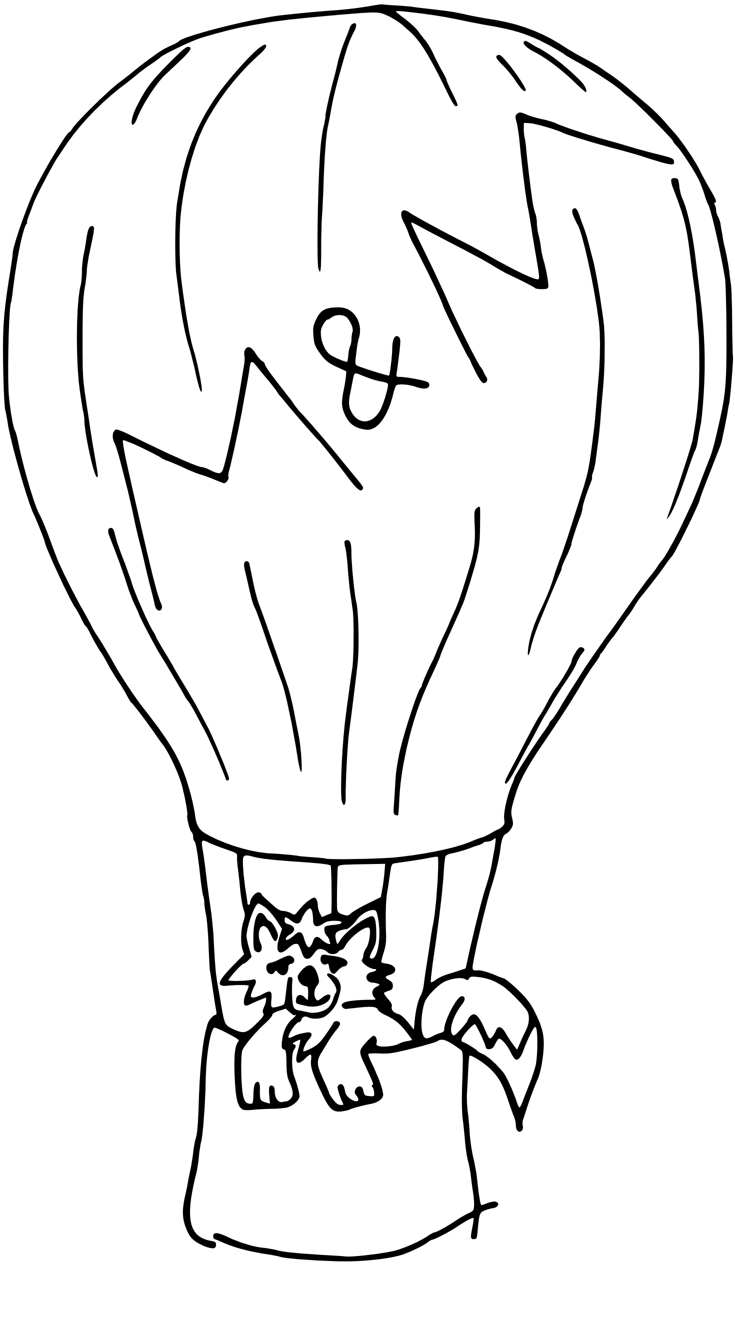
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIV
Číslo 5

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

Uvnitř najdete několik úloh a témat k zamyšlení. Vyřešte je a pošlete nám je. My vám je opravíme a pošleme zpět s dalším číslem, nejzajímavější řešení otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.



Milí řešitelé,
právě držíte v ruce páté číslo časopisu M&M. Kromě obvyklého obsahu v něm najdete další zajímavé otázky k tématu č. 5, tentokrát již s praktickými cvičeními designu DNA – doporučujeme! Dále vám připomínáme, že ještě zbývají poslední volná místa na mezinárodní týmové matematické soutěži Náboj, která se v ČR bude konat 23. března v Praze a v Opavě. Pokud vás zajímá matematika, neváhejte se přihlásit na stránkách `naboj.org`. Přejeme vám příjemné řešení a těšíme se s některými z vás již brzy na viděnou na jarním soustředění.

Vaši organizátoři

Zadání úloh

Termín odeslání 5. série: 4. 4. 2018

Jo, Jevíčko, byl tu už někdo z vás někdy v Jevíčku? To je moc pěkny město, co vám budu povídat, já tudy kdysi ještě jako mladé floutek občas chodíval a jim tam na náměstí stojí taková kašna, z ní voni pry napájej hovado, to jako krávy a koně, a s nima voni pak jezdí po vsi a po vokolí a sklízí a sejí a orají, aby měli pak hrubou úrodu a mohli si žít jako páni a měli i tak další rok co zasít na polích. Prokrindapána, jaký voni tam maj pole! Vono je to pry hrozny lopotování mít takovy pole, ale jak švárně se na to kouká, jak se vono line jedno políčko vedle druhyho, jedno zeleny, jiny zlaty, třetí hnědy, co na něm letos nezaseli, jedno je střiženy do čtverečku, některy zas do trojúhelníčku, ale to pánům sedlákům nevadí, protože voni ho mají každej to svoje dobře změřeny a vědi, jak má být která mez dlouha, aby je takhle šelma soused nevošidil, kdyby chtěl pěstovat na jejich.

