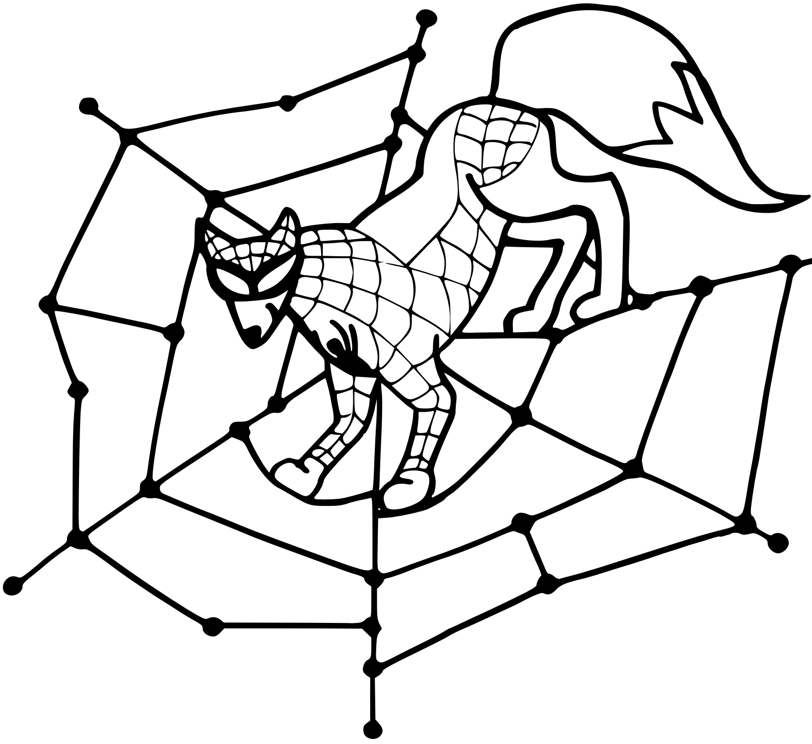
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIV
Číslo 7

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

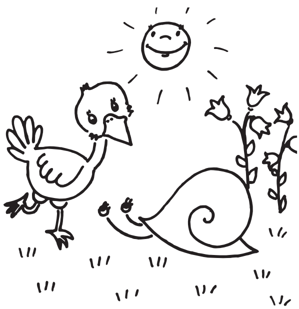


Uvnitř najdete několik úloh a témat k zamyšlení. Vyřešte je a pošlete nám je. My vám je opravíme a pošleme zpět s dalším číslem, nejzajímavější řešení otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,
nám, vysokoškolákům, se školní rok již pomalu chýlí ke konci, ti nejstarší z vás už ho možná mají dokonce za sebou a více či méně pilně se připravují na maturitu. V sedmém čísle časopisu M&M, jehož stránkami právě listujete, už tedy nenajdete další zadání témat nebo úložek. Co v něm ale naopak najdete, je příspěvek Bc.$^{\mathsf{MM}}$Martina Zimena k tématku Odmocniny. Martinovi tímto děkujeme za jeho zaslání a všem ostatním jej doporučujeme k přečtení.

Krásný začátek léta vám přejí

Vaši organizátoři



Řešení témat

Téma 4 – Odmocniny

K tomuto tématu jsme obdrželi příspěvek Bc.$^{\mathsf{MM}}$Martina Zimena. Nejdříve Martin řešil, které permutace jsou odmocniny identické permutace, čili které permutace při složení samy se sebou dají identitu. Správně vyřešil problém pro druhé odmocniny. Jak to bude ale vypadat pro vyšší odmocniny? Existují? Pokud ano, jak vypadají?

Další zajímavá otázka, kterou se Martin pokusil alespoň přibližně vyřešit, se týká počtu odmocnin identické permutace (pro permutace n-prvkové množiny). Spočítat je není lehké, ale napovím, že je to velmi zajímavá číselná řada. Při řešení můžete použít internet, body budou i za vysvětlení, jak se k takovému vzorci dostaneme, a za příklady toho, kde všude se s danou funkcí proměnné n můžeme setkat.

Martin řešil i obecnější otázku ze zadání, a to hledání „permutační odmocniny“ pro obecnou permutaci. Správně vyřešil, za jakých podmínek existuje a jak ji najít. Navíc položil zajímavou otázku na počet odmocnin dané permutace.

