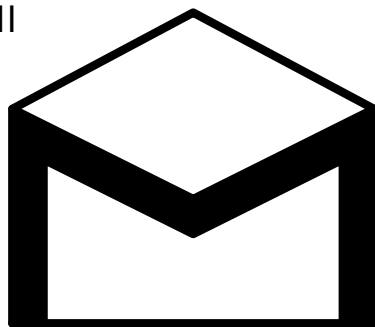
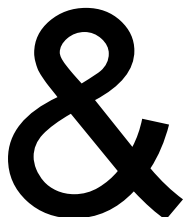
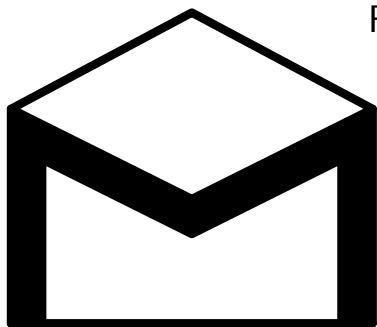


STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVII

Číslo 1



MATEMATIKA

FYZIKA

INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí současní i budoucí řešitelé,

právě držíte v rukou první číslo 27. ročníku časopisu M&M. Co to vlastně M&M je? Korespondenční seminář určený pro všechny zvědavé středoškoláky. V našem časopise najdete několik teoretických a experimentálních témat, prostřednictvím nichž se můžete dozvědět a naučit mnoho zajímavého. Jsme mezioboroví – nabízíme témata různých zaměření z matematiky, fyziky a informatiky.

Kromě studijního textu a problémů k zamyšlení jsou součástí tématky obvykle i úlohy, které je možné řešit samostatně. Zároveň se jich však nemusíte držet, můžete experimentovat a zabývat se vlastními nápady v rámci tématka! Hodně oceníme i příspěvky, které budou na cizí řešení tématky reagovat. Vaše příspěvky k tématům a řešení úloh náležitě obodujeme a nejlepší z nich zveřejníme.

Chcete-li vědět, jak se do našeho semináře zapojit, doporučujeme vám pročíst si přílohu „Jak řešit“¹. Nenajdete-li ani tam odpovědi na vaše otázky ohledně řešení tématky, lze nám napsat na mam@matfyz.cz.

M&M však není jen možnost, jak si rozšířit obzory a zamyslet se nad otázkami, které vám ve škole nikdo nepoloží. Pro naše nejlepší řešitele pořádáme dvakrát do roka soustředění plné zajímavých přednášek a zábavných her. Podzimní soustředění se bude letos konat od 17. do 25. října na Vysocině. Tradičně zveme nejen účastníky minulého ročníku, ale i nové řešitele – pokud tedy pošlete svá řešení do 20. září, máte šanci se na toto soustředění dostat!

Doufáme, že budete řešit témátka s radostí. Těšíme se na vaše příspěvky,
Vaši organizátoři

Pokud v úvodníku objevíte šifru a podělíte se s námi o její řešení na e-mail mam@matfyz.cz, odměna vás nemine. Mimo úvodník šifru nehledejte. Raději se zaměřte na témátka. Témátka jsou to hlavní. Řešte témátka!

Obsah

Téma 1 - Topologie	4
Téma 2 - Optika	7
Téma 3 - Olympiádní matematika.....	9
Téma 4 - Počítač z nul a jedniček.....	18

¹https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/jak_resit.pdf

Zadání a řešení témat

1. deadline: 20. 9. 2020 | 2. deadline: 4. 10. 2020

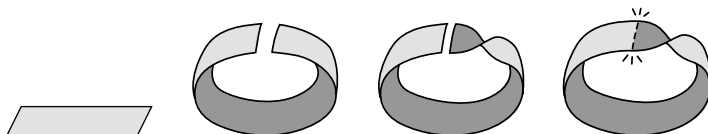
Řešení odevzdaná do 20. 9. se započítají pro účast na soustředění

Téma 1 – Topologie

Díl 1: Čím se zabývá topologie

Pojďme společně nahlédnout do jednoho z fascinujících odvětví matematiky – topologie. Přesné zadefinování základních topologických pojmů je i při znalosti vysokoškolské matematiky poměrně zdouhavé, přesto je však možné většinu termínů pochopit a pracovat s nimi na intuitivní úrovni, o což se pokusíme.

Než ale začneme, pojďme prozkoumat jeden zajímavý topologický objekt, Möbiovu pásku. Můžeme ji jednoduše vytvořit doma. Stačí vzít pruh papíru. Když přilepíme jeho konce k sobě, dostaneme obruč. Pokud ale jeden z konců před slepením otočíme o 180° (musíme u toho samozřejmě držet druhý konec), dostaneme Möbiovu pásku. Postup je znázorněn na obrázku 1.



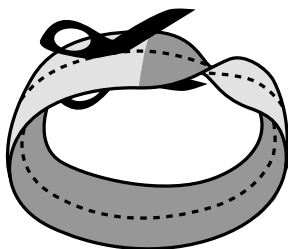
Obrázek 1: Výroba Möbiovy pásky

Úloha 1 [1b]: *Jak vypadá okraj Möbiovy pásky?*

Úloha 2 [4b]: *Vezmi Möbiovu pásku a stříhej ji podélně kolem dokola (viz obrázek 2), dokud se neprostráhněš až k místu, kde jsi začal. Ještě než dostříháš, co si myslíš, že se stane? Až dostříháš, prozkoumej, co se stalo. Je to v souladu s tvým očekáváním? Jaké objekty dostaneš? Jaké mají okraje? Pokud jsou zakroucené, kolikrát? A co se stane, když nezačneš stříhat v půlce, ale třeba ve třetině? A co třeba když před slepením otočíš konec pásky vícekrát (tj. ne o 180° , ale o 360° , 540° atd.)? Zamysli se nad tím, proč se to děje, a zkus přijít s vysvětlením.*

To ale ještě není všechno.

