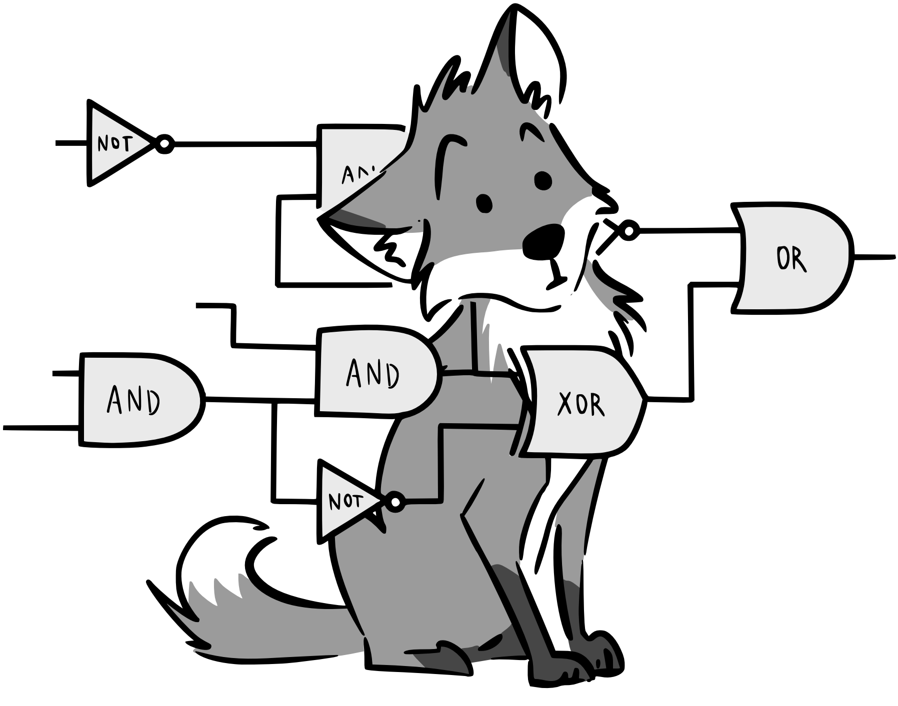
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVII

Číslo 2

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

od vydání posledního čísla se situace opět dost zkomplikovala. Připravovali jsme pro vás soustředění a velmi se na něj těšili, bohužel už podruhé ho musíme zrušit. Moc nás to mrzí, ale věříme, že to je správné rozhodnutí a že zase dostaneme možnost se setkat. Je nám jasné, že to nebyly jediné plány, které nevyšly, a tak jsme se pro vás (a nás) rozhodli uspořádat alespoň částečnou online variantu, i když víme, že skutečné soustředění to nenahradí. Nikdy jsme nic takového nedělali, a tak sami nevíme, jak to dopadne. Určitě si ale dáme záležet a budeme rádi, když se k nám připojíte. Pro více informací sledujte náš web či facebook.

Co naštěstí měnit nemusíme, je korespondenční forma našeho semináře, a tak i v tomto čísle najdete nové díly témat. Minule jsme si představili, co to je topologie, mimo jiné na Möbiově pásce. Tentokrát se přesuneme do vyšších dimenzí a vysvětlíme si, co jsou to variety. Aby se vám nad vším lépe přemýšlelo, přibalili jsme k tomuto číslu kousek pružné látky, na kterém si můžete objekty modelovat. Doufáme, že se vám povedlo postavit funkční spektrometr a jsme rádi za všechny fotky a tipy, které jsme od vás dostali. Dle nás nejužitečnější tipy na vylepšení najdete v tomto čísle.

V olympiádní matematice se od geometrie a schůzujících organizátorů (povedlo se vám zjistit, kdo kde sedí?) přesuneme k nerovnostem, ukážeme si, jak řešit úlohy s nimi, a představíme si ty nejznámější obecně platné. Ve stavbě počítače pokročíme také o kousek dál – ukážeme si řešení části úloh s hradly a získané znalosti využijeme k vytvoření kalkulačky. Zmíníme si také nástroj Logisim, ve kterém se dají sítě interaktivně modelovat.

Užívejte si přicházejícího podzimu, zamyslete se nad tématy, zůstaňte zdraví a těšte se s námi na budoucí setkání!

Vaši organizátoři

Obsah

Zadání a řešení témat

1. deadline: 3. 11. 2020 | 2. deadline: 24. 11. 2020

Téma 1 – Topologie

Díl 2: Topologické objekty a operace s nimi

Minule jsme se setkali s Möbiovou páskou, poměrně netradičním topologickým objektem. V tomto díle si ukážeme několik základních topologických objektů a několik základních operací s nimi. Držte si klobouky! Tentokrát zavítáme i do vyšších dimenzí.

Zabývat se budeme jen takzvanými *varietami*, pro které platí, že okolí každého bodu se podobá *Eukleidovskému prostoru* v dimenzi n, o které budeme říkat, že je to dimenze dané variety. Eukleidovský prostor se chová jako prostor, který známe z běžného života. Mezi každými dvěma body je definována nezáporná vzdálenost. Pokud je nulová, body jsou totožné. Pokud máme body A, B a C, tak vzdálenost z A do C není větší, než součet vzdáleností z A do B a z B do C. Podmínce z věty výše se říká *trojúhelníková nerovnost.* V neposlední řadě platí, že vzdálenost z A do B je stejná jako z B do A.

Budeme také pracovat s *varietami s okrajem*, které se od obyčejných variet liší tím, že mají okraj. Body na okraji variety s okrajem mohou mít okolí podobné Eukleidovskému prostoru dimenze $n-1$. Vnitřní body variety s okrajem splňují stejnou podmínku, jakou splňují body obyčejné variety. Zjednodušeně řečeno se budeme zabývat objekty, které se chovají rozumně. Nebude-li řečeno jinak, tak všechny objekty, se kterými budeme pracovat, budou buď variety, nebo variety s okrajem.

Základní variety

Začneme zlehka. Jedinou nula-dimenzionální varietou je bod. Platí, že každá varieta z nějaké dimenze se může vyskytovat ve všech vyšších dimenzích. Speciálně tedy bod najdeme ve všech dimenzích.

V jedné dimenzi existuje jen jeden stupeň volnosti. Je to podobné, jako vlak na kolejích (bez výhybek) – může se pohybovat jen dopředu, nebo dozadu. Vše se odehrává v jedné přímce a neexistuje žádné nahoru, dolů, do strany. V jedné dimenzi najdeme například interval od -1 do 1, neboli body přímky se vzdáleností nejvýše 1 od bodu 0, jenž je zároveň ekvivalentní jedno-dimenzionální kouli[1], kterou značíme B^1. Obecně kouli v n dimenzích budeme vždy značit B^n a definujeme ji jako množinu bodů ve vzdálenosti nejvýše 1 od zvoleného středu. Interval od 0 do 1, který budeme značit I, i všechny ostatní uzavřené intervaly můžeme hladce smrsknout nebo natáhnout tak, aby začínaly v bodě -1 a končily v bodě 1 (anebo pro pevné x začínaly v bodě $x-1$ a končily v $x+1$). Všechny uzavřené intervaly

[1] Jedná se o jedno-dimenzionální variantu běžné tří-dimenzionální koule.

jsou tudíž homeomorfní B^1. Skutečnost, že dvě variety jsou homeomorfní, budeme značit symbolem $\approx$. Je to všechno? Zbývá nám poslední varieta v jedné dimenzi, tu si ale ukážeme později.

Minule jsme naznačili, že každý objekt má svůj okraj. Okraj poznáme tak, že nás zastaví při procházce po daném objektu, je to tedy funkce daného topologického objektu a budeme ho značit pomocí ∂. Každý topologický objekt M má definovaný svůj okraj $\partial(M)$, jen u některých je tímto okrajem prázdná množina. Jaký okraj má jedno-dimenzionální koule, tedy čemu se rovná $\partial(B^1)$? Když se vydáme nějakým směrem, zasekneme se u konce intervalu. Pokud se otočíme a vydáme druhým směrem, po čase nás zastaví druhý okraj intervalu. Okrajem B^1, tj. uzavřeného intervalu $\langle -1, 1\rangle$, je tedy sjednocení dvou bodů -1 a 1 na jeho koncích. Zároveň je to nula-dimenzionální *sféra* S^0. Sféru v dimenzi n definujeme jako okraj $(n+1)$-dimenzionální koule a budeme ji značit symbolem S^n.

Problém 1: *Vezmi nějakou varietu. Co je jejím okrajem? A co je okrajem tohoto okraje? Jak dlouho můžeme hledat okraje okrajů? Čím naše hledání skončí? Nemáme prostředky na formální důkaz, stačí, když si to vyzkoušíš na pár příkladech a uvedeš svou hypotézu.*

Ve dvou dimenzích máme dva stupně volnosti. Můžeme si to představit jako pohyb lodi na vodě. Základní varietou v této dimenzi je jednotkový kruh B^2, neboli množina bodů, které mají od pevně zvoleného středu vzdálenost nejvýše jedna. Možná uhodnete, že $\partial(B^2) = S^1$, což není nic jiného, než kružnice. Ta je tou poslední jedno-dimenzionální varietou, o kterém jsme si ještě neřekli.

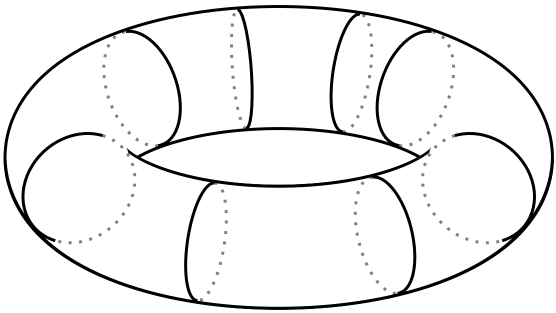
Koule B^n a jejich okraje, sféry S^{n-1}, existují v každé dimenzi n. S každou dimenzí totiž přibude další stupeň volnosti, neboli každý bod má polohu určenou pomocí n na sobě nezávislých souřadnic. Vzdálenost mezi dvěma body, kterou potřebujeme pro zjištění, které body do koule patří, dokážeme spočítat i v n-dimenzionálním prostoru. Vzdálenost v jedné dimenzi je absolutní hodnota rozdílu dvou bodů, ve dvou dimenzích platí Pythagorova věta. Obecně platí, že další souřadnou osu přidáváme v kolmém směru, z čehož se dá odvodit, jak to bude vypadat v n dimenzích.