Řešení můžete posílat až do 24. května, poté se téma uzavře.

Příjemné čtení přeje

Anet

Pozn. red.: Martinův příspěvek jsme mírně zkrátili.

Odmocniny permutací (8b)

Bc.^{MM}Martin Zimen

Pro práci s permutacemi se hodí zavést pár pojmů.

Úmluva. *Součinem* permutací π_1 a π_2 rozumíme permutaci $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, pokud $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$. *Mocninou* permutace π rozumíme permutaci $\sigma = \pi \circ \pi$.

Definice. *Cyklus* je permutace, která cyklicky posouvá nějakých k prvků, přičemž ostatní nechává na místě. Hodnotu k budeme nazývat *řádem* cyklu.

Lemma. Každou permutaci na konečné množině lze jednoznačně rozložit na součin několika disjunktních cyklů.

Definice. *Řádem* permutace budeme rozumět nejmenší společný násobek řádů jejích cyklů.

Při analýze permutací se hodí rozložit si permutaci na cykly. Lze snadno rozmyslet, že při umocňování se nám nestane, aby se nám dva cykly spojily. Můžeme se tedy zaměřit na každý cyklus zvlášť. Při umocňování cyklu lichého řádu se posouváme na cyklu o dva prvky. Lze si to představit na pomyslném kruhu. Před umocněním se pohybuji na kruhu postupně. Po umocnění se na kruhu pohybuji „ob jedno“. Stane se tak, že se po prvním opsání kruhu budu „strefovat“ přesně do „mezer“. Umocněním cyklu řádu $2k+1$ tedy získám opět cyklus stejného řádu. U cyklů sudého řádu se ale do mezer strefovat nebudu. Vzniknou mi tak dva disjunktní cykly, jeden na sudých prvcích a jeden na lichých prvcích. Umocněním cyklu řádu $2k$ mi tedy vzniknou dva cykly řádu k.

Úloha. *(parafráze problému v zadání tématu)* Najděte všechny permutace, jejichž mocninou je identita.

Permutace je identitou právě tehdy, když je řád všech jejích cyklů jedna. A cyklus prvního řádu mi může při umocňování vzniknout dvěma způsoby. Buď už to cyklus prvního řádu byl, nebo mi vznikl rozdělením cyklu druhého řádu. Řešením jsou tedy všechny permutace, které neobsahují cyklus řádu většího než 2.

Zajímavou otázkou zůstává, kolik takových permutací je v množině o n prvcích. Je to počet možných párování na úplném grafu o n vrcholech a nemám pro to hezké a jednoduché řešení.

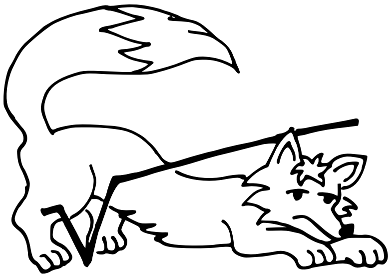
Úloha. *(parafráze problému v zadání tématu)* Pro permutaci π najděte permutaci σ, jejíž mocninou bude π.

Opět se hodí rozložit si úlohu na cykly.

Všechny cykly lichého řádu vznikly umocněním jiného cyklu lichého řádu. *(Pozn. red.: Tady se Martin dopustil chyby, cykly lichého řádu mohou vzniknout i rozbitím cyklu řádu $4k + 2$.)* Pokud složíme libovolnou permutaci k-krát, kde k je řád permutace, dostaneme identitu. Představme si opět náš kruh. Na našem kruhu víme, jak vypadá pohyb o dva, ale nevíme, jak se pohnout o jedno. Jestliže je řád našeho cyklu $2k + 1$, představme si, že náš „pohyb o dva“ provedeme $(k + 1)$-krát. Náš kruh tak obkroužíme jednou celý a posuneme se o jeden krok dopředu. A to je to stejné, jako kdybychom udělali krok o jedno, který jsme chtěli najít.

