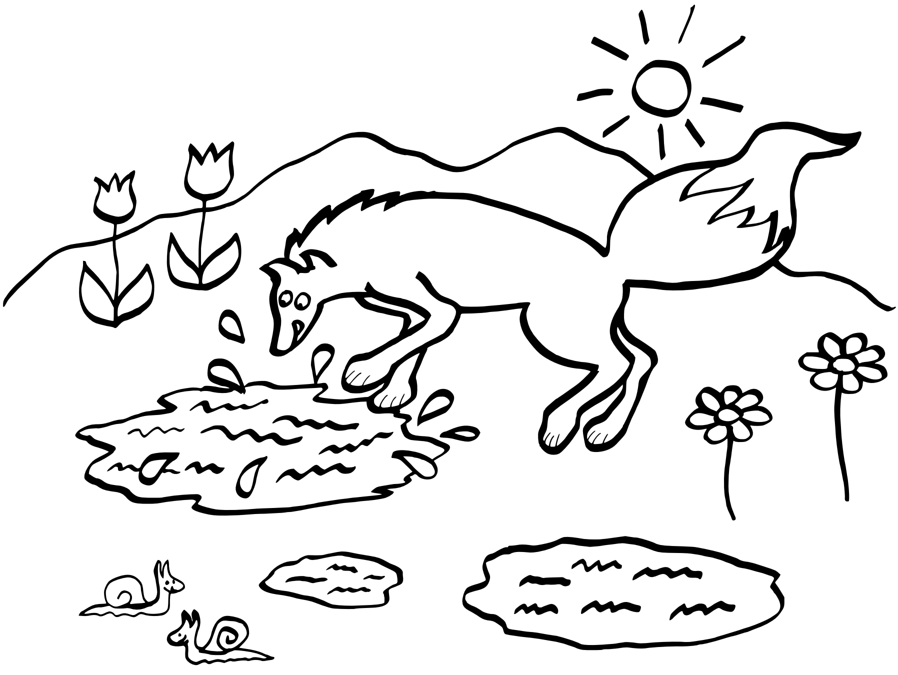
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIV

Číslo 6

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik úloh a témat k zamyšlení. Vyřešte je a pošlete nám je. My vám je opravíme a pošleme zpět s dalším číslem, nejzajímavější řešení otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

většina organizátorů se už vyspala, uzdravila a vzpamatovala po proběhlém soustředění a tak jsme pro vás připravili další – v pořadí již šesté – číslo našeho časopisu. Budeme moc rádi, když ti z vás, kteří se soustředění zúčastnili, zkusí sepsat článek o konferách, na kterých na soustředění pracovali. Vy, kteří jste na soustředění nebyli, nezoufejte a pošlete nám příspěvek k tématku či pár úložek – rádi se s vámi uvidíme na soustředění v říjnu.

Příjemné řešení vám přejí

Vaši organizátoři

Zadání úloh

Termín odeslání 6. série: 10. 5. 2018

Ping! „Tak jsem konečně vybral úlohu, hodil jsem ji do adminu," hlásá příchozí mail. Povzdechnu si a otevřu admin – opravdu, jsou tam všechny čtyři úlohy. Inu, co se dá dělat, nechce se mi, radši bych si užil volný víkend. Nebo alespoň připravil písemku, ať mi toho v týdnu tolik nehoří, ale posledně jsem Evženovi slíbil, že se toho tentokrát ujmu já. A vzhledem k tomu, že už to bylo asi potřetí, tak bych tentokrát opravdu měl slib dodržet. Dneska mě čeká dlouhá noc…

Vstanu, popadnu empétrojku a nasadím si sluchátka. Zmáčknu pár tlačítek a téměř okamžitě mě do uší udeří rachot bubnů a kvílení elektrické kytary. Pomalu ale jistě se mi začíná zvyšovat hladina adrenalinu a s ním ustupuje únava pátečního odpoledne. Ještě pár vteřin počkám a užívám si hudbu, než mě příliv energie donutí začít něco dělat.

Starchild!
Visions are born from the unknown force
It dominates the way of time
The dream only ends, when the worlds come to an end
When the worlds come to an end!

Úloha 6.1 – Dvojhvězda Sirius (4b)

Hvězdy Sirius A o hmotnosti 2,3násobku hmotnosti Slunce a Sirius B o neznámé hmotnosti tvoří dvojhvězdu. Předpokládejme, že se obě hvězdy pohybují po kružnicích okolo společného těžiště. Z dvojhvězdy bychom pozorovali vzdálenost Země–Slunce pod úhlem $0{,}376''$(úhlové vteřiny). Sirius A je pozorovatelný pouhým okem jako jedna z nejjasnějších hvězd. Každoroční měření při stejné poloze Slunce–Země–Sirius ukazují, že Sirius A kmitá kolem své střední polohy na noční obloze s periodou 50 let a maximální výchylkou $2{,}3''$. Jakou hmotnost má hvězda Sirius B?