Operace s varietami

Výše jsme si představili několik základních variet, tak si pojďme představit pár operací, které s nimi můžeme provádět. První operací je kartézský součin, značíme ho pomocí symbolu $\times$. Nejdříve si ho ukážeme na pár příkladech. Asi nejjednodušší příklad je n-dimenzionální krabice I^n, která vznikne kartézským součinem n intervalů:

$$\underbrace{I \times I \times \ldots \times I}_{n\text{-krát}}$$

Dvou-dimenzionální krabice $I^2 = I \times I$ je tedy jednotkový čtverec, který vznikne tak, že každému bodu jednotkového intervalu přidáme v kolmém směru jeden jednotkový interval. Stejně tak $I^3 = I^2 \times I$ je jednotková krychle, vzniklá přidáním jedné kopie jednotkového intervalu každému bodu čtverce I^2 (opět v kolmém směru). Dalším příkladem objektu vzniklého kartézským součinem je $S^1 \times S^1$. Vezmeme kružnici a kolem dokola každému bodu přidáme v kolmém směru kopii kružnice. Výsledkem je (nevyplněný) torus na obrázku 1 – je v něm vyznačeno několik z nekonečně mnoha přidaných kopií kružnic, kterými je torus tvořen.



Obrázek 1: Kartézský součin $S^1 \times S^1$ – torus.

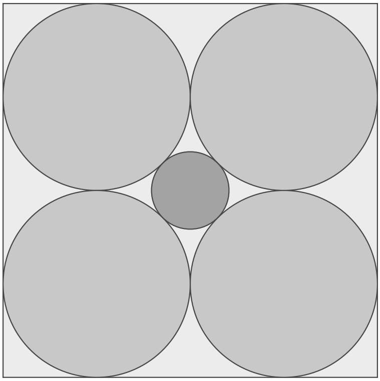
Obecně si kartézský součin dvou variet M a N, které mají po řadě dimenze m a n, můžeme představit tak, že pro každý bod x variety M přidáme jednu kopii variety N ve směru kolmém na okolí x ve varietě M. Přidávání kopií variety N v kolmém směru k M způsobuje „nafouknutí“ dimenze výsledného objektu do dimenze $m + n$. Intuitivně to plyne z toho, že když v k-dimenzionálním prostoru přidáme další směr kolmý na všech k předchozích, dostaneme $(k+1)$-dimenzionální prostor. Další způsob, jak si to představit, je, že přidáním další kolmé osy přidáme jeden nový stupeň volnosti odpovídající další souřadnici. Vzpomeň si na kartézský součin variet M a N výše. Tam prvních m souřadnic odpovídá pozici bodu v rámci variety M a zbylých n souřadnic pozici bodu v rámci konkrétní kopie variety N.

Úloha 2 [1b]: *Co je výsledkem $S^1 \times I$? Je výsledek homeomorfní $I \times S^1$?*

Úloha 3 [3b]: *Jaký je výsledek $S^1 \times I^2$ a $S^2 \times I$? Jsou tyto objekty homeomorfní nějakým objektům definovaným výše?*

Úloha 4 [1b]: *Představ si jednotkový čtverec I^2, který vyplníme čtyřmi kruhy o průměru $1/2$. Doprostřed mezi kruhy pak přidáme pátý kruh tak, že se dotýká ostatních kruhů, jako na obrázku 2. Jaký je průměr vepsaného kruhu?*

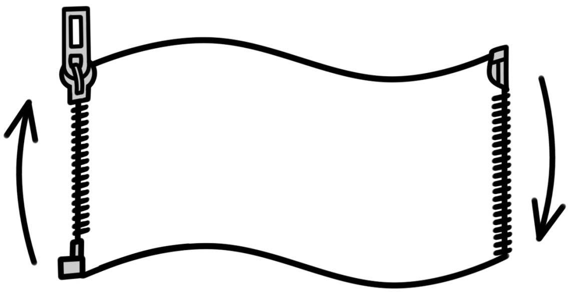
Úloha 5 [4b]: *V zadání předchozí úlohy uvaž I^3 a další vyšší dimenze místo I^2. V I^3 budeme mít místo čtyř kruhů osm koulí, mezi které opět můžeme vepsat menší kouli, a podobně pro vyšší dimenze. Dokážeš zobecnit vztah pro velikost průměru vepsané koule? Zamysli se nad tím, jak se mění poměr velikosti vepsané koule vůči krabici v závislosti na dimenzi.*



Obrázek 2: K zadání Úlohy 4.

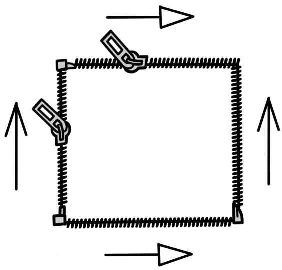
Další operací s varietami bude slepování jejich okrajů, kterému se odborně říká kvocient. Představíme si to tak, že na okraj (nebo část okraje) jedné variety je přišitá jedna půlka zipu a na okraj (nebo jeho část) druhé variety je přišitá druhá půlka. Když správné konce zipu přidáme k sobě a zip zapneme, variety se spojí. Jak naznačuje analogie se zipem, slepované části mají orientaci, díky čemuž můžeme touto operací získat velmi zajímavé objekty. Protože je občas náročné si představit, co vznikne takovým slepováním, doporučujeme zkusit si lepení vizualizovat pomocí kusu pružné látky. Jeden takový jsme přibalili do obálky s tímto číslem.

Například si vezměme obdélník, jehož dvě protilehlé strany slepíme v opačných směrech, viz obrázek 3. Tímto způsobem získáme Möbiovu pásku. Přesně stejným způsobem jsme přeci postupovali při její konstrukci v prvním díle.

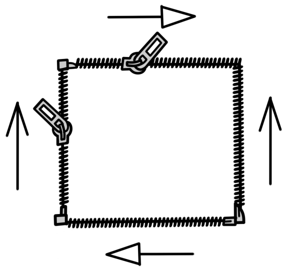


Obrázek 3: Ukázka operace kvocient neboli ztotožňování dvou množin bodů, které je zde naznačeno pomocí zipu.

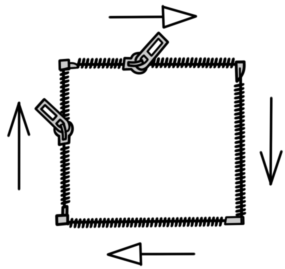
Úloha 6 [1b]: *Co vznikne, když slepíme ve stejném směru obě dvojice protilehlých stran obdélníka, viz obrázek 4a?*



(a) Protilehlé strany obdélníka lepené v souhlasném směru.



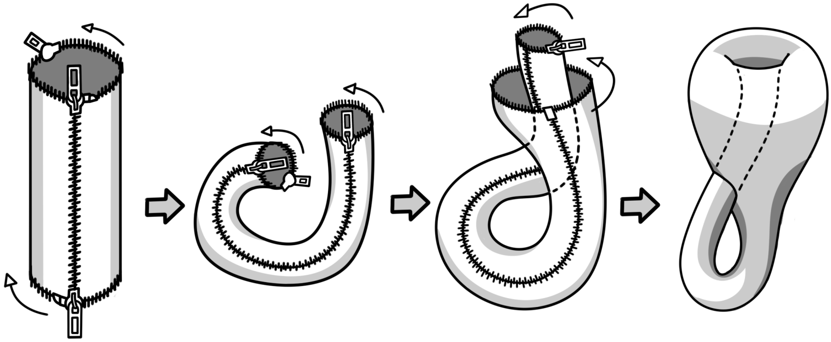
(b) Protilehlé strany obdélníka lepené jedna dvojice v souhlasném a druhá v nesouhlasném směru.



(c) Obě strany obdélníka lepené v nesouhlasném směru.

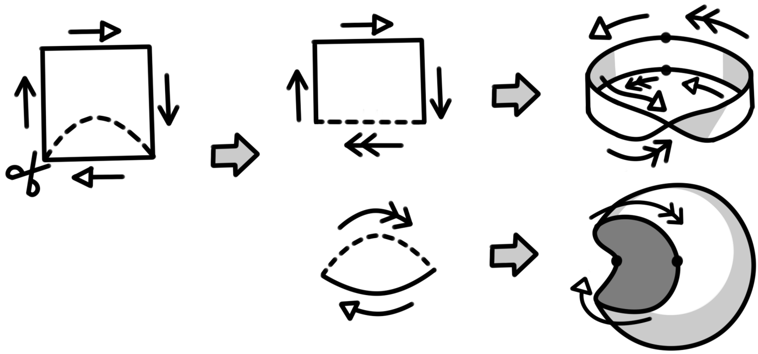
Obrázek 4: Různé možnosti, jak můžeme pomocí kvocientu „slepovat" dvě protilehlé strany obdélníka.

Podívejme se na výsledek slepování u obdélníku z obrázku 4b. Začneme zazipováním rovnoběžných stěn se shodnou orientací. Tím získáme válec s kružnicemi, kde jedna má orientaci po směru hodinových ručiček a druhá proti. Co můžeme udělat, aby šly kružnice slepit? Co třeba zafixovat kružnici na jednom konci válce a otáčet se druhou podle jejího středu, stejně jako ždímáme srolovaný ručník? To nám nepomůže, orientace kružnic se nezmění. Aby byla orientace změněna, musíme kružnici přetočit o 180° podél úsečky, která tvoří její průměr a prochází jejím středem. Při zachování této orientace je zazipování ke druhé kružnici možné, jen pokud dokážeme projít plochou obdélníka (což reálné materiály bohužel neumí). Celý postup je ukázaný na obrázku 5. Objekt, který jsme získali, se nazývá Kleinova lahev.



Obrázek 5: Postup získávání Kleinovy lahve ztotožněním protilehlých stran obdélníka.

Poslední způsob, jak ztotožnit protilehlé strany obdélníka, je znázorněn na obrázku 4c. Tady si úkol trochu rozkouskujeme, abychom si pochopení objektu udělali snazší. Postup je znázorněn na obrázku 6. Konkrétně uřízneme spodní stranu obdélníka s kusem plochy okolo a řez nahradíme zipem, který zazipujeme později. Můžeme si rozmyslet, že na pořadí spojování zipů nezáleží. Toto pozorování se nám bude ještě několikrát hodit.



Obrázek 6: Postup slepování protilehlých stran obdélníka s nesouhlasně orientovanými zipy. Různé druhy šipek reprezentují různé druhy zipů.

