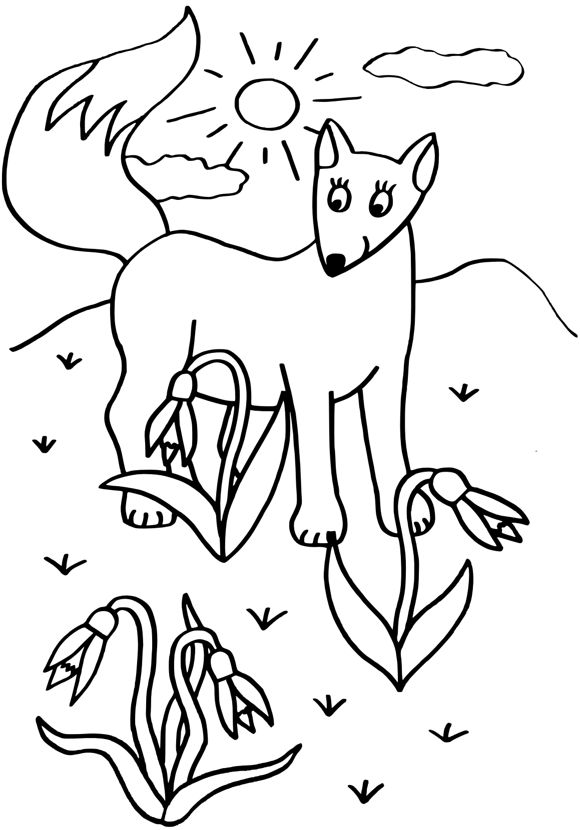
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIV
Číslo 4

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik úloh a témat k zamyšlení. Vyřešte je a pošlete nám je. My vám je opravíme a pošleme zpět s dalším číslem, nejzajímavější řešení otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

vítáme vás v novém roce opět na stránkách vašeho oblíbeného časopisu. Jarní soustředění se kvapem blíží, pokud tedy ještě chcete zvýšit svou šanci na pozvání a získat nějaké body navíc, můžete odevzdat příspěvky k tématům nebo úložky zadané v tomto čísle do 30. ledna – stihneme je ještě před soustředěním opravit a body vám započítat.

Kromě témat a úloh k řešení vám také přinášíme pozvání na několik akcí. V úterý 30. ledna se na Matfyzu uskuteční Jeden den s informatikou a matematikou[1] a ve čtvrtek 15. února Jeden den s fyzikou[2]. Dne 16. února (tedy den po Jednom dni s fyzikou) se koná FYKOSí Fyziklání[3].

A nyní už se můžete pustit do nějakého tématka či úložky. Těšíme se na vaše příspěvky!

Vaši organizátoři

Zadání úloh

Termín odeslání 4. série: 20. 2. 2018
(30. 1. 2018 pro účast na jarním soustředění)

Ztěžka se noha odlepila od země. V jediný okamžik ztratila spojení se starou, odjakživa vše přitahující pevnou prstí a vydala se na vlastní, vzrušující cestu vedoucí vzduchem neznámo kam.

Stoupá. Stále stoupá. Překonává všechny své limity a vlastní silou vytahuje se vzhůru, do nezbádaných výšin, urputně, že všechny svaly se v ní napínají až k prasknutí.

Již je na pokraji svých sil. Již ochabuje a snad jen za pomoci jakéhos kouzla pomalu zdvihá se o poslední centimetry. Jak si nyní zoufá, že čin ten necvičila víckrát dříve! Jak nyní lituje, že pozornosti těšily se spíše jiné části těla, zvláště pak ústa, k prasknutí vždy napěchovaná všelikými pochutinami, čokoládou, oříšky, tyčinkami…

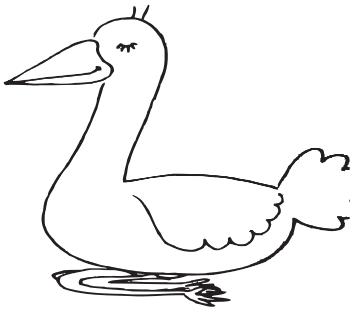
Úloha 4.1 – Slané tyčinky (3b)

Petr miluje slané tyčinky. Už snědl skoro celé balení a na talíři mu zbývá pouhých n ne nutně stejně dlouhých tyčinek. Petr si všiml, že z každé trojice tyčinek lze sestavit tupoúhlý trojúhelník. Jaké největší hodnoty může n nabývat?

