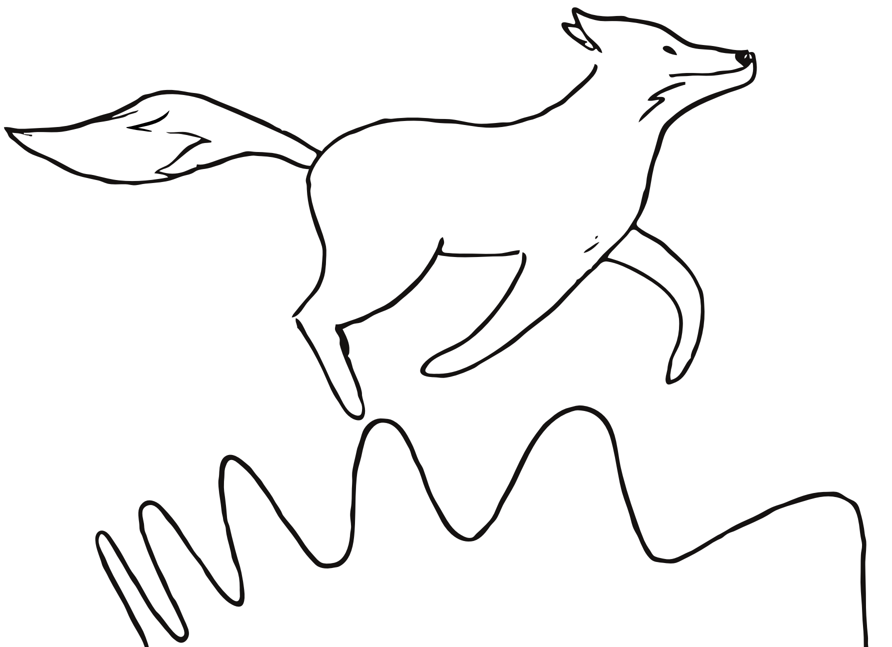
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXVI
Číslo 1

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

je tu nový školní rok a s ním i první číslo 26. ročníku časopisu M&M, které právě držíte v rukou. Tento časopis je určený pro všechny zvídavé středoškoláky a stejně jako každý rok se můžete prostřednictvím našich teoretických i experimentálních tématek dozvědět a naučit mnoho zajímavého z různých oblastí matematiky, fyziky a informatiky.

Co do obsahu se 26. ročník ponese na podobné vlně jako ten předchozí. Na následujících stránkách opět naleznete množství tématek, kterými se můžete zabývat. Jejich součástí jsou úlohy, kterých se ale nemusíte držet a můžete klidně experimentovat nebo se zabývat vlastními nápady v rámci tématka. Pokud máte jakékoliv dotazy ohledně řešení tématek, doporučujeme vám pročíst si sekci „Jak řešit" – pokud ani zde nenajdete odpověď na vaši otázku, neváhejte nám napsat na `mam@matfyz.cz`.

A na co se můžete těšit v aktuálním čísle? V prvním tématku z oblasti teorie her se dozvíte, proč nemá hraní šachů zas tak daleko k obchodování na burze a jak vám sedlový bod pomůže ke zvolení optimální strategie. Druhé tématko s názvem Výpočetní modely vás zavede do teorie informatiky a nabídne vám možnost zjistit nejen jak výpočetní stroje fungují, ale bude na vás i takový stroj sestrojit. V třetím tématku se budete zabývat zpracováním obrazových dat ze senzorů a přesvědčíte se, že k vytvoření obrazu někdy dvě dimenze nestačí. Na závěr vás čeká fyzikální tématko o elektromagnetismu, jehož první díl nese název Gaussův zákon a ukáže vám, že při správné aplikaci se není potřeba bát ani těch fyzikálních zákonů, které se probírají až na vysoké škole.

Zároveň se již kvapem blíží podzimní soustředění, které se bude letos konat od 12. do 20. října v severních Čechách. Tradičně na něj zveme nejen účastníky minulého ročníku, ale i nové řešitele – pokud tedy pošlete svá řešení do 24. září, máte ještě šanci se na toto soustředění dostat! Pokud vás zajímá, jak takové soustředění vypadá, můžete navštívit sekci soustředění na našem webu `mam.matfyz.cz`.

Na závěr bychom vám chtěli popřát hodně zábavy při řešení a těšíme se na vaše příspěvky.

Vaši organizátoři

Jak řešit

V každém z čísel v tomto školním roce zveřejníme několik textů, které nazýváme témata či tématka. Tyto texty nejen z oblasti matematiky, fyziky a informatiky popisují nějaký problém a jsou doprovázeny návodnými úlohami. Vaším úkolem je zamyslet se nad daným problémem a sepsat vaše úvahy ve formě krátkého textu. Zde je pár tipů, jak na to:

- Pročtěte si zadání všech tématek a vyberte si ta, která jsou vám nejbližší. Doporučujeme jich řešit víc najednou.

