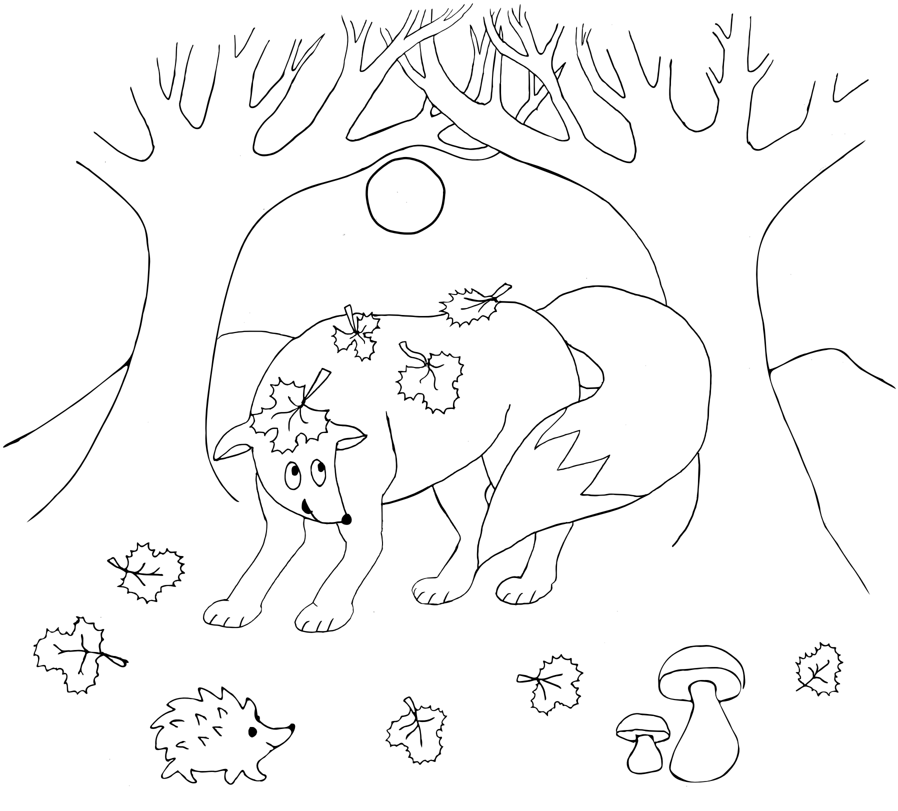
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIV
Číslo 3

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik úloh a témat k zamyšlení. Vyřešte je a pošlete nám je. My vám je opravíme a pošleme zpět s dalším číslem, nejzajímavější řešení otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,
nové číslo časopisu M&M je tady, takže se rovnou můžete pustit do řešení dalších úloh. Pokud jste posílali první sérii nebo byste si chtěli udělat lepší představu o tom, jak úlohu správně sepsat, určitě oceníte zveřejněná vzorová řešení. Stále můžete posílat příspěvky ke všem letos zadaným tématům, jejichž kompletní zadání najdete na `mam.matfyz.cz/zadani/temata`. Předtím si ale určitě přečtěte otisknutý příspěvek Mgr.^MM^ Jonáše Havelky a doplňující otázky, abyste na ně při svém výzkumu mohli navázat. Také připomínáme, že se kvapem blíží vánoční víkendovka, pokud tedy chcete jet, přihlaste se neprodleně! Těm z vás, se kterými se na víkendovce nepotkáme, přejeme veselé Vánoce a hodně zdaru nejen při řešení M&M v roce 2018.

Vaši organizátoři

Zadání úloh

Termín odeslání 3. série: 16. 1. 2018

Pokuřuji dýmku na své terase schovaný před mírným mrholením. Mraky jsou roztrhané a mezi nimi prosvítají sluneční paprsky, a tak se mi naskýtá pohled na krásnou duhu. Odložím dýmku a přihnu si ze sklenky červeného vína. Slunce se blíží k obzoru a já přemýšlím, jak dlouho budu ještě moci sledovat tu úchvatnou hru barev.

Úloha 3.1 – Západ duhy (4b)

Jak dlouho po západu Slunce můžeme o jarní rovnodennosti z rovníku vidět duhu, která se utvoří na dešťových kapkách? Pokud potřebujete znát nějaké parametry, tak si je vyhledejte nebo odhadněte. Jak bude taková duha vypadat?