Ale jen na adrenalinu to dneska nezvládnu. Odběhnu do kuchyně dát vařit vodu, připravím gaiwan a odeběřu se ke své kouzelné skříňce. Ach ano, nejtěžší *rozhodnutí dnešního dne – jaký čaj si dát? Bude to chtít něco, co má pořádný říz – na maté chuť nemám, takže otevírám krabici s puerhy. Hned na vrchu leží poslední zbytek mého oblíbeného černého koláče. Už nějakou dobu si ho šetřím, protože kdo ví, kdy se zas dostanu k něčemu tak dobrému. Ale zase… Eh, čert to vem, když už, tak už!*

Naliji si vroucí vodu do termosky a trochu i do gaiwanu. Po chvíli vodu z gaiwanu vyliji, vhodím dovnitř drahocenný kousek puerhu a na pár vteřin zase gaiwan přiklopím. Jakmile ho odklopím, ucítím tu úžasnou vůni prastarého sklepení. Natěšeně zaliji čaj vodou a pozoruji, jak se z něj pomalu šíří koncentrovaná temnota. Tohle mě snad nikdy nepřestane fascinovat! Ještě chvilku počkám, než čaj sliji, a pak už s kalíškem čaje barvy obsidiánu konečně usedám za klávesnici. Práce může začít!

And through the fires of grace
I followed the voice in the night
Beautiful as black sky
But nothing I found

Úloha 6.2 – Hamiltonovská úloha (4b)

Mějme kouzelnou krabičku, která umí pro libovolný graf[1] s n vrcholy v čase $\mathcal{O}(n^7)$ rozhodnout, jaký nejmenší počet listů může mít jeho kostra (a pokud graf není souvislý, ohlásí nekonečno). Navrhněte algoritmus, který určí, zda v zadaném grafu existuje hamiltonovská kružnice. Během řešení smíte využívat kouzelnou krabičku. Snažte se najít co nejrychlejší algoritmus (v nejhorším případě).

Hamiltonovská kružnice je kružnice na všech vrcholech grafu, která je podgrafem zadaného grafu. Jinými slovy hledáme posloupnost (permutaci) všech vrcholů grafu takovou, že mezi každými dvěma po sobě jdoucími vrcholy existuje hrana a navíc existuje hrana mezi posledním a prvním vrcholem dané posloupnosti.

[1] Nevíte-li, čím se zabývá teorie grafů, doporučujeme si přečíst článek v KSPí kuchařce na `https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/grafy/`

Znovu se podívám na úlohy a přemýšlím, jakým příběhem je nejlépe spojit. Úloha o dvojhvězdě a úloha o jakémsi životě, hm, z toho by mohlo jít poskládat nějaké sci-fi… Začnu pátrat v paměti, jestli bych nemohl použít něco z toho, co už mě někdy napadlo – tu a tam dostanu nějaký nápad na zajímavý příběh a pár už jsem jich i trochu rozpracoval. Á, jistě, jeden sci-fi námět už jsem vlastně kdysi zkoušel rozvést – příběh o posádce ostřílených kosmických průzkumníků, inspirovaný deskovkou Space Alert. Dobrá tedy, tak do toho zkusíme ještě napasovat zbylé úlohy. Hamiltonovská úloha, to by možná šlo zalegendovat jako nějaké hledání cesty někam, i když to bude asi dost přitažené za vlasy. Ale další úloha – Kristý peče – co mám proboha dělat s tím? Jak mám tohle zakomponovat do epického příběhu plného vesmírných bitev a chrabrých hrdinů, kteří se bez mrknutí oka obětují pro své kamarády? Tohle asi nepůjde…

Wandering among the stars… Searching…
Beyond the infinite universe…
Tearing down the structures…
But I can only see darkness…

Úloha 6.3 – Kristý peče (3b)

Kristý peče velikonoční cukroví. Protože ho nechce upéct moc, peče od každého druhu maximálně jeden plech.

Teď právě peče linecká slepovaná kolečka taková, že v horním dílku je vykrojená hvězdička. Aby se jí to dobře dělalo, tak na plech vykrojí $n \times m$ dílků a z obvodových dílků navíc vykrojí hvězdičku.

Jaké má zvolit n a m tak, aby jí po slepení žádný kousek nezbyl?

Tak jinak, co jsem tak v poslední době viděl nebo četl za sci-fi, kterým bych se mohl inspirovat? Mám tu knížku ze série Gaunt's Ghosts, ale zrovna Warhammer 40k řešitelé spíš neocení, Kulhánek je na tom podobně (zatrachtile, to čtu jen samý brak?). Inspirovat se seriály moc nemá smysl, to bez kontextu čtenáři spíš nepochopí a dystopickou pohádku už jsem jednou napsal, takže to taky padá. Co se dá dělat, asi nezbývá, než region sci-fi opustit. Co jiného bych mohl rozpracovat? Četba posledních týdnů moc pomoci zjevně nenabízí – krom brakové sci-fi tu mám ještě jednu Christie, ale napsat rozumnou detektivku za večer nedám. A co takhle rozpracovat ten nápad inspirovaný Kingovou Temnou věží?