Vrcholu bylo dosaženo. Z vysoka se teď noha dívá na svět kolem dokola. Chladivý vzduch ovívá ji ze všech stran a i ta zem pod ní již je jiná než ta, od níž se noha přednedávnem odrazila.

[1] https://mff.cuni.cz/jdim
[2] https://mff.cuni.cz/jdf
[3] http://fyziklani.fykos.cz

Vznáší se v oblacích, užívá volnosti, nechá se unášet svou představivostí. Plachtí do očí švihajícím vzduchem jako pták, jenž vrací se do rodného hnízda. Pluje neskutečnou rychlostí jako čáp podnikající každoroční cestu do teplých krajin. Odlétá třepotajíc křídly coby kačenka unikající dravé kočce na dnešní honbě za kořistí.



Úloha 4.2 – Kačenka (3b)

V rybníčku kruhového tvaru plave kačenka. Ráda by odlétla pryč, ale umí vzlétnout jen ze břehu. Tam na ni ale číhá kočka, která se bojí vody, ale po okraji rybníka se pohybuje čtyřikrát větší rychlostí, než kačenka plave. Existuje způsob, jak může kačenka kočce upláchnout, ať se kočka pohybuje jakkoli chytře?

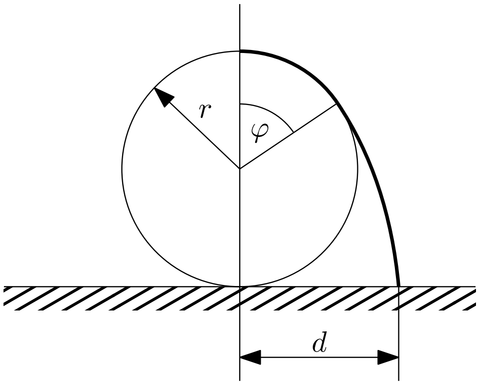
Rozhlížejíc se po nebývalých krásách noha zvolna oddechuje a tentokrát bez obav přechází do teď už snadného poklesu, jenž záhy má plynule změnit se v střemhlavý pád zpátky vstříc rodné zemi.

Není to nebezpečné, však takých pádů noha absolvovala již tisíce a tisíce! Je jen třeba vždy se zrakem ve spolupráci místo dopadu pořádně prověřit. Je-li zem rovná, je vše, jak má být. Běda však, leží-li v onom vybraném místě jakás překážka! Potom třeba je raději uhnout a o eleganci celý pohyb tak připravit, nežli bolest či horší ještě následek nedejbože dopustit.

Kámen nahodilý dopad nemálo by znepříjemnil. Střep, ten poranění až do krve mohl by noze způsobit. A co teprv míč! Ten, kulatý, odvěký nepřítel nohou, nesčetných výronů původce, co teprve škody ten by na nebohé noze napáchal!

Úloha 4.3 – Hmotný bod na lopte (4b)

Na vodorovnej podložke máme položenú loptu o polomere $r = 15\,\mathrm{cm}$. Na jej vrchol umiestníme hmotný bod a zapôsobíme na neho malou sílou a uvedieme ho do pohybu, ale s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Pri akom uhle φ sa oddelí od povrchu gule a do akej vzdialenosti d od miesta vypustenia dopadne (viď obrázok 1)? Hmotný bod sa pohybuje bez trenia.



Obrázek 1: Trajektória pádu bodu

Naštěstí je povrch volný. Pod k zemi padající nohou nerozprostírá se nic než pouhopouhý chodník, rovný, že s jezerní hladinou by si v tom nezadal, pevný, že stádo buvolů mohlo by se po něm prohnat, aniž zanechalo by zde třebas škrábnutí.

Přec však na něm cos bylo zanecháno. Barevné křídy zde byly rozdroleny, proměnivše se v mnohé složité linie, v nichž leccos prapodivného záhy ožilo. Tu letí drak s ocasem přes celou šířku chodníku nataženým, chrlí oheň z tlamy doširoka rozevřené. Tu zase domeček, z komína se kouří, zahrádka s jabloněmi obehnána je plotem.

Opodál zelená se mřížka nesoucí stopy po tudy se prohnaném utkání v piškvorkách. Která strana slavila vítězství, to je zřejmé, kolik však důmyslu, zvratů a lstivých kliček souboj v tato místa přinesl, to nám snad zůstane navždy tajemstvím…

Úloha 4.4 – Historie tahů piškvorek (4b)

Martin chce naprogramovat hru piškvorky na „piškvorkovnici“ 200×200 políček. A zrovna si láme hlavu nad dílčí úlohou – chce ukládat historii hry, jak šly tahy od začátku po sobě, aby bylo možné vracet partii o libovolný počet tahů zpět.