- Pokud vás žádné řešení nenapadá, nechte si problém v hlavě uležet a zkuste se k němu později vrátit. Napodruhé můžete objevit jiný úhel pohledu.

- Buďte kreativní! Objevíte-li problém týkající se tématka, kterému se zrovna nevěnuje žádná z úloh, neznamená to, že se jím při řešení nesmíte zabývat. Naopak, vaše vlastní nápady vítáme a oceňujeme. Budeme rádi, pokud se při řešení nebudete držet jen námi položených otázek, ale budete si klást i nějaké vlastní.

- Během roku můžete samozřejmě řešit různá tématka a naopak z každého můžete poslat jen některé úlohy. Tématka budou mít různou délku – některá tedy během roku skončí a jiná zase přibudou.

- Bodují se i úprava a struktura příspěvku, proto pište srozumitelně, vyjadřujte se jednoznačně a pokud možno se vyvarujte hrubých gramatických chyb. Pokud obdržíme nerozluštitelný text, projeví se to na bodování. Na druhou stranu nemusíte sepisovat vědeckou práci o desítkách stran. Pamatujte, že někdy je půl strany lepší než tři.

- Neostýchejte se sáhnout po odborné literatuře či se poradit s on-line zdroji. Body vám za to rozhodně neubudou, jen nezapomeňte ve vašem řešení zmínit zdroj informací.

- Pokud si nevíte rady, zkuste dát hlavy dohromady a zamyslet se nad nějakým tématem či úlohou s dalšími řešiteli. U každého tématka je adresa e-mailové konference, pomocí které můžete komunikovat s řešiteli, kteří se o tématko zajímají – budou do ni automaticky přidáni všichni, kteří k danému tématku poslali příspěvek. Pro přidání do konference můžete též napsat organizátorovi zodpovědnému za dané téma. Pokud sepíšete řešení společně, počet bodů, které každý z vás dostane, vypočteme podle vzorce $\frac{3b}{n+2}$, kde b je počet bodů, které by příspěvek získal, pokud by měl jediného autora, a n je počet autorů příspěvku.

- Jak již bylo řečeno, za řešení dostáváte body. Po obdržení určitého počtu bodů a za dobré umístění na konci ročníku od nás obdržíte věcné ceny, avšak největší odměnou, kterou za svou snahu získáte, je účast na soustředění. Ty nejlepší z vás totiž zveme na týdenní soustředění, které se koná dvakrát do roka. Pokud se vám ale nepovede dostat na soustředění, nesmutněte, protože s ostatními řešiteli se můžete potkat i na víkendovém setkání.

- Ještě jedna výhoda, která vám z řešení M&M plyne, jsou odpuštěné přijímačky na Matfyz, a to pokud získáte za ročník alespoň 65 bodů.

Řešení posílejte na e-maily organizátorů uvedené pod daným tématkem. Pokud sepíšete řešení papírově, můžete ho čitelně naskenovat, nebo poslat poštou (adresu najdete na konci čísla). Pokud posíláte řešení poprvé, napište nám zároveň i své jméno, adresu, e-mail, školu a rok maturity.

Zadání témat

Termín odeslání úloh 1. série: 8. 10. 2019
(24. 9. pro účast na podzimním soustředění)

Téma 1 – Hry

Díl 1: Úvod do teorie her a maticové hry

Co jsou to hry

Co je to hra? Existují na to dva klasické pohledy. Hra v Huizingově[1] smyslu je činnost, kterou jedinec dělá čistě pro zábavu, nenese tedy žádný význam pro skutečný život. Příkladem takové hry je házení si hopíku o zeď, když se nudíme. Hra ve smyslu teorie her je de facto konfliktní situace. Máme nějaké prostředí, ve kterém jsou alespoň dva agenti[2] a tito agenti mají rozdílné zájmy. Předmětem studia teorie her je volba akcí těchto agentů, tedy vlastně předpis, co má agent správně dělat, aby to byl racionální agent. Na studium teorie her se lze dívat jako na odnož studia optimalizačních metod, jen v teorii her nám optimalizaci komplikuje další strana. Příkladem hry ve smyslu teorie her je obchodování na burze.

Občas se tyto dva pohledy na hry překrývají. Například když hrajeme s kamarádem šachy, tak děláme činnost, která je zábavná, aniž by měla přínos pro reálný život, ale zároveň je to hra ve smyslu teorie her, protože ve vytvořeném prostředí máme dva agenty (bílý a černý protihráč), z nichž se každý snaží dosáhnout něčeho, co se neshoduje se zájmy druhého agenta (dát mu šach mat).

Předmětem našeho studia budou pouze hry ve smyslu teorie her. Pojďme se podívat na možné rozdělení těchto her.