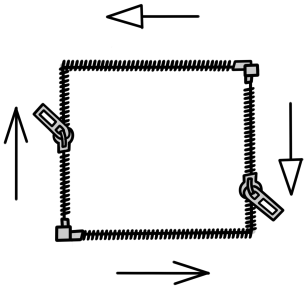
Nejdříve si uvědomíme, co tvoří horní useknutá část obdélníka. Přetočíme-li pravý konec vzhůru nohama, dostaneme pás s jedním přetočením a souhlasně orientovanými protilehlými stranami. Jejich slepením získáme Möbiovu pásku, jejímž okrajem je kružnice se dvěma typy zipů ve stejném směru, které na sebe navazují. Vnitřek dolní useknuté části obdélníka můžeme vyboulit a natáhnout tak, že získáme sféru obsahující kruhovou díru (můžeme si ji představit jako nafukovací balónek), jejímž okrajem jsou opět dva různé zipy, které na sebe souhlasně navazují. Teď stačí vzít Möbiovu pásku a zazipovat ji podél jejího okraje k okraji kruhové díry sféry. Kdybychom se pokusili vzít Möbiovu pásku z reálné látky a přizipovat ji ke kruhové díře, nešlo by to. Opět dojdeme do stavu, kdy se páska musí prokřížit sama se sebou, abychom mohli pokračovat v lepení. Proto věc, která vznikne přilepením okraje Möbiovy pásky ke kruhové díře v nějakém objektu, označujeme jako *křížítko*. Sféra s jedním křížítkem odpovídá *reálné projektivní rovině* [2], která se v matematice občas vynořuje i v jiných kontextech.

Úloha 7 [1b]: *Zipovat k sobě můžeme i strany, které nejsou protilehlé. Jaký je výsledek slepování z obrázku 7a?*

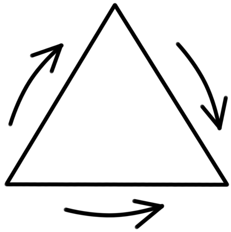
Úloha 8 [4+2b]: *Slepovat v dané orientaci můžeme i více než dvě hrany, avšak tady už naše analogie se zipy začíná pokulhávat. Zkus si představit objekt z obrázku 7b, ve kterém se postupně ztotožňují všechny tři strany trojúhelníka. Svou představu co nejnázorněji popiš pomocí obrázku a případně doplňujícího textu.*

[2] Projektivní rovina je zobecnění roviny, které vznikne přidáním bodů „v nekonečnu“, kde se protínají rovnoběžné přímky. Kromě reálné projektivní roviny existují i konečné a komplexní projektivní roviny.

Nemyslíme si, že by se představa, jak daný objekt vypadá, dala popsat dostatečně jasně jen slovy, ale pokud to přeci jen zvládneš, body tě neminou. Pokud místo obrázků dodáš pěknou animaci, dostaneš plusové body.

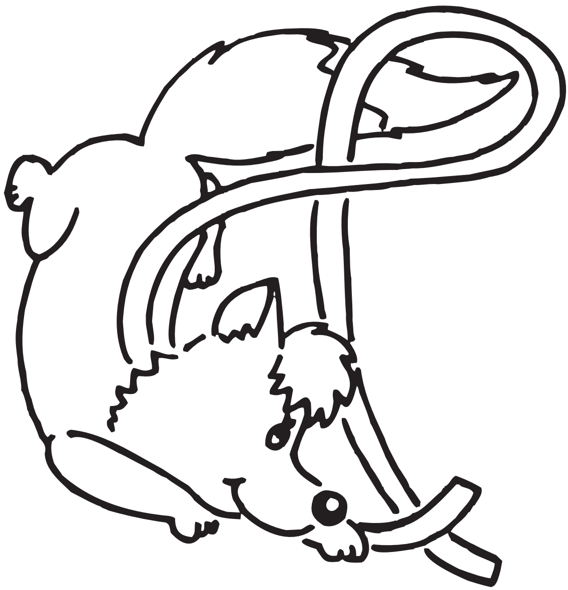


(a) Ztotožňovat můžeme i sousední strany.



(b) Ztotožňovat můžeme i více než dvě strany.

Obrázek 7: Obrázky k Úlohám 7 a 8.



Téma 2 – Optika

Díl 2: Spektrometry podruhé

V minulém díle jste našli šablonu a návod na výrobu svého vlastního spektrometru (pro jistotu je přikládáme i do tohoto čísla). Několik z vás nám poslalo fotky vašich spektrometrů a spekter, které jste pozorovali, za což moc děkujeme a patřičně jsme je bodově ohodnotili. V tomto díle nabízíme několik tipů, které jste nám napsali a které by se vám mohly hodit pro vylepšení vašeho spektrometru a splnění dalších úloh či problémů:

- Vystřihněte a složte váš spektrometr z černého, ideálně silnějšího, papíru. Zejména pozorování slunečního spektra vám to velice usnadní.
- Stěnu, ve které je štěrbina, udělejte dvojitou, aby světlo procházelo opravdu jen štěrbinou.
- Pokud vám nejde oddělit u DVD stříbrná vrstva od průhledné, zkuste nejprve DVD zlomit. Vrstvy popraskají a půjdou od sebe dobře odloupnout. Vhodně ulomený kus potom upravte nůžkami na správnou velikost.

Zkuste váš spektrometr nakalibrovat – přiřadit jednotlivým částem duhy jejich vlnové délky – podle problému 11. Z jednoduché fyzikální hračky tak vyrobíte opravdový měřící přístroj. Zkuste použít některou mobilní aplikaci, hledat můžete třeba pod slovním spojením *Light Spectrometer*.

Hodně štěstí se studiem různých světelných zdrojů!

Úloha 1 (27.1) [2b]: *Sestavte spektrometr podle návodu a pošlete nám jeho fotku. Napište nějaké tipy, ať můžeme zlepšit návod.*

Úloha 2 (27.1) [1b]: *Jak se změní obraz spekter ve spektrometru, když nalepíme kus DVDčka otočený o 90° oproti tomu, jak je popsáno v návodu?*

Problém 3 (27.1): *Zkuste experimentovat se změnou tvaru spektrometru. Jak se změní obraz spekter ve spektrometru, když ho vyrobíme delší, když uděláme větší nebo menší štěrbinu, když změníme úhel na jednom jeho konci?*

Úloha 4 (27.1) [2b]: *Rozložte světlo žárovky a bíle rozsvíceného monitoru. Popište, jaké rozdíly vidíte.*

Úloha 5 (27.1) [3b+]: *Pozorujte několik světelných zdrojů, které byste označili jako teplé, a několik takových, které byste označili jako studené. Které vlnové délky převládají v kterých rozkladech? Rozepište se o tom, které zdroje jste použili a jak spektra vypadala.*

Problém 6 (27.1): *Nastudujte si, jakým způsobem vlastně takto vyrobený spektrometr funguje, a sepište o tom krátký článek, který budeme moci otisknout pro ostatní.*

Úloha 7 (27.1) [3b]: *Pozorujte přes spektrometr jasné sluneční záření. Měli byste spatřit celé spektrum a v něm nějaké černé proužky. Co je to za proužky? Přiložte fotku a zkuste identifikovat jejich vlnové délky (lze to i bez kalibrace popsané v Problému 11).*

Úloha 8 (27.1) [2b]: *Máte-li doma barevné fólie, zkoumejte je. Popište, které vlnové délky v nich chybí a které jsou naopak výrazné, když je prosvítíte slunečním světlem?*

Problém 9 (27.1): *Jak se změní výsledky Úlohy 8, pokud nebudete prosvěcovat slunečním světlem, ale jiným světelným zdrojem?*

Problém 10 (27.1): *Nastudujte si, jak vznikají černé proužky z Úlohy 7, a sepište o tom krátký článek, který budeme moci otisknout pro ostatní. Pokud znáte vlastnosti jednotlivých prvků, co jsme schopni přesně zjistit podrobným zkoumáním těchto černých proužků?*

Problém 11 (27.1): *Připojte spektrometr k vaší webkameře nebo fotoaparátu. Pomocí laserového ukazovátka nebo barevné LED ho nakalibrujte. Zdokumentujte průběh kalibrace a sepište krátký textík, ve kterém zmíníte všechny tipy a triky, na které jste přišli, abychom ho mohli otisknout a ostatní to měli jednodušší.*

Návod: U LED nebo laserového ukazovátka máte dobrou šanci zjistit, jakou vlnovou délkou přesně svítí. Laserová ukazovátka to mají často uvedeno v manuálu nebo na obalu, u LED si před koupí raději v datasheetu ověřte, že je zde vlnová délka uvedena. Když posvítíte na spektrometr, měli byste vidět jen jednu čáru. Potom můžete prohlásit, že tomuto místu odpovídá vámi zjištěná vlnová délka. Když to provedete ještě s jinou vlnovou délkou, máte už stupnici. Předpokládejte, že všude na stupnici odpovídá stejná vzdálenost stejně velkému rozmezí vlnových délek. **Pozor: pokud svítíte do spektrometru laserovým ukazovátkem, nikdy se do spektrometru nedívejte pouhým okem!**

Úloha 12 (27.1) [6b+]: *Zkoumejte alespoň 3 světelné zdroje (sluneční světlo, různé LED, zářivka, laserová ukazovátka, žárovka, úsporná žárovka, baterka v telefonu, ...) a s kalibrovaným spektrometrem popište, jaké vlnové délky odpovídají maximům, minimům, výrazným čárám spektra. Pokud to lze, porovnejte vaše měření s tabulkovými hodnotami. Pošlete fotodokumentaci.*

Nebojte se, že vlnové délky nebudou sedět moc přesně s tabulkovými hodnotami, vámi vyrobený spektrometr je jen přibližný. I 50 nm je dobrá přesnost. A nějaké výsledky jsou lepší než žádné.

Problém 13 (27.1): *Vymyslete nějaký vlastní zajímavý problém nebo úložku a pošlete nám zadání, ať mohou ostatní zkoumat! Můžete poslat rovnou i řešení!*

Téma 3 – Olympiádní matematika

Díl 2: Nerovnosti

Úvod

V minulém díle tématka jsme se podívali na geometrii, což je jeden ze čtyř základních typů úloh v matematické olympiádě (další jsou algebra, teorie čísel a kombinatorika). V tomto díle se od geometrie vzdálíme a podíváme se na oblíbenou skupinu algebraických úloh, a to jsou nerovnosti.