Úloha 5.1 – Rovnostranný trojúhelník (3b)

Máme ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou CH a těžnicí BM. Navíc víme, že $|BM| = |CH|$ a úhly MBC a HCB jsou stejně velké. Dokažte, že ABC je rovnostranný.

Jak říkám, sedláci, to jsou páni. Já jsem znal jednoho, von býval vodsaď nedaleko, a von dřív, předtím, než se voženil, von míval takové stánek na návsi, ani sám nevim, co prodával, ale vtipu, toho měl na rozdáváni. Vonehdy za nim přišel četník, jakože se čmýrat, co to tam jako provodi, že pry tam ma jakože takovy krabičky a co že to v nich jako má. A von ten chlap povidá: „Maj rozum, pane oficír, přece mi nechtěj tyhlety krabičky otvírat, dyť kdo myslejí, že si ode mě koupí takovou otevřenou krabičku?“ A von pan četnik že ne, že pry je neotevře, ale že je musí všecky odjít, že pry to na stanici prověři a jestli nic, tak že mu všechen náklad vynahradi, jen že se nevi, jak dlouho to bude trvat.

Úloha 5.2 – Rušičky (5b)

Máme 32 očíslovaných krabiček, z nichž 16 obsahuje rušičku. Každý den můžeme vzít libovolnou sadu krabiček a otestovat, zda je mezi nimi alespoň jedna rušička. Za kolik dnů dokážeme určit, které krabičky obsahují rušičky? Zajímá nás jak nejhorší případ, tak i průměr. Část bodů je možné získat i za neoptimální řešení; naopak třeba důkaz toho, že to nejde o moc rychleji, představuje možnost získat bonusové body.

A jak se tam ti dva handrkovali, von šel kolem pan farář, takové statné, šedovlasé pán, vedl na provaze toho svyho čokla. Von měl totiž tenhleten farář psa, jejkote, to vám byl vzteklé pes! Ten když se rozčilil, to bylo boží dopuštěni, hotovej Satanáš, že vono se vonehdy stalo, že ten pes takhle začal řádit přímo u pana faráře doma, skákal, rafal, po čem mohl, a von mu takhle rozbil takovou barevnou ozdobnou kostku, co ji měl farář vystavenou na vokně, a protože von pan farář nemohl domu, než se to psisko uklidnilo, tak von ani těch dílků z tej kostky nakonec moc nenašel, tak z toho byl celé špatné.

Úloha 5.3 – Rubikova kostka (4b)

Rubikova kostka se rozpadla a zbylo z ní 26 barevných dílků. My nevíme, jak byla předtím obarvena, ani jaké barvy k tomu byly použity. Kolik nejméně těchto dílků potřebujeme, abychom na jejich základě byli schopni její obarvení zrekonstruovat (určit barvy a jejich rozložení na složené kostce)? Kolik takových dílků potřebujeme, máme-li k dispozici pouze její rohové dílky? A co v případě, že naopak rohové dílky k dispozici vůbec nemáme?

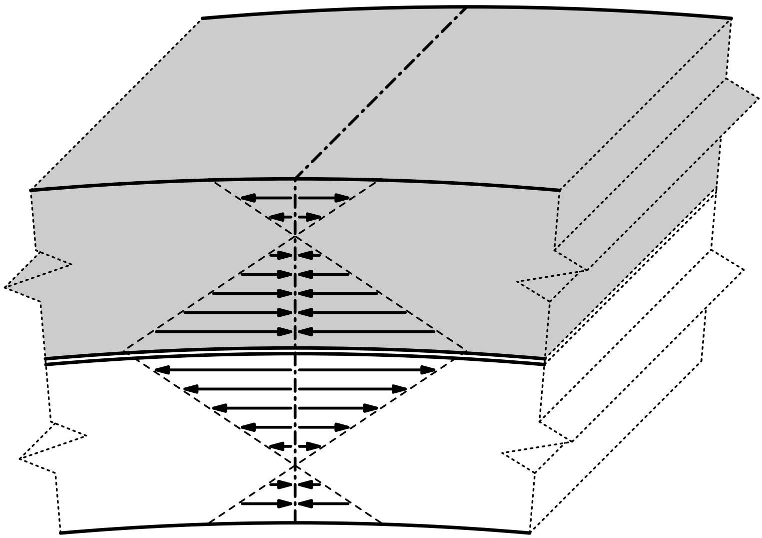
A von jak tam ten farář tak spekuloval, von si ho všiml ten filuta kramář a jak von se doteď vadil s četníkem, najednou dostal vobmysl vobrátit se na faráře a povidá: „Zastanou se mě, Velebnosti, ved jináč ze mě bude chudák!“, ale von farář že ne, do toho že von nesmi rýpat. Nebyl by to však ten nejsubtýnější člověk, *co znám, aby se nechal, von moc dobře věděl, že pan farář je študované pán, pry byl na študiích až v Praze, to vím, ved moja maminka byla taky z Prahy, a voni tihle študovaní páni maj vůbec rádi tyhlety štrichy a von ten kramář teda vytáhl z brašny jakousi věcičku a že pry „Vemou si to, Velebnosti, říka to, jestli je venku zima!"*

Úloha 5.4 – Bimetalový pásek (4b)

Bimetalový pásek je vytvořený spojením měděného a zinkového plíšku, každý z nich má tloušťku 1,5 mm. Při teplotě 21 °C je tento pásek rovný. Jaký poloměr bude mít oblouk, do kterého se stočí po zahřátí na 120 °C?