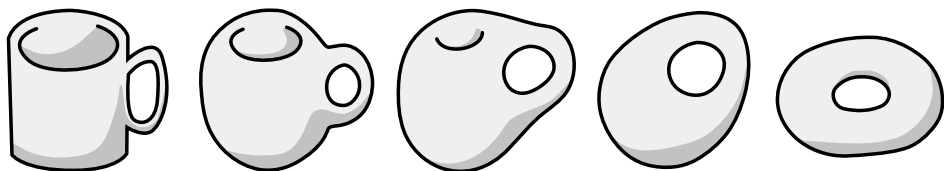
Úloha 3 [5b]: *Je možné vzít dvě Möbiovy pásky a přilepit je k sobě tak, že v místě slepení jsou k sobě kolmé. (Tip: Je možné vystříhnout velké „+“ a slepit vždy protilehlé konce.) Pokud si hned neumíš představit, jak to myslíme, podívej se na krátké video: <https://youtu.be/31BtbYKGFHU> Co se stane, když takto slepené Möbiovy pásky prostráhneme stejně jako v předchozí úloze? Hraje nějakou roli to, jakým směrem natočíme konec pásky před slepením? Co když takto zkombinujeme Möbiovu pásku a obruč? Nebo dvě obruče?*



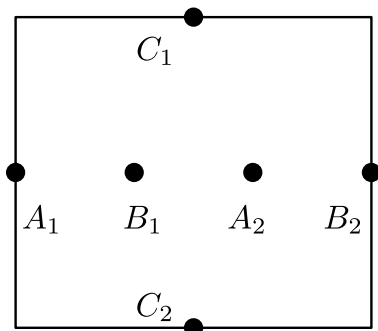
Obrázek 2: Stříhání Möbiovy pásky

Problém 4: *Abychom nemuseli pořád stříhat a lepit, tak by se hodilo zavést nějakou vhodnou reprezentaci Möbiovy pásky, která třeba půjde jednoduše nakreslit na papír a se kterou se bude dobře pracovat. Třeba to i zjednoduší řešení úloh výše. Zkus nějakou takovou reprezentaci vymyslet.*

Co tedy je topologie? Topologie je poměrně blízce příbuzná geometrii. Vlastně bychom mohli říci, že topologie je zobecněním geometrie. V jakém smyslu? V geometrii je definovaná a důležitá vzájemná vzdálenost bodů. Díky tomu rozlišujeme například čtverec od kruhu. V topologii neexistuje rozdíl mezi čtvercem, kruhem a trojúhelníkem, protože tyto objekty jsou na sebe navzájem převoditelné pomocí souvislých deformací. Můžeme si to představit tak, že v průběhu času deformujeme daný objekt a pro každý jeho bod platí, že jeho aktuální pozice leží v těsné blízkosti místa, kde se bod nacházel před chvilkou. Body, které sousedily v objektu před deformací, musí spolu sousedit i po deformaci a jejich trajektorie musí být podobné, stejně tak vzdálené body se nesmí dostat do těsné blízkosti. Zjednodušeně řečeno, objekty nesmíme řezat či slepovat. Zároveň máme požadavek, že dva různé body nesmíme zobrazit na sebe. Nejde tedy třeba smrsknout kruh do jediného bodu. Zkrátka transformaci musíme umět udělat i opačným směrem, aniž bychom při tom třeba museli jeden bod zobrazit na dvě místa. Transformaci objektů, kterou jsme popsali výše, budeme říkat *homeomorfismus*. Dva objekty jsou *homeomorfní*, neboli z topologického hlediska stejné, pokud je na sebe můžeme převést pomocí homeomorfismu. Homeomorfismus hrníčku s nafukovacím kruhem můžete vidět na obrázku 3.



Obrázek 3: Homeomorfismus (obousměrně spojitá transformace) mezi hrníčkem a nafukovacím kruhem



Obrázek 4: Obrázek k úloze 5

Úloha 5 [1b]: Na obrázku 4 jsou body A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 . Je možné spojit A_1 s A_2 , B_1 s B_2 a C_1 s C_2 tak, aby se jejich propojení neprotínala a nepoužívala oblast mimo vyznačený obdélník? Vyřešte problém pomocí řešení jednoduššího, ale topologicky ekvivalentního problému, a jeho následnou transformací do tvaru původního zadání. Můžete též nejdříve najít řešení a na jeho základě popsat uvedenou transformaci.

Výsledkem je to, že většinu objektů, které geometrie rozlišuje, házíme do jednoho pytle. Díky tomu se můžeme více zaměřit na hlubší rozdíly mezi objekty. Typickým příkladem takového rozdílu mezi objekty je počet děr. Pomocí homeomorfismu můžeme díru zmenšit, ale abychom se jí mohli úplně zbavit, museli bychom ji slepit podél jejího okraje, což není povolená operace. Proto třeba hrnek není homeomorfní kouli, protože má ucho.

Výše jsme zmínili, že objekty mohou mít okraj. Co to znamená? Ukážeme si to na příkladu kruhu. Když se postavíme někam do kruhu, tak můžeme chodit, kam chceme. Jakmile se však příliš vzdálíme od středu, narazíme na hranu, tedy místo, kdy už nemůžeme pohybovat směrem od středu ven a musíme se trochu pootočit, abychom mohli pokračovat. Okrajem kruhu je tedy kružnice. Okraj nemusí být vždycky souvislý. Třeba okrajem obruče jsou dvě kružnice, které se nijak nedotýkají ani neprotínají (přesněji matematicky řečeno, je to sjednocení dvou kružnic).

Úloha 6 [2b]: Existuje nějaký objekt bez okraje? Podpoř svůj názor důkazem nebo příkladem. Za topologický objekt můžeš pro účel této úlohy považovat libovolný reálný objekt, který znáš ze života. Tím se omezujeme jen na konečné objekty v 1D, 2D a 3D. Neboj, k těm složitějším se dostaneme později.

Příště si představíme pár základních objektů a naučíme se je přetvářet a kombinovat, čímž získáme objekty ještě zajímavější.

Téma 2 – Optika

Díl 1: Rozvlněná optika

Asi tušíte, milí řešitelé, že se světlem je to takové složitější. Někdy se chová jako částice, někdy jako vlna, ve skutečnosti je obojím zároveň. Ve škole jste se převážně věnovali (nebo budete věnovat) té části optiky, které se říká paprsková nebo geometrická. Světelná energie se v tomto přiblížení šíří po paprscích, na rozhraních se láme a nikdy se nemůže dostat do geometrického stínu tělesa. S trochou přemýšlení určitě přijdete na to, že to odpovídá představě světla jako shluku částic.

My bychom se v tomto tématku rádi věnovali tomu druhému přístupu, ukážeme si některé vlnové vlastnosti světla. No a nejlepší je, když si to každý zkusí na vlastní kůži, proto bude tématko hodně hravé a experimentálně zaměřené. Rádi bychom, abyste nám psali, jak vaše experimenty dopadly. Abyste se sami zajímali, proč a jak vlastně ty experimenty, které provádíte, fungují. Sepište a pošlete nám cokoli, na co jste přišli! Váš textík otiskneme a budou si ho moci přečíst i ostatní řešitelé M&M. Třeba je inspirujete a oni na to, na co jste přišli, nějakým způsobem navážou a rozvedou vaši myšlenku.

Spektra a spektrometry

Bílé světlo je složeno ze všech vlnových délek, to jste se určitě učili ve škole. Jistě jste si ale také všimli, že bílé světlo z různých zdrojů se liší. Sluneční světlo není stejné jako zářivkové. Poslední dobou se hodně mluví o tom, že světlo z monitorů má v sobě spoustu modré složky, která brání zdravému spánku. O žárovce se zase říká, že má teplé žluté světlo. Co to ale vůbec znamená, že je nějaké světlo teplé a jiné studené? A co barevné světlo, je taky z něčeho složeno?