Po dlouhé době mám klidný večer. Jakožto soukromému očku se mi to moc často nestává. Normálně touto dobou sleduji pány, jestli po práci nejedou nejdříve za milenkou a až poté za manželkou, nebo zaměstnance prodávající obchodní tajemství konkurenci. Minulý měsíc jsem pracoval na zapeklitém případu, kdy majitel prosperující mezinárodní firmy sdělil heslo k trezoru s uloženými informacemi dvěma svým zástupcům, kteří se měli potkat pouze v případě jeho úmrtí. Zástupci se však zkontaktovali za zády svého šéfa, trezor vybrali a informace prodali.

Úloha 3.2 – Součet a součin 2 čísel (3b)

Majitel firmy určil na trezoru heslo, které tvoří dvě přirozená čísla X a Y tak, že platí $1 < X < Y$ a $X+Y < 100$. Dva jeho zástupci mají za úkol se v případě šéfova úmrtí sejít a uhodnout heslo k trezoru (mají na zadání hesla právě 2 pokusy, aby mohli vyzkoušet záměnu pořadí čísel). Prvnímu zástupci majitel pověděl součin těchto čísel a druhému součet.

První: „Nedokážu ta čísla určit.“
Druhý: „To jsem věděl.“
První: „Nyní už je znám.“
Druhý: „A já také.“

Jaká čísla tvoří heslo k trezoru?

Sklenka vína a stejně tak i láhev jsou najednou prázdné, podobně jako zmíněný trezor. Zazvoní mi telefon. Klidný večer mi tedy moc dlouho nevydržel. Volá starý známý s prosbou o pomoc. Láhev vína však s mou myslí udělala své a jeho úkol o hledaných trojicích lidí splňujících dané vlastnosti mi zní poněkud záhadně.

Úloha 3.3 – Prvočísla (3b)

Určete všechny trojice prvočísel (p, q, r) splňující $p + q^2 = r^4$.

Proč bych měl někoho hledat, mi neřekl, ale já slibuji, že se na to brzy podívám. Zítra mě čeká ještě jeden úkol. Musím zavolat opraváři, můj soukromý telefon dnes nějak zlobí. Přicházejí na něj celý den jedničky a nuly.

Úloha 3.4 – Dělitelnost dlouhého čísla (2b)

Po drátě nám celý den přichází velmi dlouhé číslo zapsané ve dvojkové soustavě. Na konci dne máme rozhodnout, zda je toto číslo dělitelné třemi. Navrhněte algoritmus, který to bude umět vyřešit. Počítejte s tím, že se číslo nevejde do žádné paměti.

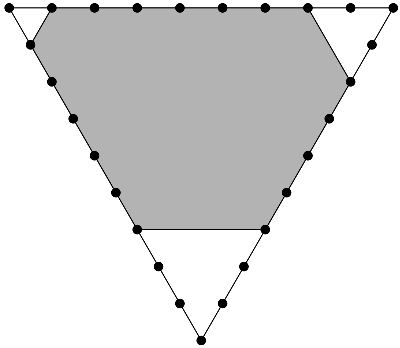
Ještěže pracovní telefon mi funguje, jinak bych se asi zbláznil.

Řešení úloh 1. série

Úloha 1.1 – Šestiúhelník (3b)

Zadání:
Existuje šestiúhelník takový, že všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké a délky stran jsou 1, 2, 3, 4, 5, 6 (v libovolném pořadí)?

Řešení:
Ano, takový šestiúhelník existuje. Ukážeme si jednoduchý způsob, jak jeho existenci dokázat. Vezmeme si rovnostranný trojúhelník o straně délky 9. Z jeho rohů odkrojíme rovnostranné trojúhelníky o stranách 1, 2 a 3. Ze stran velkého trojúhelníku zbyly úseky dlouhé 4, 5 a 6. Díky tomu, že odkrajované trojúhelníky svírají s původními stranami úhel 60°, má náš šestiúhelník všechny úhly 120°. Zároveň má kýžené délky stran.