V první řadě se budeme snažit změnit způsob, jakým nad nerovnostmi přemýšlíte. Během středoškolské výuky jste se nejspíš setkali s *nerovnicemi*. Ty mohly vypadat třeba takto.

$$3^a > 81$$
$$a^2 + 6a + 9 \geq 25$$

Jednalo se v podstatě o rovnice, ve kterých se změnilo znaménko, a vaším úkolem bylo určit neznámou – zpravidla tedy vyřešit rovnici a „uhádnout“, jestli množina řešení jsou čísla větší nebo menší než výsledek rovnice. Někteří se možná setkali i s nerovnicemi s parametrem – postup stejný, ale řešení zahrnovalo vyjádření parametrem, a ne přesným číslem.

Na to teď na chvíli zapomeňte. Představte si třeba nerovnici následující:

$$x^2y^2 + y^2 \geq 2xy^2 \tag{1}$$

Je vidět, že danou nerovnici splňuje mnoho dvojic x, y. Zkušenější z vás si možná všimnou, že dokonce platí pro libovolná reálná x, y.

S tímto typem příkladů se nejpravděpodobněji setkáme v matematické olympiádě. Vaším cílem nebude určit hodnoty x, y, ale dokázat, že pro daná x, y (povětšinou omezená číselným oborem, popřípadě nějakým dalším vztahem) nerovnost vždy platí, a většinou i určit, pro jaké hodnoty x, y nastává rovnost. Mluvíme tedy o *nerovnostech*, jejichž platnost dokazujeme, na rozdíl od *nerovnic*, u kterých hledáme kořeny.

Nerovnostmi si ale můžeme pomoct i u jiných typů příkladů, kde bychom to nečekali. Typickým příkladem jsou například úlohy „určete maximální/minimální hodnotu tohoto výrazu“. Ačkoliv se budeme v tomto díle věnovat především klasickým úlohám na nerovnosti, na konci si ukážeme i takovýto příklad.

Jak vypadá takové zadání nerovnosti?

Výhodou tohoto typu úloh je v drtivé většině velmi krátké zadání. Skládá se typicky ze tří částí – zadání, definičního oboru neznámých a samotné nerovnosti.

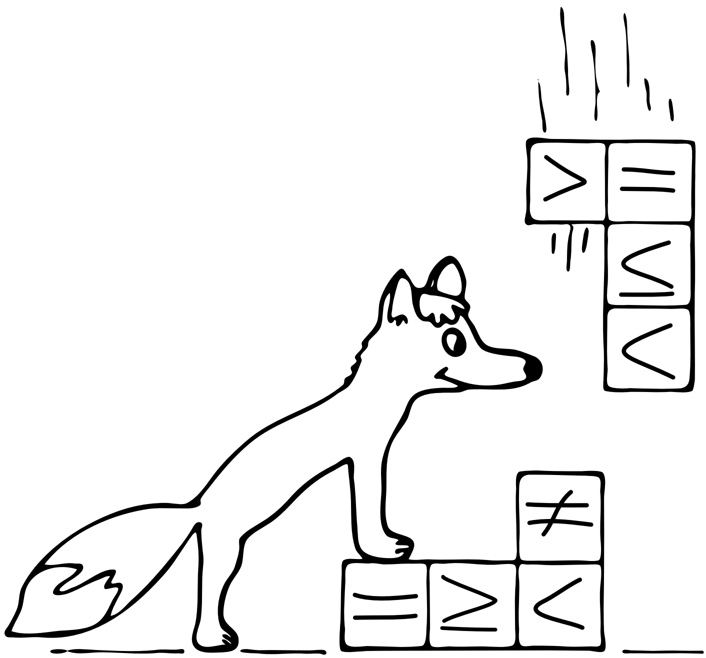
Zadáním se myslí „dokažte, že platí . . . “. Co bývá častou chybou, je opomíjení magického „. . . a určete, pro které neznámé nastane rovnost“, která se většinou nachází na konci, a člověk na ni pak lehce zapomene. Je to škoda – připravíte se minimálně o bod, a dost často je to nejjednodušší část celé úlohy, která vám ulehčí i zbytek řešení v případě, že s ní začnete.

Definičnímu oboru se většinou nepřikládá velká váha, někdy nám ale může dost napovědět, jak úlohu vyřešit. Nejčastěji se můžeme setkat s neznámými reálnými nebo reálnými kladnými – to druhé je například znamením, že se člověk při řešení může obrátit na AG nerovnost. Že vám to nic neříká? I k tomu se v tomto díle dostaneme. Ještě důležitější ale bývají „omezení“, která občas pro neznámé dostaneme, a ze kterých při řešení vycházíme. Ta mohou mít různou podobu – dají se rozdělit na rovnosti (tedy že se například součet nebo součin neznámých rovná nějakému číslu, popřípadě výrazu) a nerovnosti (například že jedna neznámá je vždy větší rovna druhé).

Poslední a nejdůležitější částí je nerovnost, kterou (typicky) musíme dokázat.

Jak řešit?

I zde máme dva přístupy k řešení, které můžeme využít. První je cesta od předpokladu (co vím o neznámých) k zadané nerovnosti – pokud dokážu předpoklad ekvivalentními úpravami dostat do tvaru zadané nerovnosti, tak je případ vyřešen. Druhým způsobem je vyjít ze zadání a dojít k předpokladu, nebo s použitím předpokladu dojít ekvivalentními úpravami k obecně platné nerovnosti. Ten nejspíše využijete více.



1. Algebraické úpravy

Často nenarazíte na úlohu, jejíž řešení by spočívalo pouze v aplikaci algebraických úprav – na druhou stranu, nejspíše také nenarazíte na úlohu, která by ke svému řešení nějaké algebraické úpravy nevyžadovala. Jaké algebraické úpravy můžeme při řešení nerovností využít?

a) roznásobování výrazů v závorkách

b) převádění členů na druhou stranu výrazu

c) vytýkání

d) přičítání či odčítání výrazu od nerovnosti

e) násobení nebo dělení nerovnosti výrazem, a to:

   - kladným
   - záporným se současným obrácením znaménka nerovnosti

   Při této úpravě si dejte pozor, aby výraz nemohl být roven nule a byl opravdu buďto vždy kladný, nebo vždy záporný. Pokud to nemáte zaručeno, zkuste místo násobení či dělení společný člen vytknout.

f) využít vzorce pro rozklad mnohočlenu

Práci s úpravou výrazů si můžete vyzkoušet na následující úloze.

Úloha 1 [2b]: *Máme a, b, c celá čísla, která nejsou rovna nule. Dále víme, že platí:*

$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$$

Dokažte, že $a+b+c \leq 0$.

2. Využití známých tvrzení a nerovností

S pomocí algebraických úprav jsme schopni zadanou nerovnost převést do mnohem přívětivějšího tvaru. Ale co teď? Jednou z možností je ukázat, že to, k čemu jsme úpravami došli, obecně platí – tedy že se jedná o nějaké známé tvrzení nebo nerovnost – a příklad je vyřešen. Zní to jednoduše, že? Bohužel pro nás to zas tak jednoduché není. Tvrzení, která obecně platí, totiž není málo, a někdy je potřeba jich i několik zkombinovat. Pojďme se nyní podívat na ta nejznámější, jejichž znalost by vám měla pomoct ve většině olympiádních příkladů.

$x^a \geq 0$, x je reálné, a je celé a dělitelné 2 Asi nejdůležitějším a nejčastěji využitelným tvrzením je fakt, že jakákoliv sudá mocnina je větší rovna nule. Je to velmi prosté, nicméně věřte, že jen s využitím tohoto zvládnete nějaké úlohy vyřešit. Zalistujte nahoru na ukázkovou nerovnost (1) z první sekce. Na první pohled se možná mohla zdát být nečitelná, pokud ale všechny členy převedeme na levou stranu, snadno nahlédneme, že se levá strana rovná $(xy - y)^2$, a tím pádem bude vždy větší rovna nule. Úloha vyřešena! To nebylo tak těžké, ne? Teď si to můžete vyzkoušet sami:

Úloha 2 [2b]: *Mějme reálná čísla a, b. Dokažte, že platí:*

$$a^4 + b^4 \geq a^2(b^2 + 2b - 1)$$

Stejně tak bude platit, že součet nebo součin sudých mocnin bude vždy nezáporný.

$a + \frac{1}{a} \geq 2$, a je kladné reálné Tady to není na dlouhé povídání. Jednoduché a přímočaré tvrzení, které ale občas můžeme využít. Rovnost nastane v případě, že $a = 1$.

Úloha 3 [1b]: *Tvrzení dokažte.*

Úloha 4 [3b]: *Nechť jsou a, b kladná reálná čísla. Dokažte, že platí:*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2(a + b - ab)$$

AG nerovnost Jedná se pravděpodobně o nejsilnější „zbraň“, kterou máte při řešení olympiádních nerovností k dispozici. Písmena A a G mají význam aritmetická a geometrická, a jedná se tedy o nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Můžete se setkat i s pojmem QAGH nerovnost (případně nějaká podmnožina těchto písmen), kde se přidá ještě průměr kvadratický a harmonický. Na začátku si ale bohatě vystačíme s prvními dvěma uvedenými. Aritmetický průměr nejspíše všichni znáte. Vezmete součet všech členů, ze kterých chcete udělat průměr, a ten vydělíte jejich počtem. Matematicky zapsáno:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

O geometrickém průměru možná slyšíte poprvé. Jedná se o součin všech členů, ze kterých chcete udělat průměr, odmocněný na jejich počet. Zapíšeme takto:

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

A teď to důležité – tvrzení o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nám říká, že pro všechna kladná reálná $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a přirozené n platí, že aritmetický průměr je vždycky větší nebo roven geometrickému průměru.

Úloha 5 [1b]: *Zkuste odhadnout, pro jaká $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastává v AG nerovnosti rovnost. Důkaz výjimečně uvádět nemusíte.*

Ačkoliv uvedené tvrzení platí pro všechna přirozená n, nejčastěji se setkáte s $n = 2$ nebo $n = 3$. Pojďme si nyní ukázat použití AG nerovnosti.

