STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVI
Číslo 5

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

téměř bez nadsázky lze říct, že od vydání minulého čísla se mnoha z nás život obrátil vzhůru nohama. To, co bylo v posledních desetiletích pro nás naprosto nemyslitelné, je najednou více než skutečné, a bude trvat dlouho, než se všechno vrátí zpět k normálu. Pokud ale právě teď, jako někteří z nás organizátorů, hledáte něco, čím si zkrátit dlouhé chvíle trávené doma, můžete se, jako tomu bylo po celý rok, pustit do řešení nových úloh v tomto čísle.

Na stránkách věnovaných hernímu tématku tentokrát najdete vzorová řešení a průběžné výsledky turnajů. Ve druhém tématku se podíváme na paralelní algoritmy a spolupráci mezi stroji. V rámci třetího tématka opustíme data z radarů a přesuneme se ke zpracovávání dat běžných obrázků a v tématku o elektromagnetismu budeme moct využít znalosti získané za celý ročník na některém ze spousty zajímavých příkladů.

Stejně jako drtivé většině akcí se současná krize nevyhla ani nám. Naše jarní soustředění bylo zrušeno a bohužel nepřichází v úvahu jeho posunutí. Velmi nás to mrzí, ale naše naděje se teď upínají k brzkému uklidnění situace, které snad povede k tomu, že podzimní soustředění už zase proběhne podle plánu.

A teď jedna dobrá zpráva. Před nedávnem se uskutečnilo celostátní kolo matematické olympiády kategorie P a nás těší, že se ho zúčastnilo i mnoho našich řešitelů, kterým se velmi dařilo a vybojovali i přední příčky. Gratulujeme!

Jen těžko se nyní předvídá, co přinesou další dny, ale věříme, že není na místě ztrácet optimismus. Pokud je něco, co jste celý rok odkládali pro nedostatek času, teď je ta správná chvíle – ať už je to přečíst si zajímavou knížku, začít se učit nový jazyk nebo bojovat o titul nejlepšího řešitelského článku za tento ročník M&M, pusťte se do toho. A ačkoliv jsme nyní ztratili možnost potkat se po dlouhé době se starými kamarády nebo si třeba udělat nové, nezoufejme. V dnešní době není nic jednoduššího než se spolu spojit na dálku a sejít se, až to situace dovolí. Budeme moc rádi, když nám napíšete, a jakmile to bude možné, také vás velmi rádi potkáme, ať už na srazu, při nějaké hře, nebo jen tak.

Mějte se krásně a buďte zdrávi!

Vaši organizátoři

Zadání a řešení témat

Termín odeslání úloh 5. série: 15. 5. 2020

Téma 1 – Hry

Řešení 3. série

Problém 1

Zadání:
Nechť X a Y jsou neprázdné množiny. Nechť f je funkce typu $X \times Y \to \mathbb{R}$. Dokažte, že:

$$\max_{x\in X}(\min_{y\in Y} f(x,y)) \leq \min_{y\in Y}(\max_{x\in X} f(x,y))$$

Poznámka: Toto tvrzení dokažte zcela obecně a formálně. Nepoužívejte při tom analogie vztažené k teorii her. Opravdu zde mluvíme o jakékoliv funkci f, jejímž vstupem mohou být prvky konečné množiny, reálná čísla, pravděpodobnostní vektory, binární řetězce, štěňátka, koťátka, morčátka, prostě cokoliv.

Řešení:
Pro začátek si zavedeme substituci za pravou stranu nerovnosti ze zadání:

$$t := \min_{y\in Y}(\max_{x\in X} f(x,y))$$

Pomocí ní můžeme vyjádřit:

$$\exists y \in Y : \max_{x\in X} f(x,y) = t$$

Použitím definice maxima na vnitřní výraz dostaneme:

$$\exists y \in Y \ \forall x \in X : f(x,y) \leq t$$

Nyní tuto formuli přepíšeme na slabší tvrzení (takže taky musí platit):

$$\forall x \in X \ \exists y \in Y : f(x,y) \leq t$$

Použitím definice minima na vnitřní výraz dostaneme:

$$\forall x \in X : \min_{y\in Y} f(x,y) \leq t$$

Protože to platí pro všechny prvky $x \in X$, musí to platit i pro ten dávající maximální hodnotu, takže dostáváme:

$$\max_{x\in X}(\min_{y\in Y} f(x,y)) \leq t$$

Nakonec dosazením původního výrazu za proměnnou t dostaneme kýženou nerovnost:

$$\max_{x\in X}(\min_{y\in Y} f(x,y)) \leq \min_{y\in Y}(\max_{x\in X} f(x,y))$$

Problém 2

Zadání:
Určete optimální strategii pro oba hráče v této bimaticové hře (bez opakování). Jinými slovy, pokuste se z pohledu každého hráče získat co nejvíce bodů za předpokladu, že druhý hráč je racionální a také se snaží maximalizovat svůj zisk.

$4 \setminus 3$	$5 \setminus 1$	$6 \setminus 2$
$2 \setminus 1$	$8 \setminus 4$	$3 \setminus 6$
$5 \setminus 9$	$9 \setminus 6$	$2 \setminus 8$

Řešení:
Nejprve si všimneme, že se druhému hráči nevyplatí strategie 2, tedy že nebude nikdy volit prostřední sloupec. Po jeho odstranění se prvnímu hráči nevyplatí strategie 2, takže nikdy nebude volen prostřední řádek. Bimatice se nám zmenšila na 2×2.