Obrázek 1: Jedno z možných řešení úlohy

Tímto způsobem jsme sestrojili řešení, které uspořádává strany šestiúhelníka v pořadí 1, 5, 3, 4, 2, 6. Kromě něj existuje ještě jedno řešení a to uspořádává strany v pořadí 1, 4, 5, 2, 3, 6. Každé z těchto řešení existuje ve 12 otočeních a/nebo převráceních. Početní způsob, jak tato řešení najít bez výše uvedeného nápadu, je všimnout si, že každá dvojice sousedních stran musí dávat stejný součet jako protilehlá dvojice sousedních stran, jinak by nebyly zbývající dvě strany šestiúhelníka rovnoběžné. Po chvíli zkoušení dospějeme k těmto dvěma řešením.

Martin

Úloha 1.2 – Modrá kulička (3b)

Zadání:

Určete, z jaké vzdálenosti by musela být pořízena fotografie Zeměkoule, aby vypadala tak, jak je naznačeno na Obrázku 2.

Nezapomeňte kromě samotné vzdálenosti také napsat, jak jste k výsledku dospěli, a zkuste odhadnout nepřesnost vaší metody.

Řešení:

K této úloze přišlo mnoho řešení, bohužel se však mezi nimi nenašel ani jediný správný výsledek. Všechna kompletní řešení totiž udělala zásadní chybu v tom, že ve svém odhadu využívala „tečných bodů“, které vidíme na kraji obrázku, tedy v místech, kde je povrch Země téměř rovnoběžný s naším pohledem, což se projeví enormním nárůstem odchylky. Proto i řešení, která byla v principu správně, došla k výsledku řádově tisíce kilometrů vzdálenému skutečnosti.

Obrázek byl generován ze vzdálenosti 18 340 km od středu Země a zde předvedu postup, jak se dalo k tomuto výsledku dopracovat s rozumnou odchylkou.

Začneme tím, že si uvědomíme, jak taková fotografie vzniká. Princip nejjednoduššího způsobu, tzv. dírkové komory, spočívá v průchodu paprsku jdoucího z jistého bodu pozorovaného objektu skrz úzkou štěrbinu a v následném dopadu

Obrázek 2: Schématické znázornění fotografie Země.

na stínítko, jímž je např. film, na němž zůstane po paprsku zanechána stopa (viz Obr. 3). Snadno se ověří, že každému bodu filmu odpovídá právě jeden bod focené scény, a že je takováto komora charakterizována jediným parametrem y, jímž je vzdálenost stínítka od štěrbiny. Snadno si rovněž každý představí, že aby vznikl tak pěkně symetrický obrázek, jako v zadání, musí fotoaparát zabírat Zemi zpříma, tj. paprsek jdoucí ze středu Země by dopadl na film kolmo.

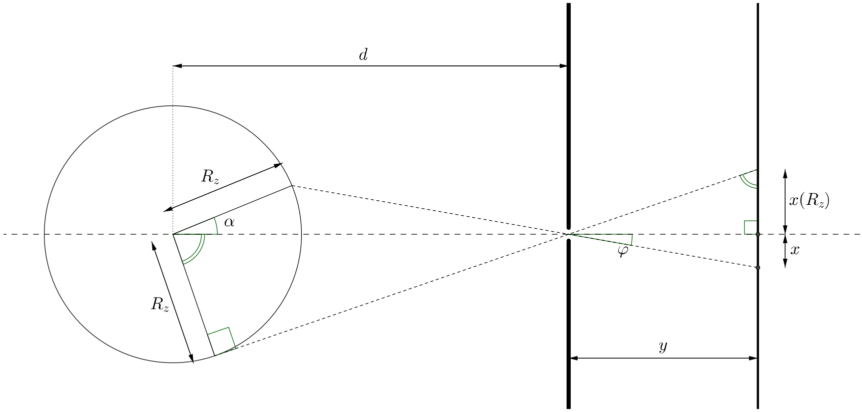
Princip čočkového fotoaparátu by byl podobný, čočka slouží především k přivedení více světla.