Když na něco nemůžeme přijít, občas se vyplatí problém rozložit na prvočinitele. Tak si i my rozložíme světlo z různých světelných zdrojů na jednotlivé vlnové délky. Podle toho, jak bude tento rozklad vypadat, zjistíme o tom kterém světelném zdroji spoustu věcí. Přístroj, který umí světlo rozložit, se nazývá **spektrometr**. Návod na výrobu jednoduchého spektrometru naleznete uprostřed tohoto čísla, nebo je ke stažení na našem webu.² Pojďme s ním zkusit několik věcí:

Úloha 1 [2b]: *Sestavte spektrometr podle návodu a pošlete nám jeho fotku. Napište nějaké tipy, ať můžeme zlepšit návod.*

Úloha 2 [1b]: *Jak se změní obraz spekter ve spektrometru, když nalepíme kus DVDčka otočený o 90° oproti tomu, jak je popsáno v návodu?*

Problém 3: *Zkuste experimentovat se změnou tvaru spektrometru. Jak se změní obraz spekter ve spektrometru, když ho vyrobíme delší, když uděláme větší nebo menší štěrbinu, když změníme úhel na jednom jeho konci?*

²<https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/27-1-spektrometr.pdf>

Úloha 4 [2b]: Rozložte světlo žárovky a bílé rozsvíceného monitoru. Popište, jaké rozdíly vidíte.

Úloha 5 [3b+]: Pozorujte několik světelných zdrojů, které byste označili jako teplé, a několik takových, které byste označili jako studené. Které vlnové délky převládají v kterých rozkladech? Rozepište se o tom, které zdroje jste použili a jak spektra vypadala.

Problém 6: Nastudujte si, jakým způsobem vlastně takto vyrobený spektrometr funguje, a sepište o tom krátký článek, který budeme moci otisknout pro ostatní.

Úloha 7 [3b]: Pozorujte přes spektrometr jasné sluneční záření. Měli byste spatřit celé spektrum a v něm nějaké černé proužky. Co je to za proužky? Přiložte fotku a zkuste identifikovat jejich vlnové délky (lze to i bez kalibrace popsané v Problému 11).

Úloha 8 [2b]: Máte-li doma barevné fólie, zkoumejte je. Popište, které vlnové délky v nich chybí a které jsou naopak výrazné, když je prosvítíte slunečním světlem?

Problém 9: Jak se změní výsledky Úlohy 8, pokud nebudete prosvěcovat slunečním světlem, ale jiným světelným zdrojem?

Problém 10: Nastudujte si, jakým způsobem vznikají černé proužky z Úlohy 7, a sepište o tom krátký článek, který budeme moci otisknout pro ostatní. Pokud znáte vlastnosti jednotlivých prvků, co jsme schopni přesně zjistit podrobným zkoumáním těchto černých proužků?

Problém 11: Připojte spektrometr k vaší webkameře nebo fotoaparátu. Pomocí laserového ukazovátka nebo barevné LED ho nakalibrujte. Zdokumentujte průběh kalibrace a sepište krátký textík, ve kterém zmíníte všechny tipy a triky, na které jste přišli, abychom ho mohli otisknout a ostatní to měli jednodušší.

Návod: U LED nebo laserového ukazovátka máte dobrou šanci zjistit, jakou vlnovou délkou přesně svítí. Laserová ukazovátka to mají často uvedeno v manuálu nebo na obalu, u LED si před koupí raději v datasheetu ověřte, že je zde vlnová délka uvedena. Když posvítíte na spektrometr, měli byste vidět jen jednu čáru. Potom můžete prohlásit, že tomuto místu odpovídá vámi zjištěná vlnová délka. Když to provedete ještě s jinou vlnovou délkou, máte už stupnici. Předpokládejte, že všude na stupnici odpovídá stejná vzdálenost stejně velkému rozmezí vlnových délek. **Pozor: pokud svítíte do spektrometru laserovým ukazovátkem, nikdy se do spektrometru nedívejte pouhým okem!**

Úloha 12 [6b+]: Zkoumejte alespoň 3 světelné zdroje (sluneční světlo, různé LED, zářivka, laserová ukazovátka, žárovka, úsporná žárovka, baterka v telefonu, ...) a s kalibrovaným spektrometrem popište, jaké vlnové délky odpovídají maximům, minimům, výrazným čárám spektra. Pokud to lze, porovnejte vaše měření s tabulkovými hodnotami. Pošlete fotodokumentaci.

Nebojte se, že vlnové délky nebudou sedět moc přesně s tabulkovými hodnotami, vámi vyrobený spektrometr je jen přibližný. I 50 nm je dobrá přesnost. A nějaké výsledky jsou lepší než žádné.

Problém 13: Vymyslete nějaký vlastní zajímavý problém nebo úložku a pošlete nám zadání, ať mohou ostatní zkoumat! Můžete poslat rovnou i řešení!

Fanda; frantisek.zajic@matfyz.cz

e-mailová konference: optika@mam.mff.cuni.cz



Téma 3 – Olympiádní matematika

Díl 1: Geometrie vol. 1

Geometrie je jedním ze čtyř základních okruhů příkladů v matematické olympiádě, a často tím nejpomíjenějším. Přitom, na rozdíl od jiných typů úloh, často k vyřešení nepotřebujeme žádné rozsáhlé znalosti – a v rámci prvního dílu tohoto tématka si ověříme, že i s omezeným arzenálem budeme schopni vyřešit poměrně širokou škálu úloh.

První si pojďme stručně představit, jak vlastně vypadá taková olympiádní geometrická úloha.

Úloha 1 [3b]: Na těžnici AL ostroúhlého trojúhelníku ABC je zvolen bod P tak, že $|\sphericalangle BPC| = 90^\circ$. Přímky BP a CP protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech M ($M \neq B$) a N ($N \neq C$). Dokažte, že $AL \perp MN$.

Než se ale vrhneme na samotný text tématka, pár slov k řešení jeho úloh a problémů. Velmi oceníme, pokud budou řešení úloh obsahovat přehledný obrázek (ať už narýsovaný rukou, nebo v Geogebře aj.) – pomůže nám to se zorientovat ve vašem řešení a budeme mnohem shovívavější, pokud budeme mít pocit, že řešení není podle našich představ. Co se týče problémů, počet bodů není pevně dán a bude se odvíjet od obsahu, ale i kvality textu.

A teď už rovnou k několika zásadám, které nám řešení každé geometrické úlohy velmi ulehčí.