Každý tah je jednoznačně určen svou x-ovou souřadnicí (hodnota 0 až 199), y-ovou souřadnicí (hodnota 0 až 199) a typem (buď křížek, nebo kolečko). Protože se hráči pravidelně střídají, tak víme-li číslo tahu, je už jasné, zda to byl křížek, nebo kolečko. Z pravidel piškvorek je pro nás dále důležité vědět, že hra končí, když se na ploše objeví 5 stejných symbolů vedle sebe v libovolném (i šikmém) směru.

Martin nechce plýtvat místem, a proto chce, aby stav hry, ze kterého půjde jednoznačně určit celá historie tahů, byl uložen v poli o velikosti 200×200 bytů (byte má rozsah hodnot 0 až 255).

Jak to má udělat? Pomohou mu jiné číselné soustavy nebo šikovné kódování? Anebo to vůbec nejde?

Poslední milimetry dělí nohu od země. V posledních momentech vychutnává lehkost letu a pak již následuje tvrdý dopad zdůrazněný slabým plesknutím. Noha však konec ten čekala a ztlumila přistání pouhým nepatrným pokrčením v koleni.

A dále přesun kupředu, přenášení váhy a její úděl byl naplněn, nyní je na řadě druhá noha. Tu první teď čeká odpočinek vykoupený dočasným nesením váhy celého těla, zasloužený však po strastiplné cestě vzduchem, neb první krok byl završen.

Zadání témat

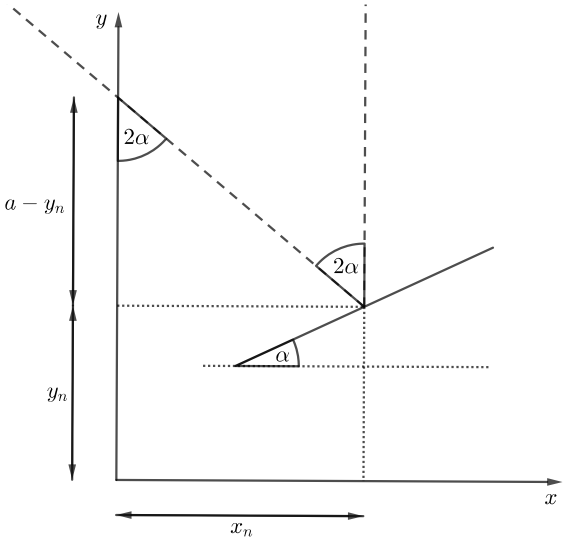
Téma 1 – Krotitelé světla

V úvodu do tohoto tématka zazněl návrh problému hledání tělesa, které by lámalo do ohniska všechny paprsky, nejen ty blízké optické ose. Protože se o vyřešení této otázky zatím nikdo ani nepokusil, a co víc, v posledním čísle k tématku nepřišel vůbec žádný příspěvek, rozhodl jsem se vás nasměrovat správným směrem tím, že zde nastíním jednak správné řešení tohoto problému a zároveň i základy práce mimo paraxiální aproximaci.

Chceme-li se osvobodit od požadavku blízkosti paprsků optické ose, musíme se zbavit paraxiální aproximace. Toho docílíme tak, že namísto využívání zobrazovacích zákonů si povrch čočky, resp. v našem případě zrcadla, hodně přiblížíme a představíme jako rovinné zrcadlo tečné k nám známé zakřivené ploše. Provedeme-li to v každém bodě, je to totéž, jako bychom rozsekali zakřivený povrch zrcadla na spoustu malých segmentů, od nichž se bude světlo odrážet jako od rovinných zrcadélek.

Podívejme se tedy na podmínky, které takovéto rozložení zrcadélek musí splňovat, aby dobře aproximovalo nějaký hladký objekt a zároveň aby splňovalo požadavek, že každý paprsek rovnoběžný s optickou osou jím bude odražen do stejného bodu. Tento požadavek už sám naznačuje, že hledaný objekt bude symetrický podle optické osy a nám že stačí zabývat se jeho řezem, či dokonce jen polovinou tohoto řezu, ta totiž objekt plně charakterizuje.