Klasifikace her

V první řadě rozdělíme hry na ty s konstantním součtem a ty s nekonstantním součtem. Pokud má hra konstantní součet, tak první hráč získává tím více bodů (peněz), čím více jich druhý hráč ztratí. Významným speciálním případem her s konstantním součtem jsou hry s nulovým součtem. V takové hře počet bodů (peněz), který jeden z hráčů vyhraje, mu musí druhý zase zaplatit. Pokud má však hra nekonstantní součet, mohou klidně oba hráči získávat body či oba hráči ztrácet body – lze se tedy obohatit i nějak jinak než na úkor soupeře – a můžeme tu uvažovat o spolupráci agentů.

Zatímco u salónních her (poker, dáma, bridge. . .) bývá žádoucí mít konstantní součet, aby hra byla soubojem mezi dvěma protistranami, v reálném světě se nachází mnoho her s nekonstantním součtem. Při obchodování se může snadno

[1] Johan Huizinga, holandský historik, autor knihy Homo Ludens

[2] Agent je entita, která vnímá informace z prostředí (receptory) a umí toto prostředí nějak ovlivňovat (efektory). Takovým agentem může být počítačový program, fyzický robot i živý člověk. V oblasti teorie her budeme ve významu „agent“ používat typičtější slovo „hráč“.

stát, že dle zvolené obchodní strategie se ekonomická situace obou stran zlepší či naopak zhorší.

Dále rozlišujeme hry současné a sekvenční. Současné hry jsou ty, kde v rámci jednoho kola oba hráči vybírají svůj tah bez znalosti toho, jaký tah právě volí soused. U sekvenčních her je tah nejprve vybrán a následně zahrán prvním hráčem, což dává informaci druhému hráči, jehož tah následuje. Zpravidla se hráči v tazích střídají, dokud hra neskončí.

Příkladem sekvenční hry jsou piškvorky a příkladem současné hry je kámen-nůžky-papír.

Důležité je také rozlišovat mezi deterministickými hrami a hrami s náhodou. Pokud je hra deterministická (tj. bez náhody), je výsledek každého kola jasně definován původním stavem hry a zvoleným tahem. Pokud naopak ve hře náhoda existuje (například hod mincí, vrh kostkou nebo zamíchání balíčku karet), můžeme se na ni dívat jako na třetího hráče, který hraje zcela neorganizovaně bez jakéhokoliv cíle. Zatímco skuteční hráči se zaměřují na svůj zisk a při tom mohou (samozřejmě nemusí) od sebe navzájem očekávat racionalitu, chování náhodného elementu ve hře se může projevit v prospěch či neprospěch kteréhokoliv hráče.

Mezi deterministické hry patří šachy, dáma, kámen-nůžky-papír a lodě. Mezi nedeterministické hry patří například „Člověče, nezlob se!“.

Maticové hry

Nyní zaměříme pozornost na deterministické současné hry s nulovým součtem, tj. hry bez náhody, kde hráči hrají současně a co jeden získá, musí druhý ztratit. Pokud mají oba hráči na výběr z konečné množiny strategií, budeme takovou hru zapisovat maticí, což je obdélníková tabulka čísel. Proto také tento typ her nazýváme jako maticové hry. Uveďme si nejprve nějaký příklad.

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{matrix}$$

Když první hráč zvolí i-tou strategii (konkrétní řádek) a druhý hráč zvolí j-tou strategii (konkrétní sloupec), pak hodnota $a_{i,j}$ vyjadřuje zisk (ztrátu) prvního hráče, což znamená že $-a_{i,j}$ je zisk (ztráta) druhého hráče. Například když první hráč zvolí strategii 2 a druhý hráč zvolí strategii 3, tak první hráč získá 4 body a druhý hráč ztratí 4 body, protože $a_{2,3} = 4$. Pokud první hráč zvolí strategii 2 a druhý hráč zvolí strategii 1, pak první hráč ztratí 6 bodů a druhý hráč získá 6 bodů, protože $a_{2,1} = -6$.

Sedlové body

Nechť A je matice o m řádcích a n sloupcích[3] definující hru. Budeme se nyní zajímat o to, jestli v matici existuje prvek, který je maximální ve svém sloupci a

[3] To se často zapisuje jako $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, kde $\mathbb{Q}$ v zápise značí, že prvky matice (čísla v ní) jsou racionální.

zároveň minimální ve svém řádku. To znamená, že hledáme číslo takové, že pod ním ani nad ním není žádná větší hodnota a zároveň vlevo od něj ani vpravo od něj není žádná menší hodnota. Pokud se takový prvek v matici nachází, nazveme ho sedlovým bodem. Formálně se tato definice zapíše takto:

$$\forall u \in \{1, 2, \ldots, m\} \forall v \in \{1, 2, \ldots, n\} : a_{u,j} \leq a_{i,j} \leq a_{i,v}$$

Sedlovým bodem výše uvedené matice je hodnota $a_{1,2} = 1$. Jaký je význam sedlového bodu? Pokud oba hráči takovou hodnotu najdou, nevyplatí se ani jednomu z nich měnit svoji strategii. Sedlový bod tedy označuje optimální ryzí strategii. Optimální ryzí strategie je strategie, kterou mohou oba hráči volit vždy (bez nutnosti zahrnutí náhody do svého rozhodování) a nemohou na tom prodělat.