Nyní se podívejme na cykly sudého řádu. Ty mohly vzniknout pouze rozbitím většího cyklu. Abychom tedy získali původní cyklus, musíme „slepit“ dva cykly stejné délky dohromady. Tím nám vzniká podmínka, kdy má permutace π odmocninu. Počet cyklů libovolného sudého řádu musí být sudý. Stačí nám tedy „slepit“ dva cykly dohromady, což není problém. Nejlépe se to opět udělá na našem kruhu. Dva cykly „položím“ na kruh tak, aby byly vrcholy cyklů na střídačku a jednoduše je spojím po kruhu.

Popsaný postup nás vždy dovede k řešení. Zajímavé by bylo opět spočítat, kolik odmocnin má permutace π.



Řešení úloh 5. série

Úloha 5.1 – Rovnostranný trojúhelník (3b)

Zadání:
Máme ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou CH a těžnicí BM. Navíc víme, že $|BM| = |CH|$ a úhly MBC a HCB jsou stejně velké. Dokažte, že ABC je rovnostranný.

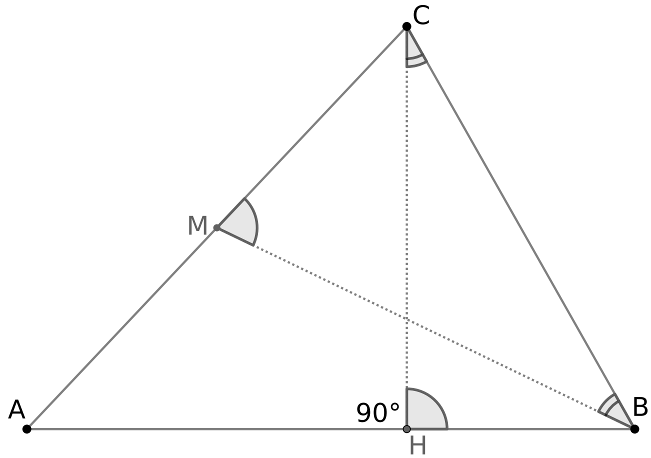
Řešení:
Postupovat se dalo různými způsoby. Pěkné řešení využívalo obsahy, další řešení pracovala s úhly. V tomto řešení budeme postupovat přímočaře přes shodné trojúhelníky, kterých si také všimla většina z vás.

Trojúhelník HBC je shodný s trojúhelníkem MCB podle věty *sus* ($|BM| = |CH|$ ze zadání a $|\sphericalangle MBC|=|\sphericalangle HCB|$).

Tedy $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle CBA|$, takže ABC je rovnoramenný trojúhelník, protože má u základny dva stejné úhly, tedy $|AC| = |AB|$.

Dále z podobnosti trojúhelníků HBC a MCB vyplývá, že velikost $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle CHB| = 90°$, tedy trojúhelník CMB je shodný s trojúhelníkem AMB podle věty *sus* ($|CM| = |AM|$, protože BM je těžnice, čili M je střed strany AB). Ze shodnosti trojúhelníků potom platí, že $|AB| = |BC|$.

Platí tedy $|AC| = |AB|$ a $|AB| = |BC|$, takže trojúhelník ABC je rovnostranný.



Obrázek 1: Náčrtek zadaného trojúhelníku

Velká část z vás k úloze nenakreslila obrázek (dobrým nástrojem je třeba GeoGebra). To je u geometrické úlohy vždycky škoda, jednak to pomůže při opravě, kdy se dá jednodušeji orientovat ve vašich úvahách, jednak to pomůže vám, když zapomenete něco zmínit, ale máte to zaznačené na obrázku. Nakonec jsem se rozhodl ocenit obrázek bonusovým půlbodem, abych motivoval pozitivně a ne negativně. Další věcí, ve které zhruba polovina z vás dělala chyby, byl zápis shodných (nebo podobných) trojúhelníků – vždy je potřeba psát odpovídající si vrcholy na stejné pozice. Tedy pokud mám shodné trojúhelníky ABC a DEF, tak to znamená, že $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ a třeba $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$.

Petr

Úloha 5.2 – Rušičky (5b)

Zadání:

Máme 32 očíslovaných krabiček, z nichž 16 obsahuje rušičku. Každý den můžeme vzít libovolnou sadu krabiček a otestovat, zda je mezi nimi alespoň jedna rušička. Za kolik dnů dokážeme určit, které krabičky obsahují rušičky? Zajímá nás jak nejhorší případ, tak i průměr. Část bodů je možné získat i za neoptimální řešení; naopak třeba důkaz toho, že to nejde o moc rychleji, představuje možnost získat bonusové body.