Hledejme objekt ve tvaru jednorozměrné spojité funkce $y(x)$ s tím, že osa y se shoduje s optickou osou a ohnisko se nachází v bodě $(0, a)$. Hodnoty y budeme vynášet v jednotlivých bodech x_n, což povede k posloupnosti $y_n = y(x_n)$. V každém z těchto bodů musí mít funkce aproximovaná lineárním segmentem (viz



Obrázek 2: Odraz paprsku do ohniska

výše) vůči ose x sklon $\alpha_n = \alpha(x_n,y_n)$ jednoznačně určený tím, aby platilo (viz Obrázek 2):

$$\frac{x_n}{a - y_n} = \mathrm{tg}(2\alpha)$$

Na ose x zavedeme rovnoměrné dělení s krokem Δx. Potom, protože y na úseku $(x_n, x_n + \Delta x)$ roste lineárně se sklonem α_n, můžeme každý bod y_n odhadnout rekurzivně:

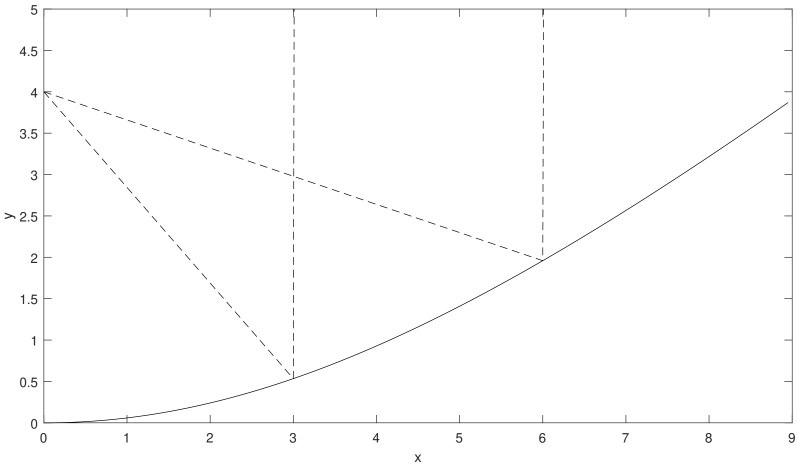
$$y_n = y_{n-1} + \Delta x \sin \alpha_{n-1}$$

Položíme-li navíc počáteční podmínky úlohy $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, získali jsme právě snadný algoritmus pro grafický popis hledaného objektu ve formě cyklu o třech krocích:

1. Vypočteme y_n ze vztahu: $y_n = y_{n-1} + \Delta x \sin \alpha_{n-1}$.
2. K němu dopočítáme α_n jako $\alpha_n = \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{x_n}{a-y_n}\right)}{2}$.
3. Přejdeme k $n + 1$.

Aplikací tohoto algoritmu v programu MATLAB (ve skutečnosti by stačil Excel) byl vykreslen řez hledaného objektu tak, jak je znázorněno na Obrázku 3.

Jako další úkol k tomuto tématku vám přenechávám zjistit, o jaký geometrický útvar se jedná, matematicky ho popsat, a náležitě svůj závěr odůvodnit. Dále se



Obrázek 3: Křivka vzniklá algoritmem ($a = 4$)

zamyslete, jestli se algoritmus dá použít i pro $y > a$, a případně ho rozšiřte na tuto oblast. Nakonec se můžete pokusit aplikovat podobný postup k nalezení objektu, který by koncentroval veškeré paprsky do jednoho bodu za využití lomu světla, nikoli odrazu, jako tomu bylo zde.

Je to hodně práce, ale nebojte, bodů bude hodně!

Evžen

Téma 2 – Mapování DNA

Zatím nikdo z řešitelů neposlal příspěvek k tomuto tématu. Proč? Toto téma je dobré[citation needed]. Řešte toto téma! Řešením tohoto tématu získáte body. Řešením tohoto tématu můžete získat dort. Řešte toto téma!

$\mathcal{O}(N)dra$

Téma 5 – Dají se přeprogramovat živé organismy?

V minulém díle jsme si představili obor syntetické biologie patřící do bioinženýrství a vaším úkolem bylo prohlédnout si dostupné databáze DNA a programy na vizualizaci a práci se sekvencemi, abychom dostali takové sekvence, které nám pomohou programovat organismy. Řešení stále můžete posílat, v tomto díle přidám pár dalších otázek, jejichž řešení vám pomůže, pokud se budete chtít pustit do samotného návrhu, jak DNA pospojovat, ať už na cvičných datech nebo nějakém vlastním projektu.

- Na vyrobení přesné sekvence DNA existuje mnoho technik. Nejjednodušší, ale zároveň nejnákladnější, je nechat si DNA nasyntetizovat od firmy. Podívejte se, jak taková syntéza probíhá, proč je zatím dost nákladná a jak velké kousky DNA lze ještě spolehlivě vyrábět.