Dostali jsme zadání úlohy a několikrát si ho pečlivě přečetli (není moc horších věcí než několik hodin řešit úlohu, aby pak člověk zjistil, že si špatně přečetl zadání a řeší něco úplně jiného, než mu bylo zadáno). Tak čím teď začít?

1. Nakresli si obrázek

Možná se vám to bude zdát úsměvné, ale to nejdůležitější na každé geometrické úloze je nakreslit si správný a přehledný obrázek. Jedna věc je malý náčrtek od ruky v rohu papíru, který nám sice může pomoci si úlohu lépe představit, ale v nejlepším případě v něm nic nevykookáme a v tom nejhorším se do úlohy naopak zamotáme. Vezměme si tedy do ruky tužku a pravítko a úlohu si narýsujeme.

I to má ovšem několik zásad. Ta první zní, narýsujte si ho dostatečně veliký. Nestojí to skoro žádnou práci navíc a uvidíte, že z obrázku přes půl A4 toho vypočurujete mnohem více než z pár centimetrové drobotiny. Dobrým sluhou, ale zlým pánem může být i Geogebra či jiné grafické programy – můžou se hodit, pokud řešíte doma a nechce se vám desetkrát rýsovat tu stejnou úlohu, na druhou stranu při řešení samotné olympiády se můžete spolehnout jen na sebe a na to, co jste schopni nakreslit vy sami – a i rýsování přehledných obrázků je schopnost, kterou nezískáte jinak než tím, že ji budete procvičovat.

Další důležitou zásadou je obecnost. Je v zadání úlohy napsáno ostroúhlý trojúhelník? Tím pádem si narýsujte opravdu obecný ostroúhlý trojúhelník. Ani skoro pravoúhlý, ani skoro rovnoramenný, obecný. V opačném případě se může stát, že nám v obrázku vyjde něco, co ale obecně neplatí (třeba že nějaké dvě úsečky jsou na sebe kolmé), což nás v řešení často může svést na špatnou stopu. Pokud si tedy nakreslíte obrázek a stane se vám, že vám vyjde právě taková nějaká speciální situace – konkrétně se třeba někde objeví právě pravý úhel, velikost dvou různých úhlů či úseček se zdá být stejná, popřípadě se nějaké tři přímky protnou v jednom bodě, aniž by se o tom zmiňovalo zadání – zkuste si ho nakreslit znovu upravený, například jiné poměry stran vašeho obecného trojúhelníku či jinak zvolený bod. Pravděpodobně zjistíte, že předchozí speciální situace byla jenom náhoda, může se ale stát, že vám to „vyjde stejně“ i v dalším obrázku. Pak už je na místě přemýšlet nad tím, jestli vám to nemůže pomoci v řešení a jestli to umíte dokázat.

K obecnosti patří ještě jeden krátký bod. Pokud se úloha nezmiňuje o tom, jestli je nějaký trojúhelník ostroúhlý, nebo tupoúhlý – nakreslete si situaci pro obě možnosti a zmiňte to ve svém řešení. S největší pravděpodobností bude důkaz pro obě situace téměř shodný, může se ale stát, že se bude lišit v nějakých detailech – a pokud to ve svém řešení nezmiňte, nejspíš úplně zbytečně přijdete o body.

2. Použij barvy

Máme tedy narýsovaný krásný, dostatečně velký obrázek. Co teď s ním? Začněme ho používat. Vyznačme si velikosti úhlů a úseček, které známe – úhly se vyplatí

pojmenovat řeckými písmeny, což nám dále umožní s nimi počítat. U úseček většinou pomůže si stejné délky značit stejnou barvou. Pokud během řešení zjistíme, že velikost nějakých dvou úhlů se rovná, nakresleme si to tam. Pokud dostaneme podezření, že nějaké čtyři body leží na kružnici, označme si je a zkusme to dokázat. To nám vnese náhled do obrázku, a budeme moct úlohu řešit přímo v něm, což nám práci velmi usnadní.

3. Uvědom si, co neznáš

Poslední důležitou zásadou, kterou zmíníme, je uvědomit si už na začátku, kolik je v úloze neznámých. Podívejme se na ukázkovou úlohu. Na začátku je řečeno, že uvažujeme obecný ostroúhlý trojúhelník – máme tedy alespoň dvě neznámé, velikost dvou úhlů v tomto trojúhelníku (například α u vrcholu A a β u vrcholu B). Velikost třetího úhlu je nám známa ($180^\circ - \alpha - \beta$). Dále ale v této úloze už my jakožto řešitelé nevolíme náhodně žádný bod či úsečku – všechny ostatní body v dané situaci jsou pevně dané, s ohledem na volbu trojúhelníku, kterou jsme učinili jako první. Celá tato úloha má tedy dvě neznámé – a každý úhel v ní můžeme vyjádřit kombinací našich dvou zvolených neznámých. Pokud by nám ale úloha říkala „v trojúhelníku leží bod K , pro který platí, že $|AK| = \frac{1}{2}|BC|$ “, můžeme si my zvolit libovolný z nekonečna bodů, které splňují tuto podmínku – a tím, že ho zvolíme, jsme si přidali další neznámou.



Někteří z vás se už určitě nedočkavě vrhli na řešení první úlohy. Podařilo se? Pokud ano, gratuluji – je možné, že se v následujícím textu nedozvíte moc věcí, které ještě nevíte. Můžete se tedy směle vrhnout do řešení dalších úloh, tentokrát už těžších – pokud si s nimi ale nebudete vědět rady, doporučuji si text přečíst. Možná vás to nasměruje k správnému řešení.

Pokud si ale s úlohou nevíte rady, nezoufejte. Místo toho se začtěte a uvidíte, že s pár radami bude řešení hračka.

Je důležité si uvědomit, že řešení většinou není přímočaré – stejně tak jako řešení nerovnice většinou není pouze dosazení do známého vzorce, ani geometrickou úlohu nejspíš nevyřešíte jedním správně použitým principem nebo větou. Pokud tedy máte pocit, že k vyřešení úlohy by například stačilo dokázat, že se velikost nějakých dvou úhlů rovná, ale netušíte, jak na to – možná vám schází nějaký mezikrok. Zkuste se tedy nesnažit z A rovnou dokázat Z, ale naopak najít nějaké B (a občas i C nebo D), které vyplývá z A, a pomocí kterého už jste schopni Z dokázat – tedy si úlohu rozdělit na menší části.

Problém 2: *Stejně jako tomu je v první úloze, jedním z nejběžnějších úkolů je dokázat, že nějaké dvě úsečky jsou na sebe kolmé (popřípadě, že nějaký trojúhelník je pravouhlý). Jakými všemi způsoby můžeme dokázat, že se někde nachází pravý úhel? Nebojte se být kreativní a rozepsat se.*

Trojúhelník a co v něm hledat

Asi nejčastějším objektem, kolem kterého se točí geometrické úlohy, je trojúhelník. Ačkoliv je ve srovnání s jinými velmi jednoduchý, má spoustu vlastností, bez kterých se při řešení libovolné úlohy neobejdete. V tomto díle témátka se pokusíme je stručně projít a vypíchnout to důležité.