Asi půlhodinu tedy zkouším vymyslet příběh o pistolnících a Středosvětě (samozřejmě tak, aby řešitel neznalý Temné věže nebyl úplně mimo), ale marná snaha, ani litr puerhu mi fantazii neprobudil dostatečně. To je teda pech. Nejen že budu celý zítřek nepoužitelný (ranní sbíječka je zatraceně účinný budíček), ale navíc budu muset Kristý vysvětlit, proč ta pohádka ještě není. To bude mail alespoň na půl stránky… Počkat! To by vlastně… A konečně se pomyslná žárovička nad mojí hlavou rozsvítila.

I see the land of fading sun and rising mountains
And I finally feel that I've found my home
But oh, it feels so cold when my dreams wither in fragments of time
Revealing that this land will die

Úloha 6.4 – Hra o život (5b)

Kuba si vymyslel následující hru: začíná tak, že na nekonečnou čtvercovou mřížku rozmístí n prvoků do nějakých n různých čtverečků. Nyní se hra vyvíjí podle následujících pravidel: v každém kole bude na pozici $[x, y]$ maximálně jeden prvok, a to právě tehdy, když v předchozím kole byli na pozicích $[x, y], [x+1, y], [x, y+1]$ alespoň dva prvoci. Kuba si všiml, že ať už prvoky na začátku rozmístí jakkoli, ze záhadných důvodů mu jeho prvočí populace vždy nakonec vymře.

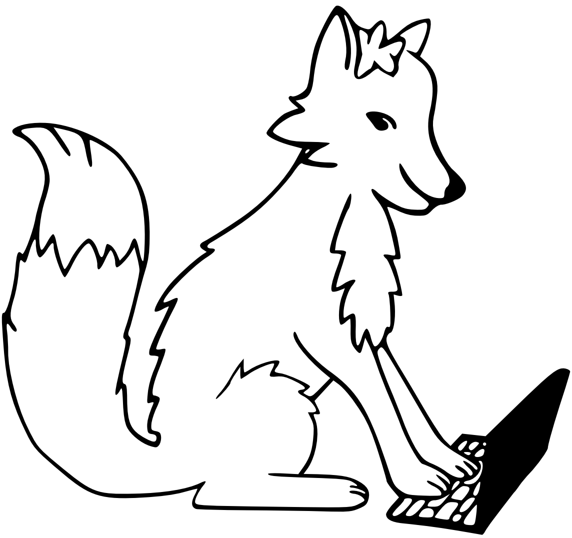
a) Dokažte, že každá prvočí populace vymře po nějakém konečném počtu kol. (3b)

b) Dokažte, že každá prvočí populace vymře po nejvýše n kolech. (2b)

Příklad: Pokud Kuba rozmístí tři prvoky na souřadnice $[1, 2], [2, 1]$ a $[2, 2]$, po prvním kole bude mít stále tři prvoky na souřadnicích $[1, 1], [1, 2]$ a $[2, 1]$. V dalším kole bude žít jen jeden prvok na souřadnici $[1, 1]$ a ve třetím kole celá populace vymře.

A tak se konečně rozezní symfonie cvakajících kláves posouvající blikající kurzor ke zdárnému konci:

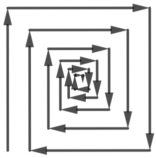
`Ping! „Tak jsem konečně vybral úlohu, hodil jsem ji do adminu," hlásá příchozí mail. ...`



Zadání témat

Téma 1 – Krotitelé světla

Toto je pro mne poslední příležitost připomenout vám existenci mého tématka, k němuž přišlo doposud příspěvků velmi poskrovnu, proto mi, prosím, dovolte, abych shrnul naše dosavadní hlavní cíle a nejzajímavější podúlohy, jimiž se snad někdo na závěr ročníku ještě inspiruje.



Obrázek 1: Trajektorie světla ve „světlolapce“

Cílem tématu bylo zabývat se manipulací se světelnými paprsky a docílit jejich co největší koncentrace za využití výhradně odrazu a lomu světla. Velmi zajímavým cílem v tomto směru mělo být hledání objektu, z nějž jednou vstoupivší paprsek už neunikne. Tato otázka byla stručně nastíněna v příspěvku Pavly Trembulakové, nebyly k ní však přineseny žádné definitivní závěry, proto k němu něco málo řeknu zde. Takový objekt skutečně teoreticky existovat může, je to zřejmé, když si načrtneme jednu z možných trajektorií světla, která by splňovala naše požadavky (viz obrázek 1). Rozhodneme-li se totiž takové trajektorie docílit pomocí odrazu světla na zrcadlech (což je asi nejjednodušší), jedinou podmínku na tvar zrcadla nám zadávají body, kde se světlo láme, v nichž máme dánu polohu a sklon zrcadel, ve zbytku prostoru může být tvar objektu libovolný. Navíc je zřejmé, že zmíněné body lomu lze pospojovat souvislou křivkou, která nikde neprotíná trajektorii paprsku. Nic nám tedy nebrání uvedenou trajektorii světla vygenerovat pomocí mechanicky propojeného systému nekonečně mnoha zrcadélek, nebo třeba i jen pomocí jediného spirálovitě zakřiveného zrcadla, které se v bodech odrazu dá aproximovat zmíněnými malými zrcadly. Jak je tedy z obrázku zřejmé, skutečně se dá přinejmenším na papíře zkonstruovat zrcadlo, které nejméně jeden paprsek pohltí a nechá konvergovat k jedinému bodu.