- Pokud jsme limitovaní penězi, což naprostá většina laboratoří je, necháme si nasyntetizovat jenom malé kousky DNA nebo si někde objednáme už existující a ty potom vhodně spojíme. Podívejte se na laboratorní techniky, které toto umožňují. Můžete se zaměřit na ty starší a užitečné hlavně pro jednoduché organismy jako bakterie – třeba Biobricks. Porovnejte je s novými technikami, které se dají použít i ve složitějších eukaryotických organismech a často využívají restrikční enzymy typu IIS (stříhající vedle sekvence, kterou rozeznávají). Jak je potřeba naše kousky DNA připravit, aby laboratorní „algoritmus“ pro spojování větších kusů fungoval? Jaké metody produkují „jizvy“ na DNA a jaké nám vytvoří přesně to, co bychom chtěli?

- Ti syntetičtí biologové, kteří se snaží zreplikovat celý genom organismů, třeba s malými změnami, čelí trochu jiným problémům. Polymerázy, které DNA sekvenci tvoří, nejsou nikdy úplně přesné a od určité délky se chybám nevyhneme. Jak se tenhle problém řeší a jak probíhá testování kvality výsledné DNA? Podívejte se na některé velké projekty jako genom Mycoplasmy nebo kvasinek. Čeho všeho můžeme dosáhnout, pokud vytvoříme celý nový genom? Máte nějaké návrhy na zlepšení stávajících technik?

Pokud vás napadnou další otázky související s tím, jak v laboratoři získat DNA o přesné sekvenci, kterou potom můžeme vložit do našeho organismu, případně s designem DNA obecně, neváhejte o tom napsat článek. Pokud se chcete o něčem poradit, napište mi na `lucik.s.12@seznam.cz`.

Lucka

Řešení úloh 2. série

Úloha 2.1 – Na plese (3b)

Zadání:
Na plese spolu tančilo 102 princů a 103 princezen. Po skončení plesu se zjistilo, že každý princ tančil se stejným počtem princezen. Dokažte, že existují dvě princezny, které si zatančily se stejným počtem princů.

Řešení:
Úlohu budeme řešit sporem. Připusťme, že může nastat situace, kdy každá princezna tančí s jiným počtem princů a přitom každý princ tančí se stejným počtem princezen. Seřaďme si nyní vzestupně princezny podle počtu princů, s nimiž tančily. Protože máme 103 princezen a každá může tančit maximálně se 102 princi, tak jediná možnost, jak mohou princezny tančit s různým počtem princů, je, že 1. princezna netančí s nikým, 2. princezna tančí s 1 princem, 3. princezna se 2 princi, až nakonec 103. princezna tančí se 102 princi. Celkový počet tanečních párů tedy bude $0 + 1 + 2 + \cdots + 102 = \frac{103 \cdot 102}{2} = 103 \cdot 51$. Nyní se podívejme na prince – každý tančí s n princeznami, tedy celkový počet tanečních párů je $102 \cdot n$. Nyní si stačí všimnout, že $103 \cdot 51$ není dělitelné 102 a máme spor, protože obě hodnoty vyjadřují počet tanečních párů. Proto musí existovat alespoň 2 princezny, které tančily se stejným počtem princů.

Téměř všichni, kteří tuto úlohu odeslali, se dobrali správného řešení. Dr.$^{\mathsf{MM}}$ Kateřina Rosická řešila úlohu pro obecný lichý počet princezen a o 1 méně princů. Doplňková otázka se proto téměř sama nabízí – jak je to v případě, že máme sudý počet princezen a princů o jednoho méně, než je princezen (například 4 princezny a 3 prince)? Umíte najít konstrukci, která umožní každé princezně tančit s jiným počtem princů, nebo taková konstrukce neexistuje? Pokud to správně vyřešíte a pošlete mi to[4], tak u mě na soustředění máte čokoládu!

Petr

[4] vincena.petr@gmail.com

Úloha 2.2 – Čtveřice množin (3b)

Zadání:
Kolik existuje čtveřic množin (A, B, C, D) takových, že[5]

$$A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$$

pro dané přirozené n?