K vyřešení úlohy se vám bude hodit vědět, že rozložení napětí v zahřátém pásku vypadá tak, jak je znázorněno na obrázku 1. Nulové hodnoty nabývá v 1/3 tloušťky každého ze dvou plíšků. Odvodit toto rozložení napětí je poměrně složité, takže jej můžete přímo použít jako výchozí bod pro vaše řešení[1].

Jako bonus můžete zkusit určit, jak velké pnutí bude působit na spoj dvou kovů při tomto zahřátí.



Obrázek 1: Rozdělení normálového napětí na řezu zahřátým páskem. Nulové hodnoty nabývá napětí v 1/3 výšky každého z kovů.

A co se nestalo, faráři fortel zavoněl a požehnal páně četníkovi, pry ať necha krabičky krabičkama. Co mohl četník jen dělat, zasalutoval a vydal se na vodchod, ved zákon nezákon, pánbu je prvotnost a propast, ta nikoho neláká.

[1] Obrázek vychází ze zjednodušujícího předpokladu, že modul pružnosti obou kovů je přesně stejný. Toto zanedbání se nicméně na spočtené hodnotě zakřivení pásku projeví zanedbatelně málo.

Zadání témat

Téma 5 – Dají se přeprogramovat živé organismy?

V minulém čísle jste se možná podívali teoreticky na to, jak se skládají kousky DNA dohromady, jaká metoda se hodí na konkrétní problém a co to teoreticky obnáší v laboratoři. Pokud vás to stále zajímá, neváhejte posílat řešení, protože tyto teoretické znalosti se vám budou velmi hodit v řešení praktičtějších výzev tohoto čísla.

Abyste si mohli vyzkoušet design DNA v praxi, připravila jsem několik sekvencí, které můžete použít jako počáteční body. Nahlédnout je můžete přes Benchling.com, kde se stačí zadarmo zaregistrovat a přes odkaz `https://benchling.com/lucies/f_/dWozzPI9-mam-tema-materialy/` si sekvence můžete i s anotacemi a vizualizací překopírovat do vlastního Benchling.com účtu a měnit. Sekvence jsou ve složce „Inventory“ a (mimo BioBricks) mají mnoho detailů v češtině vysvětlených v záložce „Description“. Složka obsahuje sekvence, které se vám budou hodit k řešení konkrétního problému níže, ale i sekvence a plasmidy (kruhové kusy DNA), které obsahují zajímavé geny, regulační sekvence nebo „markery“ (důležité, abychom poznali, jestli je naše DNA úspěšně v organismu; markery jsou většinou svítící proteiny nebo antibiotické rezistence). Pokud byste potřebovali další dílky nebo nevěděli, k čemu některé jsou, databáze BioBricks a Addgene jsou dobrými zdroji. Zkuste si se sekvencemi pohrát a složit z nich něco zajímavého, popište, jak byste postupovali při počítačovém plánování a jaké laboratorní techniky byste potom krok po kroku použili. Pokud si nevíte rady, kde začít, podívejte se níže na návrh konkrétního problému a nebo mi rovnou napište na `lucik.s.12@seznam.cz`, ráda s vámi prodiskutuju návrhy nebo vysvětlím základní metody, pokud se chcete pokusit vyřešit praktický problém i bez teoretických úloh předchozích čísel. Pokud potřebujete přístup k vědeckým článkům, které nejsou volně přístupné, neváhejte se ozvat.

Návrh konkrétního problému k řešení:
Zkuste si vytvořit „biosensor“, který začne produkovat fluorescenční a zároveň bioluminescenční oranžový protein, pokud detekuje určité antibiotikum.

V sekvencích sdílených přes Benchling najdete dvě zajímavé sekvence:

1. p70a-NLO: plazmid, na kterém je kromě „markeru“ (antibiotické resistance) také oranžová „nanolanterna“. Sekvence samotného proteinu je dál obklopena regulačními sekvencemi jako promotor p70a a 5’UTR na začátku a terminátor na konci, které umožní, že protein za správných podmínek vznikne (v tomto případě ale vzniká za každých podmínek). Nanolanterna samotná je spojením luciferázy (enzym, který dovede produkovat světlo z určité chemikálie bioluminescencí) a fluorescenčního proteinu (enzymu, který absorbuje světlo o jedné vlnové délce a vyzáří jinou vlnovou délku, v podstatě

změní barvu příchozího světla a odrazí ho). Hlavní ale je, že naše nano-lanterna umí oranžově svítit a to dokonce dvěma způsoby (pro zvídavé, více se o nich dočtete na `http://www.pnas.org/content/pnas/112/14/4352.full.pdf`). Můžete předpokládat, že tento plazmid leží v dostatečném množství ve vašem laboratorním mrazáku.