Zamyslete se nad tím, zda paprsek tohoto bodu vůbec někdy dosáhne (znamenalo by to nekonečný počet odrazů), zda je objekt podobný našemu zrcadlu možné zkonstruovat i v reálném světě a, kdyby to možné bylo, jak by v něm asi fungoval zákon zachování energie (neustále zvnějšku přicházejí další paprsky nesoucí energii, které přitom nemají dál kam uniknout).

Dále připomínám již dříve zadané úkoly, které stojí za snahu řešit. Ve třetím čísle byla vypsána odměna za zjištění, kam čočka láme paprsky, když se odchýlíme od paraxiální aproximace, a za důkaz známého tvrzení, že v paraxiální aproximaci je láme do ohniska. Obě odměny stále platí.

Ve stejném čísle byl zmíněn výsledek Pavly Trembulakové, že složením dvou čoček lze získat libovolně tenký paprsek. Tento výsledek však využíval vlastností čoček plynoucích z paraxiální aproximace, stále tedy zůstává otevřená otázka, zda je možné tímto způsobem dostat libovolně tenký paprsek i mimo tuto aproximaci.

Ve čtvrtém čísle pak byla rozebrána konstrukce zobecnění dutého zrcadla, které odráží do ohniska všechny paprsky rovnoběžné s optickou osou, nejen ty ose blízké. K tomuto zůstávají zadány úkoly nalézt matematický předpis křivky a provést podobný postup na zobecnění skleněné čočky namísto zrcadla.

Tím končím svůj stručný soupis hlavních úkolů, zbývající najdete na webu v archivu a bude určitě rovněž oceněno, když budete řešit vlastní problém. Hlavně však řešte, znovu připomínám, že tato série pro vás představuje poslední příležitost k získání bodů právě skrze tématka!

Evžen

Téma 5 – Dají se přeprogramovat živé organismy?

V minulém díle jste měli příležitost se podívat na skládání DNA dohromady prakticky. Stále můžete posílat řešení, tentokrát se ale podíváme, jak se vytvořená DNA vlastně do organismů vkládá a cílí na přesná místa v genomu. Budou nás také zajímat moderní techniky, jak se dá existující DNA měnit, a to někdy přímo v organismu. Na konci tématka je také důležité se zamyslet, jaké má taková technologie etické limity, jaké problémy může vyřešit a jak v brzké budoucnosti změní svět kolem nás.

1. Minulý díl vám dal příležitost vyzkoušet si vyrábění sekvence DNA, která nás zajímá a bude v organismu dělat něco užitečného. Jak ale naši DNA vpravíme do organismu? Podívejte se, jak fungují různé metody jako například tepelný šok, elektroporace, metody související s využitím bakterie Agrobacterium, „gene gun“ a mnoho dalších. Na které organismy metody fungují a proč je to u jiných složité? (V souvislosti s tím se můžete i zamyslet, jak by měl vědec řešit dilema, že „modelové“ organismy jsou dobře prozkoumané a DNA metody v nich dobře fungují, ale často nemají takový potenciál vyrábět hodně cílové látky nebo být užitečné v zemědělství jako jiné organismy. Pomůže nám v řešení standardizace a lze jí vůbec dosáhnout?)

2. Zkuste vyhledat, co jsou to „molekulární nůžky“ CRISPR. Popište, jak CRISPR funguje a v čem se liší od předchozích technologií využívajících třeba Zink fingers a TALE nukleázy. Proč je CRISPR takovou revolucí, jaké jeho nové varianty existují a co dokážou? A jak se v praxi používá? Jaký potenciál má využívání CRISPR na změnu některých buněk přímo v organismu? A napadají vás nová využití pozměněného CRISPRu? CRISPR je tak významný, že není problém o něm najít české zdroje na popularizačních médiích a chytrá naučná videa. Zajímavé je také video z vystoupení Jennifer Doudna na TEDu[2] (může se vám hodit i k poslední části).

3. Můžete se také zamyslet na bioinženýrstvím obecněji. Když vyrobíme velmi užitečný geneticky modifikovaný organismus, zůstane stále stejný? Jak si myslíte, že v brzké nebo vzdálenější době moderní biologické technologie změní svět, ve kterém žijeme? Budeme se také muset vyrovnávat s mnoha novými výzvami z hlediska etiky. Například změna DNA dětí je dnes brána jako nepříliš morální, ale jsou i hlasy říkající, že časem asi nebude etické změnám DNA lidí bránit, protože jim tak bude „odpírána dostupná léčba/pomoc“. A co zemědělství a průmysl? Dovedeme pomocí bioinženýrství nakrmit lidstvo a vyřešit energetické a mnohé jiné problémy? Které z těchto problémů mají i jiná možná řešení na obzoru? Jaká jsou rizika a co můžeme získat? A jaká je existující legislativa?