$4 \setminus 3$	$6 \setminus 2$
$5 \setminus 9$	$2 \setminus 8$

Opět se podíváme, zda můžeme nějakou strategii eliminovat za předpokladu, že se oba hráči rozhodují racionálně. Nyní vidíme, že se druhému hráči nevyplatí strategie 3, takže nikdy nebude volen pravý sloupec. Když tuto úvahu provede první hráč, tak může využít poznatku, že druhý hráč vždy zvolí strategii 1, takže se budoucí odměny nachází v levém sloupci. Na základě toho si první hráč vybere strategii 3.

Výsledek hry je $5 \setminus 9$, což je pro prvního hráče maximem levého sloupce a pro druhého hráče maximem dolního řádku.

Problém 3

Zadání:
Ve městě stojí dva stánky se zmrzlinou. Stánky si vybírají cenu zmrzliny mezi cenami 10 Kč, 20 Kč a 25 Kč. Předpokládejme, že za jinou cenu nelze zmrzlinu prodávat. Dále předpokládejme, že oba stánky mají nekonečnou zásobu zmrzliny (takže ji nemusejí nakupovat) a že cena chlazení a nabírání zmrzliny je zanedbatelná. Očekává se, že během jednoho letního měsíce si zmrzlinu v tomto městě koupí 6 000 turistů a 4 000 místních obyvatel. Turisté si vybírají stánek se zmrzlinou uniformně náhodně, takže můžeme předpokládat, že do každého stánku půjde přesně polovina turistů. Místní obyvatelé si vždy půjdou koupit zmrzlinu do stánku, kde je levnější; a pokud se ceny shodují, přesně polovina z nich půjde do každého stánku. Dále předpokládejme, že si každý návštěvník koupí jen jednu zmrzlinu (pokud by si chtěl koupit dvě, budeme ho počítat jako dva návštěvníky). Jakou cenu zmrzliny mají jednotlivé stánky zvolit, když chce každý maximalizovat svou tržbu?

Řešení:
Pokud mají oba stánkaři stejnou cenu zmrzliny, pak si v každém stánku během jednoho letního měsíce koupí zmrzlinu 5 000 lidí. Pokud mají stánkaři rozdílnou cenu, pak v levnějším stánku nakoupí 7 000 lidí a v dražším stánku nakoupí 3 000 lidí.

Zapíšeme si jednotlivé případy výdělků do bimatice, přičemž částky uvnitř (tedy ne popisky nahoře a vlevo) budeme uvádět v tisícikorunách.

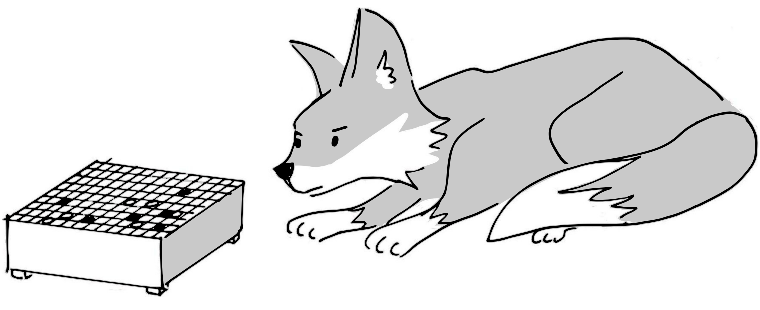
	10 Kč	20 Kč	25 Kč
10 Kč	50 \ 50	70 \ 60	70 \ 75
20 Kč	60 \ 70	100 \ 100	140 \ 75
25 Kš	75 \ 70	75 \ 140	125 \ 125

Vidíme, že zvolit cenu zmrzliny 10 Kč je pro stánkaře horší než obě zbývající možnosti. Škrtneme tuto možnost u obou stánkařů.

	20 Kč	25 Kč
20 Kč	100 \ 100	140 \ 75
25 Kš	75 \ 140	125 \ 125

Nyní se strategie 20 Kč stala vždy lepší než strategie 25 Kč. Všimněte si, že dokud jsme uvažovali i cenu 10 Kč, tak tuto úvahu nešlo provést. Ve chvíli, když jeden stánek prodává zmrzlinu za 10 Kč, tak druhý stánek potřebuje zvýšit cenu na maximum, neboť při ceně 20 Kč i 25 Kč bude mít stejný počet zákazníků. Teď ale víme, že pro oba hráče je optimální zvolit cenu zmrzliny 20 Kč. Každý stánek tak dosáhne obratu 100 000 Kč měsíčně.

Pro zajímavost: Pokud by se stánkaři předem dohodli, že oba nastaví cenu zmrzliny na 25 Kč a nebudou ji snižovat (ve snaze mít obrat 125 000 Kč měsíčně každý), pak by se stánkaři dopustili porušení zákona, neboť by vytvořili tzv. kartel (viz Úřad pro ochranu hospodářské soutěže[1], jinak též Antimonopolní úřad).



[1] https://www.uohs.cz/

Výsledky turnaje

V tabulce uvádíme pořadí mezi všemi „lidskými hráči“. Řešitele M&M uvádíme celým jménem. Ostatním účastníkům turnaje jsme kvůli ochraně osobních údajů změnili jména na staročeská.