Řešení:

Vypadá to, že příslib části bodů za neoptimální řešení nestačil a nenalezení optimálního řešení odradilo velkou část řešitelů. Což je celkem škoda, protože nalezení optimálního řešení opravdu nebylo zapotřebí. Níže jsou různá pozorování, která bylo možno učinit, setřízená přibližně od nejsnadnějších po nejsložitější. Za každé z nich bylo možné získat nějaké body.

Je zjevné, že v nejlepším případě se nám může podařit celý úkol vyřešit za jediný den – stačí nám mít to štěstí vybrat 16 krabiček a pak zjistit, že mezi nimi rušička není. Vzhledem k tomu, že možností, jak vybrat 16 krabiček z 32, je $\binom{32}{16} = 601\,080\,390$, a jen jedna z nich je ta správná, není dobrý nápad na to spoléhat.

Druhé celkem základní pozorování je, že to určitě můžeme vyřešit za nejhůře 31 dnů: Každý den zkusíme jednu krabičku a tu poslední už odvodíme podle toho, zda nám schází šestnáctá rušička, nebo prázdná krabička.

31 dnů se možná nezdá jako moc dobrý výsledek, ale je možné ukázat, že to zase o tolik lépe nepůjde. Existuje 601 080 390 možných rozdělení krabiček mezi ty s rušičkou a ty bez. Vzhledem k tomu, že se každý den dozvíme jen to, zda mezi námi vybranými krabičkami byla alespoň jedna rušička, nebo ne, tak

si to taky můžeme představit tak, že výběrem podmnožiny krabiček pro měření rozdělujeme všechna možná rozmístění rušiček do dvou hromádek podle toho, jaký výsledek dávají při našem měření. Po provedení měření pak jednu z těchto hromádek můžeme vyřadit a celý proces opakovat, dokud nám nezbude jen jedno možné rozmístění rušiček.

Je snadné nahlédnout, že pokud budeme mít smůlu, tak vždy vyřadíme tu menší hromádku. Pro minimalizaci nejhoršího případu chceme tedy dělit na poloviny. Opakovaným dělením čísla 601 080 390 zjistíme, že i kdyby se nám to dokonale dařilo, stejně se nám může stát, že budeme potřebovat 30 měření.

Opatrnější formulace předchozího argumentu (ať už rozmyšlením si toho, že půlení optimalizuje i průměrný případ, nebo přes teorii informace) pak vede k dolnímu odhadu $\log_2 601\,080\,390$, tedy přibližně 29,16 dne na průměrný případ.

Když se zamyslíme nad možnými průběhy našeho testování krabiček po jedné, tak si všimneme, že nejen že dokážeme vždy „uhodnout“ poslední krabičku, ale občas bude předem jasné, jak dopadne několik posledních krabiček. Z 601 080 390 rozložení rušiček má $2\binom{30}{16}$ stejné poslední dvě krabičky, a tudíž budeme moci předem určit, jaké ty dvě krabičky budou. Pokud takhle uvážíme všechny možné počty stejných krabiček na konci, tak snížíme námi dosažený průměrný případ pod 30,18, tedy na méně než 1,2 dne navíc oproti teoretickému optimu.

Domnívám se, že tento rozdíl se dá zmenšit. Možná existuje lepší postup a téměř určitě se dá zvýšit ten dolní odhad. Pokud by si s tím někdo z vás chtěl ještě chvilku hrát a našel zajímavé zlepšení, tak to prosím zkuste sepsat a pošlete nám to – dostanete za to od nás na soustředění čokoládu.

Matej

Úloha 5.3 – Rubikova kostka (4b)

Zadání:
Rubikova kostka se rozpadla a zbylo z ní 26 barevných dílků. My nevíme, jak byla předtím obarvena, ani jaké barvy k tomu byly použity. Kolik nejméně těchto dílků potřebujeme, abychom na jejich základě byli schopni její obarvení zrekonstruovat (určit barvy a jejich rozložení na složené kostce)? Kolik takových dílků potřebujeme, máme-li k dispozici pouze její rohové dílky? A co v případě, že naopak rohové dílky k dispozici vůbec nemáme?