Významné body a úsečky, o kterých se dočtete na následujících řádcích, budete s největší pravděpodobností znát – přesto je možné, že objevíte nějakou jejich vlastnost, o které jste buď neslyšeli, a nebo vám nikdy nepřišla důležitá. Čtěte tedy pozorně.

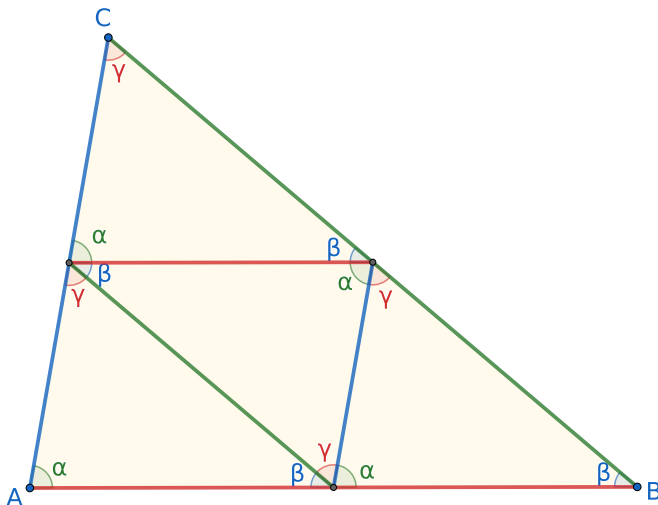
Krom vrcholů samotných jsou nejdůležitějšími body trojúhelníku nejspíš středy jeho stran. Pojí se se spoustou dalších objektů v trojúhelníku – například s těžnicemi a středními příčkami.

Těžnice je spojnice vrcholu se středem protilehlé strany a je pro nás zajímavá především tím, že dělí trojúhelník na dvě části o stejném obsahu. *Těžiště* je průsečíkem všech těžnic, a zároveň dělí každou těžnici na dvě části v poměru 2 : 1 (delší část je blíže k vrcholu). Toho se dá občas využít při počítání délek úseček či obsahů.

Na druhou stranu nám ale těžnice neříkají nic zajímavého o úhlech či podobných trojúhelnících. V případě, že nás tohle zajímá, jsou skvělým pomocníkem právě střední příčky.

Střední příčka trojúhelníku je spojnice středů dvou jeho stran. Je rovnoběžná s třetí ze stran a má délku rovnou polovině této strany. Rovněž od původního trojúhelníku „odřezává“ malý trojúhelníček, který je podobný s trojúhelníkem původním (s koeficientem podobnosti nepřekvapivě $\frac{1}{2}$).

Trojúhelník vzniklý spojením všech středních příček v trojúhelníku se nazývá *příčkový*. Například podle věty *sss* je jednoduché odvodit, že je opět podobný s původním trojúhelníkem s koeficientem $\frac{1}{2}$. Najednou už tedy máme pět podobných trojúhelníků – a to je spousta úhlů a délek, se kterými můžeme pracovat.



Obrázek 5: Střední příčky

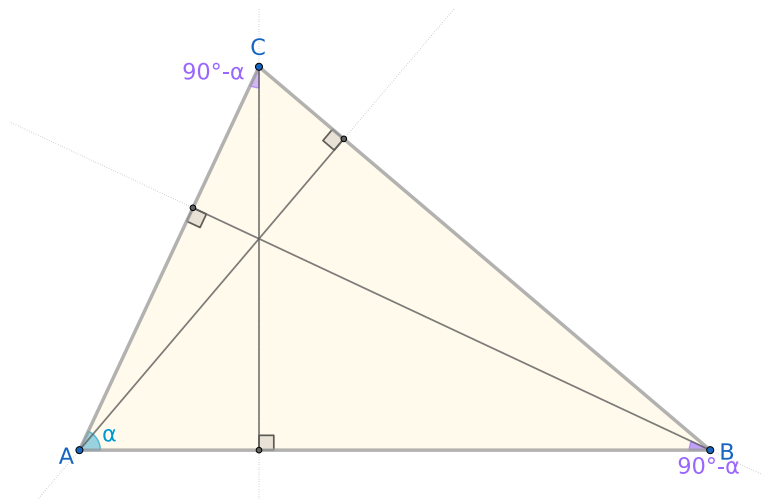
Úloha 3 [3b]: *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$, a T je jeho těžiště. Dále nechť M je střed jeho strany BC a k kružnice se středem T a poloměrem $|TM|$. Bod N je druhý průsečík kružnice k se stranou BC (různý od M). Konečně nechť S je bod souměrně sdružený s bodem A vzhledem k bodu N . Dokažte, že platí $TS \perp BC$.*

Úloha 4 [3b]: *Uvažujme rovnoběžník $ABCD$ s delší úhlopříčkou AC . Nechť P je vnitřní bod tohoto rovnoběžníku, pro nějž platí $|PC| = |BC|$. Dokažte, že přímka BP je kolmá k přímce, na níž leží středy úseček AP a CD .*

Dalšími důležitými pojmy jsou výšky, paty výšek a ortocentrum.

Výšky jsou kolmice z vrcholů na protější strany (v případě tupouhelného trojúhelníku na prodloužení těchto stran). Paty těchto kolmic, které nazýváme taky *paty výšek*, jsou (ne nutně vnitřními) body jednotlivých stran. *Ortocentrum* je pak průsečíkem všech tří výšek v trojúhelníku.

Jako v případě středních příček, i výšky vytvářejí spoustu úhlů – výška z bodu C dělí vnitřní úhel u tohoto vrcholu na $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$ (α, β jsou vnitřní úhly u vrcholů A, B). Vznikají nám tedy tři dvojice stejných úhlů (viz obrázek 6), a tím pádem i čtveřice bodů, které leží na jedné kružnici.