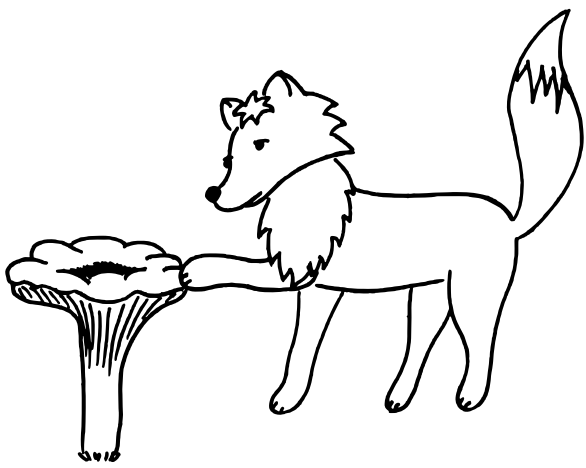
2. Riboswitch: Jestli vznikne protein nebo ne závisí většinou na regulačních sekvencích. Riboswitch je jednou z nich. Mnoho regulací probíhá už na úrovni transkripce (přepisu DNA do RNA), řízené především promotorem. Riboswitch ale reguluje translaci (přepis RNA do proteinu). V určitých podmínkách se jeho RNA spojí sama se sebou a nenechá ribosom přepisující protein za riboswitchem projít. Jsou ale podmínky, třeba chemikálie nebo fyzikální faktory, které dovedou riboswitch rozpojit a protein tak může vzniknout. Tento konkrétní riboswitch aktivuje geny za ním jenom v případě, že je kolem něj antibiotikum. Bakterie, ze které pochází, ho používá k regulaci genů antibiotické resistence – brání se tedy antibiotiku jenom v případě, že je antibiotikum kolem. Tento kousek DNA fyzicky nemáte, jenom jste se o něm dočetli. Zvažte tedy, jak byste ho dostali (a jak to třeba udělat relativně levně).

Zkuste se podívat blíže na to, kde musí být riboswitch umístěn, aby mohl regulovat naši nano-lanternu a ta vznikla jenom v případě, že přidáme antibiotikum. Pak ho zkuste vhodnými metodami do plazmidu přidat (popište, jak byste plánovali na počítači a co potom vyzkoušeli v laboratoři).

Měřit, jestli je kolem antibiotikum, se nám může velmi hodit například v čištění vod a zabránění tomu, aby nebezpečné bakterie přestaly na antibiotikum reagovat, protože bude všude kolem ve vodách (což je reálně hrozící problém).

Těším se na vaše řešení!

Lucka

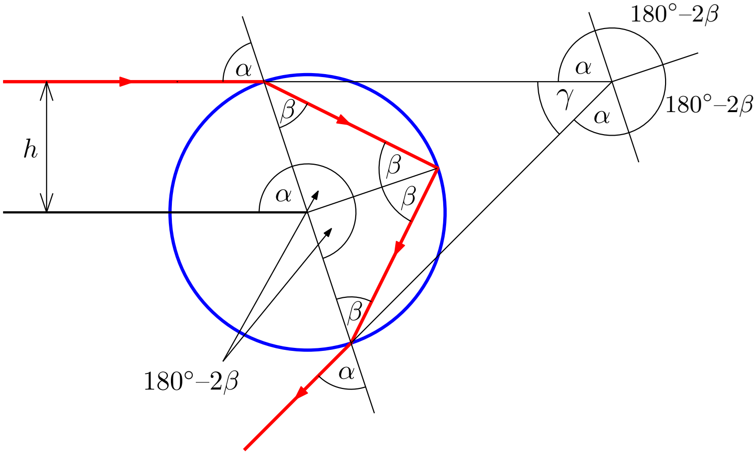


Řešení úloh 3. série

Úloha 3.1 – Západ duhy (4b)

Zadání:
Jak dlouho po západu Slunce můžeme o jarní rovnodennosti z rovníku vidět duhu, která se utvoří na dešťových kapkách? Pokud potřebujete znát nějaké parametry, tak si je vyhledejte nebo odhadněte. Jak bude taková duha vypadat?

Řešení:
Vieme, že dúha vzniká pri dopade svetla na vodnú kvapku. Aproximujme kvapku ako guľu, na ktorú dopadá vodorovný lúč[2] svetla. Na stránke `http://ukazy.astro.cz/duha-princip.php` je pekne animované gif-ko pre výpočet uhlu γ. Primárna dúha, ktorú poznáme, vzniká po jednom odrazu, sekundárna dúha vzniká po dvoch odrazoch. Výpočet pre primárnu duhu môžeme vidieť na Obr. 2.



Obrázek 2: Odraz lúča v kvapke; kvapka je jednotková a teda h nadobúda hodnoty od 0 po 1.