Řešení:
V zadání této úlohy se vyskytla jistá nejednoznačnost. Úloha byla původně myšlena tak, že cílem je najít minimální počet dílků, který při vhodném výběru už může stačit na jednoznačné stanovení původního obarvení. Většina řešení se držela tohoto zadání, ovšem nabízel se zde ještě jiný výklad, a sice hledání počtu dílků, které mi budou ke stanovení obarvení určitě stačit, ať už je můj výběr jakýkoli. Tato verze úlohy byla o něco obtížnější než ta původní, proto byli její řešitelé odměněni bonusovými body. Vzorové řešení se však bude vztahovat k původní verzi.

Rozdělme si úlohu na tři situace dle toho, z jakých dílků můžeme vybírat: 1. všechny dílky, 2. pouze rohové dílky, 3. pouze nerohové dílky.

1. Je zřejmé, že paletu barev použitých k obarvení kostky nelze stanovit s využitím méně než dvou dílků. Dále je zřejmé, že se dvěma dílky to provést lze právě tehdy, jsou-li to rohové dílky v protilehlých rozích, také že v této situaci však ještě není jednoznačné rozmístění barev a že toto rozmístění už je jednoznačné za přítomnosti libovolného dalšího rohového dílku. Ke stanovení původního obarvení kostky v první otázce v zadání nám tedy stačí vhodný výběr tří dílků.

2. Protože v předchozí části úlohy nebylo třeba nerohových dílků, řešení v této situaci představují opět tři rohové dílky.

3. Uvědomme si, že bez rohových dílků jsme schopni o každé stěně získat pouze informaci, s kterými dalšími stěnami sousedí. Předpokládejme, že jsme nalezli obarvení kostky, které lze zkonstruovat z dílků, které máme k dispozici. Nyní vyměňme barvy dvou protilehlých stěn. Tím jsme získali nové obarvení (nedá se z předchozího získat pouhým otáčením kostky), které stále vyhovuje podmínkám daným dostupnými dílky, neboť každá stěna stále sousedí právě s těmi stěnami, s nimiž sousedila předtím. Tedy bez ohledu na to, kolik nerohových dílků použijeme, vždy existují alespoň dvě neekvivalentní obarvení, která obě souhlasí se všemi danými podmínkami. Bez použití rohových dílků tudíž nikdy nelze obarvení kostky zrekonstruovat jednoznačně.

Ve složitější verzi úlohy (viz první odstavec) je při využití všech dílků kostky potřeba vytáhnout alespoň 19 dílků, při využití pouze rohových dílků je potřeba alespoň 5 dílků a bez rohových dílků obarvení pochopitelně opět zrekonstruovat nelze.

Evžen

Úloha 5.4 – Bimetalový pásek (4b)

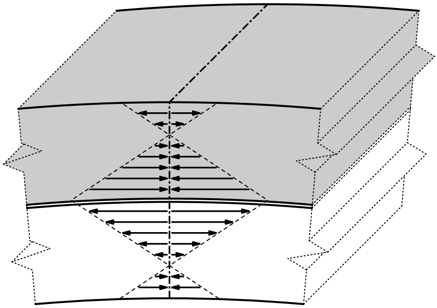
Zadání:

Bimetalový pásek je vytvořený spojením měděného a zinkového plíšku, každý z nich má tloušťku 1,5 mm. Při teplotě 21° C je tento pásek rovný. Jaký poloměr bude mít oblouk, do kterého se stočí po zahřátí na 120° C?

K vyřešení úlohy se vám bude hodit vědět, že rozložení napětí v zahřátém pásku vypadá tak, jak je znázorněno na obrázku 2. Nulové hodnoty nabývá v 1/3 tloušťky každého ze dvou plíšků. Odvodit toto rozložení napětí je poměrně složité, takže jej můžete přímo použít jako výchozí bod pro vaše řešení[1].

[1] Obrázek vychází ze zjednodušujícího předpokladu, že modul pružnosti obou kovů je přesně stejný. Toto zanedbání se nicméně na spočtené hodnotě zakřivení pásku projeví zanedbatelně málo.