	1. turnaj	2. turnaj	3. turnaj	4. turnaj
Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Kateřina Vokálová	2.	1.	1.	4.
Božetěch	1.	4.	3.	3.
Hromislav	-	3.	2.	1.
Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Vilém Starosta	3.	2.	4.	5.
Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Václav Janáček, Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Jiří Kalvoda	5.	6.	5.	2.
Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Martin Fof	4.	5.	6.	8.
Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ Klára Pernicová	6.	7.	8.	10.
Všemysl	-	-	7.	7.
Soběrad	-	-	-	6.
Nezabud	-	-	9.	9.

Markét, Martin; `martin.dvorak@matfyz.cz`
e-mailová konference: `hry@mam.mff.cuni.cz`

Téma 2 – Výpočetní modely

Spolupráce a superschopnosti

K čemu jsou nám tisíce procesorů

Dnešní počítače mají většinou více než jedno jádro, grafické karty mají i tisíce jader a spousta velkých výpočtů probíhá paralelně napříč desítkami či stovkami strojů. Proto je často zajímavé studovat paralelní algoritmy, kdy spouštíme mnoho strojů současně. Modelů pro paralelní výpočty existuje neuvěřitelné množství, ale my se omezíme na jeden konkrétní.

Zavedeme tedy dvě nová rozšíření: sdílenou paměť a identifikátor.

Sdílená paměť je pole, ze kterého můžou všechny stroje libovolně číst a do kterého můžou paralelně zapisovat. Pokud se více strojů pokusí zapsat na stejnou pozici současně, tak jedna ze zapisovaných hodnot bude skutečně zapsána, ale předem nevíme která. Vzhledem k rychlosti paralelních výpočtů budeme předpokládat, že je vstup již uložen ve sdílené paměti. Výstup se pak také budeme snažit uložit do sdílené paměti a to na pozici 0.

Identifikátor (který budeme značit ID) je rozšíření, které bude pro každý stroj vypisovat jeho číslo, přičemž číslování strojů si můžeme určit. Můžeme si tedy například říct o čtyři stroje s čísly 0 až 3. Tohle bude užitečné pro rozdělování úkolů. Použitím několika identifikátorů si dovolíme také vytvářet takzvané týmy: Můžeme si tedy říct třeba o 4 týmy o pěti strojích, kde každý stroj bude mít dva identifikátory: Jeden bude určovat jeho číslo týmu (0, 1, 2, nebo 3) a druhý bude pořadí uvnitř toho týmu (0, 1, 2, 3, nebo 4). Co se týče počtu strojů a velikostí týmů, tak obojí smí záviset na délce vstupu.

Ve výsledku nás budou zajímat následující vlastnosti řešení:

- Čas výpočtu v počtu kroků nejdéle běžícího stroje
- Počet použitých strojů
- Celková práce, což je součin předchozích dvou hodnot

Z dalších drobností, které již někteří z vás navrhli, si například dovolíme používat ALU k porovnávání. Na pokyn `a,b,<` odpoví ALU `1` pokud $a < b$, jinak odpoví `0`.

Jako příklad níže uvádíme paralelní stroj, který v konstantním čase kontroluje, zda pozice 1 až n obsahují vzestupně setřízenou posloupnost různých čísel. Výstupem na pozici nula ve sdílené paměti je jednička právě pokud platí, že všechny pozice od 1 do n jsou rostoucí čísla.

```
Stavový registr (počáteční stav 0)
ID (od 1 do n-1)
Sdílená paměť
ALU
```

`0,i,_,_ → 1,i,_,i,1,+`	(Přečteme i-tou pozici)
`1,_,a,j → 2,j,_,a,0,+`	(Přečteme j-tou pozici)
`2,_,b,a → 3,0,1,a,b,<`	(Pozici nula nastavíme na 1 a porovnáme a a b)
`3,_,_,0 → 4,0,0,_,_,_`	(Pokud jsme našli nesetřízenou dvojici, tak zapíšeme 0)

Jako druhý příklad poslouží stroj na kontrolu toho, zda jsou všechny pozice od 1 do n odlišné. Použijeme na to n týmů o n strojích, kde každý tým má za úkol zkontrolovat unikátnost jedné pozice. Každý stroj v týmu pak dostane jednu pozici, se kterou má týmovou pozici porovnat.

```
Stavový registr (počáteční stav 0)
ID týmu (od 1 do n)
ID stroje (od 1 do n)
Sdílená paměť
Registr
```

`0,i,i,_,_ → 9,0,1,_`	(V případě shody pozic jen připravíme pozici nula)
`0,i,_,_,_ → 1,i,_,_`	(Přečteme týmovou pozici)
`1,_,j,a,_ → 2,j,_,a`	(Přečteme vlastní pozici)
`2,_,_,a,a → 3,0,0,_`	(V případě shody vynulujeme pozici nula)

Všimněte si, že v obou případech probíhá spousta paralelních zápisů, ale vždy budou všechny zápisy na danou pozici stejné a tudíž je nám jedno, který nakonec skutečně projde.

Níže jsou zadány tři úlohy. Pro každou z nich existuje několik různých řešení, která jsou různě složitá na vymyšlení a vyžadují různé množství procesorů, času a celkové práce. Pod otázkou je vždy uvedeno několik návrhů na vlastnosti řešení přibližně v pořadí od nejlehčího po nejtěžší.