Řešení:
Nejlepší je podívat se na problém z pohledu jednotlivých čísel. Pro každé číslo k z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí jedna z následujících pěti možností:

1) $k \notin A, k \notin B, k \notin C, k \notin D$
2) $k \notin A, k \notin B, k \notin C, k \in D$
3) $k \notin A, k \notin B, k \in C, k \in D$
4) $k \notin A, k \in B, k \in C, k \in D$
5) $k \in A, k \in B, k \in C, k \in D$

Volby umístění jednotlivých čísel do množin jsou na sobě navzájem nezávislé. Máme n pozic, na kterých si vybíráme z 5 možností. Celkový počet čtveřic množin (A, B, C, D) je proto 5^n.

Martin

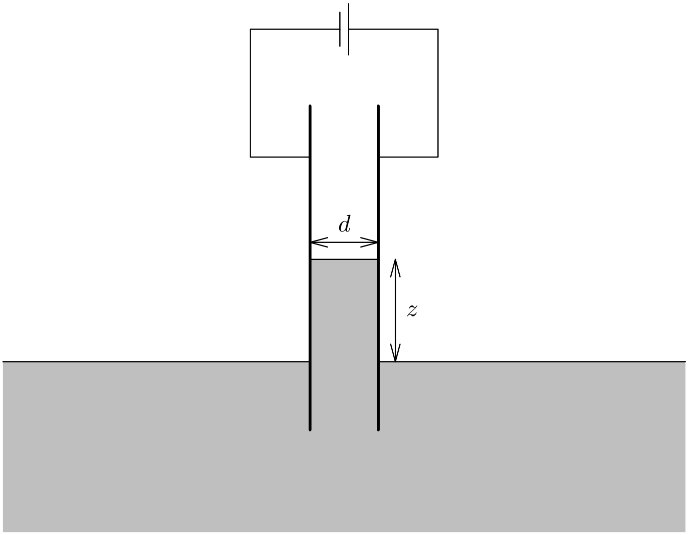
Úloha 2.3 – Namočený kondenzátor (5b)

Zadání:
Máme deskový kondenzátor, jehož spodní část je ponořená do vody jako na obrázku 4. Na kondenzátor je přivedené napětí $U = 200\,\mathrm{V}$ a vzdálenost desek je $d = 0{,}4\,\mathrm{mm}$. Pokud zanedbáme kapilární jevy, do jaké výšky z vystoupá vodní hladina? Jev se ustálí po dosažení minima energie soustavy.

Řešení:
Táto elektromechanická sústava je pripojená na konštantné napätie a pôsobí na ňu ťiažové pole Zeme.

Naša izolovaná sústava bude smerovať k rovnováhe, kedy jej celková elektromechanická energia bude minimálna. Celková energia E bude súčtom energie nabitého kondenzátora E_k, potencionálnej energie stĺpca vody E_p a energie zdroja napätia E_z. Minimum dosiahne stratami a to napríklad trením kvapaliny o steny kondenzátora a viskozitou kvapaliny. Kapacitu kondenzátora určíme ako súčet

[5] zápis $A \subseteq B$ znamená „A je podmnožina B“.



Obrázek 4: Kondenzátor ponořený do vody

dvoch paralelných kondenzátorov o výške $(H - z)$ a z, kde H je výška dosiek kondenzátora. Z toho dostaneme kapacitu C:

$$C = \frac{\varepsilon_0 L}{d}[H + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)z],$$

ε_r v našom prípade je relatívna permitivita vody a L vodorovná dĺžka platní kondenzátora. Nulovú hodnotu E_k si zadefinujeme na úrovni hladiny vody, kedy je $z = 0$. Z toho si vypočítame E_k:

$$E_\mathrm{k} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 LU^2[H + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)z]}{2d}$$

Potenciálna energia E_p ak si zvolíme nulovú hladinu potenciálu na úrovni hladiny vody podobne ako E_k:

$$E_\mathrm{p} = \frac{\rho L d g z^2}{2},$$

ρ je hustota vody, d vzdialenosť dosiek kondenzátora a g tiažové zrýchlenie. Energia zdroja E_z bude mať neznámu hodnotu E_0, z ktorej odoberieme prácou $W = QU = CU^2$ energiu potrebnú na prenesenie náboja $Q = CU$ na dosky kondenzátora. Prácu budeme počítať pre náš prípad kondenzátora od vodnej hladiny.

$$E_\mathrm{z} = E_0 - \frac{\varepsilon_0 LU^2\,[H + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\,z]}{d}$$

Celková energia bude rovná:

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{z}} = E_0 - \frac{\varepsilon_0 L U^2 \left[H + (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\, z\right]}{2d} + \frac{\rho L d g z^2}{2}$$