Další postup je následující: nalezneme střed obrázku (11,3° v.d. a 46,2° s.š.) a k němu nejméně jeden další dobře identifikovatelný „pomocný“ bod na obrázku. K nim změříme jejich vzdálenost na obrázku x a jejich skutečnou vzdálenost po povrchu Země (to lze, chceme-li se vyhnout složité goniometrii, např. v jakémkoli trochu pokročilém programu online map), ze které pak snadným lineárním převodem vyvodíme úhel α, pod kterým by tyto dva body byly vidět ze středu Země. Dále označíme-li strany a úhly vzniklého obrazce tak jako na Obr. 3, očividně ze sinové věty platí (úhly jsou udávány v radiánech):

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{x}{y}$$

$$\frac{d}{\sin(\pi - \alpha - \varphi)} = \frac{R_z}{\sin(\varphi)}$$

Zároveň pokud jako druhý „pomocný“ bod vybereme tečný bod, je z Obr. 3 patrné, že vzniknou dva sobě podobné trojúhelníky, z čehož lze vyvodit:



Obrázek 3: Dírková komora

$$\frac{x\left(R_z\right)}{y}=\frac{R_z}{\sqrt{d^2-R_z^2}}\Rightarrow y=\frac{x\left(R_z\right)}{R_z}\sqrt{d^2-R_z^2}=x\left(R_z\right)\sqrt{\frac{d^2}{R_z^2}-1},$$

kde $x\left(R_z\right)$ lze chápat jako poloměr zadaného obrázku. Dosazením do předchozího vzejde:

$$\frac{d}{R_z}=\frac{\sin\left(\pi-\alpha-\varphi\right)}{\sin\left(\varphi\right)}=\frac{\sin\left(\pi-\alpha\right)\cos\left(-\varphi\right)+\cos\left(\pi-\alpha\right)\sin\left(-\varphi\right)}{\sin\left(\varphi\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\varphi\right)}{\sin\left(\varphi\right)}+\frac{\cos\left(\alpha\right)\sin\left(\varphi\right)}{\sin\left(\varphi\right)}=\frac{\sin\left(\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\varphi\right)}+\cos\left(\alpha\right)=$$

$$=\sin\left(\alpha\right)\frac{x\left(R_z\right)}{x}\sqrt{\frac{d^2}{R_z^2}-1}+\cos\left(\alpha\right)$$

Pro pevně zadaný pomocný bod jsou nám známy všechny proměnné v získané rovnici s výjimkou parametru d, který představuje právě námi hledanou vzdálenost fotoaparátu od středu Země. Je to už však jen jedna rovnice o jediné neznámé, kterou navíc není ani obtížné přepsat na polynom, který umíme snadno vyřešit. Jeho obecné řešení by bylo na zápis poněkud komplikované a nebude zde uvedeno, pokud však dosadíme za známé proměnné konkrétní číselné hodnoty, práce se značně zjednoduší.

Co se týče odchylky nalezené hodnoty, ta lze z explicitního vzorce pro výpočet polynomu odvodit například snadno pochopitelnou metodou aritmetiky odchylek, tedy opakovanou aplikací vztahů:

$$\overline{a \pm b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{ab} = a\overline{b} + b\overline{a}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{b} + \frac{a\overline{b}}{b^2}$$

$$\overline{a}^n = n\overline{a}a^{n-1}$$

Vzhledem k tomu, že pro odchylku stačí jen hrubý odhad a že bylo v zájmu zvýšení přesnosti metody volit pomocný bod blíže středu než kraji obrázku, nemusíme se zde bát aproximace

$$\sin(\alpha) = \alpha; \cos(\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$$

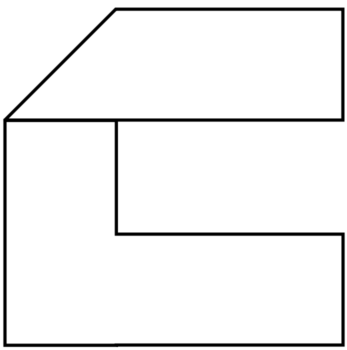
platné pro malé hodnoty α a nadále používat aritmetiku odchylek.

Evžen

Úloha 1.3 – Přehnuté písmeno (2b)

Zadání:

Někdo vzal velké tiskací písmeno a jednou ho přehnul. Vznikl tak útvar z obrázku 4. Jaké písmeno to bylo, pokud to nebylo velké L?