Pre uhol γ dostaneme rovnice:

$$\alpha = \arcsin(h),$$

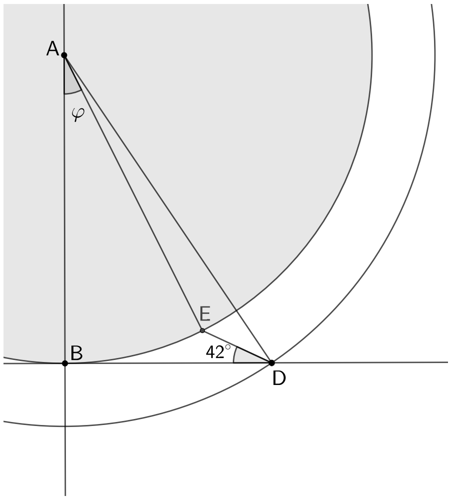
$$\beta = \arcsin\left(\frac{h}{n}\right),$$

$$\gamma = 4\beta - 2\alpha,$$

$$\gamma = 4\arcsin\left(\frac{h}{n}\right) - 2\arcsin(h),$$

[2] „lúč“ znamená ve slovenštině paprsek

kde n je index lomu vody. Najväčší uhol, ktorý môžeme dostať pre primárnu dúhu je $42°$. Intenzitu svetla uvažujeme, že maximálne budeme môcť pozorovať sekundárnu dúhu. Sekundárna dúha má najväčší uhol $51°$; pre tento uhol bude treba výpočet adekvátne upraviť. Priaznivé podmienky pre vytvorenie dúhy sú počas a po upršanom počasí. Maximálna výška dolného okraju búrkových mrakov sa pohybuje od 2 do 3 km.



Obrázek 3: Zeme a mraky. E je miesto pozorovateľa, D miesto stretu lúču a mrakov, A stred Zeme a uhol φ pootočenie Zeme od západu Slnka pre pozorovateľa E.

Na Obr. 3 vidíme nákres Zeme a mrakov nad ňou. Vodorovná čiara predstavuje smer svetla z ľavej na pravú stranu. Bude nás zaujímať uhol φ. E označuje polohu pozorovateľa a D stret lúča svetla a kvapiek vody. Uhol ADB:

$$|\sphericalangle ADB| = \arcsin\left(\frac{R}{R+l}\right),$$

kde R je polomer Zeme na rovníku (6378 km) a l výška mrakov. Uhol BAD a ADE:

$$|\sphericalangle BAD| = 90° - |\sphericalangle ADB|,$$

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ADB| - 42°.$$

Podľa sínusovej vety uhol AED:

$$\frac{\sin(|\sphericalangle ADE|)}{R} = \frac{\sin(|\sphericalangle AED|)}{R+l},$$

$$|\sphericalangle AED| = \arcsin\left(\frac{(R+l)\sin(|\sphericalangle ADE|)}{R}\right),$$

$$|\sphericalangle DAE| = 180^\circ - |\sphericalangle AED| - |\sphericalangle ADE|,$$
$$\varphi = \sphericalangle BAD - \sphericalangle DAE.$$

A nakoniec čas, po ktorý uvidíme dúhu, vypočítame:

$$t = \frac{\varphi \cdot 86400\,\mathrm{s}}{360^\circ}.$$

Pre výšky 2–3 km pri primárnej dúhe dostaneme časy 5 min 38 s až 6 min 55 s. Pre sekundárnu dostaneme o 3 s naviac.

To všetko za podmienok, že atmosféra neovplyvňuje svetelné lúče. To nie je splnené, Slnko sa nachádza približne 0,5° pod horizontom, kedy sa Slnečný kotúč stratí pod horizontom, teda 2 min po jeho skutočnom západe za horizont, to je spôsobené optickými vlastnosťami atmosféry.

Tak isto aj fata morgána, teda odraz na vrstvách teplého alebo chladného vzduchu, pomenované tiež horný alebo dolný odraz podľa usporiadania. To všetko pridá alebo uberie čas T a bude to závisieť na teplote a hustote vzduchu nie iba v mieste pozorovania, ale veľkej oblasti kade prejde lúč svetla.

Pri západe bude naša dúha postupne nadobúdať červenejšiu farbu v dôsledku disperzie. Každá dúha bude vyzerať ako časť kružnice, teda ako ju poznáme. Budeme ju pozorovať smerom na východ, chrbát budeme mať otočený k zapadnutému Slnku. Farebné usporiadanie primárnej dúhy bude od červenej k fialovej z hornej strany, sekundárna dúha bude nad primárnou s farebným usporiadaním od fialovej k červenej z hornej strany.

Kubo

Úloha 3.2 – Součet a součin 2 čísel (3b)

Zadání:

Majitel firmy určil na trezoru heslo, které tvoří dvě přirozená čísla X a Y tak, že platí $1 < X < Y$ a $X+Y < 100$. Dva jeho zástupci mají za úkol se v případě šéfova úmrtí sejít a uhodnout heslo k trezoru (mají na zadání hesla právě 2 pokusy, aby mohli vyzkoušet záměnu pořadí čísel). Prvnímu zástupci majitel pověděl součin těchto čísel a druhému součet.

První: „Nedokážu ta čísla určit.“
Druhý: „To jsem věděl.“
První: „Nyní už je znám.“
Druhý: „A já také.“

Jaká čísla tvoří heslo k trezoru?

Řešení:

První zástupce zná součin čísel, označme jej p, druhý má jejich součet, označme jej s. Pro zjednodušení budeme rozklad čísla na dva činitele označovat jako *rozklad* a rozdělení čísla na dva sčítance jako *rozdělení*.