Cvičná úloha: *Nechť jsou x, y kladná reálná čísla. Dokažte, že platí:*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1$$

Pozorně se podívejme na zadání. Nejenže v něm figurují dvě proměnné (což někdy nemusí být úplně směrodatné), ale zároveň je levá strana dělena dvěma – první myšlenkou tedy je, že při řešení využijeme AG nerovnost pro 2 členy. Nejdříve si ji tedy rozepišme. Aby se nám nepletly proměnné ze zadání, použijme proměnné a, b.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Ačkoliv levá strana obou nerovností vypadá totožně, pravé strany se značně liší. Navíc na pravé straně zadané nerovnosti není jedna odmocnina, ale součet dvou. To nás přivádí k nápadu, že zadaná nerovnost by mohla být součtem dvou různých AG nerovností. Ještě se zamyslíme nad minus jedničkou na pravé straně. Jelikož v AG nerovnostech jsou vždy jen kladná čísla a součty, budeme se jí chtít zbavit – třeba tím, že ji převedeme na levou stranu. Chceme tedy dokázat, že tato nerovnost je součtem dvou AG nerovností:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Někteří z vás už to možná vidí, zbytek ještě pošťouchneme. Pojďme si výše napsanou nerovnost ještě jednou přepsat.

$$\frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Tyto dvě nerovnosti jsou ekvivalentní, ale v druhé z nich už můžeme jasně vidět použité AG nerovnosti:

$$\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}, \quad \frac{y+1}{2} \geq \sqrt{y}$$

Jelikož jsme ukázali, že zadaná nerovnost vznikla součtem dvou AG nerovností a jejich ekvivalentními úpravami, je úloha dokázána.

Úloha 6 [3b]: *Mějme kladná reálná čísla x, y. Dokažte, že platí:*

$$x^2y^2 + x^2 + y \geq x^2y + 2xy$$

Pro která x, y nastane rovnost?

Úloha 7 [4b]: *Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí:*

$$x + y + z + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2yz} + \frac{1}{2xz} \geq \frac{9}{2}$$

Pro která x, y, z nastane rovnost?

Cauchy-Schwarzova nerovnost CS nerovnost je další velmi známá a rozšířená nerovnost. Má několik podob – my se zaměříme především na tu „klasickou“. Ta má oproti dalším – a například taky AG nerovnosti – tu výhodu, že platí pro všechna reálná, a nejen pro kladná reálná čísla. Tak tedy:

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right) \geq \left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2$$

Pro dva členy je důkaz jednoduchý (zkuste si to například využitím AG nerovnosti), dále se typicky dokazuje indukcí. Ještě se podívejme, kdy v uvedeném výrazu nastane rovnost – je to právě tehdy, když existuje nějaké reálné nenulové a takové, že pro každé i mezi 1 a n platí $x_i = ay_i$.

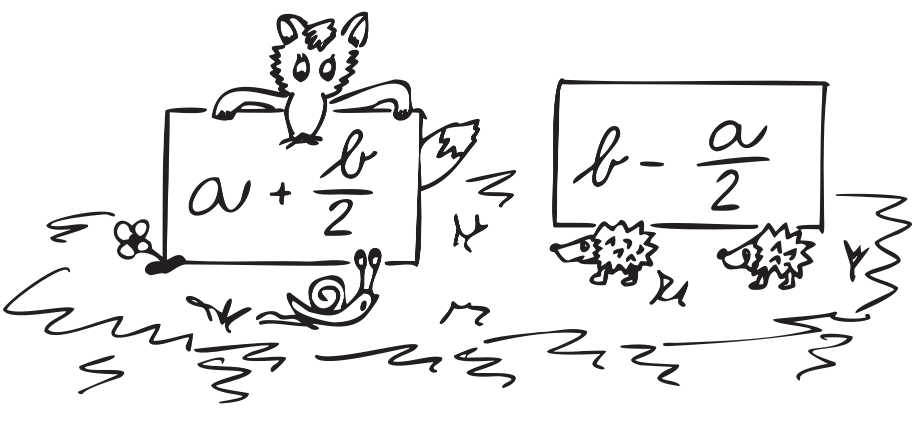
Úloha 8 [3b]: *Mějme kladná reálná a, b, c. Dokažte, že platí:*

$$\frac{1}{abc}(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9$$

Ukážeme si ještě jednu známou podobu CS nerovnosti. Tu využijete především v momentě, kdy se v zadání máte vypořádat s větším množstvím zlomků. Ale pozor, na rozdíl od předchozí varianty platí jen pro všechna x, y kladná reálná.

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n} \geq \frac{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}\right)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

Úloha 9 [3b]: *Nechť je a kladné reálné. Pak platí $a^2 + \frac{1}{a} \geq a + 1$. Dokažte.*



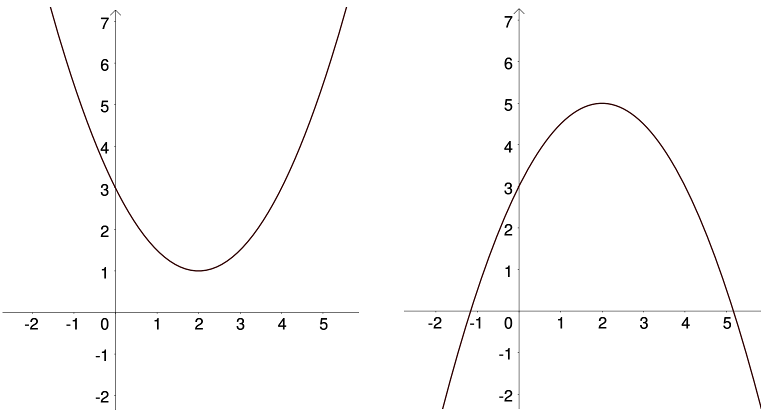
Jensenova nerovnost Jako bonus se podíváme na Jensenovu nerovnost. Co se týče olympiádních úloh národní úrovně, jedná se většinou o moc těžký kalibr. Většinu úloh, které byste sice zvládli vyřešit za pomocí Jensena, vyřešíte pomocí AG nebo CS rychleji a hezčeji. V některých typech úloh je ale Jensen jen těžko zastupitelný - a to jsou především nerovnosti obsahující goniometrické funkce.

Zjednodušeně si Jensenovou nerovnost můžeme napsat takto:

$$\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right) \quad ? \quad f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

Říká nám tedy, že průměr z funkčních hodnot čísel x_1 až x_n je ve vztahu s funkční hodnotou průměru těchto čísel. Co tam ale dělá ten otazník? A co je myšleno tím „ve vztahu“?

Jensenova nerovnost totiž záleží na tom, s jakou funkcí pracujeme – jestli s funkcí konvexní, nebo konkávní. Pokud je funkce konvexní, pak je levá strana větší rovna pravé. Pokud je ale funkce konkávní, levá strana je menší rovna pravé. Jelikož se jedná o poměrně pokročilé pojmy popisující průběh funkce, nebudeme si je definovat. Velmi neformálně je konvexní funkce „vydutá“ směrem dolů, zatímco konkávní je „vydutá“ směrem nahoru, jak můžete vidět na obrázku 8.



(a) Konvexní funkce **(b)** Konkávní funkce

Obrázek 8: Ukázka konvexity a konkávnosti kvadratické funkce

Jelikož si chceme ukázat především použití Jensenovy nerovnosti pro práci s goniometrickými funkcemi, řekneme si následující:

a) Funkce sinus je na intervalu od 0 do π konkávní.

b) Funkce cosinus je na intervalu od 0 do $\frac{\pi}{2}$ konkávní.

V tomto případě si první užití Jensenovy nerovnosti demonstrujeme.

Cvičná úloha: *Označme si α, β, γ úhly v trojúhelníku. Dokažte, že platí:*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Jelikož jsou v zadání goniometrické funkce (a úloha je cvičnou úlohou na Jensenovu nerovnost), první nápad je použít na řešení právě tu. Můžeme to ale vůbec udělat? Po přečtení zadání zjistíme, že ano. Ačkoliv je funkce sinus konkávní jen na intervalu 0 až π (tedy 0 až 180 stupňů), všechny úhly ze zadání jsou úhly trojúhelníku – a tím pádem určitě v rozmezí 0 až 180 stupňů. Zkusme si tedy napsat Jensenovu nerovnost pro 3 členy, kde $f(x) = \sin(x)$.

$$\frac{1}{3}\left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\right) \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

To se značně podobá nerovnosti ze zadání. Na pravé straně ale máme stále sinus, zatímco v zadané nerovnosti je konstanta. Můžeme se tohoto sinu nějak zbavit?

V tomto případě si znovu přečtěme zadání a opět využijme fakt, že α, β, γ jsou úhly v trojúhelníku. Nejen že jsou všechny menší než 180°, ale navíc musí být součet jejich velikostí roven 180°. Můžeme se tedy vrátit k naší rovnici.

$$\frac{1}{3}\left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\right) \leq \sin\left(\frac{180^\circ}{3}\right) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Po vynásobení celé nerovnosti třemi získáme:

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A to je přece nerovnost ze zadání. Jelikož jsme se pouze pomocí ekvivalentních úprav dostali od známé nerovnosti k nerovnosti ze zadání, úloha je tímto vyřešena. Tak a teď je to na vás!

Úloha 10 [4b]: *Mějme α, β, γ úhly v ostroúhlém trojúhelníku. Určete maximální hodnotu výrazu* $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.

Jane; `pallova.jane@gmail.com`
e-mailová konference: `olymp@mam.mff.cuni.cz`

Téma 4 – Počítač z nul a jedniček

Díl 2: Počítač od slova počítat

Vítejte u druhého dílu tématu Počítač z nul a jedniček. Minule jsme si představili nejjednodušší hradla a připomněli jsme si, jak funguje dvojková soustava. Pokud jste první díl nečetli, doporučujeme vám se k němu vrátit, budeme na něj nyní navazovat. Ukážeme si některá řešení a hlavním cílem tohoto dílu bude postavit si kalkulačku.

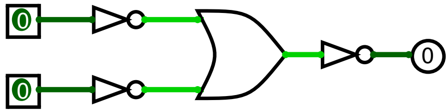
NOT, AND a OR

V první části tématka jsme si ukázali, co jsou to logické funkce. Tvrdili jsme vám, že z funkcí NOT, AND a OR umíme složit všechny ostatní logické funkce, a zadali jsme následující úlohu.

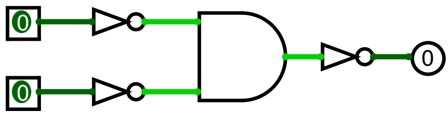
Zadání:
Můžeme z trojice NOT, AND a OR něco vynechat tak, abychom stále dokázali vyjádřit všechny logické funkce? Můžeme vynechat libovolnou z nich? Můžeme vynechat dvě z nich? Své odpovědi zdůvodněte.