Nyní si ukážeme, že když má maticová hra více než jeden sedlový bod, pak se všechny její sedlové body navzájem rovnají.

Problém 1 [4b]: *Nechť $a_{i,j}, a_{k,l}$ jsou sedlové body matice A. Dokažte, že $a_{i,j} = a_{k,l}$.*

Problém 2 [1b]: *Vymyslete matici bez sedlového bodu. Stačí, když napíšete jeden příklad takové matice (bez vysvětlení).*

Závěr

Toto bylo úvodní seznámení s tím nejjednodušším druhem her. Od příštího čísla budeme propojovat teorii her s programováním. Vrhneme se na tzv. umělou inteligenci a bude vás brzy čekat i turnaj.

Markét, Martin; martin.dvorak@matfyz.cz
e-mailová konference: hry@mam.mff.cuni.cz

Téma 2 – Výpočetní modely

Díl 1: Stroje a stavové registry

V tomto tématku se podíváme na teorii výpočetních modelů, což je základ velké části teoretické informatiky.

Algoritmy byly známy už ve starověkém Řecku, ale až ve dvacátých letech dvacátého století se projevila potřeba přesněji definovat, co je to algoritmus. Přirozené formulace typu „posloupnost kroků vedoucí k nějakému výsledku“ vyžadují popsat, co jsou platné kroky. Právě z tohoto problému se vyklubaly výpočetní modely – idealizovaná zařízení, která mohou algoritmy provádět.

Námi studované výpočetní modely budou pozůstávat z přechodové funkce a několika rozšíření. V každém kroku jednotlivá rozšíření pošlou (vypíšou) nějakou informaci o svém stavu na vstup přechodové funkce (kterému budeme říkat výpis). Přechodová funkce následně vydá pokyn, co má které rozšíření udělat.

Prvním rozšířením je stavový registr, což je věc, která je vždy v jednom z několika stavů. Stavový registr vypisuje svůj stav na výpis přechodové funkce, která jej v každém pokynu informuje o tom, do kterého stavu se má přepnout.

V tomto tématku budeme často popisovat různé stroje. Nejdříve uvedeme veškerá rozšíření, kterými je stroj opatřen a popíšeme jejich nastavení. Následně popíšeme přechodovou funkci. Každý řádek bude obsahovat nějakou hodnotu výpisu a jí odpovídající krok.

Použitá rozšíření:
`stavový registr (počáteční stav A)`

Přechodová funkce:
`A` $\to$ `B`
`B` $\to$ `C`
`C` $\to$ `A`

Stroj 1: Příklad stroje, který nepřetržitě cyklí mezi stavy A, B a C

Zjevně budeme potřebovat nějaký způsob, jak signalizovat konec výpočtu. V zájmu jednoduchosti to můžeme vyřešit tak, že se stroj zastaví, pokud pro aktuální výpis nemá přechodová funkce definovaný krok.

`stavový registr (počáteční stav A)`

`A` $\to$ `B`
`B` $\to$ `C`

Stroj 2: Příklad stroje, který se po dvou krocích zastaví ve stavu C

Takhle je ale náš stroj ještě pořád dost nezajímavý. Pořídíme si proto vstup – rozšíření, které vždy vypíše na výpis jeden znak nějakého vstupního řetězce. Pokyn se vstupu vůbec netýká, protože vstup automaticky s každým krokem přejde na následující znak vstupního řetězce. Když dojde na konec vstupního řetězce, tak vypíše nějaký koncový symbol (typicky \$). Takhle rozšířený stroj už je možné použít k rozhodování, zda má vstupní řetězec nějakou vlastnost.

Pokud má náš stroj více rozšíření, musíme jednoznačně určit, které položky na výpisu a v pokynu jsou určeny pro které rozšíření. Položky budeme rozdělovat mezi rozšíření dle požadavků jednotlivých rozšíření a to v tom pořadí, v jakém byla rozšíření uvedena na začátku popisu stroje.

`stavový registr (počáteční stav A)`
`vstup`

`A` , `1` $\to$ `N`
`N` , `1` $\to$ `A`

Stroj 3: Příklad stroje, který zjistí, zda má vstup skládající se ze samých jedniček sudou délku

Všimněte si, že stav indikuje odpověď (Ano/Ne) a využíváme koncový symbol ze vstupu na zastavení stroje. Stavový registr byl uveden první. Zobrazuje jednu položku na výpis (svůj aktuální stav) a čte jednu položku z pokynu (stav do kterého má přepnout). Takže první položka na výpisu a první položka pokynu bude patřit stavovému registru.