Z vyjádření prvního zástupce, že nemůže čísla určit, můžeme vypozorovat následující:

- p není součin dvou prvočísel
  Kdyby bylo p součinem dvou prvočísel, pak by první zástupce dokázal jednoznačně určit X a Y.

- p není třetí mocnina prvočísla
  Pokud $p = q \cdot q \cdot q$, pak existuje jen rozklad $q \cdot q^2$, jelikož X a Y jsou větší než jedna.

- prvočíselný rozklad p neobsahuje prvočíslo větší než 49
  Kdyby prvočíselný rozklad obsahoval prvočíslo v větší než 49, tak by p mělo jediný možný rozklad, a to na součin v a zbytku prvočísel. Jiné rozklady nejsou možné, protože kdyby v bylo v rozkladu vynásobené libovolným prvočíslem, byla by tato část rozkladu větší než 100, tím spíše by součet obou částí byl větší než 100, což je v rozporu se zadáním.

Rozklad, pro který neplatí některá z výše uvedených podmínek, nazveme jednoznačný. Součin p tedy nemá jednoznačný rozklad.

Podíváme se nyní, co vyplývá z prohlášení druhého zástupce. Ten tvrdí, že se od prvního nedozvěděl nic nového. Takže víme, že pro každé rozdělení $s = a + b$ nemá $a \cdot b$ jednoznačný rozklad. Pro každé rozdělení má součin sčítanců rozklad splňující výše uvedené podmínky.

Speciálně si všimneme, jaká $s < 100$ nemají rozdělení vedoucí na jednoznačný rozklad. Dle Goldbachovy hypotézy se každé sudé číslo větší než 2 dá zapsat jako součet dvou prvočísel. Hypotéza není dokázaná, ale bylo ověřeno, že platí i pro hodně vysoká čísla. I když tuto hypotézu neznáme, tak ji můžeme pro sudá čísla menší než 100 snadno ověřit. Z lichých čísel můžeme vyškrtnout všechna ve tvaru $q + 2$ pro q prvočíslo, $q \neq 2$. Právě v těchto případech budou lichá čísla součtem dvou prvočísel (součet dvou lichých čísel je číslo sudé a 2 je jediné sudé prvočíslo). Dál je $s < 55$, protože 53 je nejmenší prvočíslo větší než 49 a každé vyšší s dokážeme rozdělit na $53 + (s - 53)$, kdy $53 \cdot (s - 53)$ má jednoznačný rozklad. Z vyjádření druhého zástupce máme

$$s \in S = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53\}.$$

Po získání předchozí informace už první zástupce čísla X a Y zná. Znamená to, že p má právě jeden rozklad $p = a \cdot b$, pro který $a + b$ nemá rozdělení na $c + d$ takové, že $c \cdot d$ má jednoznačný rozklad. Jinými slovy existuje jediný rozklad $p = a \cdot b$ takový, že $a + b \in S$. Číslo p splňující toto pravidlo označíme jako *dobré*.

Mnoho práce si ulehčíme následujícím pozorováním. Pokud $p = 2^k \cdot q$ pro q prvočíslo, $k > 1$, $2^k + q \in S$, pak je tento rozklad p jediný takový, tj. není žádný další rozklad, pro který součet činitelů náleží do S. Tudíž každé p v tomto tvaru je dobré. To plyne z toho, že každý jiný rozklad je ve tvaru $p = 2^i \cdot 2^{k-i} q$ pro $i = 1, \ldots, k - 1$. Odpovídající součet je pak $2^i + 2^{k-i} q$, kde jsou obě složky sudé, takže i součet je sudý a nemůže ležet v S.

Po druhém prohlášení prvního zástupce zná odpověď i druhý zástupce. Díky této informaci víme, že s má jediné rozdělení $s = a + b$ takové, že $a \cdot b$ je dobré.

Nyní projdeme všechny prvky S a budeme hledat rozdělení s dobrými součiny. Chceme ukázat, že existuje pouze jeden prvek S, který má pouze jedno rozdělení s dobrým součinem.

Pro všechny prvky S snadno najdeme alespoň jeden dobrý součin pomocí „ulehčujícího“ pozorování[3]:

$$\begin{aligned}
&11 = 4 + 7 = 8 + 3\\
&17 = 4 + 13\\
&23 = 4 + 19 = 16 + 7\\
&27 = 4 + 23 = 8 + 19\\
&29 = 16 + 13\\
&35 = 4 + 31 = 32 + 3\\
&37 = 8 + 29 = 32 + 5\\
&41 = 4 + 37\\
&47 = 4 + 43 = 16 + 31\\
&51 = 4 + 47 = 8 + 43\\
&53 = 16 + 37
\end{aligned}$$

Kandidáti na prvek S, který má jediné rozdělení s dobrým součinem, jsou $17, 29, 41, 53$. U třech z nich ale najdeme kromě již nalezeného dobrého součinu ještě další:

$$29 = 2 + 27 \text{ a } 54 = 2 \cdot 27 = 6 \cdot 9 = 3 \cdot 18$$

$$2 + 27 \in S$$

$$6 + 9 = 15 \notin S$$

$$3 + 18 = 21 \notin S$$

$$41 = 7 + 34 \text{ a } 238 = 7 \cdot 34 = 14 \cdot 17$$

$$7 + 34 = 41 \in S$$

$$14 + 17 = 31 \notin S$$

$$53 = 10 + 43 \text{ a } 430 = 10 \cdot 43 = 5 \cdot 86 = 2 \cdot (5 \cdot 43)$$

$$10 + 3 = 53 \in S$$

$$5 + 86 = 91 \notin S$$

$$5 \cdot 43 > 100$$

Dostáváme, že pro daná rozdělení jsou jejich součiny dobré, protože právě jeden jejich rozklad má svůj součet v S.