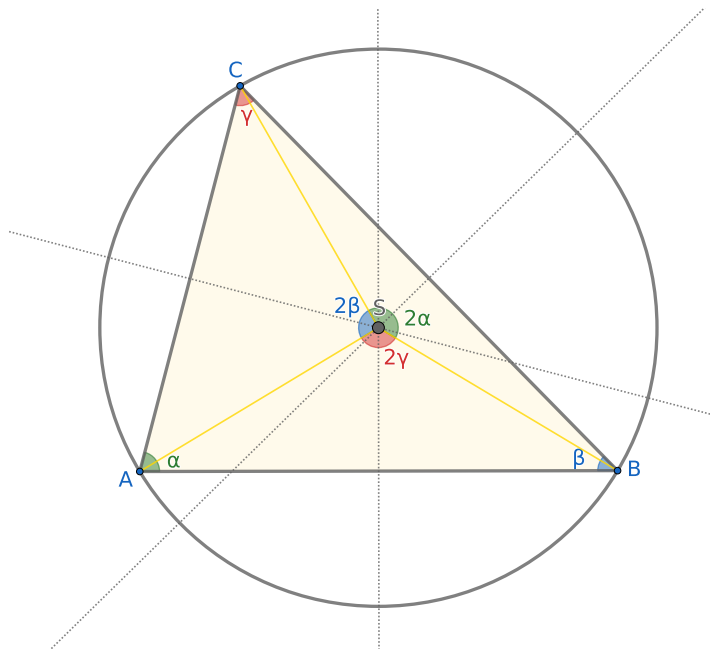
Obrázek 6: Výšky

Problém 5: Někteří z vás možná nevěřičně koukají na tučně vyznačenou větu. Co se tím autor snažil říct? Jak spolu souvisí dvojice stejných úhlů a nějaké kružnice? Odpověď na tyto otázky se skrývá pod pojmem **těživový čtyřúhelník**. Zkuste co nejlépe popsat, o co se jedná, jaké vlastnosti má a s jakými dalšími větami nebo tvrzeními ho můžeme spojit. Prozradíme, že vám to může pomoci v řešení první úlohy. Čerpat můžete z libovolných zdrojů, použijte ale svá slova a nezapomeňte zdroj uvést.

Teď se ale vraťme zpět ke středům stran. Co dalšího zajímavého nám mohou generovat? Ano, třeba *střed kružnice opsané*.

Ten leží na průsečíku os stran – tedy kolmic ke stranám trojúhelníka vedených z jejich středů. Nejen že je jeho vzdálenost od všech vrcholů trojúhelníků stejná – a tím pádem nám vznikají rovnoramenné trojúhelníky (viz obrázek 7) – ale také jsme schopni z věty o středovém úhlu jednoduše spočítat úhly v nich. S každým dalším bodem, o kterém víme, že se nachází na kružnici opsané danému trojúhelníku, se proto jedná o mocnější nástroj.

Úloha 6 [2b]: V trojúhelníku ABC je délka těžnice spojující vrchol C a střed strany AB rovna polovině délky strany AB . Dokažte, že těžiště trojúhelníku ABC , střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a vrchol C leží na jedné přímce.



Obrázek 7: Kružnice opsaná

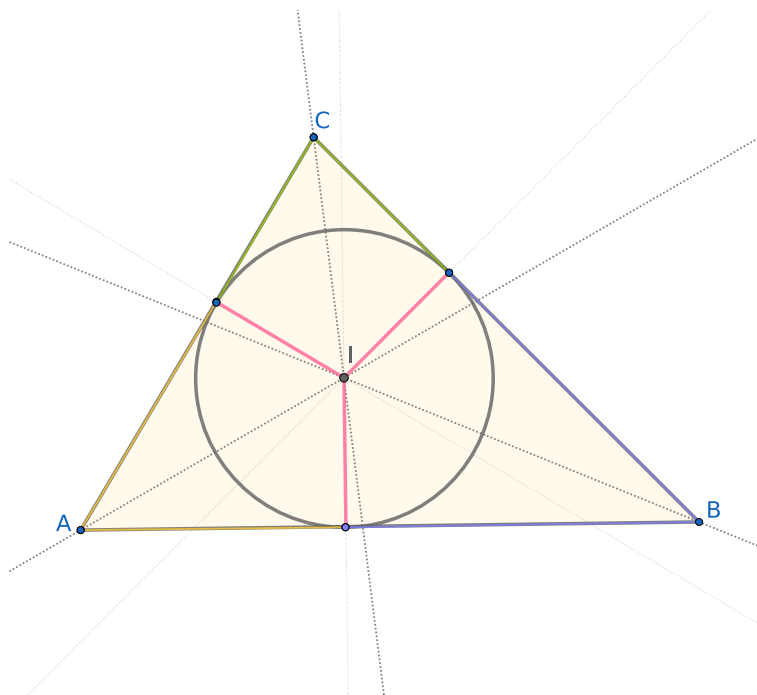
Posledním významným bodem, který si teď zmíníme, je *střed kružnice vepsané trojúhelníku*. Ten se nachází na průsečíku os vnitřních úhlů – o úhlech v trojúhelníku nám toho ale paradoxně moc nenapoví. Kolmé úsečky z něj na strany trojúhelníku ale mají všechny stejnou délku – poloměr kružnice – a vzdálenost obou bodů dotyku od jednoho vrcholu je taktéž shodná (viz obrázek 8).

Tak vzhůru na to!

Teď už máte celkem dobrou představu o tom, co všechno v trojúhelníku můžete nalézt. Jak ale s těmito znalostmi naložit?

Na geometrických úlohách je velmi důležité se soustředit nejen na to, co vám zadání říká, ale také na to, co se vám snaží zatajit. Jen málokdy v zadání uvidíte „necht je M střed kružnice opsané“ nebo „necht je XY střední příčka tohoto trojúhelníku“, i když právě toto zjištění je všechno, co potřebujete, abyste se svými znalostmi úlohu vyřešili. Buďte tedy pozorní a naučte se číst mezi řádky. Můžete si to vyzkoušet v následující úloze.

Úloha 7 [4b]: *Necht je AD výška v ostroúhlém trojúhelníku ABC . Průsečíky os úhlů BAD , CAD se stranou BC nazvěme po řadě E , F . Uvažujme kružnici opsanou trojúhelníku AEF . Ta protíná strany AB , AC po řadě v bodech G , H . Přímky AD , EH a FG se pak protínají v jednom bodě. Dokažte.*



Obrázek 8: Kružnice vepsaná

Úloha 8 [5b]: Bod M je středem strany AB rovnostranného trojúhelníku ABC . Body D a E leží po řadě na stranách AC a BC tak, že platí $|\sphericalangle DME| = 60^\circ$. Dokažte, že platí

$$|AD| + |BE| = |DE| + \frac{1}{2}|AB|.$$

Na závěr pro vás máme připravenou netradiční úlohu o použití geometrie v reálném světě.

Úloha 9: Schůze orgů MĚM se koná v místnosti ve tvaru obecného ostroúhlého trojúhelníku ABC , kde se vchod nachází u vrcholu C a kde $b < c < a$.

První přijdou Borek, Anička a Tom, a jelikož chtějí sedět zády ke zdi, ale dostatečně daleko od sebe, sednou si postupně do středů stran a , b , c .

Pak přijde Radeček a sedne si také k nejdelší stěně a , a to tak, aby mezi ním a Tomem byla stejná vzdálenost jako mezi Borkem a Aničkou, nikoliv ale do rohu místnosti.