Řešení:
Mgr.[MM] Vojtěch Gaďurek úlohu vyřešil následovně:

> Začněme tím, že si uvědomíme, že funkce NOT je nepostradatelná. Mějme situaci, ve které vstupy jsou pouze nuly a chceme, aby výstupem byla 1. Funkce OR nám vyhodí 1, jen pouze pokud i jedním ze vstupů je 1 a AND dokonce vyžaduje dvě jedničky.
>
> Nyní si ukážeme, že funkce AND/OR, lze vytvořit pouze za využití OR/AND a NOT.
>
> Stačí nám pouze si povšimnout, že AND vydá 1, pouze pokud má jako vstup dvě 1, a OR vydá 0, pouze pokud jsou vstup dvě 0. Tedy pokud u OR znegujeme výstup, tak 1 získáme pouze, pokud jsou vstup dvě 0. Pokud znegujeme i vstup, tak 1 musíme získat pouze pokud vložíme dvě 0.



Obrázek 9: AND složený z NOT a OR



Obrázek 10: OR složený z NOT a AND

Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Flídr si všiml, že mu k vytvoření NOT z AND a OR nepomůžou ani konstanty:

> NOT má jeden vstup (x), takže můžeme operovat pouze s x, 0 a 1. Pro OR přitom x OR $x = x$, x OR $1 = 1$ a x OR $0 = x$, pro AND dále x AND $x = x$, x AND $1 = x$ a x AND $0 = 0$. Místo každé operace tedy můžeme napsat x nebo konstantu, takže výsledkem složení AND a OR je také vždy x nebo konstanta, takže nemůže vzniknout NOT x.

A jak je to s vypuštěním více než jedné logické spojky? Dr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Flídr pokračuje:

> Dvě z těchto tří funkcí vynechat nelze – bez NOT nevznikne NOT, pouze z NOT nemůže vzniknout funkce více než jedné proměnné.

Vidíme tedy, že můžeme vynechat buď AND nebo OR, protože je umíme poskládat pomocí zbylých dvou funkcí. Nic dalšího vynechat nemůžeme.

Bc.$^{\text{MM}}$ Ondřej Chwiedziuk, stejně jako někteří další z vás, správně poznamenal, že vztahy

$$a \text{ AND } b = \text{NOT } ((\text{NOT } a) \text{ OR } (\text{NOT } b))$$

$$a \text{ OR } b = \text{NOT } ((\text{NOT } a) \text{ AND } (\text{NOT } b))$$

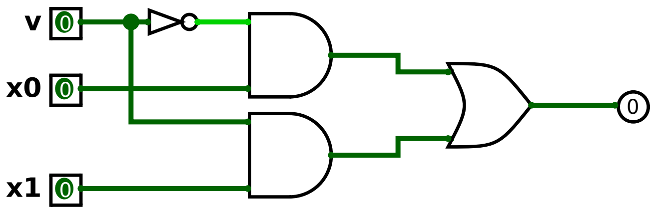
se nazývají *De Morganovy zákony.*

Výhybka

Zadání:

„Výhybka“ budeme říkat hradlu se třemi vstupy označenými v, x_0 a x_1. Na výstupu výhybky bude to samé, jako na vstupu x_0, pokud $v = 0$, nebo to samé, jako na vstupu x_1, pokud $v = 1$. Poskládejte výhybku z hradel NOT, AND a OR. Můžeme libovolnou logickou funkci poskládat jen z výhybek a konstant?

Řešení:



Obrázek 11: Výhybka

Téměř všichni, kdo jste odevzdali tuhle úlohu, jste zhruba došli k řešení jako na obrázku 11. Mgr.$^{\text{MM}}$ Veronika Jůzková a Mgr.$^{\text{MM}}$ Dominik Farhan nám hezky popsali, jak na to přišli.

Řešení Mgr.ᴹᴹ Veroniky Jůzkové

Nejprve ze všeho si vytvořím pravdivostní tabulku, abych z ní následně mohla vyčíst (minimální dostačující množství) podmínky.

x_0	x_1	v	výstup
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
$\boxed{1}$	0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
1	0	1	0
$\boxed{1}$	1	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
1	1	1	1

Tabulka 1: Výstupy výhybky v závislosti na vstupech

Když mám hotovou tabulku, barevně[3] si do ní vyznačím kombinace, které jasně specifikují, že je výstup 1. (Můžu to udělat i pro výstup rovný 0, v některých případech se to vyplatí více. Musím být ale pro všechny podmínky konzistentní.) Ideálně tak, aby bylo podmínek co nejméně a síť tedy byla co nejjednodušší.

Pak už stačí zkombinovat podmínky do jedné hradlové sítě, jak je vidět na obrázku 11.

Řešení Mgr.ᴹᴹ Dominika Farhana

Všimněme si, že pokud přivedeme na jeden ze vstupů AND jedničku, tak dojde k tomu, že druhý vstup bude překopírován do výsledku. Takto bychom si mohli vyjádřit části funkce, které nám budou určovat zda by měl být brán x-ový vstup v potaz, následujícím způsobem:

$$(\text{NOT } v) \text{ AND } x_0 \tag{2}$$

$$v \text{ AND } x_1 \tag{3}$$

Nyní potřebujeme tyto části spojit. Všimněme si, že OR se chová v jistém smyslu stejně jako AND a to tak, že překopíruje hodnoty jednoho vstupu, pokud je ten další nepravda.

K sestavení výhybkové funkce nám teď už stačí si jen uvědomit, že vždy alespoň jedna z funkcí bude mít nulovou hodnotu, kvůli přítomnosti v (a jeho negace) na obou stranách.

Tyto úvahy nám nakonec umožňují (2) a (3) spojit pomocí OR a získat tak výslednou výhybku:

$$((\text{NOT } v) \text{ AND } x_0) \text{ OR } (v \text{ AND } x_1) \tag{4}$$

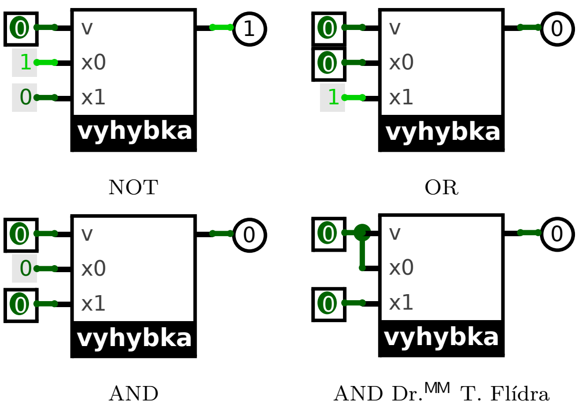
[3] Zde naznačeno kolečky a obdélníčky.

Můžeme libovolnou logickou funkci poskládat jen z výhybek a konstant?

Mgr.[MM] Dominik Farhan si všiml, že může jednotlivé části vzorečku výhybky vypínat a zapínat, a tím dostat AND a NOT:

> Ukázat, že z logické funkce lze poskládat jakoukoliv jinou, jde tak, že ukážeme, že z dané funkce jde poskládat všechny funkce, které náleží nějaké množině, o které jsme tuto vlastnost už dokázali.
>
> Pokusme se dokázat, že pomocí výhybky jsme schopni počítat funkce AND a negaci. Pokud si zafixujeme $x_0 = 0$, zjistíme, že levá část (4) se nám jako by vypne (nikterak nebude ovlivňovat výsledek) a vše se nám tak zjednoduší na funkci (3).
>
> To, že jsme schopni počítat přes výhybku negaci, jde ukázat tak, že si zvolíme $x_1 = 0$, čímž se zbavíme pravé části (4), a $x_0 = 1$, čímž zajistíme že levý AND nám vždy okopíruje negaci v, což je proměnná, kterou budeme negovat.
>
> Výhybka je tedy úplnou logickou funkcí.

Dr.[MM] Tomáš Flídr si všiml, že může AND postavit i alternativním způsobem. Pro úplnost uvádíme i OR, což mnozí z vás taky nahlédli.



Obrázek 12: Vyjádření logických funkcí pomocí výhybky

A konečně, Dr.[MM] Lukáš Veškrna si všiml, že se naše výhybka chová jako `if` v programovacích jazycích.

Co nám zbývá?

Jak vidíte, obě řešení spoléhají na to, že NOT, AND a OR k vyjádření všech logických funkcí stačí. To jsme vám předložili jako fakt a vy nám to můžete věřit, nebo si to můžete zkusit sami dokázat, pokud jste tak dosud neučinili. Řešení příslušné úlohy z minulého čísla můžete odevzdávat i nadále.

Úloha 2 (27.1) [4b]: *Dokažte, že pomocí NOT, AND a OR můžeme opravdu vyjádřit všechny logické funkce.*

Stejně tak můžete odevzdávat řešení úloh 3 a 4, nicméně zde bychom se vám chtěli omluvit, do jejich zadání se nám minule vloudily hned dvě chyby. První z nich je, že jsme špatně odhadli obtížnost Úlohy 3, takže jsme byli nuceni zpětně změnit její ohodnocení z pěti bodů na tři. Druhým problémem je, že původní znění Úlohy 4 šlo pochopit i tak, že stačilo najít jedno další hradlo pro zdůvodnění kladné odpovědi. Naším záměrem však bylo se vás zeptat i na přesný počet takových hradel a zdůvodnění toho, že jich je právě tolik. Zadání Úlohy 4 jsme tedy změnili a necháváme ji dál otevřenou. Pokud jste jako řešení odevzdali pouze konstrukci druhého takového hradla, získali jste nyní jeden bod a můžete se znovu zamyslet nad otázkou v upraveném znění.

Úloha 3 (27.1) [~~5b~~ 3b]: *Dala by se všechna hradla, ať už mají jakýkoliv počet vstupů, poskládat jen z jednoho druhu dvouvstupového hradla? Jinak řečeno, existuje logická funkce dvou argumentů, pomocí které bychom uměli vyjádřit všechny ostatní logické funkce? Pokud myslíte, že ano, napište, jaké výstupy by takové hradlo mělo vydat při různých vstupech. Nezapomeňte ukázat, že libovolné hradlo lze poskládat pouze za použití (nějakého počtu kusů) vámi navrženého hradla.*

Úloha 4 (27.1) [3b]: *Kolik takových hradel existuje?*

Nezapomeňte napsat, jak jste úlohy vyřešili, samotný výsledek nestačí.

Sčítání

V poslední části minulého dílu jsme si představili dvojkovou soustavu a vy jste měli za úkol vymyslet, jak pomocí hradel sčítat. Protože sčítání se nám bude při stavbě kalkulačky určitě hodit, podíváme se nyní, jak se to udělá.

Zadání:
Navrhněte, jak z hradel, která už znáte, postavit půlsčítačku.

