek k Úloze 7

Označme si X a Y průsečíky přímek GF s AE a EH s AF. Víme, že $|\sphericalangle GAE| = |\sphericalangle EAD|$, jelikož AE je osou úhlu GAD. Z rovnosti úhlů nad tětivou AF v tětivovém pětiúhelníku $EFHAG$ platí, že $|\sphericalangle FGA| = |\sphericalangle FEA|$. Z věty *uu* platí, že trojúhelník GXA je podobný trojúhelníku EDA. Platí tedy, že

$$|\sphericalangle GXA| = |\sphericalangle EDA| = 90^\circ.$$

A tedy $|\sphericalangle AXF| = 90^\circ$, z čehož vyplývá, že FX je výška na stranu EA v trojúhelníku EFA.

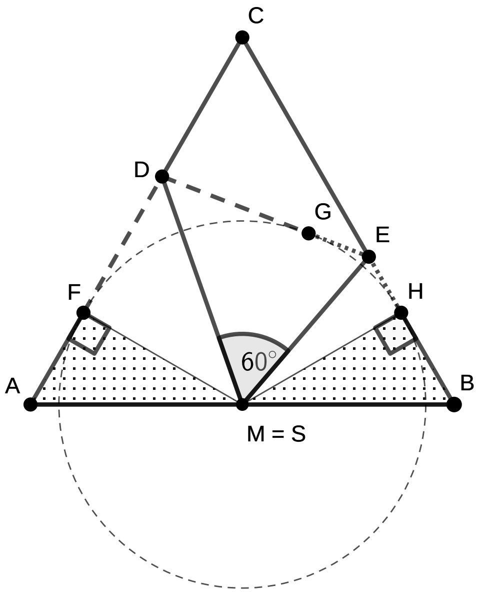
Analogicky bychom dokázali, že i EY je výška na AF v tomto trojúhelníku. AD, EY a FX jsou tedy výšky v trojúhelníku a tím pádem se protínají v jednom bodě – průsečíku výšek.

Úloha 8

Zadání:
Bod M je středem strany AB rovnostranného trojúhelníku ABC. Body D a E leží po řadě na stranách AC a BC tak, že platí $|\sphericalangle DME| = 60^\circ$. Dokažte, že platí

$$|AD| + |BE| = |DE| + \frac{1}{2}|AB|.$$

Řešení Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Tomáše Flídra:



Obrázek 22: Náčrtek k Úloze 8

Označíme-li si S střed kružnice připsané ke straně DE trojúhelníku CDE, tak musí S být na ose úhlu CDE, tedy na přímce CM. Kromě toho musí ležet na osách vnějších úhlů, takže musí platit

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle DSE| &= 180^\circ - \frac{|\sphericalangle ADE|}{2} - \frac{|\sphericalangle BED|}{2} = \\
&= 180^\circ - \frac{180^\circ - |\sphericalangle CDE|}{2} - \frac{180^\circ - |\sphericalangle CED|}{2} = \\
&= \frac{|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CED|}{2} = \\
&= \frac{180^\circ - |\sphericalangle DCE|}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.
\end{aligned}$$

Zároveň musí být v opačné polorovině vzhledem k DE než bod C. Přímka CM prochází úsečkou DE, takže musí nutně existovat jen jeden takový bod S, aby $|\sphericalangle DSE| = 60°$, S leží na CM a vyhovoval i požadavek o správné polorovině. Tyto vlastnosti ale ze zadání splňuje bod M, takže musí nutně platit $S = M$.

Označíme-li si body dotyku této kružnice připsané a přímek AD, DE resp. EB jako F, G resp. H, a tak DG a DF jsou tečny z bodu D, takže $|DG| = |DF|$. Obdobně jsou tečnami z bodu E přímky EG a EH, takže $|EG| = |EH|$. Platí tedy $|DE| = |DG| + |EG| = |DF| + |EH|$. V pravoúhlém trojúhelníku AMF platí goniometricky (nebo podobností s polovinou rovnostranného trojúhelníku)

$$|AF| = |AM| \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{4}|AB|.$$

Obdobně v BMH platí ze stejného důvodu $|BH| = \frac{1}{2}|MB| = \frac{1}{4}|AB|$, takže $|BH| + |AF| = \frac{1}{2}|AB|$. V součtu tedy skutečně

$$|DE| + \frac{1}{2}|AB| = |DF| + |EH| + |AF| + |BH| = |AD| + |BE|.$$

Úloha 9

Zadání:

Schůze orgů M&M se koná v místnosti ve tvaru obecného ostroúhlého trojúhelníku ABC, kde se vchod nachází u vrcholu C a kde $b < c < a$.

První přijdou Borek, Anička a Tom, a jelikož chtějí sedět zády ke zdi, ale dostatečně daleko od sebe, sednou si postupně do středů stran a, b, c.

Pak přijde Radeček a sedne si také k nejdelší stěně a, a to tak, aby mezi ním a Tomem byla stejná vzdálenost jako mezi Borkem a Aničkou, nikoliv ale do rohu místnosti.

Po Radečkovi dorazí Karel. Rozhlédne se po místnosti a všimne si Aničky. Chtěl by si k ní sednout co nejblíže, ale nechce u ní sedět blíže než Radeček. Sedne si tedy ke stěně c tak, aby mezi ním a Aničkou byla stejná vzdálenost, jako mezi Aničkou a Radečkem, rovněž si ale nesedne do rohu.

Za další chvíli dorazí i Matej. Nechápavě kroutí hlavou, když si všimne, že všichni sedí u nějaké stěny, a aby se odlišil, rozhodne se usadit se uvnitř prostoru místnosti. Vydá se tedy nejkratší cestou ke stěně c, pak si ale všimne kruhu, který tvoří Borek, Anička a Tom. Sedne si tedy na první místo, kde jeho trajektorie protne tento kruh.

V těsném závěsu za Matejem dorazí i Faník, a protože je moc zabraný koukáním do telefonu, rozhodne se ho následovat. Když se Matej zastaví a sedne si, Faník ujde ještě jednou stejnou vzdálenost od vchodu místnosti stejným směrem a tam se usadí.

Jako poslední už klasicky dorazí Pája. Zmateně se snaží zanalyzovat zasedací pořádek, až si jí všimne Matej a řekne jí, ať se také posadí na obvod onoho kruhu, na kterém sedí on sám, a to tak, aby byla od Faníka vzdálená stejně, jako je Matej vzdálen od Borka.

Pája se posadí na toto místo (ale zároveň co nejblíže k vrcholu B) a schůze může konečně začít.

Úloha 9.1 [5b+]: *Jak daleko od sebe sedí tito lidé? Délky se snažte vyjádřit pomocí* a, b, c*, případně jiných vzdáleností mezi organizátory. Nezapomeňte svůj výsledek pořádně odůvodnit.*

a) Radeček a Anička

b) Borek a Karel

c) Pája a Matej

d) Borek a Pája

e) Pája a Karel

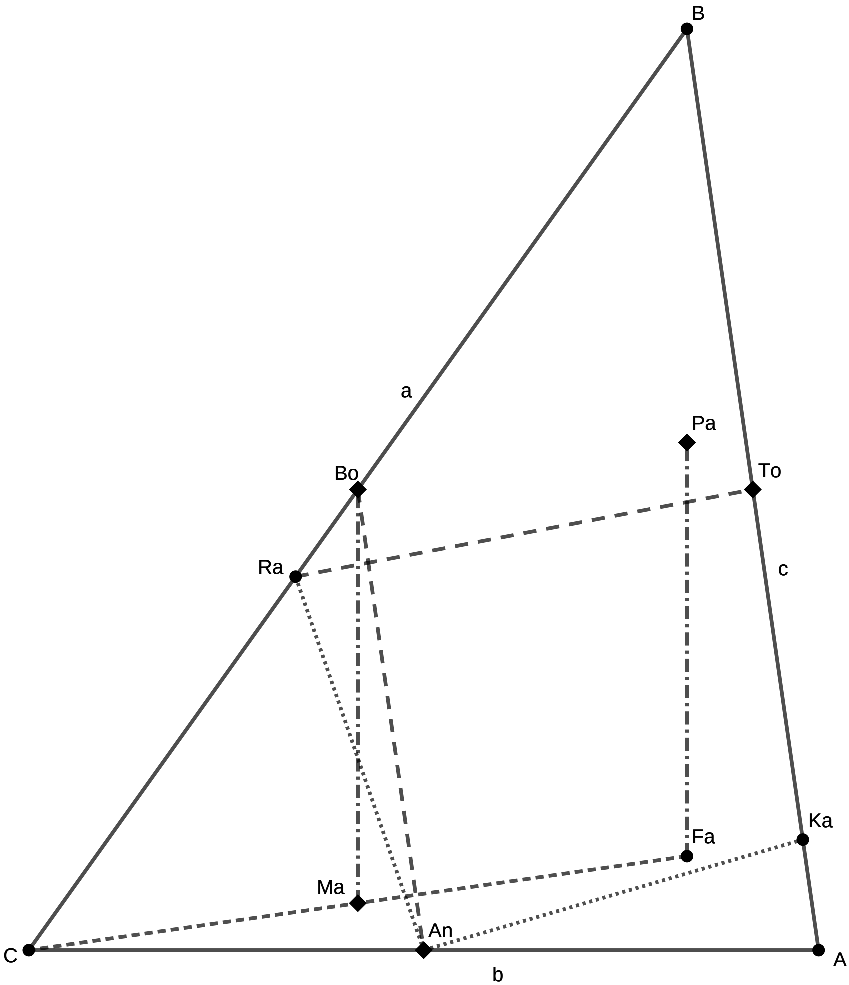
Řešení:
Body vyjadřující pozice orgů budeme nazývat prvními dvěma písmeny jejich jména.

a) Pozice Borka, Aničky a Toma jsou jasně dané – všichni sedí ve středech stran trojúhelníka. Uvědomme si ale, kam se posadí Radeček. Platí $|RaTo| = |AnBo|$. Protože $AnBo$ je střední příčka, její délka je $\frac{1}{2}c$. Pak $|RaTo| = |ATo| = |ToB|$, což znamená, že A, Ra a B leží na Thaletově kružnici se středem v To – úhel $\sphericalangle ARaB$ je tedy pravý. ARa je výška na stranu a. Z toho vyplývá, že i úhel $\sphericalangle CRaA$ musí být pravý, a tedy že C, Ra a A leží na Thaletově kružnici, tentokrát se středem v An. Vzdálenost An a Ra je tedy stejná jako AAn, což je $\frac{1}{2}b$.

b) Pokračujme v podobné úvaze. Ze zadání $|AnRa| = |AnKa|$, tedy i $|AnKa| = \frac{1}{2}b$. Ka tedy leží na stejné Thaletově kružnici nad průměrem AC, a úhel $\sphericalangle CKaA$ je také pravý. CKa je tedy opět výškou, tentokrát na stranu c. Proto i úhel $\sphericalangle BKaC$ musí být pravý, Ka leží na Thaletově kružnici nad průměrem BC, a musí platit $|BoKa| = |BBo| = |BoC|$. Vzdálenost Bo a Ka je tedy $\frac{1}{2}a$.

Pro snadné odpovězení zbytku otázek si dokážeme následující – že Pája sedí na středu úsečky FaB.

Představme si rozložení orgů popsané v zadání bez Páji. Teď na chvíli zapomeňme na zadané podmínky pro pozici Páji, a posaďme ji do středu úsečky FaB. Lehce pak dokážeme, že tato pozice splňuje zadané podmínky – tedy že sedí na kružnici $AnBoTo$ a že platí $|PaFa| = |MaBo|$.