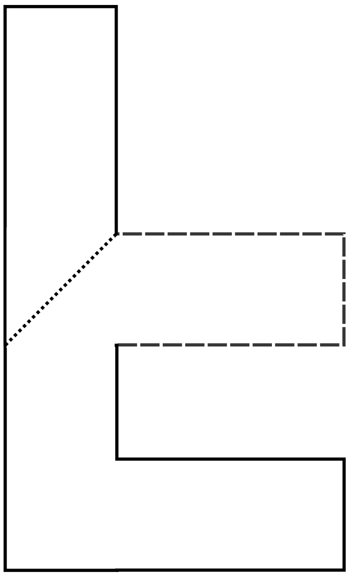


Obrázek 4: Jaké písmeno to před ohnutím bylo?

Řešení:

Úlohu vyřešíme vylučovacím způsobem. Nejdříve z velké tiskací abecedy vybereme písmena, která se skládají pouze z rovných částí a zároveň obsahují pravý úhel. Jsou to E, F, H, L, T.

L máme zakázané ze zadání. T nemá ramena pravého úhlu stejně dlouhá, k získání útvaru z obrázku bychom potřebovali více skládání. H má zase pravý úhel uprostřed, tedy opět by bylo případně potřeba více skladů.



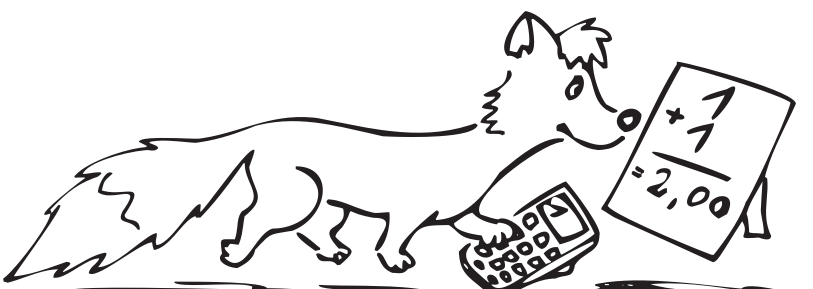
Obrázek 5: Čárkovaně je zobrazena zakrytá část písmene F, tečkovaně místo přehybu.

Zbývají E a F. U E bychom potřebovali na získání požadovaného útvaru více přehnutí. Naopak, z F můžeme získat požadovaný útvar přeložením spodní nohy písmena na nižší horizontální část písmene.

Někteří z vás si zadání nepřečetli dostatečně pečlivě a chybně proto uvažovali vícenásobné skládání.

Úloha se dala řešit několika alternativními způsoby. Někteří z vás si útvar ze zadání vystřihli z papíru. Mgr.$^{\mathsf{MM}}$Ludmila Bujnovská a Mgr.$^{\mathsf{MM}}$Jonáš Havelka zase (jako jediní zcela úspěšně) místo postupného vylučování písmen zkoušeli hledat všechny možné osy, podle kterých mohlo být písmeno přehnuté. Tento přístup považujeme za originální a ocenili jsme jej bonusovými desetinami bodů.

Anet



Úloha 1.4 – Medián dvou množin (4b)

Zadání:

Z hromádky kartiček očíslovaných od 1 do 2^k jsem si vybral m kousků, můj kamarád si poté vylosoval svých n kousků. Chtěli bychom zjistit medián čísel[1] *na všech našich kartičkách, ale nevíme, jaká čísla si vylosoval ten druhý. Jak máme postupovat, abychom si mezi sebou museli pro zjištění mediánu předat co nejméně bitů informace? Průběh výměny informací si dohodneme předem, tj. můžeme se například dohodnout, že nejdřív já pošlu své nejmenší číslo, pak kamarád pošle svoje nejmenší číslo atd.*

Řešení:

Na úvod si dovolím napsat něco málo o samotné úloze. Tato úloha pochází z odvětví teoretické informatiky zvaného *komunikační složitost*. Ta se zabývá právě tím, jak ve více lidech (obvykle ve dvou) spočítat nějakou zajímavou věc, když každý má jen část vstupních dat a když přitom chceme komunikovat co nejméně. Komunikační složitost hraje v současné informatice poměrně důležitou roli – jde totiž o jeden z mála nástrojů, pomocí kterých umíme o některých problémech dokázat, že pro ně neexistují „lepší“ algoritmy.

A teď už k samotnému řešení. Jak bývá v informatice zvykem, budeme se snažit o řešení, které je nejlepší jen asymptoticky[2] a nebudeme vše dopočítávat přesně.