Řešení:
Hezké vysvětlení nám zaslala Mgr.[MM] Klára Grinerová:

> U půlsčítačky oba výstupy závisí na vstupech a, b, jen každý výstup jiným způsobem. Při sestavování se tedy můžeme zvláště podívat na výsledek a přenos.
>
> - **Výsledek**
>
>   Pokud platí $a = b$, pak je výsledek vždy nula, jen se liší přenos. Hledáme tedy funkci a, b, která vrací hodnotu 1 právě tehdy, když je jedna z hodnot a, b rovna jedné. Tedy jedna z hodnot je 1 (OR) a zároveň (AND) nejsou obě hodnoty 1 (NOT (AND)), tedy:
>
> $$(a \text{ OR } b) \text{ AND } (\text{NOT } (a \text{ AND } b))$$

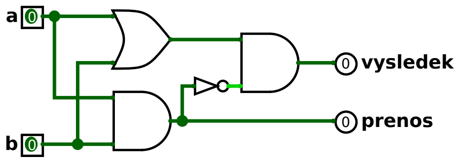
Logické funkci, kterou zde Mgr.MM Klára Grinerová postavila, se říká XOR (eXkluzivní OR). Značku XOR hradla můžete vidět na titulním obrázku.

- **Přenos**

  Přenos do vyššího řádu nastává pouze, pokud je hodnota vstupů a i b rovna 1, tedy:

$$(a \text{ AND } b)$$

Půlsčítačku tak pomocí hradel sestavíme:



Obrázek 13: Půlsčítačka

Tabulka hodnot výstupů půlsčítačky, tedy výsledek a přenos, v závislosti na vstupech a, b:

a	*b*	*výsledek*	*přenos*
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Tabulka 2: Hodnoty výstupů půlsčítačky

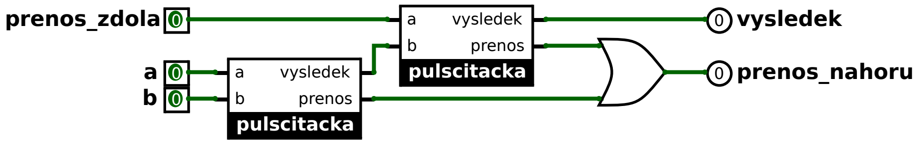
Zadání:

Jak sčítat vícebitová čísla? Můžete použít půlsčítačku.

Řešení:

Mgr.MM Jan Engler správně píše, že při sčítání budeme postupovat po sloupcích, tedy po jednotlivých bitech od toho nejméně významného, ke kterým navíc vždy přičteme přenos zdola:

> Sčítání vícebitových čísel se dá rozdělit do sčítání po sloupcích: dané hradlo (sčítačka) ze dvou bitů v sčítancích a přeneseného bitu z minulého sloupce vrátí bit součtu a přenesený bit do dalšího sloupce.



Obrázek 14: Sčítačka

Sčítačku 14 lze poskládat ze dvou půlsčítaček: sečtu bity v číslech, výsledek sečtu s přenosem z minulého sloupce – to bude výsledek. Obě půlsčítačky nemůžou mít přenos 1 zároveň, takže přenosy z obou převedu přes OR – to bude přenos do dalšího sloupce.

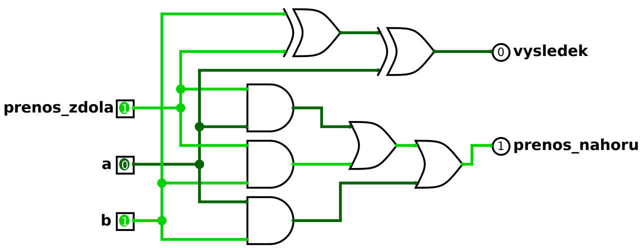
Pro zajímavost zmíníme, že využít půlsčítačku nebylo ke konstrukci sčítačky potřeba. Například Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jiří Kvapil ji zkonstruoval přímo podle toho, jak chtěl, aby se chovala. Využil u toho hradlo XOR, které jsme již zmínili v řešení předchozí úlohy.

Uděláme novou krabičku, sčítačku. Ta má tři vstupy (a, b, přenos) a dva výstupy (přenos na další bit, výstup). Přenos se objeví, když sčítáme dvě a více jedniček. Výstup, když sčítáme jednu nebo tři.

To se dá také vyjádřit následující tabulkou:

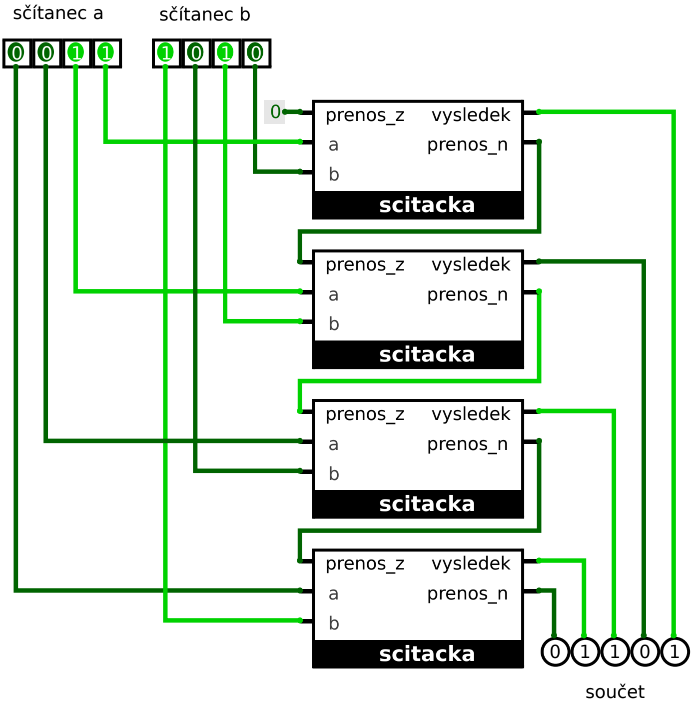
a	b	přenos zdola	výsledek	přenos nahoru
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Tabulka 3: Hodnoty výstupů sčítačky



Obrázek 15: Sčítačka podle Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jiřího Kvapila

Zapojení sčítaček do hradlové sítě pro sčítání vícebitových čísel už je jednoduché. Příklad pro čtyřbitová čísla můžete vidět na obrázku 16. Pro první sčítačku bude přenos zdola konstantní 0, protože žádný přenos ještě nemáme.



Obrázek 16: Sčítání dvou čtyřbitových čísel

Poslední úloha se ptala, jak odčítat. Stále ji můžete odevzdat, ovšem již za ni získáte nejvýše polovinu bodů, protože sčítání a odčítání jsou si přeci jen velmi podobné.

Úloha 8 (27.1) [~~3b~~ 1,5b]: *Jak pomocí hradel odčítat?*

Záporná čísla

Problém 9 (27.1): *Zatím jsme sčítali a odčítali jen kladná čísla, ale budeme chtít umět pracovat i se zápornými čísly. Zkuste vymyslet, jak pouze pomocí jedniček a nul „zakódovat“ celá čísla (třeba z nějakého rozsahu). Zkuste se taky zamyslet, jaké mají vaše reprezentace výhody a nevýhody a v čem se změní sčítání a odčítání oproti situaci jen s kladnými čísly.*

Mgr.[MM] Vojtěch Gaďurek navrhuje poslední cifru čísla vyhradit na kódování znaménka, a to tak, že nula bude značit záporná a jednička kladná čísla. Rovnou ve svém řešení navrhl sčítačku na sčítání čísel v této reprezentaci, tu vám ale zatím neukážeme, mohla by vám napovědět u jiných úloh.

Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Ondřej Chwiedziuk také zmiňuje, že by čísla mohla mít jeden „znaménkový bit“, a píše, že by to mohl být „první bit“. Zde bychom rádi upozornili, že není zřejmé, odkud by se bity měly počítat, a později v tomto čísle ukážeme ustálenou konvenci číslování bitů.

Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Václav Tichý píše:

> Vezmeme si kupříkladu 8bitové číslo. Osmý bit má hodnotu 128, takže nejvyšší číslo, které se do něj dá zakódovat, je číslo $(128 \cdot 2) - 1 = 255$, celkem 256 kombinací. Kdybychom místo hodnoty osmého bitu (128) mu přiřadili možnost „vynásobit číslo mínus jedničkou“, rozsah 8bitového čísla by poté byl $\langle -127; 127 \rangle$ místo $\langle 0; 255 \rangle$. Dále bychom mu také mohli přiřadit ještě funkci „odečíst jedna“, aby nedošlo k „-0“, rozsah by poté byl $\langle -128; 127 \rangle$. Číslo 127_{10} by poté vypadalo jako 01111111_2 a třeba -10_{10} by bylo 10001001_2.

Jak vidíte, Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Václav Tichý také vyhradil první bit pro znaménko, na rozdíl od Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Vojtěcha Gaďurka a Bc.$^{\mathsf{MM}}$ Ondřeje Chwiedziuka ale reprezentuje nulou kladná čísla a jedničkou záporná. Všiml si, že mu při tomto kódování vzniknou dvě reprezentace nuly, a to 00000000_2 a 10000000_2. Problém vyřešil tím, že záporná čísla ještě „posunul“ o jedna, tedy $10000000_2 = -1_{10}$. O tomto problému se ve svém řešení zmínil i Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Lukáš Veškrna a navrhuje stejné řešení. Jako výhodu navíc zmiňuje, že reprezentace kladných čísel zůstává nezměněná.

Máme tedy nyní dokonce různé možnosti, jak reprezentovat celá čísla, super! Nicméně, vidíte nějaké problémy některé z reprezentací? Napadá vás, v jakých situacích by se mohla která z nich hodit a kdy by naopak byla nepraktická? Napadají vás další způsoby, jak celá čísla reprezentovat? Můžete samozřejmě i vylepšit některý z již navržených. Zajímavý nápad měla Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Kristýna Petrlíková, která navrhuje využít při reprezentaci záporných čísel negaci. Šlo by to? Jak byste něco takového udělali? Problém je stále otevřený a všechny návrhy jsou vítány, tak hurá do toho!

Logisim

Postavte řešení úloh v Logisimu a odevzdejte ve formátu `.circ`!

Možná jste si na našem webu nebo facebooku všimli upozornění na video[4] o simulátoru hradlových sítí Logisim Evolution. Pokud ne, tak se na něj určitě podívejte, dozvíte se tam, jak začít Logisim používat.

V Logisimu můžete jednoduše stavět hradlové sítě, měnit jejich vstupy a sledovat, jaké vracejí výstupy. Můžete tak například před odevzdáním otestovat, že vaše řešení úloh fungují tak, jak byste chtěli. Hradlové sítě, které v něm postavíte, můžete uložit jako soubory s příponou `.circ`. Pokud nám spolu s vaším řešením pošlete i jeho implementaci v Logisimu, body navíc vás neminou.