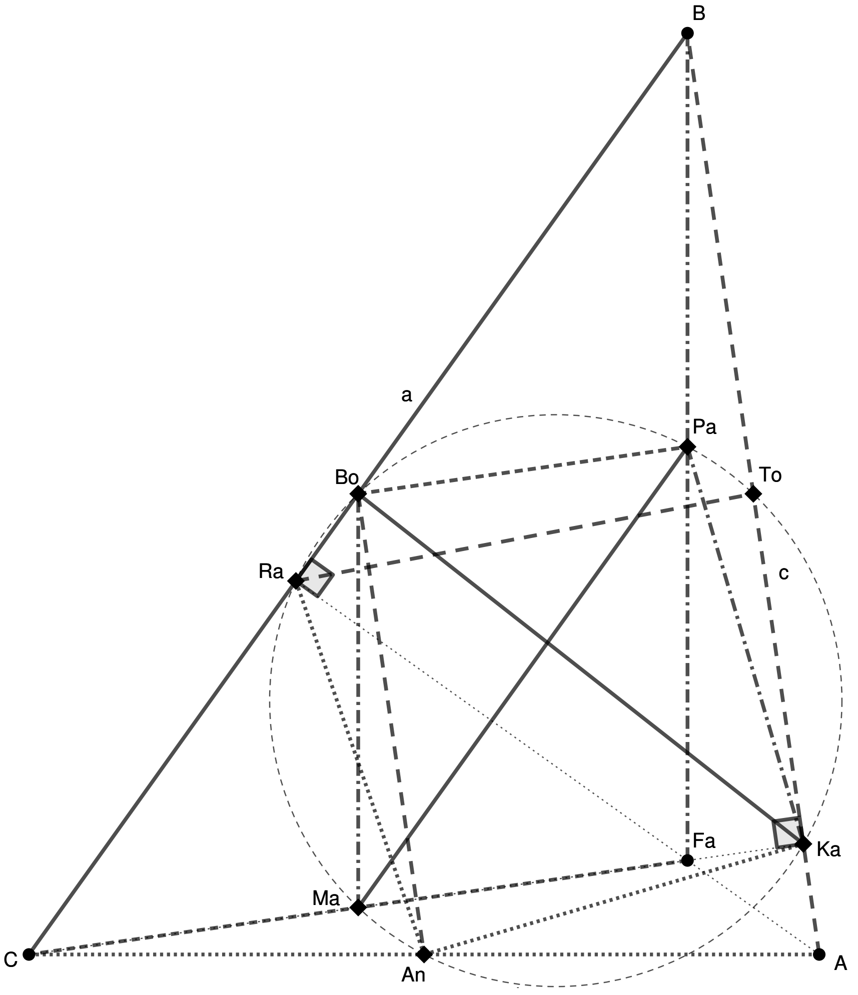


Obrázek 23: Zadání Úlohy 9.1. Body označené čtverečky sedí dle zadání na kružnici.

První si uvědomme, že body C, Ma, Fa a Ka se nacházejí na jedné přímce – výšce na stranu c. Výše už jsme ukázali, že Ka je skutečně patou výšky na stranu c. Snadno si uvědomíme, že „nejkratší cesta“, kterou se Matej vydal, je kolmice na danou stranu – a Fa se pohybuje po stejné přímce. Všechny tyto body na této přímce tedy skutečně leží.

Trojúhelník $FaKaB$ je tedy pravoúhlý – a jelikož Pa je středem přepony, platí $|FaPa| = |KaPa| = |BPa|$.

Nyní se podívejme na trojúhelník $CFaB$. Protože Ma je ze zadání středem CFa, Pa z předpokladu střed FaB a Bo ze zadání střed BC, $MaBo$ a $BoPa$ jsou



Obrázek 24: Nákres důkazu Úlohy 9.1

středními příčkami v tomto trojúhelníku. Platí tedy i $MaBo| = \frac{1}{2}|FaB| = |FaPa|$ a $|BoPa| = \frac{1}{2}|CFa| = |MaFa|$.

Vidíme tedy, že pro Pa jako střed FaB platí $|PaFa| = |MaBo|$. Stačí nám už jen dokázat, že střed FaB leží na kružnici obsahující Ma, Bo a Ka (v tomto bodě předpokládáme, že Ka leží na kružnici ze zadání obsahující středy stran – není těžké to dokázat, je ale důležité si uvědomit, že to neplyne ze zadání automaticky. Stačí ale například ukázat, že $KaToBoAn$ je rovnoramenný lichoběžník – AB a $AnBo$ jsou rovnoběžné, což víme ze zadání, a už jsme dokázali, že $|AnKa| = |AnRa| = |BoTo|$. To nám stačí, neb každý rovnoramenný lichoběžník je tětivový).

Pro to znovu využijeme vlastnost rovnoramenných lichoběžníků. Protože $BoPa$ je střední příčka, platí, že $BoPa$ je rovnoběžné s $MaKa$. Z pravoúhlosti $FaKaB$ víme, že $|FaPa| = |KaPa|$, což jsme dokázali, že je rovno i $|MaBo|$. Proto je $KaPaBoMa$ rovnoramenný lichoběžník a všechny body leží na jedné kružnici – tedy naši kružnici ústřední.

Tímto jsme ukázali, že střed FaB vyhovuje podmínkám pro pozici Pa. Nabízí se otázka, jestli je to jediný takový to bod – v zadání je ale upřesněno, že Pája má sedět co nejblíže k bodu B. Můžeme si rozmyslet, že všechny ostatní body splňující podmínky ze zadání leží od B dále než střed FaB.

c) Znovu se podívejme na trojúhelník $CFaB$. $MaPa$ je střední příčka v tomto trojúhelníku, proto $|MaPa| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|a|$.

d) Jak už jsme si ukázali výše, i $BoPa$ je střední příčka v $CFaB$, proto $|BoPa| = \frac{1}{2}|CFa| = |MaFa|$.

e) Jelikož je $KaPaBoMa$ rovnoramenný lichoběžník, platí $|KaPa| = |MaBo|$.

Úloha 9.2 [3b+]: *Po pár minutách ale Faníkovi dojde, že si sednul špatně a zdaleka nesedí uprostřed kruhu tak, jak by se mu líbilo. Chtěl by se tedy přesunout tak, aby byl stejně vzdálen od všech ostatních osob v místnosti.*

Existuje v místnosti takové místo? A pokud ano, o kolik se bude muset posunout ze stávající pozice?

Řešení:

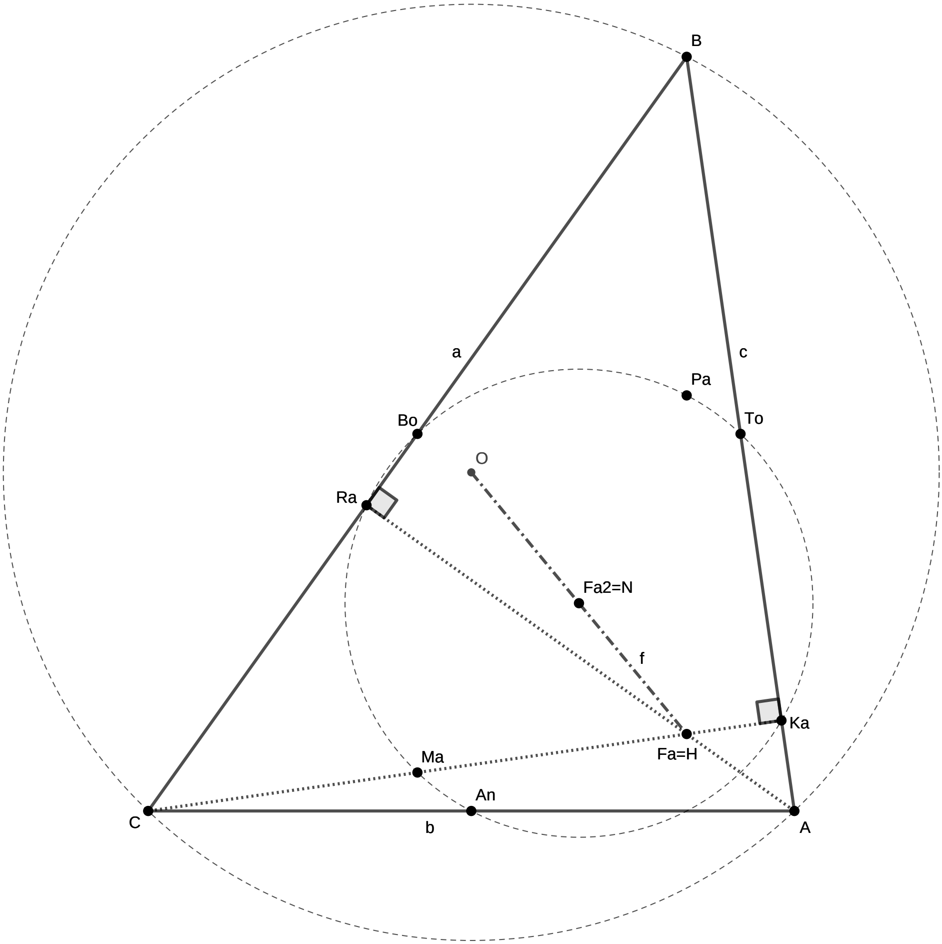
S řešením této úlohy nám pomůže tvrzení, které někteří z vás použili i v řešení první podúlohy (a tím pádem si ušetřili práci s dokazováním některých věcí – chtěli jsme vám ale ukázat, že úloha šla vyřešit kompletně i bez znalosti tohoto tvrzení). Jedná se o takzvanou *Feuerbachovu kružnici* – někdy taky zvanou jako *kružnice devíti bodů.*

O co se jedná? Toto tvrzení nám v podstatě říká, že v každém trojúhelníku existuje kružnice, na které leží devět bodů – středy všech stran, paty výšek a středy spojnic všech vrcholů s průsečíkem výšek.

Podívejte se znovu na zadanou úlohu a třeba to najednou uvidíte jasněji. An, Bo, To jsou středy stran. Ra a Ka, jak jste si ukázali, jsou paty výšek, leží tedy na téže kružnici (a i když jsme ukázali, že to lze dokázat i bez tohoto tvrzení). Ma a Pa jsou po řadě středy spojnic CFa, BFa, a také leží na ústřední kružnici.

Co z toho tedy plyne? Jak někteří správně uhádli, místo, kde sedí Faník, je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC.

Rovněž jsme si ukázali, že všichni – krom Faníka – skutečně sedí na obvodu jediné kružnice. Určitě tedy existuje místo, odkud bude Faník od všech stejně vzdálen – a to je střed této kružnice.



Obrázek 25: Body ze zadání Úlohy 9.2 a Eulerova přímka

Střed Feuerbachovy kružnice se značí zpravidla N a leží na *Eulerově přímce* trojúhelníku. To je přímka, na které leží průsečík výšek, střed kružnice opsané a těžiště trojúhelníku – a tedy i střed Feuerbachovy kružnice. Pozoruhodný je i fakt, že tyto body leží na Eulerově přímce vždy ve stejném poměru vzdáleností. Těžiště trojúhelníku se nachází ve $\frac{2}{3}$ vzdálenosti od průsečíku výšek H a středu kružnice opsané O. Střed Feuerbachovy kružnice se nachází na středu úsečky HO.

Aby Faník byl ode všech stejně vzdálen, musí se tedy posunout o $\frac{1}{2}|OH|$ směrem ke středu kružnice opsané.

Vzorová řešení 2. dílu – Nerovnosti

Úloha 1

Zadání:
Máme a, b, c celá čísla, která nejsou rovna nule. Dále víme, že platí:

$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$$

Dokažte, že $a+b+c \leq 0$.

Řešení:
Jako první si zadaný výraz upravme. Jelikož se b, $(b+c^2)$ nachází ve jmenovateli zlomků, a tím pádem jsou nenulové, můžeme jimi vynásobit zadanou rovnost a bude stále platná. Získáme

$$ab = (a+c^2)(b+c^2)$$

Závorky roznásobíme a získáme

$$ab = ab + bc^2 + ac^2 + c^4$$

Výraz zjevně můžeme dále upravovat

$$0 = bc^2 + ac^2 + c^4$$

$$0 = c^2(a+b+c^2)$$

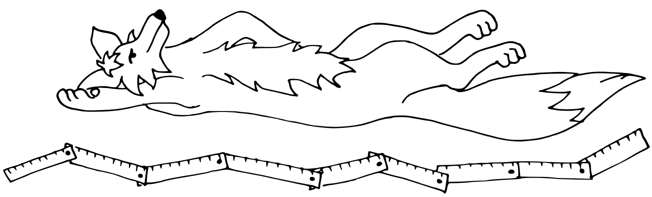
Co tedy nyní víme? Jelikož součin dvou výrazů, c^2, $(a+b+c^2)$, je roven 0, jeden z nich musí být také roven 0. Ze zadání platí, že $c \neq 0$, tedy i $c^2 \neq 0$. Musí tedy platit, že

$$0 = a+b+c^2$$

Už jsme skoro u konce. Pro libovolné celé číslo platí, že $c^2 \geq c$ (klidně si to zkuste dokázat). Proto platí

$$0 = a+b+c^2 \geq a+b+c$$

Ekvivalentními úpravami jsme se od předpokladu dostali k zadané nerovnosti, důkaz je tedy hotov.