Začneme s nejjednodušším možným řešením. Já si od kamaráda nechám poslat všech jeho n čísel – díky tomu mohu spočítat medián a ten pošlu zpět kamarádovi. Kolik bitů informace tak přeneseme? Inu, přeneseme celkem $n+1$ čísel. Čísla jsou z intervalu 1 až 2^k – na reprezentaci čísla nám tak stačí k bitů (čísla budeme přenášet zmenšená o jedničku)[3]. Přeneseme tedy $(n+1)k \in \mathcal{O}(nk)$ bitů.

To ale samozřejmě není nejefektivnější postup. K navrhnutí efektivnějšího protokolu využijeme jeden klíčový trik. Problém si trochu zobecníme – nebudeme hledat medián, ale d-tý největší prvek. Medián není nic jiného než $((n+m+1)/2)$-tý největší prvek (pro $n+m$ liché), nebo aritmetický průměr $((n+m)/2)$-tého a $((n+m+2)/2)$-tého největšího prvku, pokud tedy umíme najít obecně d-tý největší prvek, umíme najít i medián.

Náš trik bude podobný jako ve známém algoritmu pro nalezení mediánu v lineárním čase (pomocí mediánů pětic). Cílem bude se v každé fázi zbavit části prvků (konkrétně alespoň poloviny prvků jednoho z hráčů). To uděláme následovně: Já

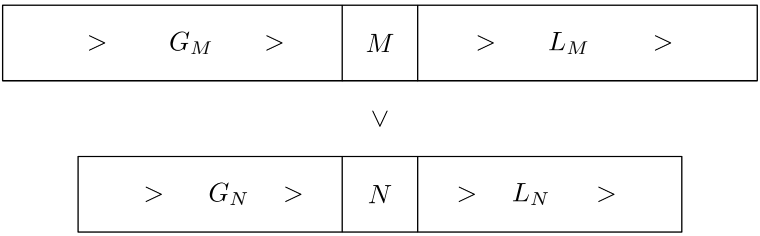
[1] Medián z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je takové a_i, že skončí přesně uprostřed, pokud čísla seřadíme podle velikosti. Je-li n sudé, pak jsou „prostřední“ prvky dva a medián je jejich průměr. Tedy medián z čísel 1, 4, 2, 5, 1 je 2, medián z čísel 1, 4, 2, 5 je $(4+2)/2 = 3$.

[2] To, že přeneseme $\mathcal{O}(n^2)$ bitů, znamená, že můžeme přenést třeba $10n^2 + 5n$ bitů (protože nejvýraznější člen je právě n^2), ale už ne třeba $0{,}0001n^3$ bitů (protože pro dostatečně velké n stejně $0{,}0001n^3$ přeroste n^2). Podrobněji je vše vysvětleno třeba zde: `http://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/slozitost/`.

[3] Čísla budeme reprezentovat jejich zápisem ve dvojkové soustavě doplněným o případné nuly na začátku tak, aby měl zápis přesně k cifer – bitů.

pošlu kamarádovi medián svých prvků a on mi na oplátku pošle informaci o tom, zda je můj medián větší než ten jeho. Co z toho dokážeme zjistit? Inu, označme si můj medián jako M, kamarádův medián jako N, dále množinu mých prvků větších než M jako G_M a množinu mých prvků menších než M jako L_M, analogicky množina kamarádových prvků větších než N bude G_N a menších než N bude L_N. Ještě si jako S označíme posloupnost všech čísel (mých a kamarádových) seřazenou sestupně.

Nyní předpokládejme, že M je větší než N (opačný případ funguje analogicky). Potom určitě můžeme říct, že prvky z G_M se nachází někde v první polovině S. Zjevně všechny prvky z G_M jsou v S před M a před vším z L_M – to je alespoň $m/2$ čísel, která jsou v S za G_M. Ale zároveň je M větší než N, a tudíž je M větší než všechny prvky z L_N. Z toho ale plyne, že všechny prvky z G_M jsou v S před N a L_N, což je dalších alespoň $n/2$ čísel. Tudíž za prvky z G_M je v S alespoň $(m+n)/2$ dalších prvků (neboť moje a kamarádova posloupnost neobsahuje stejné číslo). Pro lepší představu je celá situace znázorněna na Obrázku 6.