[4] `https://www.youtube.com/watch?v=oRTKdblNBL4`

Za první vlaštovky v Logisimu tímto děkujeme Mgr.[MM] Václavovi Tichému a Mgr.[MM] Vojtěchu Gaďurkovi a těšíme se na další.

My budeme vzorová řešení stavět také a dáme vám je k dispozici[5], v průběhu tématka budeme totiž využívat, co už jsme si postavili. Kdyby se vám některou úlohu nepovedlo vyřešit, stáhnete si vzorák, abyste s námi mohli pokračovat dál.

Kalkulačka

Postavíme si kalkulačku pro dvě 4bitová čísla ve dvojkové soustavě s 8bitovým výsledkem. Sčítat umíme, odčítat určitě teď už zvládneme taky, ovšem to by byla docela nudná kalkulačka. Budeme tedy ještě násobit.

Úloha 1 [3b]: *Navrhněte hradlovou síť, která na vstupu dostane dvě čtyřbitová čísla ve dvojkové soustavě a vrátí osmibitový součin.*

Úloha 2 [3b]: *Postavte kalkulačku, která na vstupu dostane dvě čtyřbitová čísla ve dvojkové soustavě a vrátí osmibitový výsledek. Je na vás, jakým způsobem se bude ve vaší kalkulačce vybírat, která operace se provede, nezapomeňte nám to však popsat. Samozřejmě smíte využívat všechny hradlové sítě, které jsme již zmínili.*

Kalkulačky, zvláště ty starší, obvykle zobrazují výsledek na displeji složeném ze sedmisegmentových digitálních číslic. My jsme zatím pracovali s čísly ve dvojkové soustavě, ovšem tady vás čeká další úkol. Zobrazte čísla 0–9 jako digitální číslice na sedmisegmentovém displeji.

Úloha 3 [3b+]: *Postavte hradlovou síť, která dostane na vstupu jednu číslici (0 až 9) zakódovanou jako čtyřbitové číslo a na každém ze sedmi výstupů reprezentujících segmenty displeje vrátí jedničku, pokud má daný segment svítit.*

Obrázek 17: Ilustrační obrázek rozsvěcení sedmisegmentového displeje

Problém 4: *Poskládejte síť z předchozí úlohy z co nejméně hradel[6] NOT, AND a OR. Zvládnete to s méně hradly než ostatní řešitelé? S méně než organizátoři?*

[5] `http://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27-2-logisim.circ`

[6] AND a OR uvažujte binární, NOT unární. Můžete si samozřejmě z těchto tří postavit i složitější hradla, započítáme vám, z čeho se skládají.

Problém 5: *Co nám v kalkulačce ještě chybí? Zkuste vymyslet, co zatím neumí a jak bychom ji mohli dál vylepšit. Zvládnete něco z toho udělat? Odevzdávat můžete hotová vylepšení i samotné náměty, co bychom mohli přidat.*

Různé notace

Logické funkce, se kterými se v tématku setkáváme, se v různých zdrojích značí různě. V tabulce jsou značení, na která jsme mezi řešeními zatím narazili. Budeme rádi, pokud budete používat stejnou notaci, jako my v zadání. Někdy ale může být vhodnější některá z těch dalších, proto je zde také zmiňujeme.[7]

textová	matematická	inženýrská
NOT a	$\neg a$	$\overline{a}$
a AND b	$a \wedge b$	$a \times b$ nebo ab
a OR b	$a \vee b$	$a + b$

Tabulka 4: Různé notace.

Pokud se rozhodnete použít notaci, která se v tématku ještě neobjevila, na začátku svého řešení nás s ní prosím seznamte. Tak to udělala Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Kristýna Petrlíková, protože jak píše, na smajlících (obr. 18) je krásně vidět jejich význam:

- Funkce AND je velice přísná, tudíž nebude spokojená, pokud se jí byť jediná ze zadaných hodnot nebude líbit.
- Funkci OR stačí ke štěstí velice málo, klidně i jedna pozitivně naladěná proměnná.
- Funkce NOT moc ráda převrací ostatním život vzhůru nohama.

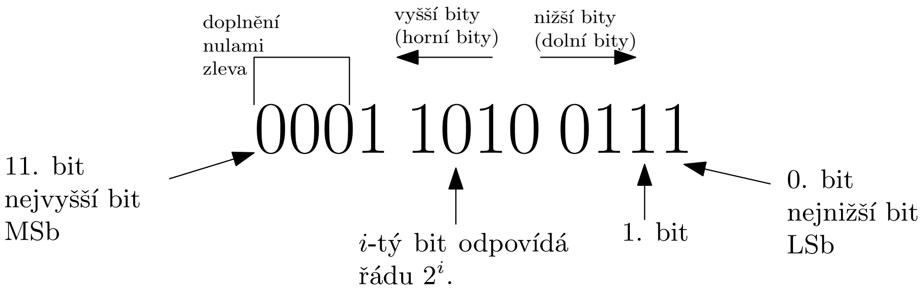
Obrázek 18: Notace Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Kristýny Petrlíkové

Pořadí bitů

Jak jsme si všimli výše, pořadí bitů ve vícebitových číslech není úplně samozřejmé. Měly by se bity počítat zleva či zprava? Konvence počítá bity zprava a od nuly.

[7] Pro zajímavost: Volba operátorů inženýrské notace vyplývá z toho, že při násobení jedniček a nul můžeme získat jedničku jedině tak, že oba činitelé budou jedničky, stejně jako v ANDu (proto se mu říká *logický součin*), „sčítání“ je pak „ta druhá“ operace, tedy OR, též zvaný *logický součet*, negace proužkem může bez nutnosti závorek pokrýt i složitější výraz. V této notaci se občas pro omezení závorek uplatňuje přednost logického součinu před logickým součtem, stejně jako v normální aritmetice.

Takto i-tý bit odpovídá hodnotě 2^i. Běžně se taky uvádí velikost (bitová *šířka*) čísla, ne však podle nejvyšší platné číslice, ale podle celkového uvažovaného počtu číslic. Číslo $0111\ 1011_2$ tedy budeme považovat za osmibitové, přestože by bývalo stačilo bitů sedm (a přestože se číslo 0123_{10} označuje za trojciferné).



Obrázek 19: Konvence pojmenování bitů

Dále se s některými bity pracuje často, a proto mají svá jména. Konkrétně to je nejvýznamnější bit – *MSb*, z anglického „most significant bit" – a nejméně významný bit – *LSb*. (Podotýkáme, že písmeno ‚b' je v obou zkratkách malé, pro odlišení bitů od bytů.) Pojmy *vyšší* a *nižší* bity se používají spíše intuitivně pro bity bližší k MSb, resp. LSb. Z obrázku 19 je taky patrné, že delší čísla shlukujeme po čtveřicích – bitové šířky čísel jsou totiž často násobky čtyř (či jiných mocnin dvojky).

Co nás čeká příště?

Co kdyby se vstupy hradel měnily v čase? Musí výstup sítě záviset jen na tom, co má síť na vstupu?

Úloha 6 [2b]: *Postavte hradlovou síť, která na výstupu vrací 1, pokud už někdy na vstupu byla 1. Na začátku je na vstupu i výstupu 0.*

Úloha 7 [2b]: *Upravte síť z předchozí úlohy tak, aby šla resetovat, tedy nějakým způsobem zařídit, aby na výstupu opět byla 0, dokud se na vstupu opět neobjeví jednička.*

Pavel a Káťa; `pa-ka@mail.ledoian.cz`
e-mailová konference: `hradla@mam.mff.cuni.cz`

Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata t1	t2	t3	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ T. Flídr	3	88,4	12,0		19,5	13,0	44,5	44,5
2.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ J. Engler	2	42,5	15,0		13,5	14,0	42,5	42,5
3.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ V. Gaďurek	4	39,0	8,0		4,0	27,0	39,0	39,0

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata t1	t2	t3	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
4.	Mgr.^{MM} K. Grinerová	4	49,9		3,0	14,0	16,4	33,4	33,4
5.	Dr.^{MM} L. Veškrna	3	63,1	4,0			27,3	31,3	31,3
6.	Doc.^{MM} J. Kalvoda	4	165,4			31,0		31,0	31,0
7.	Mgr.^{MM} P. Hladík	3	43,0	3,5		2,5	24,0	30,0	30,0
8.	Mgr.^{MM} V. Jůzková	4	35,4	7,0			19,9	26,9	26,9
9.	Mgr.^{MM} J. Kvapil	3	39,2				23,5	23,5	23,5
10.	Mgr.^{MM} V. Tichý	2	22,7	2,5			20,2	22,7	22,7
11.	Mgr.^{MM} K. Petrlíková	3	22,5				22,5	22,5	22,5
12.	Mgr.^{MM} D. Farhan	4	22,1				22,1	22,1	22,1
13.	Mgr.^{MM} H. Nguyen	4	21,5			21,5		21,5	21,5
14.	Dr.^{MM} D. Perout	4	50,5			18,5		18,5	18,5
15.	Bc.^{MM} O. Chwiedziuk	4	18,3				18,3	18,3	18,3
16.	Bc.^{MM} A. Húšťava	3	17,7	3,0			14,7	17,7	17,7
17.	Bc.^{MM} V. Polášková	2	17,0	9,5	3,0	4,5		17,0	17,0
18.–20.	Mgr.^{MM} A. Opl	3	36,5			16,0		16,0	16,0
	Bc.^{MM} K. Šedová	2	16,0	6,0		10,0		16,0	16,0
	Bc.^{MM} M. Štencel	4	16,0				16,0	16,0	16,0
21.	Bc.^{MM} M. Valtrová	2	14,0			14,0		14,0	14,0
22.–24.	Mgr.^{MM} A. Cmielová	2	38,6	13,0				13,0	13,0
	Dr.^{MM} O. Gonzor	4	58,4				13,0	13,0	13,0
	Bc.^{MM} O. Skácel	2	13,0	10,0		0,5	2,5	13,0	13,0
25.	J. Křimská		9,0	9,0				9,0	9,0
26.	Š. Březovják	4	8,0			8,0		8,0	8,0
27.	D. Skýpala	3	6,5	6,5				6,5	6,5
28.	P. Khartskhaev	4	6,0			3,0	3,0	6,0	6,0
29.	E. Beranová	1	4,0		3,0	1,0		4,0	4,0
30.	P. Herman	2	1,7	1,0		0,7		1,7	1,7
31.	A. Čechová	1	0,6				0,6	0,6	0,6

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M