Problém 1: *Jak najít maximum z čísel uložených na pozicích 1 až n ve sdílené paměti?*

- *1 stroj v čase* $\mathcal{O}(n)$
- $\mathcal{O}(n)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(\log n)$
- $\mathcal{O}(n^2)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(1)$
- $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(\sqrt{n})$
- $\mathcal{O}(n/\log n)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(\log n)$
- $\mathcal{O}(n^{1,5})$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(1)$

Problém 2: *Jak setřídit čísla uložená na pozicích 1 až n ve sdílené paměti?*

- *1 stroj v čase* $\mathcal{O}(n \log n)$
- $\mathcal{O}(n)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(n)$
- $\mathcal{O}(n^2)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(\log n)$
- $\mathcal{O}(n)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(\log^2 n)$

Problém 3: *Jak rychle umíte deterministicky řešit problém 7 ze čtvrtého čísla?*

- *1 stroj v čase* $\mathcal{O}(n^2)$
- $\mathcal{O}(n^2)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(n)$
- $\mathcal{O}(n^3)$ *strojů v čase* $\mathcal{O}(\log n)$

Problém 7 ze čtvrtého čísla: *Představte si, že máte registr, který začíná na hodnotě 1, a vaším úkolem je zjistit, zda je možné jej vynulovat. Zádrhel je v tom, že registr má nějaká omezení na to, jak jej lze měnit. Dostanete číslo n na vstupu a pole obsahující $n \times n$ bitů, kde bit na pozici $i \cdot n + j$ (číslováno od nuly) určuje, zda můžete změnit hodnotu v registru z i na j, přičemž žádné jiné změny nejsou povoleny. Instance problému tedy může vypadat například takto:*

$n = 4$
Obsah pole: 0000 0010 0001 1000
Pole reprezentuje následující tabulku:

		nová			
		0	1	2	3
původní	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	0
	2	0	0	0	1
	3	1	0	0	0

Odpověď: ANO (1 -> 2 -> 3 -> 0)

Jak rychle umíte tento problém řešit? Jak rychle jej umíte řešit nedeterministicky? Pokud vám to pomůže, tak můžete předpokládat, že n je mocnina dvojky.

Jak počítat příliš rychle

Během celého tématka jsme pracovali se stroji, jejichž schopnosti byly poměrně realistické. Co se stane, pokud trochu popustíme uzdu fantazie?

Problém 4: *Jak pomocí ALU a konstantně mnoha registrů simulovat zásobník, pásku, nebo dokonce pole bitů?*

Problém 5: *Jak pomocí ALU a konstantně mnoha registrů setřídit n b-bitových čísel v čase $\mathcal{O}(n+b)$?*

Problém 6: *Proč jsou nedeterministické algoritmy zajímavé i z pohledu realisticky silných výpočetních modelů?*

Problém 7: *Jak by se dalo využít $\mathcal{O}(n \cdot n!)$ procesorů k řešení problémů 2 a 3 v čase $\mathcal{O}(1)$?*

Problém 8: *Kolik procesorů potřebujete k sečtení n b-bitových čísel v čase $\mathcal{O}(1)$?*

Vzorová řešení 3. série

Problém 1

Zadání:
Popište, jak by šlo implementovat nedestruktivní čtení z pole bez použití podtržítka v pokynu. Úkolem tedy je popsat, jak by se dal upravit libovolný stroj používající pole na ekvivalentní (a podobně rychlý) stroj který poli nikdy podtržítko nepošle.

Řešení:
Místo každého nedestruktivního čtení budeme potřebovat dva kroky: V jednom destruktivně přečteme hodnotu z pole a v druhém ji tam zase zapíšeme. Nejspíše budeme potřebovat pomocný registr na řízení tohoto procesu. Pokud algoritmus průběžně zpracovává vstup, tak jej budeme muset umět dočasně ukládat (třeba do fronty). Viz níže alternativní řešení problému 5.

Problém 2

Zadání:
Určete časovou složitost strojů z druhého čísla.

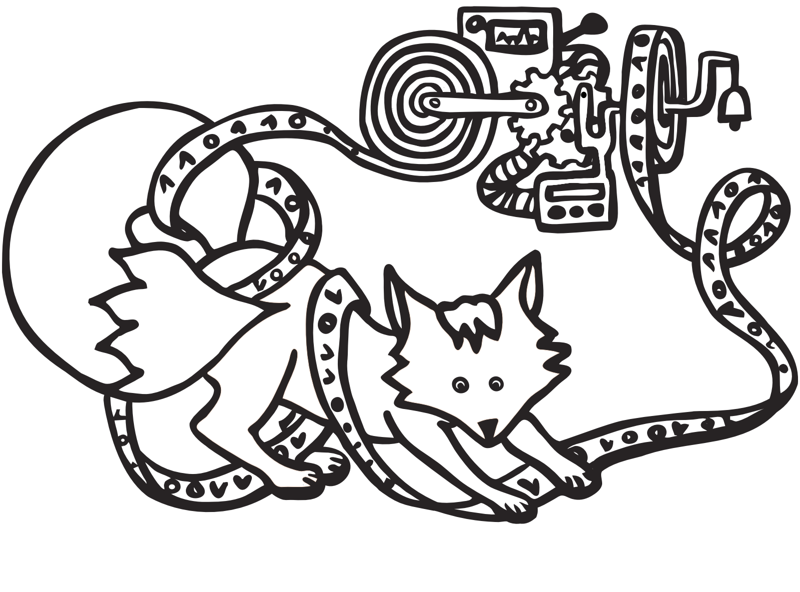
Řešení:
Stroj 5 z 2. dílu vypíše poslední jedničku po $\mathcal{O}(n \log n)$ krocích a dále vypisuje samé nuly, ostatní skončí po $\mathcal{O}(n)$ krocích.