Pro některá další použití se nám bude hodit mít k dispozici i rozšíření sloužící jako výstup. Takové rozšíření na výpis nic nevypisuje a v každém kroku dostane řetězec (klidně prázdný), který má poslat na výstup. Díky tomu můžeme vytvářet stroje známé jako generátory.

```
stavový registr (počáteční stav A)
výstup

A → B,0
B → A,11
```

Stroj 4: Příklad stroje, který generuje nekonečnou posloupnost 011011011011…

Pokud má stroj jak vstup tak výstup, můžeme je uvádět jako rozšíření IO (z anglického Input/Output). Takové stroje se označují jako převodníky.

```
IO

1 → 1
0 → 0
```

Stroj 5: Extrémně jednoduchý převodník, který jen kopíruje binární vstup na výstup

Některé stroje můžou být relativně složité a pořád nedělat nic moc užitečného.

```
stavový registr (počáteční stav A)
IO

A,0 → A,
A,1 → A,11
A,2 → B,
B,0 → B,0
B,1 → B,
B,2 → A,
```

Stroj 6: Převodník, který na vstupu čte nuly, jedničky a dvojky. Ve stavu A zahazuje nuly a zdvojuje jedničky, ve stavu B zahazuje jedničky a kopíruje nuly. Dvojky způsobují přepnutí stavu. Tedy například z 01120101 udělá 111100.

Všimněte si, že stroj může mít i více rozšíření stejného typu.

```
vstup
vstup
výstup

0,0 → 00
0,1 → 01
1,0 → 10
1,1 → 11
```

Stroj 7: Převodník, který čte ze dvou vstupů a na výstup tiskne vždy bit z prvního vstupu následovaný bitem z druhého vstupu.

Otázky k zamyšlení

(Můžete předpokládat, že vstup bude vždy obsahovat jen nuly a jedničky. Pokud pracujeme s čísly, budou ve dvojkové soustavě. Zda budou zapsaná od nejvýznamnějšího bitu nebo opačně, si můžete vybrat - občas to zajímavě mění složitost problému.)

Problém 1: *Lze sestrojit stroj, který zjistí, zda je počet 0 sudý a počet 1 dělitelný třemi?*

Problém 2: *Lze sestrojit převodník, který provádí bitovou negaci?*

Problém 3: *Lze sestrojit sčítačku? (Sčítačka na dvou vstupech dostane dvě přirozená čísla ve dvojkové soustavě a na výstup vypíše jejich součet.)*

Problém 4: *Lze sestavit stroj, který pozná dělitelnost jedenácti? Sedmi? Číslem zadaným na druhém vstupu?*

Problém 5: *Lze sestavit stroj, který pozná palindromy? (Palindrom je řetězec, který se čte zepředu stejně jako zezadu, např. 1101011.)*

Problém 6: *Existují problémy, který naše stroje zatím nemohou vyřešit?*

Problém 7: *Jaká další rozšíření bychom mohli chtít? (Zamyslete se nad tím, jak s nimi bude interagovat přechodová funkce.)*

Problém 8: *V čem by se lišily naše stroje, kdyby vstup po posledním znaku místo vypisování $ rovnou ukončil výpočet?*

Samozřejmě se můžete podělit i o postřehy, které s těmito otázkami souvisí jen volně nebo dokonce vůbec!

Matej; `lieskovsky.matej+stroje@gmail.com`
e-mailová konference: `stroje@mam.mff.cuni.cz`

Téma 3 – Zpracování obrazových dat ze senzorů

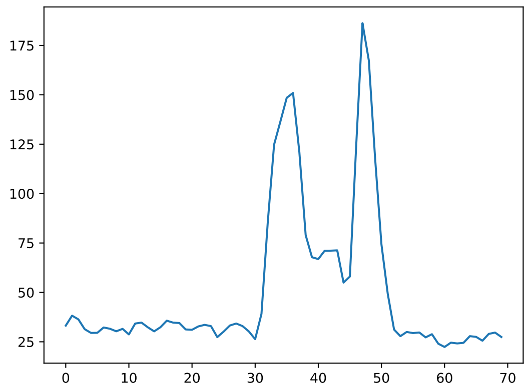
Úvod

V tomto tématku se budeme zabývat zpracováním obrazu, ale žádné fotky k tomu potřebovat nebudeme. Místo toho si budeme hrát s vícedimenzionálními daty pořízenými jinými senzory než fotoaparátem. Chci vám ukázat data ze senzorů, kterým dvě dimenze nestačí. Věděli jste například, že obyčejný rychlostní radar u silnice dokáže generovat až 5D obraz? Právě s tímto zdánlivě obyčejným radarem u silnice si budeme chvíli hrát a pro jednoduchost nyní začneme „jen“ s prvními dvěma dimenzemi.