Těším se na vaše odpovědi, v případě problémů nebo zvídavých otázek mi napište na e-mail a jako vždy vítám příspěvky související s bioinženýrstvím obecně nebo s otázkami předchozích čísel.

Lucka

Řešení úloh 4. série

Úloha 4.1 – Slané tyčinky (3b)

Zadání:
Petr miluje slané tyčinky. Už snědl skoro celé balení a na talíři mu zbývá pouhých n ne nutně stejně dlouhých tyčinek. Petr si všiml, že z každé trojice tyčinek lze sestavit tupoúhlý trojúhelník. Jaké největší hodnoty může n nabývat?

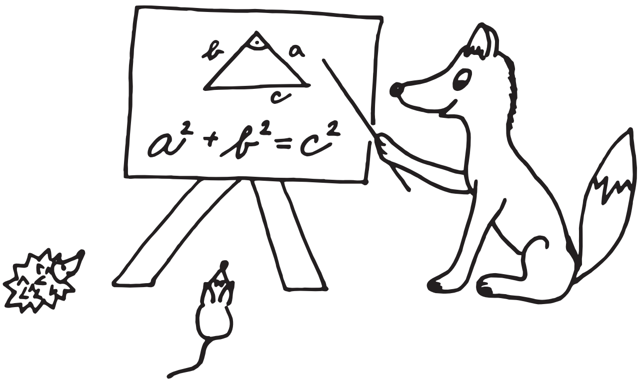
Řešení:
Ze všeho nejdřív jednoduše popíšeme, co to znamená, že tři kladné hodnoty $a \leq b \leq c$ mohou být délkami stran nějakého tupoúhlého trojúhelníku. Vzpomeňme, že trojúhelníková nerovnost tvrdí, že tři kladná čísla mohou být délkami stran trojúhelníku právě tehdy, když $a + b > c$. Dále tvrdíme, že tato čísla mohou být délkami stran tupoúhlého trojúhelníku právě tehdy, když platí $a^2 + b^2 < c^2$.

[2] https://www.ted.com/talks/jennifer_doudna_we_can_now_edit_our_dna_but_let_s_do_it_wisely

To plyne třeba z kosinové věty. Ta totiž dokonce říká, že $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, kde γ je úhel proti nejdelší straně c. Teď už si jen všimneme, že $\cos\gamma$ je záporný, právě když $\gamma > 90°$, tedy se jedná o tupý úhel (všimněte si, že pro $\gamma = 90°$ dostáváme Pythagorovu větu).

Pomocí těchto dvou nerovností se nám povedlo geometrickou otázku převést na čistě algebraický problém – najděte n kladných čísel takových, že každá trojice $x \le y \le z$ splňuje $x + y > z$ a $x^2 + y^2 < z^2$.

Nejprve se pokusme najít čtyři čísla $a \le b \le c \le d$, která tyto nerovnosti splňují. Všimněme si, že není potřeba ověřovat, zda trojúhelníková nerovnost platí pro všechny trojice – jestliže platí $a + b > d$, platí už i zbylé nerovnosti $b + c > d$, $a + c > d$, $a + b > c$. Dále není potřeba ověřovat, že pro všechny trojice platí druhá podmínka – pokud ukážeme, že $a^2 + b^2 < c^2$ a $b^2 + c^2 < d^2$, bude jistě platit také $a^2 + b^2 < d^2$ a $a^2 + c^2 < d^2$. Po chvíli zkoušení snadno najdeme nějakou čtveřici splňující tyto tři podmínky. Funguje třeba $(1; 1; \sqrt{2} + 0{,}01; 2 - 0{,}01)$ (čísla jsme volili tak, aby těsně platilo, že $a + b > d$ a $a^2 + b^2 < c^2$; teď už jen stačí dopočítat, že $b^2 + c^2 < d^2$).



Pokusme se stejnou myšlenku aplikovat na pět čísel $a \le b \le c \le d \le e$. Obdobně jako v předchozím případě dostáváme, že důležité nerovnosti jsou pouze $a + b > e$ společně s $a^2 + b^2 < c^2$, $b^2 + c^2 < d^2$ a $c^2 + d^2 < e^2$. Složíme-li poslední tři nerovnosti, dostáváme

$$e^2 > c^2 + d^2 > (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) > a^2 + 2b^2 + (a^2 + b^2) = 2a^2 + 3b^2.$$

Umocníme-li ale trojúhelníkovou nerovnost, dostáváme

$$e^2 < a^2 + b^2 + 2ab.$$

Nyní složíme oba odhady a dostaneme $2a^2+3b^2 < a^2+b^2+2ab$, tedy $a^2+2b^2 < 2ab$, což lze přepsat na nerovnost $(a-b)^2+b^2 < 0$. Taková nerovnost ale zřejmě nemůže být splněna. Petr si tak může pochutnat nejvýše na čtyřech tyčinkách.