Po Radečkovi dorazí Karel. Rozhlédne se po místnosti a všimne si Aničky. Chtěl by si k ní sednout co nejbližší, ale nechce u ní sedět blíže než Radeček. Sedne si tedy ke stěně c tak, aby mezi ním a Aničkou byla stejná vzdálenost, jako mezi Aničkou a Radečkem, rovněž si ale nesedne do rohu.

Za další chvíli dorazí i Matej. Nechápatě kroutí hlavou, když si všimne, že všichni sedí u nějaké stěny, a aby se odlišil, rozhodne se usadit se uvnitř prostoru místnosti. Vydá se tedy nejkratší cestou ke stěně c, pak si ale všimne kruhu, který tvoří Borek, Anička a Tom. Sedne si tedy na první místo, kde jeho trajektorie protne tento kruh.

V těsném závěsu za Matejem dorazí i Faník, a protože je moc zabraný koukáním do telefonu, rozhodne se ho následovat. Když se Matej zastaví a sedne si, Faník ujede ještě jednou stejnou vzdálenost od vchodu místnosti stejným směrem a tam se usadí.

Jako poslední už klasicky dorazí Pája. Zmateně se snaží zanalyzovat zasedací pořádek, až si jí všimne Matej a řekne jí, ať se také posadí na obvod onoho kruhu, na kterém sedí on sám, a to tak, aby byla od Faníka vzdálená stejně, jako je Matej vzdálen od Borka.

Pája se posadí na toto místo (ale zároveň co nejblíže k vrcholu B) a schůze může konečně začít.

Úloha 9.1 [5b+]: *Jak daleko od sebe sedí tito lidé? Délky se snažte vyjádřit pomocí a, b, c, případně jiných vzdáleností mezi organizátory. Nezapomeňte svůj výsledek pořádně odůvodnit.*

- a) Radeček a Anička
- b) Borek a Karel
- c) Pája a Matej
- d) Borek a Pája
- e) Pája a Karel

Úloha 9.2 [3b+]: *Po pár minutách ale Faníkovi dojde, že si sednul špatně a zdaleka nesedí uprostřed kruhu tak, jak by se mu líbilo. Chtěl by se tedy přesunout tak, aby byl stejně vzdálen od všech ostatních osob v místnosti.*

Existuje v místnosti takové místo? A pokud ano, o kolik se bude muset posunout ze stávající pozice?

Téma 4 – Počítač z nul a jedniček

Díl 1: Hradla

Úvod

Milí řešitelé, ponořte se s námi do tématka o úplných základech počítače! Naše dobrodružná cesta začne v říši těch nejmenších skřítků, kteří uvnitř počítačů žijí. Vždycky, když počítač zapnete, rozsvítí malé lucerničky a rozběhnou se s nimi k monitoru, aby vám zobrazili třeba webovou stránku M&M!

V počítači bohužel doopravdy žádní skřítkové nežijí. Nicméně zoufat nemusíte, neboť o to je to zajímavější. Ukážeme si, jak je možné, že počítač ke svému fungování žádné skřítky nepotřebuje a vystačí si jenom s nulami a jedničkami.

Logické funkce

Nejdříve si zadefinujeme pojem logická funkce. Jde o takovou funkci, která dostane jako argumenty³ několik nul a jedniček a její výsledek je buď nula, nebo jednička. Konkrétní logickou funkci pak můžeme zavést tak, že řekneme, kolik má argumentů (tedy kolik nul a jedniček dostane) a v jakém případě je výsledek 1. Uvedme dva příklady:

- Funkce, která má tři argumenty a její výsledek je 1, pokud jsou alespoň dva z nich 1, jinak je výsledek 0.
- Funkce, která má pět argumentů a výsledek je 1, pokud je první nebo třetí argument 1.

Pro příznivce formálních zápisů můžeme logické funkce zadefinovat takto:

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}, n \in \mathbb{N}$$

Některé logické funkce už určitě znáte, třeba NOT (negace, často značená \neg), AND (konjunkce, \wedge) nebo OR (disjunkce, \vee).

a	b	NOT a	a AND b	a OR b
0	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	1	0	1	1

Tabulka 1: Definice funkcí NOT, AND a OR.

³Argumenty jsou to samé, čemu možná ve škole říkáte proměnné. Až si níže představíme hradla, budeme nejčastěji používat slovo vstupy.

Prozradíme vám, že z těchto tří funkcí je možné poskládat všechny logické funkce s libovolným počtem argumentů⁴, jak jsme si je zadefinovali výše.

Jak takové „poskládání“ vypadá? Například funkci se třemi argumenty, pojmenovanými a , b a c , jejíž výsledek je 1, pokud jsou alespoň dva z argumentů 1, bychom složili takto:

$$((a \text{ AND } b) \text{ OR } (a \text{ AND } c)) \text{ OR } (b \text{ AND } c)$$

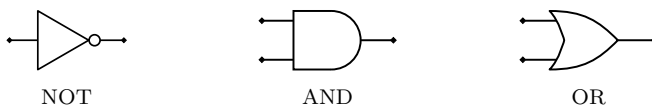
Úloha 1 [3b]: *Můžeme z trojice NOT, AND a OR něco vynechat tak, abychom stále dokázali vyjádřit všechny logické funkce? Můžeme vynechat libovolnou z nich? Můžeme vynechat dvě z nich? Svě odpovědi zdůvodněte.*

Úloha 2 [4b]: *Dokažte, že pomocí NOT, AND a OR můžeme opravdu vyjádřit všechny logické funkce.*

Logická hradla

Když už víme, co jsou to logické funkce, bude se nám ještě hodit zavést pojem logické hradlo. To už ale vlastně není nic nového. Hradlo si můžeme představit jako černou skříňku, které předáme vstupy logické funkce a ona nám řekne, jaký je její výstup.

Hradla si pak můžeme kreslit, existují pro ně dokonce zavedené značky. Budeme je používat i my v rámci tématka, když budeme chtít něco ukázat na obrázku.



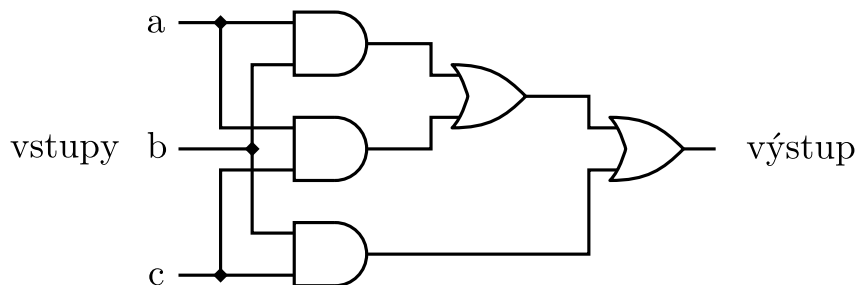
Obrázek 9: Některé zavedené značky

Stejně jako funkce můžeme skládat i hradla, výsledku pak říkáme *hradlová síť*. Na obrázku 10 můžete vidět hradlovou síť, která má tři vstupy a na výstup vrátí hodnotu, která je na vstupu častěji. Můžete si rozmyslet, že síť odpovídá výše zmíněné funkci, která vrátí 1, pokud jsou na vstupu alespoň dvě jedničky.