Problém 3

Zadání:
Jak by se podle vás měla chovat aritmetická jednotka v případě dělení nulou? Stroj 1 ze 3. dílu se v takovém případě zastaví. Mohlo by být k něčemu užitečné, kdyby se stalo něco jiného? Jak a proč?

Řešení:
Jak navrhla Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jolana Knillová, bylo by dobré, aby ALU vrátila výjimku, kterou pak může stroj nějak zpracovat, nebo se zastavit. Pánové Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Václav Janáček a Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jiří Kalvoda navrhují, že by se mohlo jednat buďto o hodnotu nekonečno, nebo o řetězec „Chyba“.

Oba přístupy mají své výhody i nedostatky. Řetězec chyba je snadno rozeznatelný v popisu stroje a pokud jej stroj nebude zpracovávat zvlášť, tak pravděpodobně způsobí chyby i jinde, jelikož se nejedná o číslo. Na druhou stranu vrácení hodnoty nekonečno má šanci umožnit pokračování výpočtu, což může a nemusí být žádoucí. Bylo by například potřeba specifikovat, jak se chová pole v případě zápisu na pozici nekonečno a co přesně dělá ALU, pokud dostane za úkol třeba dělit nekonečno nekonečnem. Skutečné počítače většinou definují nejen nekonečno, ale i několik dalších speciálních hodnot. Výhodou pak je, že nemusíme pokaždé kontrolovat, že jsme nedostali chybu a také je občas užitečné vědět, která speciální hodnota je výsledkem. Pokud by vás zajímalo, jak to chodí ve skutečných počítačích, doporučujeme seriál *Fixed point arithmetic* (je psán česky) od Pavla Tišnovského (`https://www.root.cz/clanky/fixed-point-arithmetic/`). Obvyklý formát desetinných čísel s nekonečny a dalšími zákoutími najdete v jeho druhém díle.



Problém 4

Zadání:
Představte si, že nemáte k dispozici pole. Sestavte stroj, který jej simuluje – na jednom vstupu čte, kterou buňku má přečíst, na druhém, co tam má zapsat, a na výstup píše to, co přečetl. Váš stroj bude téměř jistě pomalejší než skutečné pole. Předpokládejme tedy, že se vstupy změní vždy až po vypsání přečteného obsahu buňky.

Řešení:
Nahradíme pole páskou na které vždy dojedeme na hledané místo. Vzhledem k tomu, že neumíme porovnávat dvě čísla, tak se budeme muset po každém zápisu vrátit na pozici nula. Abychom si řešení usnadnili, využijeme pozorování z problému 1 a nebudeme implementovat nedestruktivní čtení, neboť by bylo složité na zápis. Také využijeme toho, že máme v zadání slíbeno, že se vstupy změní až po vypsání přečtené pozice.

```
vstup                                                    (pozice)
vstup                                                    (zápis)
registr (počáteční stav A)                               (A = hledání, B = návrat)
ALU (v prvním kroku vypisuje 0)                          (aktuální pozice)
páska
výstup

t,w,A,t,r → B,t,0,+,w, ,r
t,w,A,p,s → A,p,1,+,s,>,             (p vždy udává aktuální pozici na pásce)
_,_,B,0,s → A,0,0,+,s, ,
_,_,B,p,s → B,p,1,-,s,<,
```

Mgr.$^{\text{MM}}$ Jolana Knillová navíc navrhuje možnost použít frontu, kterou stroj pokaždé přečte celou. Toto řešení je sice trochu složitější vzhledem k potřebě přizpůsobovat délku fronty, ale také se trochu více podobá fungování magnetických a optických disků. V nejhorším i průměrném případě jsou navíc obě řešení stejně rychlá.

Problém 5

Zadání:
Sestrojte stroj, který na vstupu dostane nejdříve posloupnost čísel $a_1 \dots a_n$, pak oddělovač (třeba „X“), a pak druhou posloupnost čísel $b_1 ... b_m \in \{1 \dots n\}$, a který má postupně vypsat b_i-té číslo z první posloupnosti. (Tedy vypíše $a_{b_1} a_{b_2} \dots a_{b_m}$.)

Řešení:
Tento problém je poměrně přímočarý.

```
vstup
registr (počáteční stav A)
```

```
pole
ALU (v prvním kroku vypisuje 0)
výstup

X,A,_,p → B,_,_,_,_,_,
a,A,_,p → A,p,a,p,1,+,
b,B,_,_ → C,b,_,_,_,_,
b,C,a,_ → C,b,_,_,_,_,a
```

Pojďme si tudíž ukázat, jak by tady fungovalo řešení problému 1:

```
vstup
fronta
registr (počáteční stav I)
pole
ALU
výstup

$,_,I,_,_ →  , ,A,0,0,0,0,+,
a,_,I,_,_ → a, ,I,0,0,_,_,_,
$,X,A,_,p →  ,>,B,p,0,_,_,_,
$,a,A,_,p →  ,>,A,p,a,p,1,+,
$,$,B,_,_ →  , ,X,_,_,_,_,_,
$,b,B,_,_ →  , ,C,b, ,_,_,_,
$,b,C,c,_ →  ,>,B,b,c,_,_,_,b
```

Problém 6

Zadání:
Zkuste předchozí úkol vyřešit bez použití pole. Jaké jsou časové složitosti obou verzí?