Vašek

Úloha 4.2 – Kačenka (3b)

Zadání:

V rybníčku kruhového tvaru plave kačenka. Ráda by odlétla pryč, ale umí vzlétnout jen ze břehu. Tam na ni ale číhá kočka, která se bojí vody, ale po okraji rybníka se pohybuje čtyřikrát větší rychlostí, než kačenka plave. Existuje způsob, jak může kačenka kočce upláchnout, ať se kočka pohybuje jakkoli chytře?

Řešení:

Pokud kačenka vidí kočku přes střed rybníčku a vyrazí nejkratší cestou ke břehu (tj. směrem od kočky), musí kočka uběhnout vzdálenost πr, kde r je poloměr rybníčku, aby se dostala na místo, kam kačenka míří. Jelikož je kačenka čtyřikrát pomalejší, stačilo by jí, aby byla ke břehu blíže než $\pi r/4$.

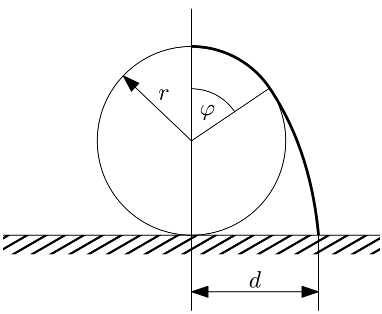
Dokáže se kačenka do takové pozice vždy dostat? Když poplave po kružnici s poloměrem $r/4$ soustředné s rybníčkem, bude její úhlová rychlost stejná jako úhlová rychlost kočky. Pokud poplave po kružnici s menším poloměrem, bude její úhlová rychlost větší, a jednou se tedy dostane do pozice, kdy uvidí kočku přes střed. Když zároveň poloměr její kružnice nebude příliš malý, tedy bude větší než $r - \pi r/4$, může v tu chvíli vyrazit nejkratší cestou ke břehu a zachránit se. Protože $r - \pi r/4 = r(1 - \pi/4) < r/4$, takový poloměr existuje a kačenka může kočce upláchnout.

Matěj

Úloha 4.3 – Hmotný bod na lopte (4b)

Zadání:

Na vodorovnej podložke máme položenú loptu o polomere $r = 15\,\mathrm{cm}$. Na jej vrchol umiestníme hmotný bod a zapôsobíme na neho malou sílou a uvedieme ho do pohybu, ale s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Pri akom uhle φ sa oddelí od povrchu gule a do akej vzdialenosti d od miesta vypustenia dopadne (viď obrázok 2)? Hmotný bod sa pohybuje bez trenia.



Obrázek 2: Trajektória pádu bodu

Řešení:
Pokud uvedeme bod do pohybu s velmi malou počáteční rychlostí, bude klouzat po míči, jeho potenciální energie se bude přeměňovat na kinetickou a kvůli tomu bude zrychlovat. Síly působící na bod budeme vyšetřovat ze soustavy s ním spojené. Pokud se posune o úhel φ, jeho potenciální energie se zmenší o hodnotu

$$mg\Delta h = mgr(1 - \cos\varphi),$$

kde m je hmotnost bodu a g je tíhové zrychlení. Kinetická energie $\frac{1}{2}mv^2$ vzroste na tuto hodnotu, rychlost se tedy změní z nulové na

$$v = \sqrt{2gr(1 - \cos\varphi)}.$$

Na bod bude působit odstředivé zrychlení

$$a_{\mathrm{od}} = \frac{v^2}{r} = 2g(1 - \cos\varphi)$$

a tíhové zrychlení, jež můžeme rozložit na tečné ve směru pohybu a normálové kolmé na rychlost, které míří do středu míče. Toto zrychlení je tedy dostředivé a má velikost

$$a_{\mathrm{do}} = g\cos\varphi.$$

V momentě, kdy odstředivé zrychlení překročí dostředivé, bod odletí z míče. Úhel, při kterém k tomu dojde, proto získáme z rovnice

$$a_{\mathrm{od}} = a_{\mathrm{do}}$$

$$2g(1 - \cos\varphi) = g\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}.$$

Dále bude bod pokračovat ve vodorovném směru rychlostí

$$v_x = v\cos\varphi = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

a ve svislém směru rychlostí

$$v_y = v\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

se zrychlením g směrem dolů ($\sin\varphi$ spočítáme ze vzorečku $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$). Bod se pohybuje po parabole. Abychom zjistili, jakou vzdálenost urazí ve vodorovném směru, musíme spočítat, za jak dlouho spadne do nulové výšky.