Úloha 3 [5b]: *Dala by se všechna hradla, ať už mají jakýkoliv počet vstupů, poskládat jen z jednoho druhu dvouvstupového hradla? Jinak řečeno, existuje logická funkce dvou argumentů, pomocí které bychom uměli vyjádřit všechny ostatní logické funkce?*

Pokud myslíte, že ano, napište, jaké výstupy by takové hradlo mělo vydat při různých vstupech (třeba tabulkou, viz tabulka 1). Nezapomeňte ukázat, že libovolné hradlo lze poskládat pouze za použití (nějakého počtu kusů) vámi navrženého hradla.

⁴Opravdu, ať si vymyslíme jakoukoliv logickou funkci s jakýmkoliv počtem argumentů, tak to půjde. Pokud tedy mluvíme o *všech logických funkcích*, myslíme tím přesně tohle.



Obrázek 10: Hradlová síť se třemi vstupy vracející hodnotu, která je na vstupu častěji

Úloha 4 [3b]: *Existuje více takových hradel?*

Hradla mohou mít různý počet vstupů, stejně jako funkce. Hradlům (i funkcím) se dvěma vstupy, jako je AND a OR, říkáme *binární*, má-li hradlo jediný vstup, jako třeba NOT, říkáme, že je *unární*. Obecně se počtu vstupů hradla říká *arita*. Samozřejmě si můžeme představit i hradla bez vstupu, *konstanty*, které mají na výstupu stále buď nulu, nebo jedničku.

Úloha 5 [4b]: „Výhybka“ budeme říkat hradlu se třemi vstupy označenými v , x_0 a x_1 . Na výstupu výhybky bude to samé, jako na vstupu x_0 , pokud $v = 0$, nebo to samé, jako na vstupu x_1 , pokud $v = 1$. Poskládejte výhybku z hradel NOT, AND a OR. Můžeme libovolnou logickou funkci poskládat jen z výhybek a konstant?



Dvojková soustava

Co kdybychom chtěli pomocí hradel počítat? K tomu se nám bude hodit znát dvojkovou soustavu. Běžně počítáme v soustavě, která má *základ* 10, říká se jí desítková. Chceme-li zjistit „hodnotu“ nějakého čísla, vynásobíme postupně jednotlivé cifry 10^n , kde n je „pozice cifry zprava“ počítáno od nuly, a sečteme. Cifry mají hodnoty 0 až 9 a můžete si všimnout, že jich je 10.

Níže v tabulce můžete vidět desítkový zápis čísla $423 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$.

$$\begin{array}{r} 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0 \\ 100 \quad 10 \quad 1 \\ \hline 4 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

Ve dvojkové soustavě je to stejné, jen cifry jsou dvě (0 a 1) a používají se mocniny dvojky. Zápis⁵ 1101_2 tedy má hodnotu $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13_{10}$.

$$\begin{array}{r} 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0 \\ 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Cifrář ve dvojkové soustavě se říká *bity* (jeden *bit*, z anglického *binary digit*). A jak s čísly ve dvojkové soustavě počítat? Nejprve se naučíme je počítat.

Sčítání ve dvojkové soustavě

Ukážeme vám, že je to podobné jako sčítání pod sebou v desítkové soustavě. Postup je v obou soustavách takový, že jdeme zprava, vždycky sečteme cifry pod sebou, a když se výsledek nevejde do jedné cifry, tak si „tu levou“ cifru zapamatujeme a přičteme ji k dalším cifrářům. Ve dvojkové soustavě je jediný rozdíl v tom, že jedna cifra neznamena čísla od 0 do 9, ale pouze 0 nebo 1.

A jedničky s nulami se sčítají docela jednoduše:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= (1)0 \\ 1 + 1 + 1 &= (1)1 \end{aligned}$$

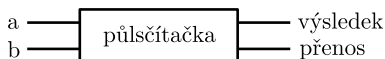
V předposledním řádku napíšeme 0 a pamatujeme si 1, v posledním napíšeme 1 a pamatujeme si 1. Na obrázku 11 pak vidíte příklad sčítání $3729_{10} + 435_{10}$ a $1001110_2 + 11011_2$

⁵Pro označení soustav se často používá základ v dolním indexu za hodnotou. Není-li uvedena soustava, je číslo zapsáno v desítkové soustavě (pokud z kontextu nevyplývá něco jiného).

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{3} \quad \overset{1}{7} \quad 2 \quad 9 \\
 \hline
 4 \quad 3 \quad 5 \\
 \hline
 4 \quad 1 \quad 6 \quad 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overset{1}{1} \quad \overset{1}{0} \quad \overset{1}{0} \quad \overset{1}{1} \quad \overset{1}{1} \quad 1 \quad 0 \\
 \hline
 \quad \overset{1}{1} \quad \overset{1}{1} \quad \overset{1}{0} \quad \overset{1}{1} \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

Obrázek 11: Sčítání v desítkové a dvojkové soustavě

Jak vidíte, sčítání dvou bitů není logická funkce, protože výsledek může být i něco jiného, než 0 nebo 1. Co s tím, pokud bychom chtěli sčítat pomocí hradel? Postavíme si hradlovou síť, které budeme říkat „půlsčítačka“. Bude mít dva vstupy, na kterých budou sčítané bity, a dva výstupy, jeden pro jednobitový výsledek a druhý pro přenos do vyššího řádu.



Obrázek 12: Ilustrační obrázek půlsčítačky

Úloha 6 [3b]: *Navrhněte, jak z hradel, která už znáte, postavit půlsčítačku.*

Úloha 7 [3b]: *Jak sčítat vícebitová čísla? Můžete použít půlsčítačku.*

Úloha 8 [3b]: *Jak pomocí hradel odčítat?*

Problém 9: *Zatím jsme sčítali a odčítali jen kladná čísla, ale budeme chtít umět pracovat i se zápornými čísly. Zkuste vymyslet, jak pouze pomocí jedniček a nul „zakódovat“ celá čísla (třeba z nějakého rozsahu). Zkuste se taky zamyslet, jaké mají vaše reprezentace výhody a nevýhody a v čem se změní sčítání a odčítání oproti situaci jen s kladnými čísly.*

Pavel a Káta; pa-ka@mail.ledoian.cz
e-mailová konference: hradla@mam.mff.cuni.cz



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 3.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK E-mail: mam@matfyz.cz
Ke Karlovu 3 Web: mam.matfyz.cz
121 16 Praha 2 FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