[3] levý sčítanec je vždy mocnina dvojky, pravý prvočíslo

Zbývá ověřit, že nalezený dobrý součin pro 17 je opravdu jediný. Jelikož $17 \in S$, stačí pro každé rozdělení 17 vzít jeho součin a pro něj najít rozklad, jehož součet také náleží do S:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 15 = 30 = 5 \cdot 6,\ \ 5 + 6 = 11 \in S,\\
3 \cdot 14 = 42 = 2 \cdot 21,\ \ 2 + 21 = 23 \in S,\\
4 \cdot 13 = 52 = 2 \cdot 26,\ \ 2 + 26 = 28 \notin S,\\
5 \cdot 12 = 60 = 3 \cdot 20,\ \ 3 + 20 = 23 \in S,\\
6 \cdot 11 = 66 = 6 \cdot 11,\ \ 6 + 11 = 17 \in S,\\
7 \cdot 10 = 70 = 2 \cdot 35,\ \ 2 + 35 = 37 \in S,\\
8 \cdot 9 = 72 = 3 \cdot 24,\ \ 3 + 24 = 27 \in S.
\end{aligned}$$

Číslo 17 má tedy opravdu jediný dobrý součin, 52, a hledaná čísla jsou 4 a 13.

Anet

Úloha 3.3 – Prvočísla (3b)

Zadání:
Určete všechny trojice prvočísel (p, q, r) *splňující* $p + q^2 = r^4$.

Řešení:
Budeme postupně upravovat:

$$p + q^2 = r^4$$

$$p = r^4 - q^2 = (r^2 + q)(r^2 - q)$$

Protože je p prvočíslo, tak má pouze 2 dělitele: p a 1. Druhá závorka je menší, tedy bude rovna 1.

$$r^2 - q = 1$$

$$q = r^2 - 1 = (r + 1)(r - 1)$$

Protože i q je prvočíslo, tak má dělitele pouze q a 1. Závorka $(r - 1)$ je menší, proto $r - 1 = 1$, tedy $r = 2$.

Z toho dopočítáme q:

$$q = r^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

A nyní dopočítáme p:

$$p = r^4 - q^2 = 2^4 - 3^2 = 7$$

Toto je tedy jediné řešení dané rovnice.

Našli jsme tedy řešení $(p, q, r) = (7, 3, 2)$, které odpovídá zadání, a zároveň jsme ukázali, že žádné jiné řešení neexistuje.

Petr

Úloha 3.4 – Dělitelnost dlouhého čísla (2b)

Zadání:
Po drátě nám celý den přichází velmi dlouhé číslo zapsané ve dvojkové soustavě. Na konci dne máme rozhodnout, zda je toto číslo dělitelné třemi. Navrhněte algoritmus, který to bude umět vyřešit. Počítejte s tím, že se číslo nevejde do žádné paměti.

Řešení:
Každé číslo ve dvojkové soustavě lze rozepsat jako součet jednotlivých cifer násobených mocninami dvojky, tedy jako

$$a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0,$$

kde $a_n, \ldots, a_0$ jsou jednotlivé dvojkové číslice. Protože mocniny násobíme vždy nulou nebo jedničkou, můžeme součet zkrátit na součet mocnin dvojky, které násobíme jedničkou.

Není složité si všimnout (např. rozepsáním každého čísla jako $an + b$), že platí[4]

$$(m_1 + \cdots + m_k) \bmod n = (m_1 \bmod n + \cdots + m_k \bmod n) \bmod n.$$

Využijeme toho: stačí tedy sčítat jen zbytky jednotlivých mocnin po dělení třemi.

Nyní si všimneme, že zbytek po dělení třemi je u sudých mocnin dvojky jedna a u lichých dva: pro $2^0 = 1$ a $2^1 = 2$ to platí, při násobení čtyřmi se zbytek nezmění[5]:

$$4 \cdot (3k + c) = 12k + (3 + 1)c = 12k + 3c + c \equiv c \pmod 3$$

Stačí tedy si za jedničky na sudých pozicích vždy přičíst do nějaké proměnné jedničku a za jedničky na lichých pozicích dvojku. Kdykoliv bude hodnota proměnné větší nebo rovna třem, trojku odečteme, čímž získáme zbytek po dělení třemi. Pokud na konci dne bude v proměnné nula, bylo celé číslo dělitelné třemi.