Obrázek 6: Schéma nerovností v mojí a kamarádově posloupnosti po poslání mediánu – nahoře je moje posloupnost, dole kamarádova.

Co z toho můžeme usoudit o hledaném d-tém největším prvku? Pokud je $d \geq (m+n)/2$, tedy hledaný prvek je ve druhé polovině S, víme, že to není žádný z prvků G_M. Můžeme tedy celé G_M zahodit a dále hledat jen $(d-|G_M|)$-tý největší prvek. Podobný argument můžeme použít pro $d < (m+n)/2$, jen s tím rozdílem, že tentokrát můžeme zahodit prvky z L_N a dále hledat d-tý největší prvek.

A kdy skončíme? Inu, když má jeden z hráčů už dostatečně málo prvků, řekněme dva, tak prostě pošle tomu druhému své prvky a jeho protějšek už triviálně spočítá medián[4].

A kolik informace přeneseme? V každé fázi komunikace[5] přeneseme jedno k-bitové číslo (medián) a jeden bit navíc, který signalizuje, zda je můj medián větší než ten kamarádův. Jedinou výjimkou je poslední fáze, kdy přenesme až tři čísla – dvě za posloupnost jednoho z hráčů a jedno za výsledný medián. Tedy celkem

[4] Rozpoznání konce nemusíme v komunikaci nijak řešit – oba hráči na začátku ví, kolik má jejich protějšek čísel, a z poslaných informací mohou vždy určit, kolik čísel v daném kroku jejich protějšek zahodil. Tedy oba poznají, kdy se má přejít do „finální fáze“.

[5] Fází máme na mysli celou část komunikace začínající tím, že já pošlu kamarádovi svůj medián, a končící tím, že jeden z nás zahodí část svých prvků.

$\mathcal{O}(k)$ bitů na fázi. A kolik bude fází? Pro jednoduchost předpokládejme, že $m \geq n$. V každé fázi jeden z hráčů zmenší počet svých prvků na polovinu – nemůže tedy proběhnout více než $(\log m + \log n) \in \mathcal{O}(\log m)$ fází. Celkem tedy přeneseme $\mathcal{O}(k \log m)$ bitů.

Algoritmus přenášející tolik bitů informace stačil na plný počet bodů – byť lze vytvořit i lepší. Spousta z vás použila algoritmus, který přenese jen $\mathcal{O}(k \log n)$ bitů ($n \leq m$). Ten funguje v podstatě jako výše popsaný algoritmus, jen s tím rozdílem, že v každé fázi zahazují prvky oba hráči – je ale třeba dát pozor, aby se vždy zahodil stejný počet prvků před a za mediánem.

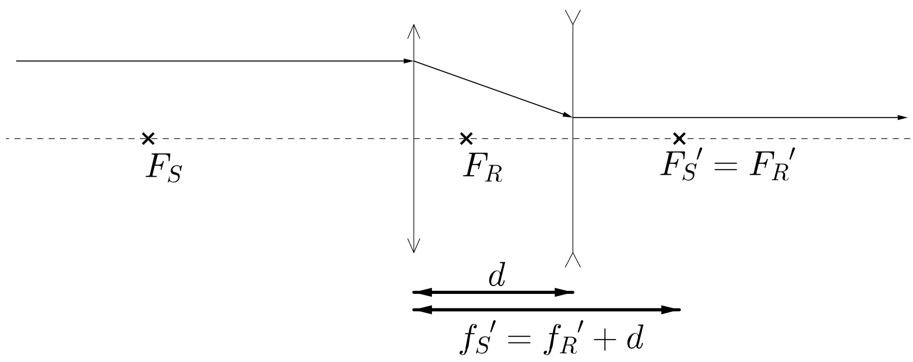
Na závěr ještě zmíníme, že ani $\mathcal{O}(k \log n)$ není optimální řešení. Existuje algoritmus, kterému stačí přenést jen $\mathcal{O}(k)$ bitů.