Radar je anténa, která odešle krátký pulz elektromagnetického signálu na definované frekvenci a čeká na odrazy, které se vrátí. Například bouřkový radar čeká na odrazy od dešťových srážek. Tyto odrazy se vracejí s určitým zpožděním, které závisí na vzdálenosti objektu a rychlosti světla v daném prostředí. Počet získaných odrazů a jejich zpoždění přesně odpovídá počtu objektů a jejich vzdálenosti od radaru.

První dimenze

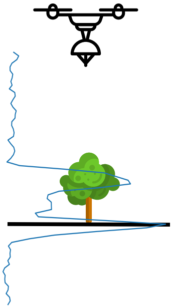
Řekněme, že náš radar je zavěšen na multikoptéře vysoko nad zemí a „dívá se“ směrem do země. Odraz od stromu z takového radaru potom může vypadat třeba takto:



Obrázek 1: Odrazy na radaru při pohledu na strom shora

Prvních několik metrů (postupujeme v ose X od nuly) přijímáme jen malý odraz od vzduchu. Potom vidíme odraz od koruny stromu a následně od země. Aktuálně nemáme dostatečně silný radar, abychom viděli i pod zem, takže další odrazy nejsou měřitelné a v grafu už vidíme jen šum.

Zamyšlení 1: *Zkuste se zamyslet nad tím, jak byste na základě těchto dat měřili vzdálenost radaru od země (chtěli byste jej použít jako výškoměr). Odhadněte, jak spolehlivá data můžeme očekávat. Jestli třeba může nastat situace, kdy zem*



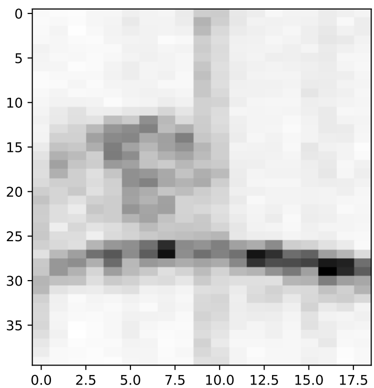
Obrázek 2: Nákres scény při pořizování snímku

vůbec neuvidíme, jak bude naše měření ovlivňovat počasí nebo noc. Nemusíte nic programovat, ale pokud chcete, můžete své myšlenky ověřit na testovacích datech. Testovací data včetně návodu k jejich použití jsou na straně 13.

Druhá dimenze

Doposud jsme použili jen jednorozměrná data, takže je na čase přidat další dimenzi. Představme si, že nyní vezmeme náš radar a budeme s ním rotovat kolem horizontální osy podobně jako antény letištních nebo lodních radarů.
`https://www.youtube.com/watch?v=ClE6pRbtNg0`

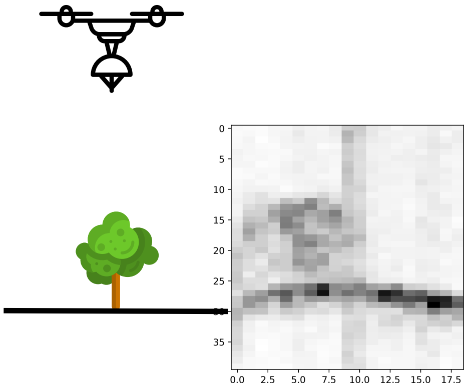
Rotací získáme navíc jednu dimenzi. Podobných výsledků dosáhneme i v případě, kdy použijeme několik radarových antén, které jsou orientované různými směry. Nyní se vrátíme k našemu radaru, který je zavěšený vysoko nad zemí a tentokrát se houpe ze strany na stranu. Zachycená data zobrazují kruhovou výseč pod radarem. Pro jednoduchost budeme zachycená data ukládat do 2D pole.



Obrázek 3: Odrazy zachycené jako 2D pole při pohledu na strom shora

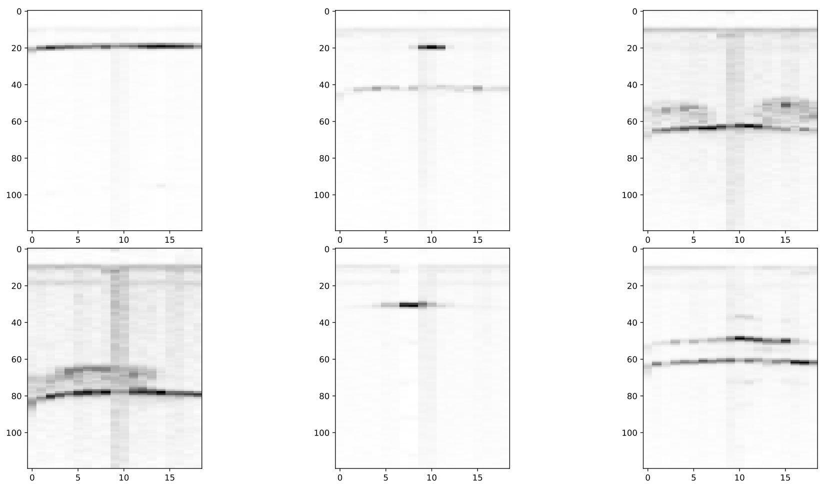
Nyní už můžeme pouhým okem rozpoznat, kde je zem a jak vypadá strom.