Jako bonus můžete zkusit určit, jak velké pnutí bude působit na spoj dvou kovů při tomto zahřátí.



Obrázek 2: Rozdělení normálového napětí na řezu zahřátým páskem. Nulové hodnoty nabývá napětí v 1/3 výšky každého z kovů.

Řešení:

Ako prvé si urobíme predĺženie jednotlivých kovov, akoby neboli spolu spojené:

$$l_{\mathrm{Zn}} = l_0(1 + \alpha_{\mathrm{Zn}}\Delta T)$$

$$l_{\mathrm{Cu}} = l_0(1 + \alpha_{\mathrm{Cu}}\Delta T),$$

kde l_0 je počiatočná dĺžka, $\alpha_{\mathrm{Zn}} = 30 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ a $\alpha_{\mathrm{Cu}} = 17 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ sú lineárne koeficienty rozťažnosti[2] zinku a medi a ΔT rozdiel teplôt. Z toho dostávame, že na vonkajšej strane ohybu bude zinkový pásik.

Môžme zanedbať rozšírenie pásiku v šírke. Tým, že ho nezapočítame, sa dopustíme chyby pod 1 %. Ak si zadefinujeme polomer krivosti v spoji oboch kovov ako r a použijeme obrázok zo zadania úlohy o rozdelení napätia, dostaneme rovnice pre predĺženie pásikov:

$$l_{\mathrm{Zn}} = \varphi\left(r + \frac{2}{3}d\right)$$

$$l_{\mathrm{Cu}} = \varphi\left(r - \frac{2}{3}d\right),$$

kde φ je uhol medzi koncami ohnutého pásiku v radiánoch a d je hrúbka kovu. Spojíme všetky rovnice, ktoré sme zatiaľ dostali, do jednej a vyjadríme r:

$$r = \frac{2}{3}d \cdot \frac{(\alpha_{\mathrm{Zn}} + \alpha_{\mathrm{Cu}})\Delta T + 2}{(\alpha_{\mathrm{Zn}} - \alpha_{\mathrm{Cu}})\Delta T}$$

Po dosadení dostaneme $r \approx 1{,}6\,\mathrm{m}$.

[2] `http://www.materialing.com/teplotna_roztaznost_materialov`

Pre zistenie napätia na rozhraní kovov budeme uvažovať, že kovy podliehajú iba elastickej deformácii a teda deformácia je vratná. V tejto oblasti platí Hookov zákon a platí:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

kde E je Youngov modul, σ napätie, naše pnutie, a ε relatívna zmena dĺžky. Pre naše hľadané σ pre každý kov dostaneme:

$$\sigma_{\mathrm{Zn}} = E_{\mathrm{Zn}} \frac{l_{\mathrm{Zn}} - l}{l_{\mathrm{Zn}}}$$

$$\sigma_{\mathrm{Cu}} = E_{\mathrm{Cu}} \frac{l - l_{\mathrm{Cu}}}{l_{\mathrm{Cu}}}$$

$$l = \varphi r,$$

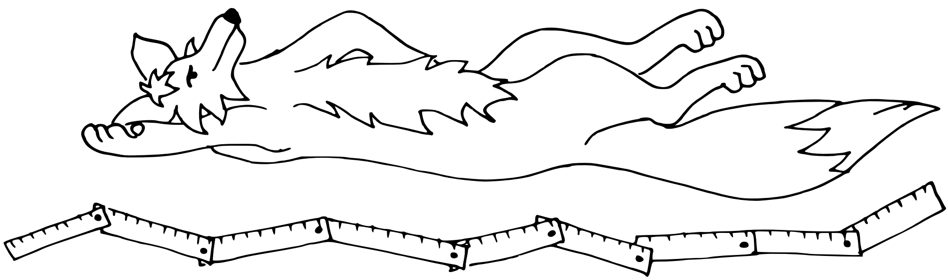
kde $E_{\mathrm{Zn}} = 108\,\mathrm{GPa}$ a $E_{\mathrm{Cu}} = 130\,\mathrm{GPa}$.[3] Rozdiel v zápise je kvôli veľkosti $l_{\mathrm{Zn}} > l > l_{\mathrm{Cu}}$, aby sme dostali kladnú relatívnu zmenu. To je čitateľné aj z obrázku zo zadania, kde na zinok pôsobí tlak a na meď ťah. Tretia z rovníc je dĺžka oblúku v spoji. Zlomky za E sú ε, pre ktoré dostaneme po úprave:

$$\varepsilon_{\mathrm{Zn}} = \frac{2d}{3r + 2d}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{Cu}} = \frac{2d}{3r - 2d}$$