Úloha 2

Zadání:
Mějme reálná čísla a, b. Dokažte, že platí:

$$a^4 + b^4 \geq a^2(b^2 + 2b - 1)$$

Řešení:
V tomto důkazu použijeme dvakrát vzoreček $(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2$, nejdřív pro $x = a^2$, $y = b^2$, a potom pro $x = b$, $y = 1$.

Od obou stran odečteme $2a^2b^2$, abychom na levé straně dostali čtverec (tedy druhou mocninu nějakého reálného výrazu).

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &\geq a^2(b^2 + 2b - 1) \\ a^4 - 2a^2b^2 + b^4 &\geq a^2(b^2 + 2b - 1) - 2a^2b^2 \\ (a^2 - b^2)^2 &\geq a^2(b^2 + 2b - 1 - 2b^2) \end{aligned}$$

Pravou stranu upravíme na součin čtverců a převedeme na levou stranu.

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)^2 &\geq a^2(-b^2 + 2b - 1) \\ (a^2 - b^2)^2 &\geq -a^2(b^2 - 2b + 1) \\ (a^2 - b^2)^2 &\geq -a^2(b - 1)^2 \\ (a^2 - b^2)^2 + a^2(b - 1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Jak víme, druhé mocniny výrazů jsou vždy nezáporné, takže na levé straně máme součet nezáporných výrazů. Ten je jistě větší roven nule. Jelikož jsme na dokazovanou nerovnost používali ekvivalentní úpravy a dostali jsme obecně platné tvrzení, víme, že platí i naše nerovnost.

Úloha 3

Zadání:
Dokažte, že $a + \frac{1}{a} \geq 2$, kde a je kladné reálné, a rovnost nastane v případě, že $a = 1$.

Řešení:
Chceme dokázat, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}^+$ platí $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Jelikož je a nenulové a kladné, můžeme jím nerovnost vynásobit. Po převedení na jednu stranu a upra-

vení pomocí $(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2$ pro $x = a$, $y = 1$ postupně dostáváme

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &\geq 2 \\ a^2 + 1 &\geq 2a \\ a^2 - 2a + 1 &\geq 0 \\ (a-1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

To zjevně platí, takže platí i dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane právě tehdy, když $(a-1)^2 = 0$, a tedy když $a = 1$.

Úloha 4

Zadání:
Nechť jsou a, b kladná reálná čísla. Dokažte, že platí:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2(a + b - ab)$$

Řešení:
Tentokrát se k řešení postavíme z trochu jiného konce. Víme, že platí následující

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

pro libovolné kladné reálné a. Pro libovolné kladné reálné b pak platí

$$ab + \frac{b}{a} \geq 2b$$

povšimněme si, že je to jen výše uvedená nerovnost vynásobena b. To stejné můžeme prohlásit ale i naopak. Víme, že pro b také musí platit

$$b + \frac{1}{b} \geq 2$$

Stejně tak pro a musí platit

$$ba + \frac{a}{b} \geq 2a$$

Teď tyto dvě rovnice sečtěme. Získáme

$$\begin{aligned} ab + \frac{b}{a} + ba + \frac{a}{b} &\geq 2b + 2a \\ 2ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2a + 2b \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2(a + b - ab) \end{aligned}$$

Vidíme, že jsme se od obecně platného tvrzení ekvivalentními úpravami dostali k zadané nerovnosti. Důkaz je tedy hotov.

Úloha 5

Zadání:
Zkuste odhadnout, pro jaká $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastává v AG nerovnosti rovnost. Důkaz výjimečně uvádět nemusíte.

Řešení Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Emmy Beranové:

> Pro AG nerovnost pro n členů nastává rovnost, pokud $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Pak nerovnost vypadá takto:
>
> $$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_n} \\ \frac{n \cdot x_1}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1^n} \\ x_1 &= x_1 \end{aligned}$$
>
> A z toho již lze jasně vidět, že v takovém případě platí rovnost.[6]

Úloha 6

Zadání:
Mějme kladná reálná čísla x, y. Dokažte, že platí:

$$x^2y^2 + x^2 + y \geq x^2y + 2xy$$

Pro která x, y nastane rovnost?

Řešení:
Pojďme při řešení zkusit využít AG nerovnost

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Pro začátek si zvolíme $a = x^2y^2$, $b = x^2$. Pak platí

$$\begin{aligned} \frac{x^2y^2 + x^2}{2} &\geq x^2y \\ x^2y^2 + x^2 &\geq 2x^2y \end{aligned}$$

První dva členy jsou shodné s nerovností, kterou se snažíme dokázat, na pravé straně máme ale x^2y pouze jednou. Co s tím? K oběma stranám původní nerovnosti přičteme x^2y a tím si upravíme výchozí nerovnost do podoby

$$x^2y^2 + x^2 + x^2y + y \geq 2x^2y + 2xy.$$

[6] Ačkoliv si to zde nebudeme dokazovat, tak vězme, že rovnost v AG je právě tehdy, když se všechny členy rovnají.

Když dokážeme, že platí tato nerovnost, určitě platí i nerovnost ze zadání.

Víme, že platí $x^2y^2 + x^2 \geq 2x^2y$, stačí nám tedy dokázat „doplněk“, tedy že platí

$$\frac{x^2y + y}{2} \geq \sqrt{x^2y \cdot y}$$
$$x^2y + y \geq 2xy$$

To je ale upravená AG nerovnost pro $a = x^2y$, $b = y$. Nerovnost ze zadání je tedy pouhým součtem dvou platných AG nerovností, a tím pádem je dokázána.

Úloha 7

Zadání:
Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí:

$$x + y + z + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2yz} + \frac{1}{2xz} \geq \frac{9}{2}$$

Pro která x, y, z nastane rovnost?

Řešení:
Chceme dokázat, že součet několika výrazů je větší než nějaká konstanta. Jak na to jít? Víme, že užitečným nástrojem může být AG nerovnost. Ta nám například říká, že

$$\frac{x + y + z + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2yz} + \frac{1}{2xz}}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{x \cdot y \cdot z}{2xy \cdot 2yz \cdot 2xz}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2^3xyz}}.$$

Jenže napravo jsme nedostali konstantu. Nemůžeme sčítance nalevo nějak jednoduše upravit, aby se nám v součinu napravo proměnné x, y, z pokrátily? No jistě, pokud x rozepíšeme jako $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ a stejně tak y a z, dostaneme

$$\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2yz} + \frac{1}{2xz}}{9} \geq \sqrt[9]{\frac{x^2y^2z^2}{2^9x^2y^2z^2}} = \sqrt[9]{\frac{1}{2^9}} = \frac{1}{2}$$

Po vynásobení celé nerovnosti číslem 9 dostáváme

$$x+y+z+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2yz}+\frac{1}{2xz} = \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z}{2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2yz}+\frac{1}{2xz} \geq \frac{9}{2},$$

což jsme přesně chtěli dokázat.

Víme, že rovnost v AG nerovnosti nastane právě tehdy, když se všechny prvky rovnají, tedy zde pokud $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} = \frac{1}{2xy} = \frac{1}{2yz} = \frac{1}{2xz}$, tedy pokud $x = y = z = \frac{1}{x^2}$, tedy pokud $x^3 = 1$, tedy $x = y = z = 1$.

Úloha 8

Zadání:
Mějme kladná reálná a, b, c. Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{abc}(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9$$

Řešení:
V této úloze je jediným trikem úprava výrazu na levé straně.

$$\frac{1}{abc}(a+b+c)(ab+bc+ca) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Nyní už je řešení vskutku jednoduché. Dosazením do CS nerovnosti získáme

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2$$

Uvědomme si, že platí

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} = 1$$

Proto platí

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9$$

Pomocí ekvivalentních úprav jsme dokázali, že zadaná nerovnost je jen upravená CS nerovnost, a tedy jistě platí.

Úloha 9

Zadání:
Nechť je a kladné reálné. Pak platí $a^2 + \frac{1}{a} \geq a+1$. Dokažte.

Řešení:
Jednoduše využijeme „zlomkovou“ verzi CS nerovnosti pro dva členy.

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2} \geq \frac{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}{y_1+y_2}$$

Podívejme se na levou stranu nerovnosti, kterou máme dokázat. Jeden zlomek tam již máme, druhý snadno získáme podělením jedničkou. Pak už jen dosazujeme.

$$\frac{a^2}{1}+\frac{1}{a} \geq \frac{\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{1}\right)^2}{1+a} = \frac{(a+1)^2}{1+a} = a+1$$

Vidíme tedy, že zadaná nerovnost platí.

Úloha 10

Zadání:
Mějme α, β, γ úhly v ostroúhlém trojúhelníku. Určete maximální hodnotu výrazu $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.

Řešení:
Maximální hodnotu tohoto výrazu si označme jako M. Potom musí platit, že

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq M$$

První si musíme odůvodnit, že v tomto případě skutečně můžeme použít Jensenovu nerovnost. Úhly alfa, beta, gama jsou ze zadání úhly v ostroúhlém trojúhelníku, všechny jsou tedy v rozmezí 0 až 90 stupňů. Na tomto intervalu je cosinus skutečně konkávní, proto můžeme takto Jensenovu nerovnost na odhad skutečně použít. Nyní si tedy napišme Jensenovu nerovnost pro levou stranu.

$$\frac{1}{3}\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right) \leq \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

Jako v ukázkovém příkladě využijeme fakt, že součet úhlů v trojúhelníku je 180°.

$$\frac{1}{3}\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right) \leq \cos\left(\frac{180^\circ}{3}\right) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

Maximální hodnota výrazu je tedy rovna $\frac{3}{2}$.

Jane; pallova.jane@gmail.com
e-mailová konference: olymp@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz

Téma 4 – Počítač z nul a jedniček

Vítejte u dalšího dílu hradlového tématka! Co nás tentokrát čeká? Nejprve se budeme věnovat pamětem a ukážeme si hodinový signál. Pak si zrekapitulujeme, co zatím víme o záporných číslech a ukážeme řešení některých úloh z prvního a druhého dílu. Na závěr si budete moci přečíst článek od Bc.MM Michala Pavlíčka, který popisuje jednu z možností, jak si hradla poskládat z běžných elektrických součástek. Tak hurá do toho!

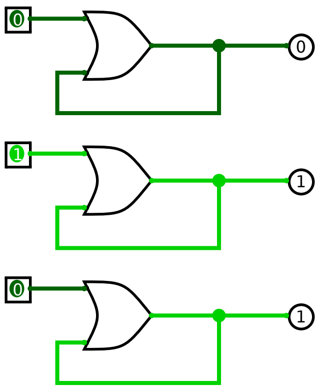
Paměti

Na konci minulého dílu našeho tématka jsme zadali dvě úlohy:

Zadání:
Postavte hradlovou síť, která na výstupu vrací 1, pokud už někdy na vstupu byla 1. Na začátku je na vstupu i výstupu 0.

Zadání:
Upravte síť z předchozí úlohy tak, aby šla resetovat, tedy nějakým způsobem zařídit, aby na výstupu opět byla 0, dokud se na vstupu opět neobjeví jednička.