Taky si můžeme všimnout toho, že v různých směrech měříme různou intenzitu šumu. Právě šum nám za chvíli začne činit drobné potíže, ale o tom tohle tématko je.



Obrázek 4: Srovnání snímku z radaru s nákresem reality

Zamyšlení 2: *Jak budou vypadat data pořízená nad rovnou loukou nebo třeba nad vodní hladinou? Jak bude vypadat snímek nad budovou, nad hustým nebo řídkým lesem, nad lesní cestou nebo v horách? Co všechno můžeme obyčejným radarem vidět z ptačí perspektivy? Pro inspiraci přidávám několik radarových snímků, ale hádání, co je jejich obsahem, už nechám na vás.*



Obrázek 5: Ukázky snímků zachycených radarem

Testovací data

Pokud budete chtít své myšlenky opět testovat na reálných datech, zde jsou k dipozici zdrojová data z grafů výše: `https://1url.cz/0M5Z0`

Zdrojová data můžete číst a zpracovávat v Pythonu[4]. Zde je ukázka načtení a zobrazení jednoho snímku:

```
# Potrebujeme modul numpy a matplotlib.
# Oba lze stahnout pres prikaz v terminalu:
# pip install numpy
# pip install matplotlib
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Nacteni dat ze souboru
frame = np.load("1.npy")
# frame je 2D pole, osa X je horizontalni (19 pixelu)
# Vypiseme rozmery pole, mely by byt 256x19
print(frame.shape)
# Zobrazime frame pomoci knihovny matplotlib
plt.imshow(frame, interpolation='nearest', cmap='binary')
plt.show()

# Pripadne zobrazime jen ctvrty sloupec
plt.plot(frame[:,4])
plt.show()

# Muzeme invertovat osu Y
plt.gca().invert_yaxis()
# Zobrazime jen cast celeho pole
plt.imshow(frame[40:90,:], interpolation='nearest', cmap='binary')
# Vysledny graf trochu 'rozsirime'
plt.axes().set_aspect(0.5)
plt.show()
```

Pro začátek je toho, myslím, víc než dost. Příště se můžete těšit na článek o tom, jak změřit a spočítat rychlost blížícího se objektu podobně, jako to dělají právě rychlostní radary.

Béďa; `bedrich.said@gmail.com`
e-mailová konference: `radary@mam.mff.cuni.cz`

[4] Pokud Python neumíte, doporučujeme vám kurz „Nauč se Python"(`https://naucse.python.cz`)

Téma 4 – Vybrané kapitoly z elektromagnetismu

Díl 1: Gaussův zákon

V tomto fyzikálním tématku s přesahem do chemie si postupně ukážeme několik kapitol z elektřiny a magnetismu. Ukážeme si některá zjednodušení vysokoškolských fyzikálních zákonů. Na vás potom bude tato zjednodušení aplikovat.

Gaussův zákon

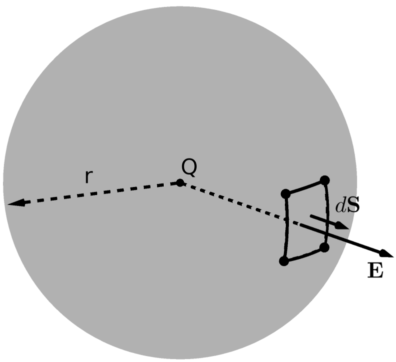
Gaussův zákon (1) je vztah z elektrostatiky, který dává do souvislosti náboj a jím vytvořené pole popsané elektrickou intenzitou.

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Tento zápis znamená, že po celé uzavřené ploše $\boldsymbol{S}$ posčítáme kolmé složky elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$. $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ označuje kolmý vektor k nekonečně malé části z celkové plochy, na níž můžeme elektrickou intenzitu považovat za konstantní. Zápis ve formě vektorů znamená, že nás zajímá i směr působení dané veličiny. Pro vás možná známější použití vektorových veličin je u sil a jejich geometrického sčítání. Vektor se obvykle značí šipkou nad písmenem označujícím danou veličinu nebo se písmeno napíše tučně tak jako zde. Elektrická permitivita ε_0 je fyzikální konstanta, kterou můžete znát například z Coulombova zákona a její velikost je $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} F/m$ (Farad na metr).

Integrál znamená, že sčítáme právě tyto malé části. Kolečko na něm říká, že plocha, po které sčítáme, musí být uzavřená. Tento integrál se vždy rovná náboji uzavřenému v dané ploše dělěnému permitivitou.