A nakoniec po dosadení dostaneme $\sigma_{\mathrm{Zn}} \approx 67\,\mathrm{MPa}$ a $\sigma_{\mathrm{Cu}} \approx 81\,\mathrm{MPa}$. To spĺňa podmienku elastickej deformácie, kedy sme pod 0,1 % pre obe deformácie. To sedí ako rádový odhad s podmienkou v úlohe, že Youngové moduly sú si rovné (poznámka pod čiarou pri úlohe). Ak by sme s rovnosťou nepočítali, posunulo by sa nulové napätie z 2/3 výšky. Pri takomto napätí je potrebné pevne spojiť tieto dva kovy.

Kubo



[3] http://www.prvky.com/tvrdost-kovu.html

Výsledková listina 5. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$J. Havelka	2	77,7	3,0	2,5	4,0	4,0		13,5	64,7
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Rosická	3	85,8	3,5		5,0	4,0		12,5	49,3
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$B. Hroncová	3	72,2	3,5			4,8		8,3	33,4
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Balej	3	73,4	3,0					3,0	26,1
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Kalousková	2	25,5	1,5		4,5			6,0	25,5
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$O. Buček	4	65,0						0	24,8
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$R. Olšák	3	44,9						0	23,1
8.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$Z. Urbanová	4	51,2						0	22,7
9.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$L. Kundratová	3	60,7	3,5					3,5	18,0
10.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Čížková	4	50,0						0	17,4
11.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$E. Vítková	2	16,0						0	16,0
12.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$A. Mlezivová	4	121,4						0	15,9
13.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Zimen	3	14,0					8,0	8,0	14,0
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$B. Požár	4	44,6						0	13,7
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Ponic	4	12,2						0	12,2
16.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Löffelmann	4	11,1						0	11,1
17.–18.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Bukvaj	2	24,0						0	11,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$F. Kmječ	2	18,4						0	11,0
19.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Růžička	3	32,7						0	10,5
20.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Boček	Z8	10,4	1,0		4,0			5,0	10,4
21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Holubička	2	31,8	3,0		1,5			4,5	9,5
22.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Domes	3	24,9						0	8,3
23.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$O. Gonzor	1	21,7						0	7,5
24.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Suchánek	4	42,2						0	7,1
25.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$F. Čermák	4	58,7						0	7,0
26.	D. Saracino	4	6,7						0	6,7
27.	P. Trembulaková	4	6,5						0	6,5
28.	A. Trojanová	3	6,0						0	6,0
29.	A. Foglarová	3	5,6						0	5,6
30.–31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$A. Neubauerová	4	22,5						0	5,5
	R. Strnadlová	4	5,5						0	5,5
32.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$V. Procházka	4	14,3						0	5,3
33.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$L. Vincenová	4	50,5						0	5,0
34.	M. Bučková	1	4,9						0	4,9
35.–36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Bujnovská	4	22,9						0	4,8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$T. Poláková	4	11,1						0	4,8

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	K. Tauchmanová	4	4,2						0	4,2
38.	A. Hollmannová	1	4,0						0	4,0
39.	J. Kaifer	2	3,8						0	3,8
40.–41.	K. Hloušková	2	3,5	1,5					1,5	3,5
	R. Líbal	2	3,5	3,5					3,5	3,5
42.	M. Kripner	3	3,2						0	3,2
43.–44.	B. Kopčák	2	3,0	3,0					3,0	3,0
	R. Wágner	4	3,0						0	3,0
45.	K. Kamenářová	3	2,7	0,0		2,5	0,2		2,7	2,7
46.	Š. Sulanová	2	2,5						0	2,5
47.–48.	K. Levíčková		2,0						0	2,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$Z. Lüköová	3	15,1						0	2,0
49.	L. Urbanová	4	0,0						0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M