Tohle řešení má na první pohled jeden háček: pokud číslice přichází od nejvyšších řádů („zleva“), nevíme, jestli začínáme na sudé nebo na liché pozici. Ovšem pokud se na začátku netrefíme a budeme přičítat u sudých pozic dvojky a u lichých jedničky, vyjde nám zbytek dvojnásobku původního čísla – jako kdybychom si na konec přimysleli ještě jednu nulu. Násobení celého čísla dvěma sice změní zbytek u čísla nedělitelného trojkou (z jedničky na dvojku a opačně, můžete si to zkusit dokázat), ale dělitelnost se násobením dvěma zachová. Stačí tedy opět zkontrolovat, zda jsme dostali na konci nulu či nikoliv. Je tedy jedno, jestli číslo má lichý nebo sudý počet cifer, stejně tak nezáleží na tom, jestli číslo přichází „zleva“ či „zprava“, protože se zbytky jednotlivých řádů pravidelně střídají.

Pavel

[4] „$a \bmod b$“ značí zbytek a po dělení číslem b, tato operaci se nazývá *modulo*

[5] Zápis „$a \equiv b \pmod n$“ značí, že a a b mají stejný zbytek po dělení n, a většinou se čte „a je *kongruentní* s b modulo n“

Výsledková listina 3. čísla

				Úlohy					
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.$^{\text{MM}}$J. Havelka	2	50,2		3,0	3,0	2,2	8,2	37,2
2.	Dr.$^{\text{MM}}$K. Rosická	3	66,4	3,0	3,0	3,0	2,2	11,2	29,9
3.	Bc.$^{\text{MM}}$M. Kalousková	2	19,5		0,5			0,5	19,5
4.–5.	Dr.$^{\text{MM}}$B. Hroncová	3	56,9	2,0	3,3	3,0	1,9	10,2	18,1
	Mgr.$^{\text{MM}}$R. Olšák	3	39,9			3,0	2,0	5,0	18,1
6.	Dr.$^{\text{MM}}$K. Čížková	4	50,0				1,9	1,9	17,4
7.	Mgr.$^{\text{MM}}$Z. Urbanová	4	45,2					0	16,7
8.	Dr.$^{\text{MM}}$O. Buček	4	55,5					0	15,3
9.	Dr.$^{\text{MM}}$K. Balej	3	60,4			3,0	2,2	5,2	13,1
10.	Doc.$^{\text{MM}}$A. Mlezivová	4	118,4		2,8	3,0	1,9	7,7	12,9
11.	Bc.$^{\text{MM}}$J. Ponic	4	12,2			3,0	1,5	4,5	12,2
12.	Bc.$^{\text{MM}}$J. Löffelmann	4	11,1					0	11,1
13.	Mgr.$^{\text{MM}}$M. Bukvaj	2	24,0					0	11,0
14.	Dr.$^{\text{MM}}$L. Kundratová	3	51,2					0	8,5
15.	Mgr.$^{\text{MM}}$J. Domes	3	24,9					0	8,3
16.–17.	Bc.$^{\text{MM}}$F. Kmječ	2	15,4				2,0	2,0	8,0
	E. Vítková	2	8,0					0	8,0
18.	Mgr.$^{\text{MM}}$B. Požár	4	38,6					0	7,7
19.–20.	Mgr.$^{\text{MM}}$O. Gonzor	1	21,7				2,0	2,0	7,5
	Mgr.$^{\text{MM}}$J. Růžička	3	29,7					0	7,5
21.	Mgr.$^{\text{MM}}$J. Suchánek	4	42,2					0	7,1
22.	Dr.$^{\text{MM}}$F. Čermák	4	58,7			2,0		2,0	7,0
23.	D. Saracino	4	6,7					0	6,7
24.	P. Trembulaková	4	6,5					0	6,5
25.	A. Trojanová	3	6,0					0	6,0
26.	A. Foglarová	3	5,6					0	5,6
27.–28.	Mgr.$^{\text{MM}}$A. Neubauerová	4	22,5					0	5,5
	R. Strnadlová	4	5,5	0,5		3,0	2,0	5,5	5,5
29.	Bc.$^{\text{MM}}$V. Procházka	4	14,3					0	5,3
30.–31.	Mgr.$^{\text{MM}}$M. Holubička	2	27,3				0,0	0,0	5,0
	Dr.$^{\text{MM}}$L. Vincenová	4	50,5					0	5,0
32.	M. Bučková	1	4,9					0	4,9
33.–34.	Mgr.$^{\text{MM}}$L. Bujnovská	4	22,9					0	4,8
	Bc.$^{\text{MM}}$T. Poláková	4	11,1					0	4,8
35.	K. Tauchmanová	4	4,2					0	4,2
36.	A. Hollmannová	1	4,0					0	4,0

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	M. Boček	Z8	3,9					0	3,9
38.	M. Kripner	3	3,2					0	3,2
39.	R. Wágner	4	3,0					0	3,0
40.–41.	J. Kaifer	2	2,5					0	2,5
	Š. Sulanová	2	2,5					0	2,5
42.–44.	K. Hloušková	2	2,0				1,1	1,1	2,0
	K. Levíčková		2,0					0	2,0
	Bc.$^{\mathsf{MM}}$Z. Lüköová	3	15,1					0	2,0
45.	L. Urbanová	4	0,0			0,0		0,0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M