Uzavřená plocha je povrch nějakého tělesa, třeba koule, krychle nebo válce, příklad můžete vidět na obrázku 6. Přívlastek libovolná znamená, že si ji můžeme zvolit tak, aby se nám integrál co nejlépe počítal.



Obrázek 6: vektor elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ generované nábojem Q na ploše $d\boldsymbol{S}$ (elementární část kulové plochy kolem náboje)

Ukážeme si dva triky, jak lze v některých případech tento integrální zákon zjednodušit na pouhé násobení.

V integrálu tečka značí skalární součin. Pokud jsou ale dva vektory rovnoběžné, pak je jejich skalární součin roven součinu jejich velikostí, pokud jsou na sebe kolmé, je jejich skalární součin roven nule. Pro jiné úhly než 0° a 90° platí vzorec součin velikostí obou vektorů násoben kosinem úhlu mezi nimi. Geometricky jde o průmět jednoho vektoru do druhého. Matematicky tuto větu zapíšeme jako $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot \mathrm{d}S \cdot \cos(\alpha)$.[5] Z toho lze vyčíst, že pokud je $\alpha = 0°$, pak je skalární součin maximální a při velikosti $\alpha = 90°$ je skalární součin roven nule.

V případě, že zvolíme plochu tak, že je elektrická intenzita v každém místě stejná, dá se vytknout před integrál. Integrujeme potom jen $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, což je dohromady velikost plochy, kterou umíme spočítat i jiným způsobem, například podle běžného vzorce, který se učí na střední škole. $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ pro plochu reprezentující povrch koule bude $\frac{Q}{\varepsilon_0} = ES$, kde $S = 4\pi r^2$ je povrch koule o poloměru r.

S těmito dvěma triky se dá s pomocí Gaussova zákona velmi dobře vyšetřovat elektrické pole v okolí různě rozložených nábojů, a to pokud mají tato rozložení nějakou symetrii. Ukážeme si to na bodovém náboji. Zajímá nás, jaká bude elektrická intenzita ve vzdálenosti 5 m od kladného náboje $2\,\mu C$ ve vakuu, což odpovídá velikostně náboji přibližně 1,25 milionu elektronů.

1. Uvědomíme si, jakou symetrii bude pole mít. V okolí bodového náboje bude mít pole sférickou symetrii. Velikost elektrické intenzity záleží jen na vzdálenosti od bodového náboje.

2. Zvolíme si plochu, která danou symetrii respektuje. Sférickou symetrii má koule. Nás zajímá elektrická intenzita ve vzdálenosti 5 m, naší plochou tedy bude koule o poloměru 5 m, v jejímž středu bude bodový náboj.

3. Elektrická intenzita bude směřovat směrem od bodového náboje, je tedy kolmá na tuto kouli. Gaussův zákon se zjednoduší na $\frac{Q}{\varepsilon_0} = ES$, kde S je povrch koule o poloměru 5 m.

4. Dosadíme do upraveného Gaussova zákona ve skalárním tvaru pro tento případ: $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$, kde ε_0 je permitivita vakua, $Q = 2\,\mu C$ a $S = 4\pi r^2$ je poloměr kulové plochy s nábojem Q ve středu ($r = 5\,\mathrm{m}$). Po dosazení vychází elektrická intenzita $E = 719\,\mathrm{N/C}$. Jednotka Newton na Coulomb odpovídá elektrické síle působící na jednotkový kladný náboj v elektrostatickém poli. Další možný zápis jednotky elektrické intenzity je volt na metr (V/m), ale vysvětlení je již méně intuitivní.

Zkuste si to sami!

Problém 1: *Mějme dvě koule o poloměru R, obě nabité nábojem Q. U první koule je rozmístěn po povrchu, u druhé homogenně po celém objemu. Jak se liší*

[5] Tučná písmena reprezentují vektory a normální písmena skaláry daných veličin.

elektrické pole obou koulí vně a uvnitř koulí? Nakreslete graf závislosti elektrické intenzity v závislosti na vzdálenosti od středu koule u obou koulí.

Problém 2: *Jak vypadá elektrické pole v okolí nekonečně velké nabité desky? Deska je nabita plošnou hustotou ω. Plošná hustota je elektrická intenzita vztažená na metr čtvereční plochy desky.*

Problém 3: *Vysvětlete funkci Faradayovy klece pomocí Gaussova zákona a věty o rozložení nábojů na vodiči.*

Problém 4: *Gaussova věta je zobecněním Gaussova zákona pro všechna statická pole, platí tedy např. i pro gravitační sílu. Zkuste si Gaussovu větu nastudovat a spočítat, jakou silou by byli přitahováni k Zemi obyvatelé duté Země (hmotnost duté Země je stejná jako hmotnost té normální).*

Pája, Fanda; `fandazajic@gmail.com`
e-mailová konference: `elmag@mam.mff.cuni.cz`

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M