Řešení:
Stačí spojit původní řešení se strojem řešícím problém 4. Vzhledem k zpomalení budeme muset vstup ukládat do front podobně jako při řešení problému 1, ale jinak je to docela jednoduché.

Verze s polem běží v čase $\mathcal{O}(n+m)$. Verze bez pole běží v čase $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Verze bez pole zjevně nelze zlepšit, neboť při náhodné volbě čísel b_i se musíme v průměrném případě posunout o $n/2$ pozic.

Problém 7

Zadání:
Časová složitost stroje 1 ze 3. čísla není omezitelná pomocí délky vstupu. Navrhněte podobný stroj, který ale na vstupech dostane binární zápis čísel, a zkuste omezit jeho složitost.

Řešení:
Stroj nejdříve zkopíruje oba vstupy do front, pak je převede na čísla a dále používá stejný algoritmus jako původní stroj. Převedení na čísla běží zjevně v lineárním čase. Poté si stačí všimnout, že po dvou použitích operace modulo jsou obě čísla nejvýše poloviční oproti původním hodnotám a tedy jejich binární zápis by byl alespoň o bit kratší. Po řádově $\mathcal{O}(n)$ krocích tedy jedno z čísel bude nula.

Problém 8

Zadání:
Nyní už máme skutečně mocné stroje. Zkuste sestavit stroj, který dokáže simulovat nějaký jednoduchý mikroprocesor. Tohle je rozsáhlý úkol, nebojte se na něm spolupracovat.

Řešení:
Na tento úkol vám nechám čas do konce ročníku.

Téma 3 – Zpracování obrazových dat ze senzorů

5. díl

Nyní se trošku odkloníme od obrázků pořízených radarem a pokusíme se uplatnit získané zkušenosti při zpracovávání běžných obrázků a fotografií.

V tomto díle nespecifikuji programovací jazyk ani nástroj, který máte použít. Můžete použít cokoliv, co vám bude vyhovovat. Vzorové řešení bude používat jazyk Python podobně jako v minulých dílech.

Asi nejjednodušším vstupem pro zpracování je obrázek bez šumu, který připomíná dětské omalovánky. Vybarvuje plochy jednou barvou a nepoužívá barevné přechody ani stínování. Příkladem takového obrázku může být i náš Riki na obrázku 1.

Obrázek 1: Jednoduchý obrázek Rikiho

Problém 1: *Vytvořte program (nebo najděte existující nástroj), který dostane zadaný vstupní obrázek v podobě vybarvených dětských omalovánek. Váš program tento obrázek rozdělí na regiony podle barvy. Pro každý nalezený region spočítá jeho velikost a obvod v pixelech. Region je v tomto případě ohraničená oblast vybarvená stejnou barvou. Testovací obrázek omalovánek Rikiho najdete na konci v datech k tomuto dílu pod názvem* `Riki1.png`.

Na první problémy při zpracování obrazu narazíme už ve chvíli, kdy obrázek uložíme ve formátu JPG. V okolí kontur si můžeme všimnout nechtěných artefaktů.

Problém 2: *Upravte předchozí program tak, aby dokázal pracovat se stejným obrázkem, který ale prošel JPG kompresí. Testovací obrázek najdete v datech k tomuto dílu pod názvem* `Riki2.jpg`.

Právě jste si vyzkoušeli, jak strojově hledat regiony v jednoduchém obrázku. V reálném světě se ale s takovými obrázky setkáváme málokdy. Pojďme se nyní podívat na zpracování reálných fotografií. Když se podíváme například na leteckou mapu, tak podle analýzy barev můžeme zjistit, která pole jsou holá hlína a na kterých se nachází zelené rostliny.

Obrázek 2: Letecká mapa pole

Problém 3: *Upravte předchozí program tak, aby dokázal podle barvy rozpoznat hnědé pole bez úrody a zelené pole s rostlinami. Váš program opět spočítá celkovou plochu, kterou zabírají zelená pole s rostlinami, respektive hnědá pole s holou hlínou. Obvod počítat nebudeme hlavně z toho důvodu, že hranice mají fraktálovité vlastnosti, které by nám výpočet obvodu výrazně zkomplikovaly. Testovací obrázek najdete v datech k tomuto dílu pod názvem* `pole.jpg`.

Nakonec se podíváme na nejsložitější případ, kdy nemůžeme jednotlivé regiony rozlišit podle barvy. Představte si rozdíl mezi zeleným lesem a zelenou loukou.

Tyto regiony nemůžeme rozlišovat podle barvy, ale budeme muset v obrázku najít jinou vlastnost, která nám pomůže tyto oblasti odlišit.

Obrázek 3: Letecká mapa lesa a louky

Problém 4: *Napište program, který na obrázku 3 co nejpřesněji rozliší les od louky. Zamyslete se nad tím, jaké vlastnosti můžeme u tohoto obrázku využít. Váš program opět vypočítá celkovou plochu v pixelech, kterou zabírá les, respektive louka. Obvod opět ze stejných důvodů počítat nebudeme. Testovací obrázek najdete v datech k tomuto dílu pod názvem* `lesLouka.jpg`.