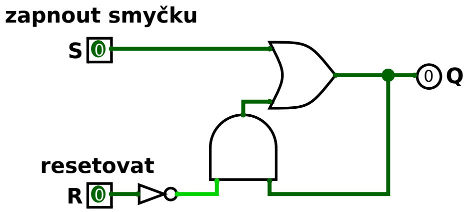
Jednoduché řešení nám zaslal Mgr.MM Jan Engler:

> Celý postup jde vidět na následujícím obrázku[7]:
>
> 
>
>
> **Obrázek 26:** Nevypnutelný obvod Mgr.MM Jana Englera

[7]Některým z vás na začátku Logisim kreslil část obvodu červeně. To je dáno tím, že nezapojená hradla mají v Logisimu na výstupu speciální červenou hodnotu vyjadřující nedefinovaný výsledek. Pokud jste tuto hodnotu pak přivedli na vstup OR, zůstala tam i po dokončení obvodu. Obvod nicméně i přesto po zapnutí vstupu fungoval správně.

Hradlo OR vede samo do sebe, takže po zapnutí vstupu jeho výstup svítí donekonečna.

Vypnout smyčku můžeme třeba tak, že do ní vložíme hradlo AND, jehož druhý vstup bude trvale zapnutý, dokud nezapneme vstup Reset. Celý obvod je vidět na obrázku 27.



Obrázek 27: A už jde i vypnout.

Mohli jste si všimnout, že řešení druhé úlohy se podobá jednoduché paměti. Vstup S nastavuje výstup na 1, R na nulu, a když se neděje nic, zůstává výstup stejný. Pokud bychom zapnuli zároveň S i R, nestane se nic zajímavého – jen se vstup zkopíruje na výstup. Po „vypnutí“ obou signálů ale na výstupu může zůstat libovolná hodnota, podle toho, jestli se „stihne vyhodnotit“ dřív AND, nebo OR. Proto si chceme zakázat posílání jedničky na oba vstupy.

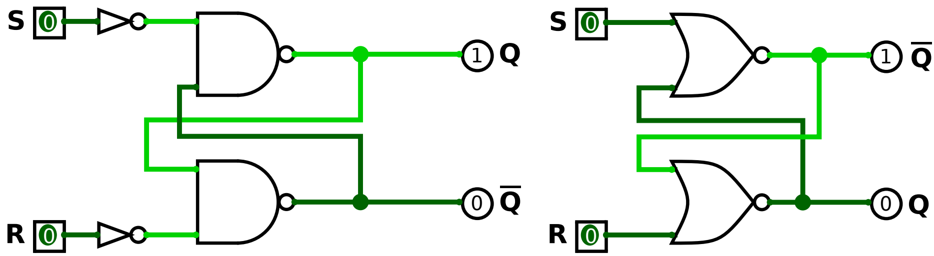
Podobných jednoduchých pamětí existuje více a říká se jim *S-R latch*, podle vstupů: Set a Reset (pořadí písmen se někdy prohazuje).[8] Všechny ale mají společnou pravdivostní tabulku 1. Výstup se běžně označuje Q, často je jednoduché i vyvést negaci výstupu, $\bar{Q}$.

S	R	Q
0	0	Poslední nastavený
0	1	0
1	0	1
1	1	Zakázaný stav

Tabulka 1: Pravdivostní tabulka S-R latche

A které že takové paměti existují? Vy jste si výše postavili S-R AND-OR latch, často se používají S-R NOR latch a S-R NAND latch, viz obrázek 28. Jejich oblíbenost je dána tím, že hradla NAND a NOR jsou univerzální (jak jste buď nahlédli nebo nahlédnete níže ve vzorových řešeních), což z nich dělá základní hradla pro reálný návrh obvodů.

[8] Český ekvivalent anglického *latch* je *klopný obvod*. V literatuře se tento termín vyskytuje, ale my jej používat nebudeme, protože nám přijde zbytečně dlouhý.



(a) S-R NAND latch **(b)** S-R NOR latch

Obrázek 28: Další S-R latche

Pokud se velmi pečlivě zamyslíte nad zapojením našich latchů, možná si všimnete, že změna zapamatované hodnoty probíhá trochu zvláštně: některým hradlům se změní vstup podle toho, jak se změnil jejich výstup, a celá síť se tedy nedá vyhodnotit „najednou“. Budeme tedy muset mírně upravit naši představu o chování hradel. Budeme předpokládat, že i těm nejzákladnějším hradlům nějakou krátkou dobu *trvá*, než od změny svých vstupů změní svůj výstup. Ekvivalentně si můžeme představit, že se hradla, jimž se změní vstupy, vyhodnotí v nějakém (neznámém) pořadí, a případné změny jejich výstupů pak vynutí vyhodnocení dalších hradel. Na toto pořadí se nemůžeme spoléhat,[9] proto si některé operace zakazujeme, viz výše.

D latch

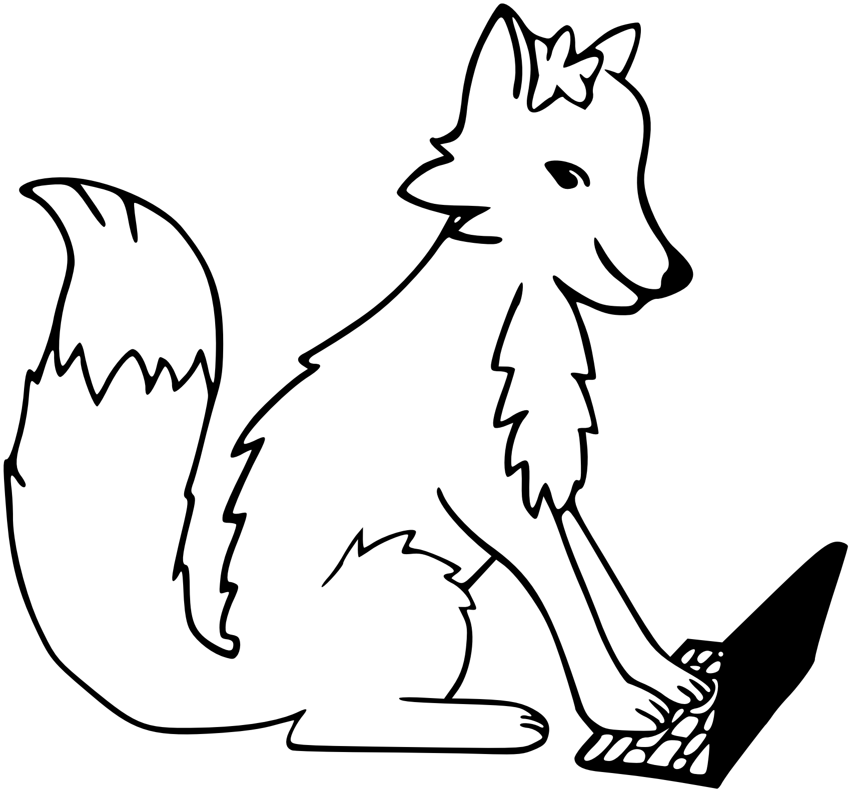
S-R latche nejsou moc praktické, neboť musíme rozlišovat, jestli chceme zapisovat do paměti 1 nebo 0, a podle toho zapnout příslušný drát. Tento problém řeší D latch (jako delay, česky lze přeložit jako *zdrž*, zkráceně se mu říká „Déčko“). Ten má dva vstupy, řídicí vstup E a datový vstup D, a výstup Q, případně opět i s negací $\bar{Q}$. Pokud je řídicí vstup vypnutý, je na výstupu poslední hodnota, naopak pošleme-li na řídicí vstup 1, propouští se na výstup aktuální obsah vstupu D. Všimněte si, že tenhle obvod už nemá zakázaný stav, viz pravdivostní tabulku 2.

D	E	Q
0	0	Poslední nastavený
1	0	Poslední nastavený
0	1	0
1	1	1

Tabulka 2: Pravdivostní tabulka D latche

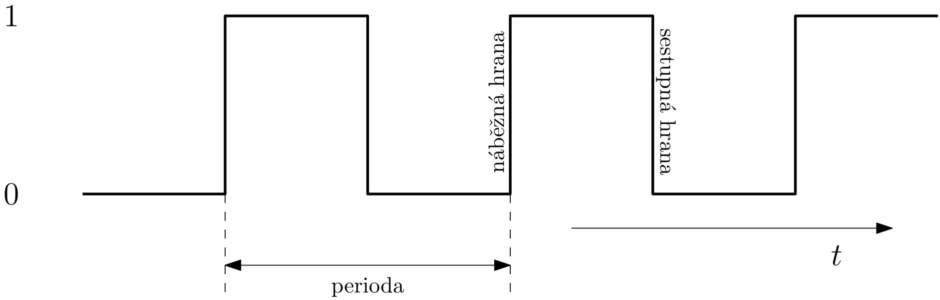
Úloha 1 [2b]: *Postavte D latch z obvodů, které už znáte. Nezapomeňte popsat vstupy a napsat, jak jste k výsledku došli.*

[9] nejsme-li si jistí přesnou konstrukcí hradel



Hodinový signál

Další součástkou, která se nám bude hodit, bude hodinový signál. Ten neumíme postavit z hradel, bude to tedy samostatná součástka, která bude mít jen jeden výstup a žádný vstup. Výstup se bude periodicky měnit způsobem naznačeným na obrázku 29.



Obrázek 29: Průběh hodinového signálu v čase

Základním parametrem hodin bude *perioda*, tedy doba trvání jednoho cyklu jednička–nula. Častěji se uvádí *frekvence*, což je jen převrácená hodnota periody v sekundách; jednotkou frekvence je *Hertz*, značka Hz. Pro naše účely bude stačit si představovat, že se nula na jedničku skutečně mění skokově.

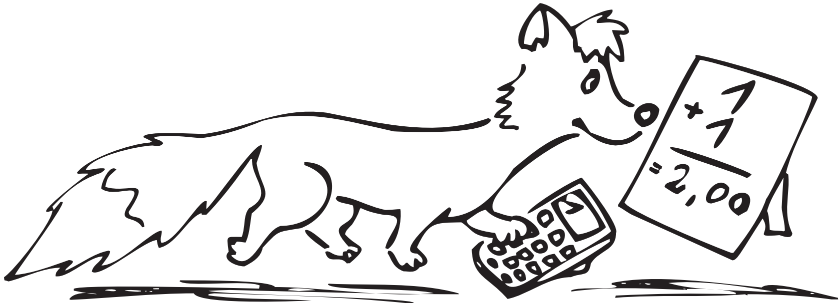
Pravidelně se měnící signál lze pak použít třeba k získání signálu nezávislého na tom, jak se mění vstup „od uživatele“. Můžeme to využít v případě, že chceme provádět různé kroky algoritmu, nebo třeba k automatickému počítání.

Úloha 2 [3b]: *Vyrobte obvod, který bude v binární soustavě po jedné počítat, jak tikají hodiny. Co můžeme dělat, pokud napočítáme do nejvyššího čísla? Jak se takový stav pozná?*

Problém 3 : *Jak můžeme pamětmi a hodinami vylepšit naši kalkulačku? Umožní nám to stavět věci, které ještě neumíme?*

Ještě podotkněme, že se často používají varianty D obvodů, které propouštějí vstup jen v okamžiku, kdy se na řídícím vstupu zrovna mění 0 na 1, tedy na tzv. *náběžné hraně.* V Logisimu je tato verze výchozí a vy si ji můžete zkusit postavit sami.

Úloha 4 [2b]: *Postavte D obvod, jež na výstup propustí aktuální hodnotu vstupu ve chvíli, kdy se řídící vstup změní z 0 na 1. Jinak je na výstupu poslední nastavená hodnota.*



Záporná čísla

Problém 9 (27.1): *Zatím jsme sčítali a odčítali jen kladná čísla, ale budeme chtít umět pracovat i se zápornými čísly. Zkuste vymyslet, jak pouze pomocí jedniček a nul „zakódovat“ celá čísla (třeba z nějakého rozsahu). Zkuste se taky zamyslet, jaké mají vaše reprezentace výhody a nevýhody a v čem se změní sčítání a odčítání oproti situaci jen s kladnými čísly.*

Problém ohledně reprezentace celých čísel, tedy kladných i záporných, jsme zadali již v prvním dílu tématka. Od minule nám přibyl návrh čísla „posunout“. Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Boček jej popsal následovně:

> Řekněme, že pracujeme s osmibitovými čísly. Můžeme potom jednoduše říci, že 00000000 je -128, 01111111 je -1, 10000000 je nula a 11111111 je 127 (čísla mezi těmito jdou vzestupně).