Bod se nyní nachází ve výšce

$$y = r(1 + \cos\varphi) = \frac{5}{3}r.$$

Čas, za který se dostane do nulové výšky získáme z rovnice pro pohyb rovnoměrně zrychleného bodu

$$0 = y - v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{5}{3}r - \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gr}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

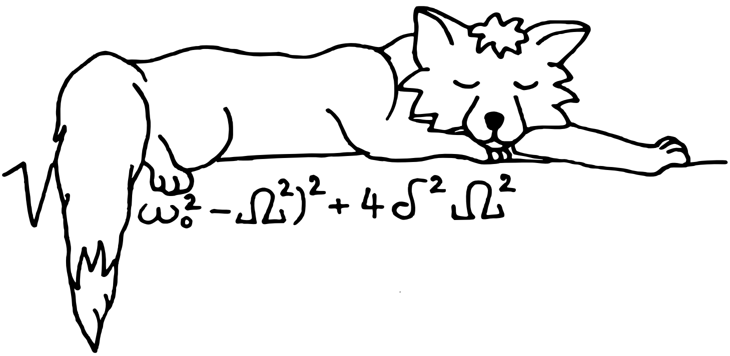
Řešením je

$$t = \frac{\pm 10 - \sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

kde nás zajímá kladné znaménko (záporné odpovídá času, ve kterém by bod byl v nulové výšce a mířil směrem nahoru, kdyby se po parabole pohyboval i před opuštěním míče). Tento čas dosadíme do rovnice pro rovnoměrný pohyb ve vodorovném směru. Počáteční vzdálenost je $x = r\sin\varphi = r\sqrt{5}/3$.

$$d = x + v_x t = r\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{10 - \sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\right) = r\frac{5}{27}\left(4\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) = 21{,}92\,\mathrm{cm}.$$

Viktor



Úloha 4.4 – Historie tahů piškvorek (4b)

Zadání:

Martin chce naprogramovat hru piškvorky na „piškvorkovnici“ 200 × 200 *políček. A zrovna si láme hlavu nad dílčí úlohou – chce ukládat historii hry, jak šly tahy od začátku po sobě, aby bylo možné vracet partii o libovolný počet tahů zpět.*

Každý tah je jednoznačně určen svou x-ovou souřadnicí (hodnota 0 až 199), y-ovou souřadnicí (hodnota 0 až 199) a typem (buď křížek, nebo kolečko). Protože se hráči pravidelně střídají, tak víme-li číslo tahu, je už jasné, zda to byl křížek, nebo kolečko. Z pravidel piškvorek je pro nás dále důležité vědět, že hra končí, když se na ploše objeví 5 stejných symbolů vedle sebe v libovolném (i šikmém) směru.

Martin nechce plýtvat místem, a proto chce, aby stav hry, ze kterého půjde jednoznačně určit celá historie tahů, byl uložen v poli o velikosti 200×200 *bytů (byte má rozsah hodnot 0 až 255).*

Jak to má udělat? Pomohou mu jiné číselné soustavy nebo šikovné kódování? Anebo to vůbec nejde?

Řešení:
Odpověď zní: Vůbec to nejde.

Důkaz: Potřebujeme vytvořit spodní odhad na počet her a ukázat, že je větší než počet možných obsahů paměti. Pak bude z Dirichletova principu plynout, že nějaká dvojice her musí být v paměti reprezentovaná stejně, a tudíž nepůjde historie hry jednoznačně rozkódovat.

Musíme však být opatrní, abychom počítali opravdu jen hry, které jsou v souladu s pravidly piškvorek. Pokud se totiž objeví 5 stejných symbolů vedle sebe (v libovolném směru), tak hra končí a nesmíme počítat žádná její pokračování. Proto platný spodní odhad vytvoříme tak, že v piškvorkovnici zakážeme každý pátý řádek a každý pátý sloupec. Potom lze do zbytku políček pokládat cokoliv. Střídání hráčů je dáno pravidly, takže jsou hry určeny jen pořadím obsazování povolených políček. Použitelná část piškvorkovnice je veliká $160 \cdot 160 = 25600$ políček, takže počet platných her (historií) je minimálně 25600! (započítali jsme jen úplně zaplněná hrací pole bez zakázaných řádků a sloupců, takže to není nejtěsnější spodní odhad, ale bude nám stačit).

Máme tedy 25600! různých historií hry a máme k dispozici pole o velikosti 200×200 bytů, což nám dává $256^{200 \cdot 200}$ různých obsahů paměti. Abychom byli tato obrovská čísla schopni porovnat, tak je zlogaritmujeme (o základu 2). Protože logaritmus je rostoucí funkce, tak se nerovnost zachová. Potřebujeme tedy ukázat, že:

$$\log_2(25600!) > \log_2(256^{200 \cdot 200})$$

Nejprve spočítáme pravou stranu, protože je snazší:

$$\log_2(256^{200 \cdot 200}) = 200 \cdot 200 \cdot \log_2 256 = 40000 \cdot 8 = 320000$$

Teď pojďme na levou stranu. Mohli bychom například využít silnější verzi Stirlingovy aproximace, ale my si vystačíme s elementárními prostředky. Využijeme definici faktoriálu a pravidlo pro logaritmus součinu.

$$\log_2(25600!) = \log_2(1) + \log_2(2) + \log_2(3) + \cdots + \log_2(25599) + \log_2(25600)$$