Data ke stažení k tomuto dílu

`https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/26-5-3-data.zip`

Béďa; `bedrich.said@gmail.com`
e-mailová konference: `radary@mam.mff.cuni.cz`

Téma 4 – Vybrané kapitoly z elektromagnetismu

Díl 5: Další příklady z elektromagnetismu

V průběhu tématka jsme vás seznámili se čtyřmi vybranými pokročilými kapitolami z elektřiny a magnetismu. V každé jste museli používat derivace a integrály, abyste vyřešili námi zadané problémy. Během roku jsme se dotkli v prvním čísle Gaussova zákona, ve druhém Biotova-Savartova zákona, ve třetím kondenzátorů a konečně ve čtvrtém Faradayova zákona elektromagnetické indukce.

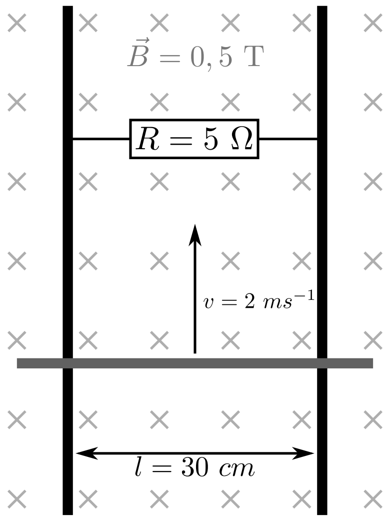
V tomto díle už nenaleznete další studijní text, předkládáme tu ale množství dalších problémů napříč všemi čtyřmi díly tématka, které můžete zkusit vyřešit. Případně si vymyslete vlastní zajímavý problém a zašlete nám ho, ideálně samozřejmě vyřešený.

Doufáme, že jste v průběhu roku nahlédli trochu víc do tajů elektromagnetismu, procvičili jste se v integrování a těšíme se i na vaše řešení z této série.

Úloha 1 [3b]: *Jak vypadá elektrické pole v okolí (a jak uvnitř) dutého válce nabitého plošnou hustotou ω?*

Úloha 2 [3b]: *Mějme pevnou kovovou obdélníkovou smyčku o rozměrech* 10×15 *cm, vzdálenou 15 cm od nekonečně dlouhého přímého vodiče ležícího v rovině smyčky, který je rovnoběžný s její kratší hranou a kterým protéká proud závisející na čase vztahem* $I = 0{,}02t^2 + 0{,}3t + 1$ *[A]. Určete velikost indukovaného elektromotorického napětí ve smyčce v časech* $t = 3; 5; 120$ *s, ideálně nalezněte jeho časovou závislost.*

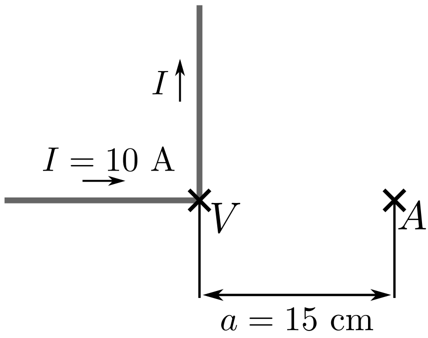
Problém 3: *Z rozložení náboje na desce odvoďte vzorec pro výpočet kapacity deskového kondenzátoru v závislosti na ploše desek, jejich vzdálenosti a permitivitě mezi nimi.*



Obrázek 4: Nákres k problému 4

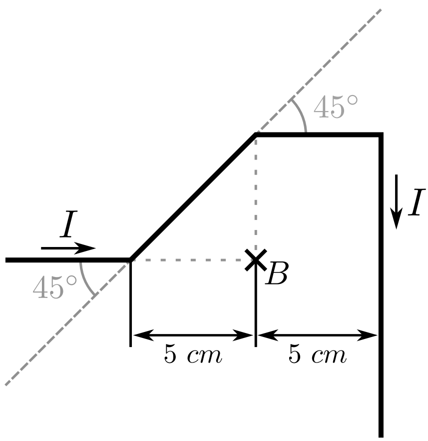
Úloha 4 [3b]: *Dva dlouhé, rovnoběžné a dokonale vodivé dráty jsou od sebe vzdálené 30 cm a jsou umístěny v homogenním magnetickém poli o magnetické indukci 0,5 T. Dráty jsou v jednom místě vodivě spojeny. Elektrický odpor spoje je* $5\ \Omega$*. Mezi těmito dráty se pohybuje vodivý drát rychlostí 2* ms^{-1} *tak, že zmenšuje smyčku. Celá situace je znázorněna na obrázku 4. Určete velikost indukovaného napětí v této smyčce, hodnotu a směr indukovaného elektrického proudu uzavřenou částí obvodu.*

Úloha 5 [2b]: *Velmi dlouhý vodič má tvar ramen pravého úhlu. Vypočtěte magnetickou indukci v bodě A vzdáleném $a = 15$ cm od vrcholu V (viz obrázek 5), když vodičem prochází proud $I = 10$ A.*