Nemáme zde problém se dvěma nulami, na druhou stranu máme nulu reprezentovanou jako 10000000, nikoliv 00000000. Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Boček navrhuje tento problém vyřešit překlopením sedmého bitu, za cenu složitějšího sčítání i odčítání. Dostává tak „posunutí s překlopením MSb“.

Poslední návrh jsme dostali od Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Jiřího Kalvody.

> Zvolíme si libovolné celé n (počet bitů). Budeme reprezentovat množinu čísel $\langle -2^{n-1}; 2^{n-1} - 1\rangle$ pomocí n bitů.
>
> Kladná čísla a nulu budeme reprezentovat standardním způsobem, tedy dvojkovou soustavou. Záporná čísla pak budou reprezentována hodnotami 2^{n-1} (pro -2^{n-1}) až $2^n - 1$ (pro -1). Povšimneme si, že sčítání a odčítání čísel z uvažovaného intervalu (kde i výsledek padne do něj) funguje stejně jako u normálních čísel, protože vlastně počítáme modulo 2^n . Součet opačných čísel v této reprezentaci bude 0.

Nyní ještě připomeneme návrhy, které jsme otiskli v předchozím dílu. Budeme předpokládat, že k zakódování čísla používáme 8 bitů.

- **Znaménkový bit**

  Jeden z krajních bitů označuje, zda jde o kladné nebo záporné číslo, samotná hodnota čísla je ve zbylých sedmi bitech. Umíme tedy reprezentovat hodnoty z rozsahu $\langle -127; 127 \rangle$.

  Jako znaménkový bit můžeme použít buď nejnižší nebo nejvyšší a může být 0 pro kladná a 1 pro záporná čísla nebo naopak. Sešly se nám návrhy se všemi kombinacemi těchto možností.

- **Znaménkový bit s posunem**

  Nevýhodou výše popsaného znaménkového bitu je, že má dvě různé reprezentace pro 0. Pokud například jako znaménkový používáme nejvyšší bit a 1 značí záporná čísla, máme $10000000 = -0_{10}$ a $00000000 = +0_{10}$. Jeden z návrhů to řešil tak, že záporná čísla posunul, aby reprezentovala vždy hodnotu o jedna menší. Zbyde tedy pouze kladná nula a 10000000 nově vyjadřuje hodnotu -1_{10}. Například -6_{10} bychom pomocí „znaménkového bitu s posunem“ zapsali jako 10000101, v reprezentaci se samotným znaménkovým bitem by to bylo 10000110.

  Umíme takto pomocí 8 bitů vyjádřit hodnoty z rozsahu $\langle -128; 127 \rangle$.

Problém je stále otevřený, budeme rádi za další návrhy, ať už nové nebo zlepšení těch stávajících. Protože už ale máme hodně různorodých nápadů, je načase se zamyslet, který z nich vám připadá nejlepší.

Problém 5 : *Která z navržených reprezentací celých čísel vám připadá nejlepší? Dejte si záležet na vysvětlení, proč.*

A jak na tu kalkulačku?

Zadali jsme vám několik úloh, jejichž společným cílem bylo postavit velmi jednoduchou kalkulačku. Kromě sčítání, které jsme již předvedli v minulém čísle, jste si měli rozmyslet, jak odčítat a násobit.

Zadání:
Jak pomocí hradel odčítat?

Pokud bychom měli reprezentaci záporných čísel, mohli bychom si všimnout, že $a-b = a+(-b)$. Stačilo by nám tedy umět sčítat a převádět čísla z kladných na záporná a naopak. Na reprezentaci záporných čísel jsme se vás ptali hned v prvním čísle a problém je stále otevřený. Již se nám sešlo několik různých nápadů, můžete si je přečíst výše a zamyslet se nad nimi. Zde předvedeme řešení, které záporná čísla nezahrnuje. Budeme tedy předpokládat, že jsou obě čísla kladná a odčítáme menší od většího.

Řešení:
Budeme postupovat podobně, jako minule u sčítání, jen si tentokrát místo sčítačky postavíme odčítačku. Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Jiří Kvapil nám popsal, jak na to.

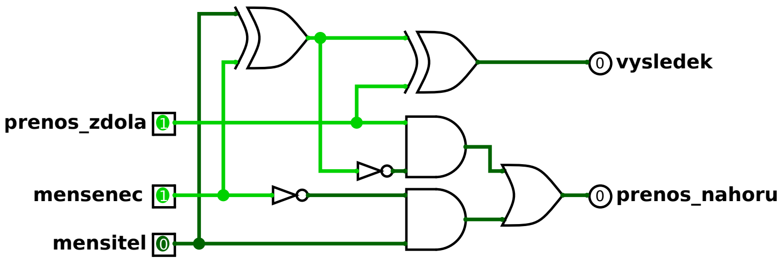
Nejprve jsem připravil tabulku. Ve výsledku a odpovídajícím přenosu nahoru jsou hodnoty $a - b - přenos$.

a	b	přenos zdola	výsledek	přenos nahoru
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Tabulka 3: Hodnoty výstupů odčítačky

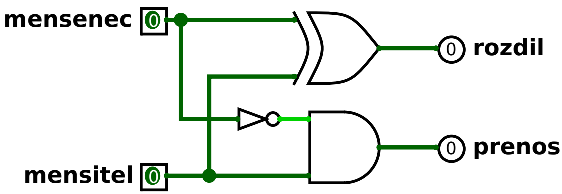
Podle tabulky 3 vidíme, že když bude na vstupu jedna nebo tři jedničky, výsledek bude jednička.

Dále potřebujeme vyřešit přenos. Všimneme si, že bude 1 vždy, když a je 0 a b je 1. Pokud je přenos zdola 1 a zároveň $a = b$ tak také, to nám zajistí formule (NOT (a XOR b)) AND (*přenos zdola*).



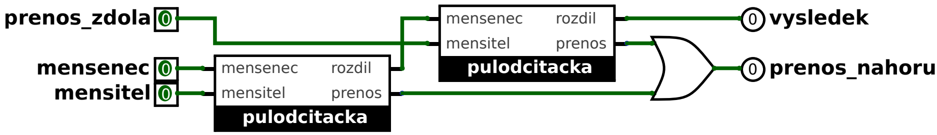
Obrázek 30: Odčítačka podle Bc.[MM] Jiřího Kvapila

Další možnost, jak úlohu řešit, byla postavit si půlodčítačku 31. Všimněte si, v čem se liší od půlsčítačky.



Obrázek 31: Půlodčítačka

Ze dvou půlodčítaček pak snadno postavíme odčítačku, viz obrázek 32. Musíme si však dávat pozor, jak přesně půlodčítačky uvnitř odčítačky pospojujeme. Jak si správně všiml třeba Dr.MM Martin Fof, u sčítačky je jedno, jak zapojujeme vstupy do půlsčítaček, ale u odčítačky záleží na tom, který vstup je který. To je způsobené tím, že odčítání není na rozdíl od sčítání komutativní.[10]



Obrázek 32: Odčítačka

Zapojení odčítaček za sebe pro odčítání vícebitových čísel je pak už úplně stejné, jako zapojení sčítaček na obrázku 16 v minulém čísle.[11]

Zadání:
Navrhněte hradlovou síť, která na vstupu dostane dvě čtyřbitová čísla ve dvojkové soustavě a vrátí osmibitový součin.

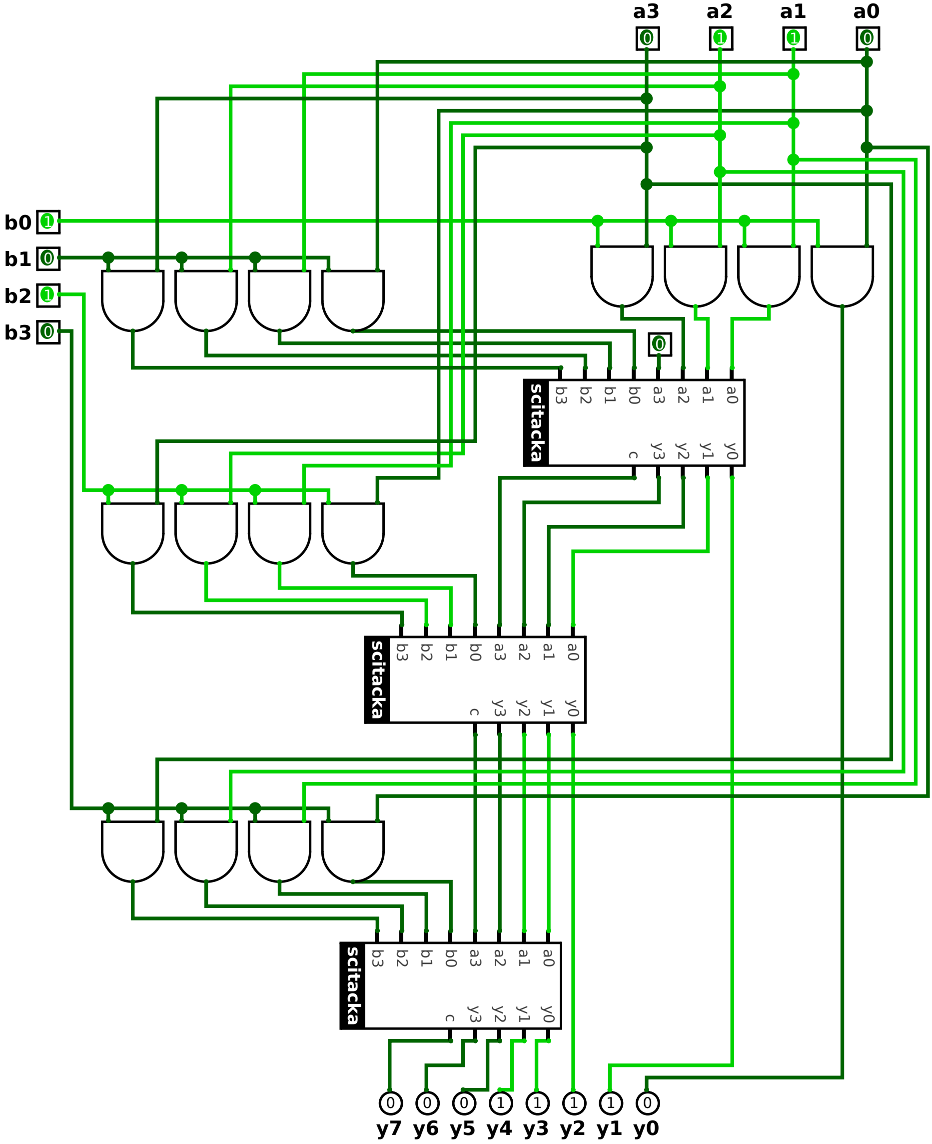
Řešení Bc.MM Michala Pavlíčka, zkráceno

> Mějme binární čísla a a b. Při násobení budeme postupovat stejně jako v desítkové soustavě, tj. násobit „pod sebou“. Když toto provedeme, tak dostaneme tabulku, ve které se každý řádek i rovná číslu a, právě když $b_i = 1$. Poté stačí sečíst každý sloupec a počítat s případnými přenosy.
>
> Jak můžete vidět na obrázku 33, v každém patře kromě prvního se první zjišťuje pomocí hradla AND, zda je odpovídající b_i jedna. Pokud ano, opíše se celé číslo a a sečte se s výsledkem předchozích sloupců. První řádek je jiný, protože nejnižší bit výsledku je pouhé hradlo AND, a poté stačí s posunutím (ke kterému dochází v násobení pod sebou při přechodu na násobení většího řádu) pouze sečíst s dalším řádem. Při každém sečtení sloupců „uložíme“ nejnižší řád do výsledku.

Zadání:
Postavte kalkulačku, která na vstupu dostane dvě čtyřbitová čísla ve dvojkové soustavě a vrátí osmibitový výsledek. Je na vás, jakým způsobem se bude ve vaší kalkulačce vybírat, která operace se provede, nezapomeňte nám to však popsat. Samozřejmě smíte využívat všechny hradlové sítě, které jsme již zmínili.

Řešení:
Úloha se dala řešit různě, zde opět otiskujeme řešení Bc.MM Michala Pavlíčka. Postavil jej v logisimu a doporučujeme vám stáhnout si zdroják[12], myslíme si, že to je pro pochopení nejlepší. Tady najdete alespoň obrázky.