Minimum sa dá jednoducho nájsť prvou deriváciou podľa z, tá je v minime rovná 0:

$$\frac{\mathrm{d}E(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1) L U^2}{2d} + \rho L d g z = 0$$

Z toho dostaneme rovnovážnu výšku vodného stĺpca z_{r}:

$$z_{\mathrm{r}} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1) U^2}{2d^2 \rho g} \approx 9\,\mathrm{mm}$$

Existuje druhý postup riešenia bez použitia derivácie, ktorý použila Bc.[MM] Marie Margetová Kalousková. Budeme počítať, aké budú ΔE_{k}, ΔE_{z}, ΔE_{p} a ΔC od zmeny výšky hladiny Δz. Pre kapacitu dostaneme:

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1) L \Delta z}{d}$$

Na to dostaneme zmenu energie kondenzátora, zdroja a potenciálnej energie:

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1) L U^2 \Delta z}{2d}$$

$$\Delta E_{\mathrm{z}} = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1) L U^2 \Delta z}{d}$$

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{\rho L d g z \Delta z}{2}$$

Následne z rovnosti

$$-\Delta E_{\mathrm{z}} = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}}$$

po upravách dostaneme

$$z = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1) U^2}{2d^2 \rho g}.$$

Kubo

Úloha 2.4 – Zalévání zahrádky (2b)

Zadání:

Nezaprší a nezaprší. Zahradník vzal hadici, postavil se doprostřed zahrady a začal zalévat. Trochu ho to již přestává bavit, a tak přemýšlí, čím by zaměstnal svůj bystrý mozek. A vtom mu na mysli vyvstane otázka – na jaké křivce leží body maximální výšky, kam dostříkne hadicí (při zanedbání odporu vzduchu), bude-li stát na místě, stříkat jedním směrem a bude pouze měnit úhel náklonu hadice ve vertikální rovině? Přijdete na to dřív než on? Zkuste křivku popsat matematicky a graficky znázornit.

Řešení:

Trajektorie vody odpovídá šikmému vrhu s počáteční rychlostí v_0 a sklonem α vůči vodorovné rovině. Je známo, že stojí-li zahradník v počátku, nejvyšší bod takové trajektorie leží na souřadnicích

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Z toho se lze dalšími úpravami zbavit proměnné α a získat obecný předpis pro křivku:

$$x^2 = \frac{v_0^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 2y(1-\sin^2\alpha)}{g} = \frac{2v_0^2}{g}y - 4y^2 =$$

$$= \frac{v_0^4}{4g^2} - \frac{v_0^4}{4g^2} + \frac{2v_0^2}{g}y - 4y^2 = \frac{v_0^4}{4g^2} - \left(2y - \frac{v_0^2}{2g}\right)^2$$

Celkově dostáváme rovnici elipsy, a to je křivka, po níž se bod maximální výšky pohybuje:

$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$

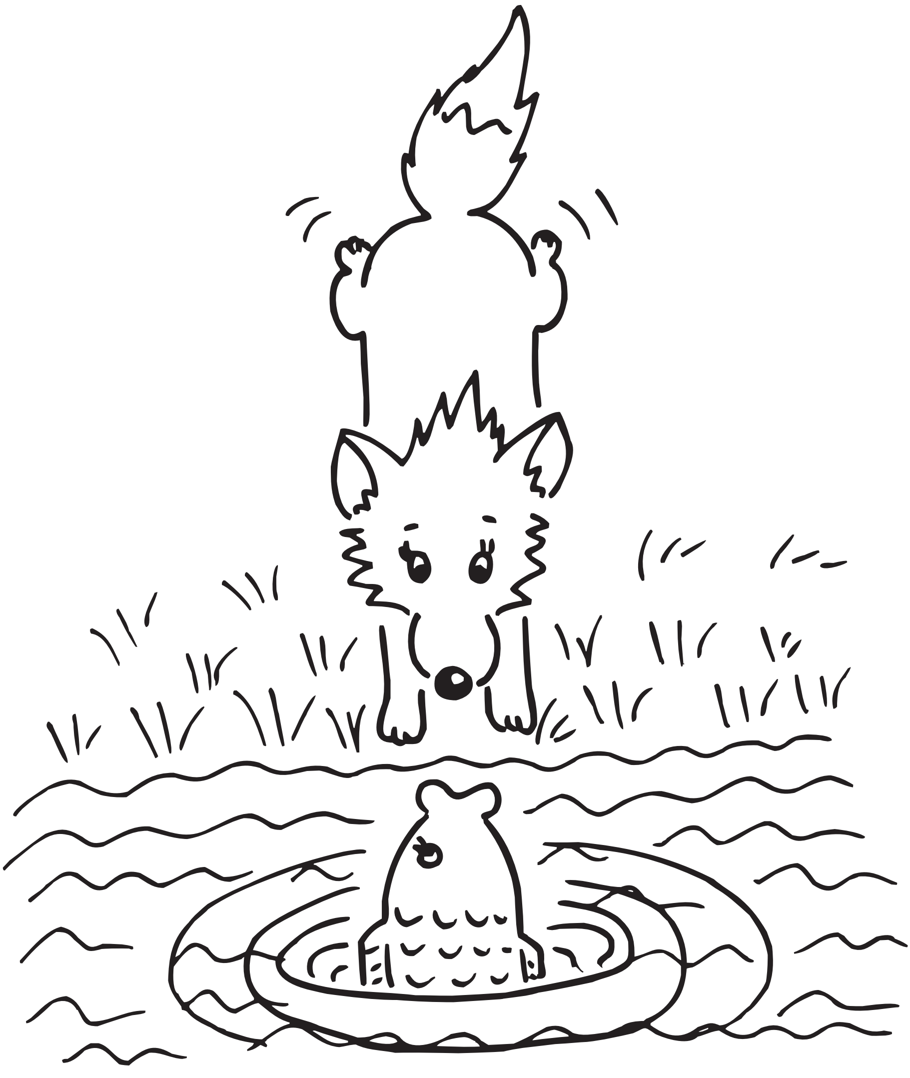
Evžen

Výsledková listina 2. čísla

				Úlohy					
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	$\sum_{0}$	$\sum_{1}$
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Havelka	2	42,0	3,0	2,0	0,5	1,9	7,4	29,0
2.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Kalousková	2	19,0	3,0	3,0	5,0	2,0	13,0	19,0
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Rosická	3	55,2	3,0		5,0	2,0	10,0	18,7
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$Z. Urbanová	4	45,2	3,0	3,0			6,0	16,7
5.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$K. Čížková	4	48,1	3,0			2,0	5,0	15,5
6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$O. Buček	4	55,5	3,0	2,5	0,3	1,9	7,7	15,3
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$R. Olšák	3	33,4	3,0	3,0		0,5	6,5	11,6
8.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$J. Löffelmann	4	11,1					0	11,1
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Bukvaj	2	24,0					0	11,0
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Domes	3	24,9					0	8,3
11.	E. Vítková	2	8,0					0	8,0
12.–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$K. Balej	3	55,2			0,5	1,5	2,0	7,9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$B. Hroncová	3	46,7				2,0	2,0	7,9
14.–15.	J. Ponic	4	7,7					0	7,7
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$B. Požár	4	38,6					0	7,7
16.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Růžička	3	29,7					0	7,5
17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Suchánek	4	42,2					0	7,1
18.	D. Saracino	4	6,7					0	6,7
19.	P. Trembulaková	4	6,5					0	6,5
20.–21.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$F. Kmječ	2	13,4					0	6,0
	A. Trojanová	3	6,0					0	6,0
22.	A. Foglarová	3	5,6					0	5,6
23.–25.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$O. Gonzor	1	19,7					0	5,5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Kundratová	3	48,2					0	5,5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$A. Neubauerová	4	22,5					0	5,5
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$V. Procházka	4	14,3					0	5,3
27.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$A. Mlezivová	4	110,7					0	5,2
28.–30.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$F. Čermák	4	56,7					0	5,0
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Holubička	2	27,3		0,0		0,5	0,5	5,0
	Dr.$^{\mathrm{MM}}$L. Vincenová	4	50,5					0	5,0
31.	M. Bučková	1	4,9	3,0				3,0	4,9
32.–33.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Bujnovská	4	22,9					0	4,8
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$T. Poláková	4	11,1					0	4,8
34.	K. Tauchmanová	4	4,2				0,7	0,7	4,2
35.	A. Hollmannová	1	4,0					0	4,0
36.	M. Boček	Z8	3,9					0	3,9

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	M. Kripner	3	3,2					0	3,2
38.	R. Wágner	4	3,0					0	3,0
39.–40.	J. Kaifer	2	2,5					0	2,5
	Š. Sulanová	2	2,5					0	2,5
41.–42.	K. Levíčková		2,0					0	2,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$Z. Lüköová	3	15,1	2,0			0,0	2,0	2,0
43.	K. Hloušková	2	0,9	0,5			0,4	0,9	0,9

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`