Obrázek 5: Nákres k problému 5

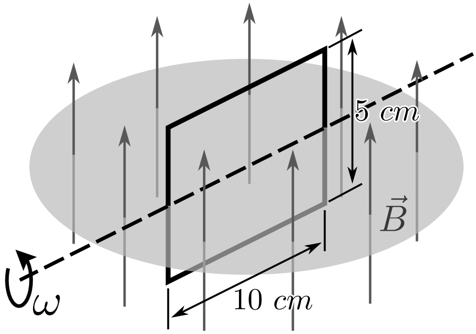
Úloha 6 [4b]: *Velmi dlouhý vodič má tvar jako na obrázku 6. Vypočtěte magnetickou indukci v bodě B, když vodičem prochází proud $I = 10$ A.*



Obrázek 6: Nákres k problému 6

Problém 7: *Když se v 70. letech 20. století průmyslově vyráběly svitkové kondenzátory, bylo běžné, že se vzal dlouhý pás materiálu, jehož dvě strany byly vodivé, od sebe izolované, a smotal se do ruličky. Zkuste najít vhodnou aproximaci takového kondenzátoru a vypočítejte pro nějaké reálné hodnoty teoretickou kapacitu. Porovnejte s realitou.*

Úloha 8 [4b]: *Drátěný obdélník o odporu R a délkách stran 5 a 10 cm se otáčí v homogenním magnetickém poli o indukci B. Osa otáčení je kolmá na magnetické pole a úhlová rychlost otáčení ω je konstantní. Napište průběh indukovaného proudu ve vodiči. Jaký bude časový průběh napětí na smyčce? Určete, jaké maximální okamžité napětí lze na smyčce naměřit. Situace je vyobrazena na obrázku 7.*



Obrázek 7: Nákres k problému 8

Pája, Fanda; `fandazajic@gmail.com`
e-mailová konference: `elmag@mam.mff.cuni.cz`

Výsledková listina 3. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy t1	t2	t4	turnaj	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.[MM] K. Vokálová	4	128,6	27,5	12,5	13,5	5,4	58,9	116,2
2.	Dr.[MM] J. Kalvoda	3	99,8	24,0	16,0		2,8	42,8	99,8
3.	Dr.[MM] V. Janáček	3	75,3	24,0	16,0		2,8	42,8	75,3
4.	Dr.[MM] M. Fof	2	54,5	11,0	9,9		2,4	23,3	54,5
5.	Mgr.[MM] O. Piroutek	2	45,4	23,8		4,0		27,8	45,4
6.	Mgr.[MM] V. Starosta	2	40,1	24,0			3,8	27,8	40,1
7.	Mgr.[MM] K. Pernicová	3	39,2	19,0			1,5	20,5	39,2
8.	Mgr.[MM] J. Knillová	1	33,6		5,0	8,5		13,5	33,6
9.	Mgr.[MM] D. Perout	3	32,0	10,0		7,0		17,0	32,0
10.	Mgr.[MM] A. Cmielová	1	25,6	22,0				22,0	25,6
11.	Doc.[MM] J. Havelka	4	129,4					0	25,0
12.	Dr.[MM] K. Hloušková	4	52,5					0	22,0
13.	Mgr.[MM] A. Opl	2	20,5	9,0				9,0	20,5
14.–15.	Dr.[MM] O. Chlubna	3	54,7	8,0				8,0	19,9
	Mgr.[MM] J. Piroutek	4	33,1					0	19,9

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy t1	t2	t4	turnaj	$\sum_0$	$\sum_1$
16.	Dr.$^{\text{MM}}$ M. Kalousková	4	69,8	4,0				4,0	19,5
17.	Mgr.$^{\text{MM}}$ T. Flídr	2	43,9					0	17,9
18.	Mgr.$^{\text{MM}}$ L. Kunčarová	4	20,6					0	17,0
19.	Bc.$^{\text{MM}}$ K. Grinerová	3	16,5	12,5		4,0		16,5	16,5
20.	Mgr.$^{\text{MM}}$ E. Vítková	4	47,6	2,0				2,0	16,3
21.	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Kaifer	4	19,8					0	16,0
22.–23.	Bc.$^{\text{MM}}$ P. Hladík	2	13,0	13,0				13,0	13,0
	Bc.$^{\text{MM}}$ L. Veškrna	2	13,0	13,0				13,0	13,0
24.	Mgr.$^{\text{MM}}$ O. Gonzor	3	42,7					0	12,8
25.	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Jedlička	2	12,7	7,0				7,0	12,7
26.	Bc.$^{\text{MM}}$ J. Kvapil	2	15,7					0	12,0
27.	Mgr.$^{\text{MM}}$ B. Kopčák	4	28,6					0	11,1
28.	Dr.$^{\text{MM}}$ M. Souza de Joode	3	51,3			11,0		11,0	11,0
29.	A. Žáčková	3	9,5					0	9,5
30.	Bc.$^{\text{MM}}$ L. Vomelová	4	15,3					0	8,2
31.	Bc.$^{\text{MM}}$ V. Žák	4	11,6					0	8,0
32.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Boček	1	29,2					0	7,8
33.	Mgr.$^{\text{MM}}$ M. Holubička	4	44,4					0	6,6
34.	J. Bláhová	3	6,5					0	6,5
35.	Bc.$^{\text{MM}}$ E. Neumannová	3	15,3					0	5,2
36.	M. Bučková	3	9,9					0	5,0
37.	Bc.$^{\text{MM}}$ F. Bujnovský	2	12,2					0	3,4
38.	M. Turinská	3	3,0					0	2,0
39.	Bc.$^{\text{MM}}$ M. Vícha	1	12,4					0	1,4

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`