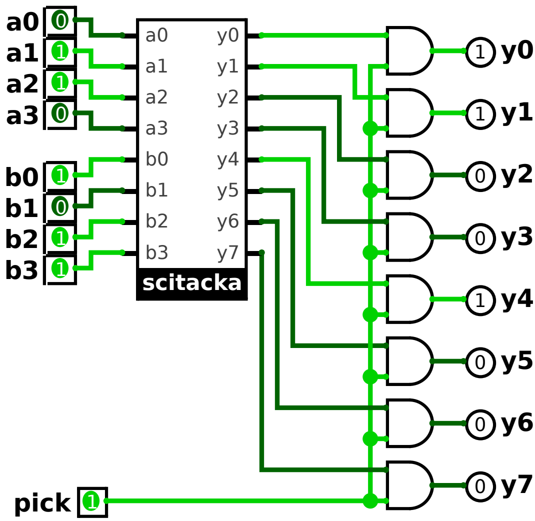
[10] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Komutativita`
[11] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-2.pdf#page=27`
[12] `https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27-3-kalkulacka-pavlicek.circ`



Obrázek 33: Násobení podle Bc.MM Michala Pavlíčka

Nalevo vidíme dvě čísla a a b, jejichž jednotlivé bity míří do všech „krabiček“. Každá krabička má dále vstup *pick*, který když je aktivní, umožní zobrazení výsledku dané krabičky na výsledku kalkulačky. Vstupy *pick* ovládáme pomocí dvou řídících vstupů. Když se řídící vstupy nachází v nule, provede se sčítání, když je pravý v jedničce a levý v nule, pak čísla odečítáme, a když jsou oba v jedničce, pak násobíme.

Vstup *pick* funguje na jednoduchém principu. Pro každé y_i (výsledný bit) se zkontroluje přes hradlo AND, zda je *pick* aktivní, a pokud ano, zobrazí se výsledek na kalkulačce.



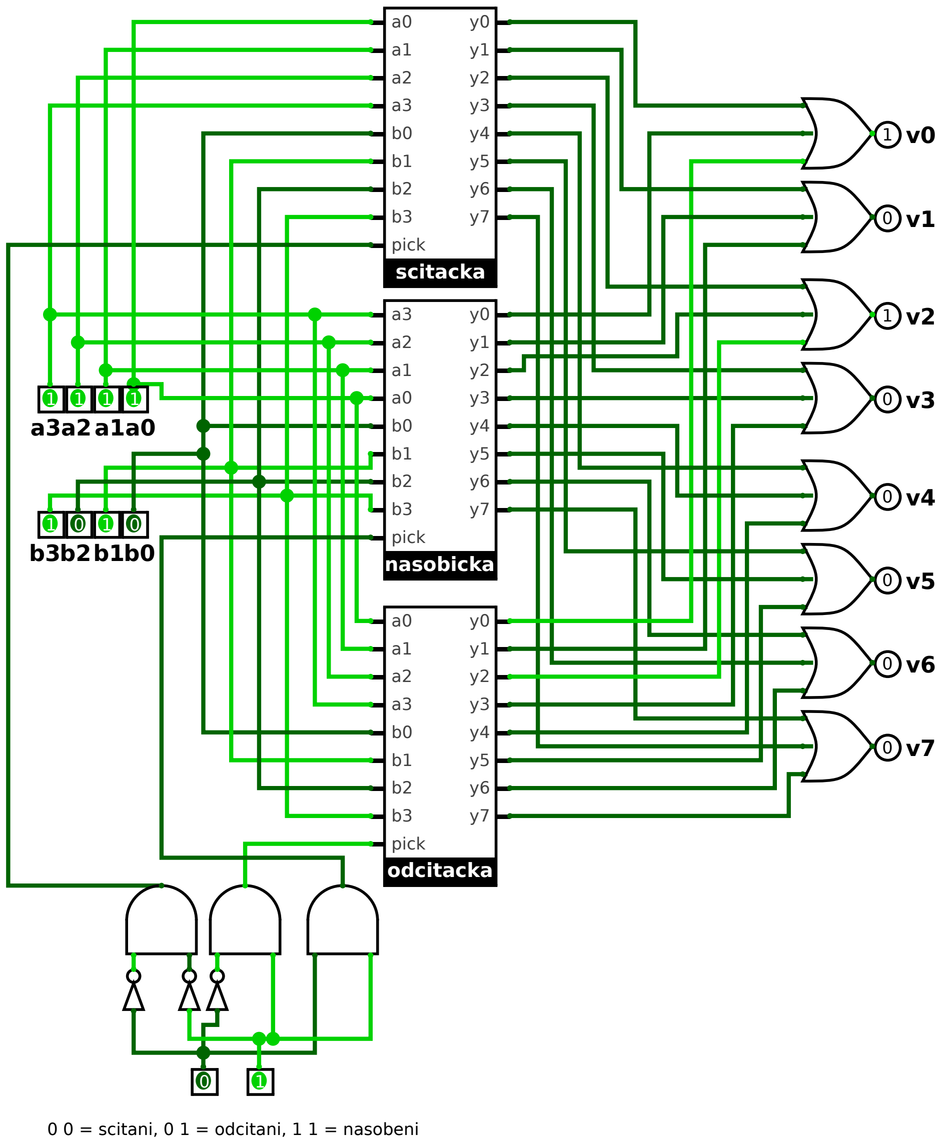
Obrázek 34: Ukázka použití *pick*

Řešení zbylých úloh z 1. čísla

Z prvního čísla nám zbyly nevyřešené ještě tři úlohy. První z nich byl důkaz, že NOT, AND a OR jsou „všemocné“, zbylé dvě se týkaly hledání univerzálních hradel. Pojďme se tedy nyní podívat, jak se daly vyřešit.

Zadání:
Dokažte, že pomocí NOT, AND a OR můžeme opravdu vyjádřit všechny logické funkce.

Řešení:
K řešení této úlohy se dalo přistoupit různými způsoby. Mgr.$^{\text{MM}}$ Lukáš Veškrna hezky sepsal důkaz, který jsme od vás dostávali nejčastěji.



Obrázek 35: Kalkulačka podle Bc.[MM] Michala Pavlíčka

Jakoukoli logickou funkci můžeme pomocí AND, OR a NOT vyjádřit následujícím způsobem.

- Vypíšeme si všechny kombinace vstupů, při kterých funkce nabývá hodnoty 1.
- Vyjádříme funkci jako OR členů, které se sestávají z ANDu vstupů nabývajících jedniček a negací vstupů nabývajících nul, přičemž pro každou kombinaci vstupů, při kterých funkce nabývá hodnoty 1, vytvoříme jeden takovýto člen.

a	b	c	výstup
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabulka 4: Příklad funkce se vstupy a, b, c

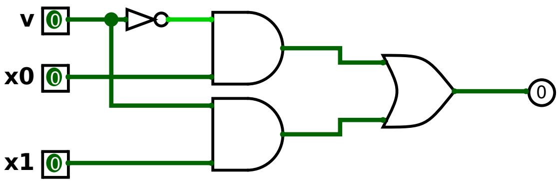
Funkci definovanou tabulkou 3 zapíšeme pomocí výše uvedeného algoritmu takto:

$$((\text{NOT } a \text{ AND NOT } b) \text{ AND NOT } c)$$
$$\text{OR } ((\text{NOT } a \text{ AND } b) \text{ AND } c)$$
$$\text{OR } ((a \text{ AND NOT } b) \text{ AND NOT } c)$$
$$\text{OR } ((a \text{ AND } b) \text{ AND NOT } c)$$

Všimněte si, že tento postup nalezení nějaké konkrétní logické funkce využila Bc.^MM^ Veronika Jůzková ve svém řešení úlohy s výhybkou, které jsme otiskli v minulém čísle na straně 22.[13]

Úplně jiný přístup k této úloze zvolil Dr.^MM^ Martin Fof. Nejprve z NOT, AND a OR postavil výhybku (viz minulé díly, pro připomenutí opakujeme na obrázku 36) a dokázal indukcí, že je možné vyjádřit všechny logické funkce pomocí výhybky a konstant.

[13] https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-2.pdf#page=22



Obrázek 36: Výhybka

Že lze poskládat všechny funkce jen z výhybek a konstant dokážeme pomocí indukce podle počtu vstupů.

Konstanty jsou vlastně 0-vstupové funkce, čímž je dokázán případ pro nula vstupů.

Předpokládejme, že jsme schopni vytvořit všechny logické funkce s n vstupy. U logické funkce s $n+1$ vstupy si vybereme jeden ze vstupů. Pokud tento vstup bude 0, pak existuje funkce zbylých n vstupů, která má stejné výsledky. Pokud naopak tento vstup bude 1, pak také existuje (jiná) funkce n vstupů, která má stejné výsledky.

Vstup $n+1$ zapojíme do výhybky jako v. Výsledek n-vstupové funkce, která odpovídá $v = 0$, zapojíme jako x_0 a výsledek n-vstupové funkce odpovídající $v = 1$ zapojíme jako x_1. Tím je důkaz indukcí u konce.

K vyřešení úlohy mu pak už stačilo ukázat, že umí postavit i konstanty.

Již jsme ukázali, že všechny funkce lze zapsat pomocí výhybky, která se skládá z funkcí AND, OR a NOT, a konstant. Stačí nám tedy ukázat, že jsme schopni vytvořit konstanty. a AND (NOT a) bude vždy 0, čímž jsme vytvořili první konstantu. Konstantu 1 můžeme vytvořit například jako NOT 0.

Univerzální hradla

Zadání:
Dala by se všechna hradla, ať už mají jakýkoliv počet vstupů, poskládat jen z jednoho druhu dvouvstupového hradla? Jinak řečeno, existuje logická funkce dvou argumentů, pomocí které bychom uměli vyjádřit všechny ostatní logické funkce? Pokud myslíte, že ano, napište, jaké výstupy by takové hradlo mělo vydat při různých vstupech. Nezapomeňte ukázat, že libovolné hradlo lze poskládat pouze za použití (nějakého počtu kusů) vámi navrženého hradla.

Zadání:
Kolik takových hradel existuje?

Okolo zadání těchto dvou úloh jsme bohužel způsobili trochu zmatky, ale vy jste je naštěstí stejně zvládli vyřešit.

Řešení obou úloh od Dr.MM Martina Fofa

Nazvěme si hledané hradlo například MAF.

Musíme pomocí hradla MAF vytvořit funkci NOT. Pokud máme jen jeden vstup, nezbývá nám, než ho dát do obou vstupů MAF. Pokud dostaneme zpátky stejné číslo, tak nejsme schopni vytvořit číslo opačné, proto MAF musí mít výstup 1, pokud jsou oba vstupy 0, a výstup 0, pokud jsou oba vstupy 1. Zatím tedy víme, že NOT $a \approx a$ MAF a.

a	b	a MAF b
0	0	1
0	1	
1	0	
1	1	0

Tabulka 5: MAF

Pokud budou pro vstupy 1/0 a 0/1 různé výstupy, pak bude funkce MAF stejná jako NOT jednoho ze vstupů. V úloze 1 jsme si již ale ukázali,[14] že funkce NOT nestačí na vytvoření libovolné funkce, proto výstupy pro vstupy 1/0 a 0/1 musí být stejné.

Pokud budou pro vstupy 1/0 a 0/1 oba výstupy 1, pak si můžeme všimnout, že funkce MAF má výsledek 0 právě tehdy, když oba vstupy nejsou 1. Proto a MAF_1 b je to stejné jako NOT (a AND b). Takže NOT (a MAF_1 b) $\approx$ $\approx$ a AND b. Z úlohy 1 již víme, že pokud dokážeme vytvořit funkce NOT a AND, pak dokážeme vytvořit všechny funkce, proto jsme našli jedno řešení – – viz tabulku 6.