Nyní všechny sčítance zaokrouhlíme dolů (stále nám stačí spodní odhad, nepotřebujeme mít přesnou hodnotu). Dostaneme:

$$\log_2(25600!) \geq 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + \cdots + 2^{13} \cdot 13 + (25600 - 2^{14} + 1) \cdot 14$$

Abychom součet nemuseli počítat ručně, tak si odvodíme hezký vzorec pro součet všech členů kromě posledního. Označme:

$$S(n) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + \cdots + 2^n \cdot n$$

Nyní od součtu odečteme dvojnásobek stejného součtu posunutého o člen doprava (poslední člen vynecháme):

$$S(n) - 2 \cdot S(n-1) =$$
$$= 1 \cdot 0 + 2 \cdot (1-0) + 4 \cdot (2-1) + 8 \cdot (3-2) + \cdots + 2^n \cdot (n-(n-1)) =$$
$$= 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

Z toho můžeme vyjádřit:

$$S(n) - 2 \cdot (S(n) - n \cdot 2^n) = 2^{n+1} - 2$$
$$n \cdot 2^{n+1} - S(n) = 2^{n+1} - 2$$
$$S(n) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Když odvozený vzorec aplikujeme na náš výraz, dostáváme:

$$\log_2(25600!) \geq S(13) + (25600 - 2^{14} + 1) \cdot 14 =$$
$$= 12 \cdot 2^{14} + 2 + (25600 - 2^{14} + 1) \cdot 14 =$$
$$= 25600 \cdot 14 - 2 \cdot 2^{14} + 16 = 325648$$

Když dáme všechno dohromady, dostaneme nerovnost, kterou jsme potřebovali:

$$\log_2(25600!) \geq 325648 > 320000 = \log_2(256^{200 \cdot 200})$$
$$25600! > 256^{200 \cdot 200}$$

Odvodili jsme, že počet platných her je ostře větší než počet možných obsahů paměti, takže jsme dokázali, že pole o velikosti 200×200 bytů nemůže stačit na uložení historie hry při žádném zakódování.

Q. E. D.

Martin

Výsledková listina 4. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$J. Havelka	2	64,2	3,0	3,0	4,0	4,0		14,0	51,2
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Rosická	3	73,3	3,0	0,0	3,9			6,9	36,8
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$B. Hroncová	3	63,9		3,0	4,0			7,0	25,1
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$O. Buček	4	65,0	3,0	3,0	3,5			9,5	24,8
5.–6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Balej	3	70,4	3,0	3,0	4,0			10,0	23,1
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$R. Olšák	3	44,9		3,0		2,0		5,0	23,1
7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$Z. Urbanová	4	51,2	3,0	3,0				6,0	22,7
8.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Kalousková	2	19,5						0	19,5
9.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Čížková	4	50,0						0	17,4
10.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$E. Vítková	2	16,0	1,5	3,0	3,5			8,0	16,0
11.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$A. Mlezivová	4	121,4	3,0					3,0	15,9
12.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$L. Kundratová	3	57,2	3,0	3,0				6,0	14,5
13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$B. Požár	4	44,6	3,0	3,0				6,0	13,7
14.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Ponic	4	12,2						0	12,2
15.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Löffelmann	4	11,1						0	11,1
16.–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Bukvaj	2	24,0						0	11,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$F. Kmječ	2	18,4	3,0					3,0	11,0
18.–19.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Růžička	3	32,7	3,0					3,0	10,5
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Zimen	3	10,5		3,0	3,0	0,0	4,5	10,5	10,5
20.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Domes	3	24,9						0	8,3
21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$O. Gonzor	1	21,7						0	7,5
22.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Suchánek	4	42,2						0	7,1
23.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$F. Čermák	4	58,7						0	7,0
24.	D. Saracino	4	6,7						0	6,7
25.	P. Trembulaková	4	6,5						0	6,5
26.	A. Trojanová	3	6,0						0	6,0
27.	A. Foglarová	3	5,6						0	5,6
28.–29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$A. Neubauerová	4	22,5						0	5,5
	R. Strnadlová	4	5,5						0	5,5
30.	M. Boček	Z8	5,4	1,5	0,0				1,5	5,4
31.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$V. Procházka	4	14,3						0	5,3
32.–33.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Holubička	2	27,3		0,0				0,0	5,0
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$L. Vincenová	4	50,5						0	5,0
34.	M. Bučková	1	4,9						0	4,9
35.–36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Bujnovská	4	22,9						0	4,8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$T. Poláková	4	11,1						0	4,8

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	K. Tauchmanová	4	4,2						0	4,2
38.	A. Hollmannová	1	4,0						0	4,0
39.	J. Kaifer	2	3,8	0,3			1,0		1,3	3,8
40.	M. Kripner	3	3,2						0	3,2
41.	R. Wágner	4	3,0						0	3,0
42.	Š. Sulanová	2	2,5						0	2,5
43.–45.	K. Hloušková	2	2,0						0	2,0
	K. Levíčková		2,0						0	2,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$Z. Lüköová	3	15,1						0	2,0
46.	L. Urbanová	4	0,0	0,0	0,0				0,0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`