Pokud budou pro vstupy 1/0 a 0/1 oba výstupy 0, pak si můžeme všimnout, že funkce MAF má výsledek 0 právě tehdy, když je alespoň jeden ze vstupů 1. Proto a MAF_2 b je to stejné jako NOT (a OR b). Takže NOT (a MAF_2 b) $\approx$ $\approx$ a OR b. Z úlohy 1 již víme, že pokud dokážeme vytvořit funkce NOT a OR, pak dokážeme vytvořit všechny funkce, našli jsme tedy druhé řešení – viz tabulku 7.

a	b	a MAF_1 b
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabulka 6: MAF_1

a	b	a MAF_2 b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tabulka 7: MAF_2

Více takových hradel již existovat nemůže.

[14] Viz minulé číslo: `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/27/27-2.pdf#page=20`

Ještě zmíníme další postup, kterým se tato dvě hradla dala nalézt. Jak píše Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Veronika Jůzková, v první úloze tématka jsme ukázali, že nám k vyjádření všech logických funkcí stačí dvojice NOT a AND nebo dvojice NOT a OR. Hradla MAF_1 a MAF_2 jsme tedy mohli najít tak, že bychom zkusili z každé dvojice udělat jedno hradlo. Výsledek funguje přesně tak, proto se také hradlu MAF_1 běžně říká NAND a hradlu MAF_2 NOR.

Jejich značky můžete vidět na obrázku.

NAND NOR

Obrázek 37: NAND a NOR

Logisimové tipy

Jsem moc rádi, že se mnozí z vás již seznámili s programem Logisim. Chtěli bychom zde připomenout, že verze, kterou jsme vám doporučovali a které se týkají všechny návody, je **Logisim Evolution 2.14.6**. Některá řešení, která jsme dostali, používala jiné verze – ač se nám je všechna nakonec podařilo otevřít, chtěli bychom vás poprosit, abyste pro příště používali opravdu Logisim Evolution 2.14.6, bude to pro nás jednodušší.

Ve videonávodu[15] jsme ukázali, jak s ním začít pracovat. Nyní by se vám ale mohly hodit nějaké další možnosti, které Logisim nabízí, např. vícebitové dráty a možnost nakreslit si vlastní vzhled hradla. Připravili jsme proto stručný návod, jak tyto funkce využít. Najdete jej na našem webu.[16]

Protože toho Logisim umí hodně a náš návod neobsahuje zdaleka všechno, budeme rádi, pokud se do jeho zkoumání pustíte i sami. Pokud však budete používat něco, co jsme si neukazovali, nezapomeňte napsat, co to je a případně jak byste to postavili, abychom věděli, že víte, co děláte.

Pavel, Káťa a Honza; pa-ka@mail.ledoian.cz
e-mailová konference: hradla@mam.mff.cuni.cz
e-mail pro zasílání řešení: mam@matfyz.cz

[15] https://www.youtube.com/watch?v=oRTKdblNBL4
[16] https://mam.mff.cuni.cz/problem/2224/

Co se děje uvnitř hradel? 8 bodů

Princip hradel na tranzistorové úrovni

Bc.^{MM} Michal Pavlíček

Jak samotný název napovídá, zabýval jsem se konstrukcí hradel, konkrétně za pomocí tranzistorů. Cílem bádání je především pochopení fungování počítače na co nejnižší možné úrovni. Základní poznatky jsem čerpal z knihy *Hradla, volty, jednočipy* od Martina Malého[1], kde však přesný popis fungování hradel chybí, proto jsem se rozhodl ponořit hlouběji do tohoto zajímavého tématu. Tranzistory totiž bývají označovány jako nejdůležitější vynález lidstva, jelikož jsou základem pro všechny počítače, mobilní telefony a celou moderní výpočetní techniku.

Jak funguje elektřina?

Každý ji používáme, všichni jsme se učili, jak funguje. Pro klid duše ale raději toto téma ještě jednou ve zkratce zopakuji.

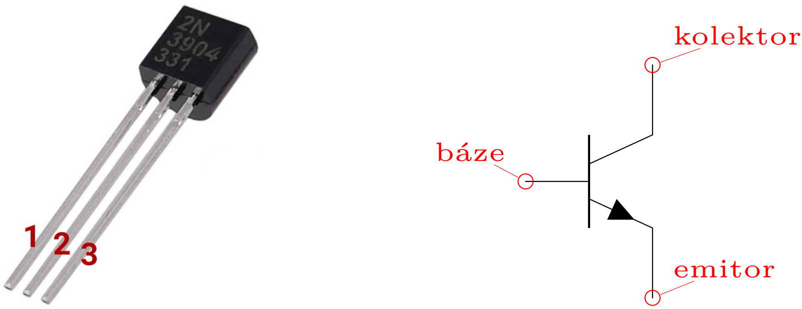
Všechno začíná u atomu. Měli bychom vědět, že se atom skládá z jádra, v němž najdeme neutrálně nabité neutrony a pozitivně nabité protony, a elektronového obalu. V elektronovém obalu se elektrony pohybují v určitých energetických hladinách. Elektrony se při získání dodatečné energie posunou na vyšší energetickou hladinu dále od jádra. V kovech se při získání dostatečné energie může elektron úplně odpoutat od svého jádra, mluvíme potom o tzv. volném elektronu. Tyto volné elektrony se mohou po přiložení napětí pohybovat. Pohyb těchto volných nosičů náboje označujeme jako elektrický proud.

Nám to však stačit nebude. Budeme si muset definovat tři důležité veličiny: napětí, proud a odpor. Napětí značí rozdíl nábojů mezi dvěma místy. Jednoduše řečeno, napětí nám říká, jak moc se elektrony snaží přesunout z jednoho místa na druhé. Na baterii proto najdeme kladný a záporný pól, přičemž záporný pól produkuje elektrony, které se tlačí ke kladnému pólu, kde jsou odebírány z vodiče (v tomto případě do elektrolytu baterie).

Proud měříme na rozdíl od napětí vždy v určitém místě. Říká nám, jaký náboj projde vodičem v tomto místě za určitý čas. Proud měříme v ampérech. Důležitá konvence používaná se týká směru proudění proudu. Zatímco elektrony putují od záporného pólu ke kladnému, proud dle domluvy teče naopak. Budu to tak nadále používat i já. Odpor doplňuje tuto trojici nejdůležitějších veličin. O odporu nám stačí vědět, že omezuje proud tekoucí v obvodu. Dalším důležitým poznatkem je, že proud se při větvení vodičů dělí v poměru odporů na jednotlivých větvích, přičemž větší proud poteče větví s menším odporem. Jednotkou odporu je ohm. Součástka, používající se pro svůj elektrický odpor, se nazývá rezistor.

Princip tranzistorů

V průběhu několika posledních desítek let spatřilo světlo světa několik různých druhů tranzistorů. Pro naše potřeby se však omezíme pouze na jeden typ nazývaný NPN. Co to znamená a jaké další typy tranzistorů existují, je mimo záběr článku, proto pouze odkážu na knihu[1], kde je toto zajímavé téma pro zájemce důkladně rozepsáno. Tranzistor se skládá ze tří elektrod („nožiček“): kolektoru, báze a emitoru. Nejdostupnější typ je spolu se schématem uveden na obrázku 38.

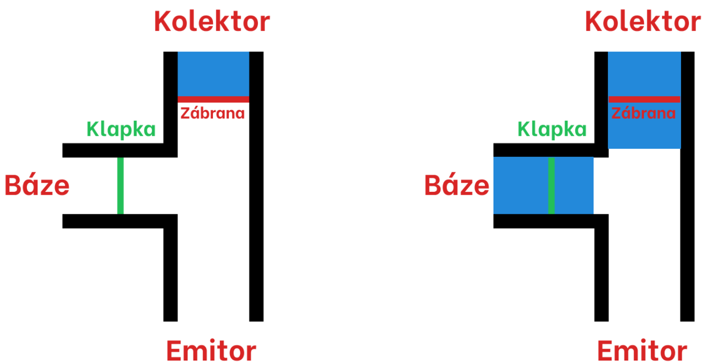


(a) Foto tranzistoru. 1 – kolektor, 2 – báze, 3 – emitor

(b) Schematická značka tranzistoru

Obrázek 38: Tranzistor

Abychom pochopili, jak vlastně tranzistor funguje, použijeme vodní analogii. Podobně jako u tranzistoru budeme mít tři trubky, které představují tři elektrody tranzistoru. Trubky v naší analogii si pojmenujeme stejně jako elektrody u tranzistoru, budeme tedy mít trubky kolektor, emitor a bázi. Všechny tyto trubky se scházejí ve stejném místě. Hlavní proud vody teče z kolektoru do emitoru, další tok vody je možný z báze do emitoru.

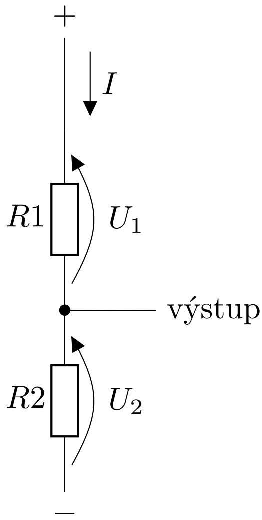


(a) Uzavřený vodní tranzistor

(b) Otevřený vodní tranzistor

Obrázek 39: Vodní tranzistory

Háček je v tom, že kolektor je normálně uzavřen zábranou, která znemožňuje průchod vody. Zábrana je ale spojena s bází, kde se nachází klapka, která je volně zavěšená tak, aby jí případný proud vody mohl otočit. Když proud vody otočí klapkou, zvedne se tím pádem díky jednoduchému mechanismu zábrana v kolektoru, což vyústí v proud vody od kolektoru do emitoru. Důležité je, že stačí mnohem menší proud vody na bázi než na kolektoru, aby se klapka na kolektoru zvedla. Názornější je však video Bipolar Transistor Water Model[17].



Obrázek 40: Rezistorový dělič

Pozn. redakce: Rezistorové děliče

Jednou z nejčastějších věcí, se kterou se při konstrukci nebo analýze elektrických obvodů potkáte, jsou rezistorové děliče. Vezměme si jednoduchý obvod na obrázku 40, který obsahuje zdroj napájení s kladným a záporným pólem, dva sériově spojené rezistory a výstup, který je napojen mezi rezistory. Ptáme se, jaké je napětí na výstupu (proti zápornému pólu zdroje), přičemž předpokládáme, že z výstupu odebíráme zanedbatelný proud. Výpočet pak lze provést snadno pomocí Ohmova zákona: Označme napětí na R1 U_1*, jeho odpor* R_1*, napětí na R2* U_2*, jeho odpor* R_2 *a proud* I*. Protože zanedbáváme proud výstupem a R1 a R2 jsou spojeny sériově, poteče přes oba stejný proud* I *(viz 1. Kirchhoffův zákon). Víme, že* $I = \frac{U_1}{R_1}$*, ale také* $I = \frac{U_2}{R_2}$*, tedy můžeme pravé strany posadit proti sobě a upravit:*

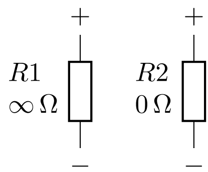
$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

[17] `https://youtu.be/8f3l8KaVcBg`

Vidíme tedy, že poměr napětí na rezistorech je v poměru jejich odporů. Speciálními případy jsou situace, kdy jeden z rezistorů má téměř nekonečný, resp. téměř nulový odpor a druhý má nějaký konečný odpor. Pak napětí na prvním rezistoru je blízké napájecímu respektive nulovému, protože zlomek jde k nule nebo nekonečnu. V případě, že $R_1 = R_2 \to \infty$ *nebo* $R_1 = R_2 \to 0$*, neumíme o napětí na výstupu nic říct, protože se v prvním případě jedná o výstup „plovoucí ve vzduchu“ a v druhém případě o zkrat zdroje a ani v jedné situaci není jak v matematickém pojetí, tak v reálné situaci stav výstupu definován.*

Dále můžeme říci, že se tranzistor chová buď jako rezistor s nulovým nebo nekonečným odporem,[18] podívejme se na schéma na obrázku 41.



Obrázek 41: Odpory, kterými je možné nahradit zavřený a otevřený tranzistor

První rezistor (R1) s nekonečným odporem se chová stejně jako tranzistor bez napětí na bázi (jako „zavřený“ tranzistor). Na R1 se nachází veškeré napětí, takže si můžeme představit, že jsou zde vodiče od sebe odpojeny a žádný proud nemůže projít. Naopak druhý rezistor s nulovým odporem se chová jako „otevřený“ tranzistor, tj. tranzistor, u kterého dochází k toku mezi bází a emitorem a tedy i mezi kolektorem a emitorem. Rezistor se tváří, jako by tam místo něj byl pouze drát a je na něm nulové napětí. Proud může bez problému procházet.

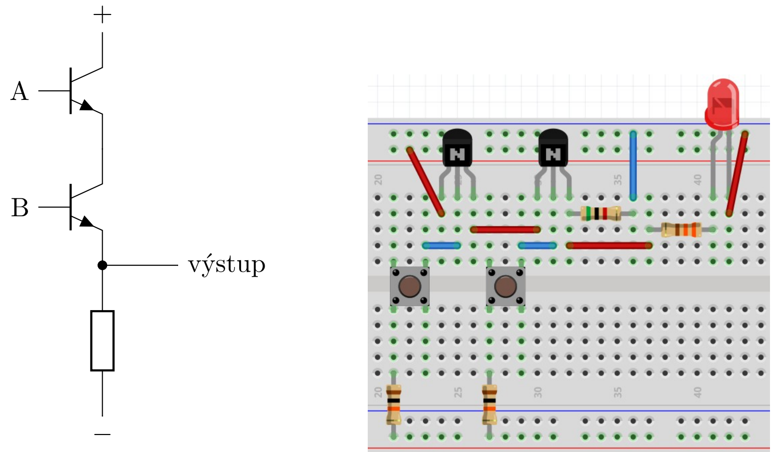
K dalšímu pokračování si budeme muset definovat, co to vlastně znamená logická jednička a logická nula. Logickou jedničku definujeme jako napětí větší než určitá úroveň a logickou nulu jako napětí menší než určitá úroveň vzhledem k zápornému pólu zdroje (baterie). Existuje více různých logických úrovní, pro naše potřeby se nejvíce hodí 5V hladina, kde se logická jednička nachází mezi 2 a 5 volty, pro méně než 0,8 voltů se poté vstup nachází v logické nule. Co se děje mezi těmito hodnotami? Tomuto „pásmu ničeho“ se říká zakázané pásmo, protože není jisté, jak se obvod v takovém stavu zachová.

Hradlo AND

Definujme si nyní dva vstupy A a B, které můžeme libovolně přepínat mezi logickou jedničkou a nulou. Když vstup uvedeme do logické jedničky, přivádíme napětí na bázi, čímž povolujeme elektronům projít mezi kolektorem a emitorem. Pokud

[18] *Pozn. redakce: tranzistor se může chovat i dalšími způsoby, pro článek jsou ale důležité jen tyto dva.*

tedy zapojíme dva tranzistory, jejichž báze budou připojeny ke vstupu A, respektive B, ihned za sebe (viz obrázek), dostaneme hradlo AND. Výsledek můžeme vidět na obrázku 42a.



(a) Schéma

(b) Zapojení na nepájivém poli

Obrázek 42: Hradlo AND z tranzistorů

Na výstupu se v klidovém stavu nenachází žádné napětí, neexistuje totiž cesta od kladného pólu k výstupu. Pokud však přivedeme napětí na vstupy A i B, tranzistory propustí proud a cesta pro elektrony vznikne. Rezistor ve schématu je nutný pro správnou funkci, neboť bez něj by vznikl zkrat a na výstup by se nedostal žádný proud. Na nepájivém kontaktním poli bychom tuto situaci mohli postavit tak, jak je znázorněno na obrázku 42b (červené vodiče značí cestu proudu od kladného pólu k výstupu).

Hradlo OR

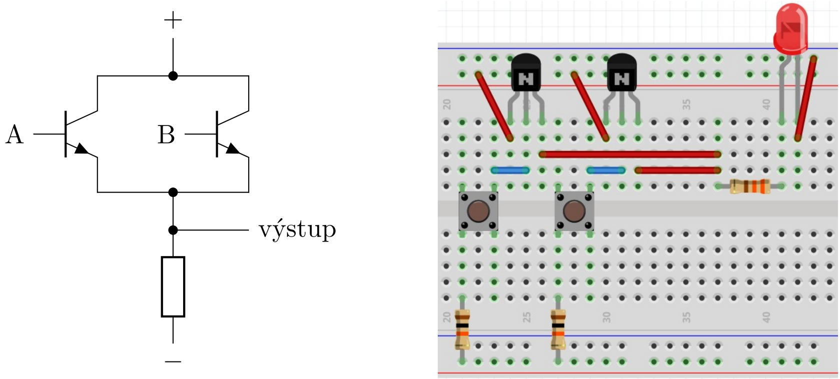
Hradlo OR se tvoří stejně jako hradlo AND, tentokrát nám však stačí, pokud je alespoň jeden ze vstupů v logické jedničce. Proto bude schéma vypadat tak, jak je znázorněno na obrázku 43a.

Emitory obou tranzistorů se nyní promítají na výstup. Proto pokud je alespoň jeden z nich v logické jedničce, pak je na výstupu logická jednička, proud může projít oběma cestami. Opět přikládám praktickou ukázku na obrázku 43b.

Hradlo NOT

Hradlo NOT je nejspíše nejméně intuitivním hradlem z těch, které jsme si zatím ukázali. Pozorně si prohlédněte diagram na obrázku 44a.

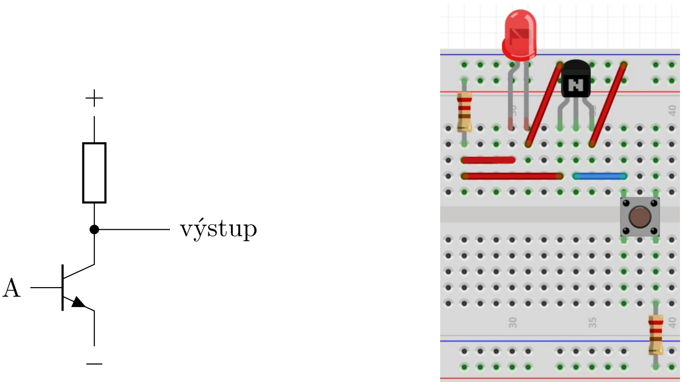
V horní části diagramu si můžeme všimnout rezistoru, který opět předchází zkratu. Výstup potom vidíme hned vedle. Pokud na vstupu A není napětí, tranzistor se chová, jako by měl nekonečný odpor, tedy na výstupu je napětí blízké



(a) Schéma **(b)** Zapojení na nepájivém poli

Obrázek 43: Hradlo OR z tranzistorů

tomu na vstupu. Pokud uvedeme vstup A do logické jedničky, proud si raději zvolí cestu skrz tranzistor, protože je to cesta (téměř) nulového odporu, tedy na výstupu bude téměř nulové napětí. Postavit si toto hradlo můžeme způsobem znázorněným na obrázku 44b.



(a) Schéma **(b)** Zapojení na nepájivém poli

Obrázek 44: Hradlo NOT z tranzistorů

Závěr

Je nutné uvědomit si fakt, že tyto pokusy jsou ve skutečnosti zvětšením „vnitřností“ hradel, které známe z prvních úloh. Vše, co jsem zde popsal, se nachází v hradlech AND, OR, NOT, . . . , ale i v počítačích, mobilech, kalkulačkách a kdo ví kde ještě. Tam se však tranzistory i rezistory vyskytují v mikroskopickém měřítku a jsou použity jiné tranzistory, které k sepnutí potřebují pouze napětí, nikoliv tekoucí proud, což značně zmenšuje spotřebu, princip však zůstává přibližně stejný.

Pokud by vás toto téma hlouběji zajímalo a prahnete po lepším vysvětlení, doporučuji video *Ben Eater: Making logic gates from transistors*[19], které bylo částečným zdrojem inspirace. K pochopení principu tranzistorů kromě knihy[1] můžu vřele doporučit také video *Ben Eater: How a transistor works*[20].

Zdroje

[1] MALÝ, Martin. *Hradla, volty, jednočipy: úvod do bastlení.* Praha: CZ.NIC, z.s.p.o., 2017. ISBN 978-80-88168-23-2. Dostupné online na `https://knihy.nic.cz/files/edice/hradla_volty_jednocipy.pdf`.

Úloha redakce: Problémy reálného světa

Zadání:
V článku výše autor navrhl a prakticky ověřil, že z tranzistorů lze postavit hradla dle výše uvedených schémat. Zanedbal ovšem některé vlastnosti reálných tranzistorů, které vedou k tomu, že složitější hradla by pravděpodobně nefungovala, pokud bychom je sestavili přesně podle těchto schémat. Dokážete vymyslet, kde je problém a jak by se snadno dal opravit? Případně dokážete schémata sami postavit a změřit, jak se chovají, když se z nich pokusíme postavit složitější hradlo?

Výsledková listina 3. čísla

				Témata					
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.^MM J. Engler	2	88,2	6,0		19,8	19,9	45,7	88,2
2.	Mgr.^MM K. Grinerová	4	81,9	10,0		19,0	3,0	32,0	65,4
3.	Doc.^MM J. Kalvoda	4	195,1				29,7	29,7	60,7
4.	Dr.^MM M. Fof	3	115,2	23,5			33,0	56,5	56,5
5.	Dr.^MM V. Janáček	4	151,0				23,3	23,3	54,1
6.	Dr.^MM T. Flídr	3	88,4					0	44,5
7.–8.	Bc.^MM E. Beranová	1	39,0			26,0		26,0	39,0
	Bc.^MM V. Gaďurek	4	39,0					0	39,0
9.	Bc.^MM M. Pavlíček	3	37,2				37,2	37,2	37,2
10.	Bc.^MM D. Čtvrtečka	1	35,5	9,5	26,0			35,5	35,5

[19] `https://youtu.be/sTu3LwpF6XI`
[20] `https://youtu.be/DXvAlwMAxiA`

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata t1	t2	t3	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
11.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ D. Skýpala	3	33,1				26,6	26,6	33,1
12.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ L. Veškrna	3	63,1					0	31,3
13.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ P. Hladík	3	43,0					0	30,0
14.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ M. Boček	2	59,1				29,9	29,9	29,9
15.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ K. Pernicová	4	70,3	8,0				8,0	28,5
16.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ V. Jůzková	4	35,4					0	26,9
17.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Š. Březovják	4	25,8	7,5		10,3		17,8	25,8
18.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ A. Cmielová	2	50,6	7,5		4,5		12,0	25,0
19.–20.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ O. Piroutek	3	69,9	14,5	10,0			24,5	24,5
	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ V. Polášková	2	24,5					0	24,5
21.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ J. Kvapil	3	39,2					0	23,5
22.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ K. Petrlíková	3	22,5					0	22,5
23.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ D. Farhan	4	22,1					0	22,1
24.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ H. Nguyen	4	21,5					0	21,5
25.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ V. Tichý	2	20,5					0	20,5
26.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ A. Opl	3	39,3	2,8				2,8	18,8
27.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ D. Perout	4	50,5					0	18,5
28.	O. Chwiedziuk	4	18,3					0	18,3
29.	A. Húšťava	3	17,7					0	17,7
30.–31.	K. Šedová	2	16,0					0	16,0
	M. Štencel	4	16,0					0	16,0
32.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ J. Knillová	2	51,3	12,8			2,6	15,4	15,4
33.–34.	L. Kačenková	2	14,0	7,0	2,0			9,0	14,0
	M. Valtrová	2	14,0					0	14,0
35.–36.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ O. Gonzor	4	58,4					0	13,0
	O. Skácel	2	13,0					0	13,0
37.	J. Křimská		9,0					0	9,0
38.	M. Turinská	4	10,6				7,6	7,6	7,6
39.	P. Khartskhaev	4	6,0					0	6,0
40.	P. Jendele		4,3			4,3		4,3	4,3
41.	P. Herman	2	1,7					0	1,7
42.	A. Čechová	1	0,6					0	0,6

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina obsahuje všechny body za řešení zaslaná do 1. deadlinu předchozí série. Body za řešení zaslaná později obsahovat nemusí.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz
Web: mam.matfyz.cz
FB: casopis.MaM