$\mathcal{O}(N)$ dra

Řešení témat

Téma 1 – Krotitelé světla

K mému tématku dorazil příspěvek od Pavly Trembulakové, která v něm rozebírá situaci za sebou postavené spojky a rozptylky se společnou osou a obrazovým ohniskem ${F_S}' = {F_R}'$ a správně dochází k závěru, že svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou při průchodu sestavou čoček tuto vlastnost zachovává, jen z ní vychází více koncentrovaný, přičemž míra koncentrace stoupá s rostoucí vzájemnou vzdáleností čoček d za podmínky, že vzdálenost středů obou čoček je ostře menší než ohnisková vzdálenost spojky, tedy $|d| < |{f_S}'|$.



Obrázek 7: K příspěvku od Pavly Trembulakové

Dále se tento příspěvek zabývá tělesem se schopností držet v sobě paprsek co nejdéle. Navrhuje zde za těleso vzít hranol, čímž se úloha zjednoduší do pouhých dvou dimenzí. Problém však zůstává nadále otevřen.

Tyto výsledky bych ponechal jako inspiraci dalším řešitelům a přidal k nim doplňující úkoly. Za prvé: Pavla Trembulaková, která u čoček využívá paraxiální aproximaci, dochází k závěru, že se svazek při zvětšování vzdálenosti čoček zužuje limitně až k nulové tloušťce, ačkoli jí nikdy nedosáhne. Mým doplňujícím úkolem je zjistit, zda je tato limita platná i mimo paraxiální aproximaci, a pokud ne, tak odhadnout, k jaké šířce se svazek doopravdy blíží.

Za druhé je pěkné, že byl problém hledání světlo absorbujícího tělesa zjednodušen do 2D, ale je potřeba ho dotáhnout o něco dál. Proto navrhuji omezit se pouze na hranoly, jejichž podstavu tvoří pravidelný n-úhelník, a zabývat se otázkou, kolik úplných odrazů v takovém hranolu může vstoupivší paprsek nejvýše vykonat, popřípadě jak tento počet odrazů závisí na n. Existuje takový hranol, ve kterém může dojít k libovolnému počtu odrazů? Odpovídá vyšší počet odrazů skutečně vždy delší dráze uražené v objektu?

Na závěr bych se vrátil k samotnému významu paraxiální aproximace. Už v úvodu do tohoto tématka jsme si řekli, že tato aproximace spočívá ve zjednodušení výpočtů dosazením $\sin(x) = x = \mathrm{tg}(x)$ pro malé x. Dále je známo, že jejím použitím se dá dokázat, že paprsky rovnoběžné s optickou osou se v její blízkosti odráží bez výjimky do ohniska. Já, v rámci procvičení neaproximovaných výpočtů, tímto vypisuji odměnu pěti bodů na zodpovězení otázky: Kam se lámou obecné paprsky rovnoběžné s optickou osou? Dalších pět bodů přihodím za dokázání výše uvedené skutečnosti o lámání do ohniska v paraxiální aproximaci!

Tím protentokrát vsuvku k tématku uzavírám, přeji hodně štěstí v řešení.

Evžen

Téma 3 – Mafie jako výpočetní model

Přišel nám příspěvek od Mgr.^MM^ Jonáše Havelky, ve kterém řeší hned několik problémů zadaných k tématku. Konkrétně ve svém článku navrhnul najít na grafu mafiánů kostru. Pomocí toho se mu podařilo alespoň z části spočítat mafiány, omezit přímou komunikaci mezi nimi při zachování doručitelnosti dopisů a spočítat, jak dlouho trvá rozeslat zprávu všem ostatním mafiánům. Sčítání majetku a zjišťování souvislosti mafie[6] tedy stále zůstávají otevřené. Konkrétně by bylo zajímavé najít algoritmus, který zjistí, zda existuje jeden mafián takový, že po jeho zatčení mezi některou dvojicí mafiánů nebude existovat způsob, jak poslat dopis. Dále by bylo zajímavé umět přesně spočítat maximální vzdálenost v grafu.

Problém současné mafie je, že dopravování zpráv může trvat dlouho. Je tedy potřeba mafii přeuspořádat tak, aby se zpráva mohla dostat mezi libovolnými dvěma mafiány co nejrychleji. To odpovídá tomu, aby byl průměr jejího grafu (délka nejdelší nejkratší cesty) co nejmenší. Můžete se mafii současně snažit přeuspořádat tak, aby navíc bylo třeba zatknout hodně mafiánů na to, aby se mafie rozpadla. Každý mafián by měl po úpravě mafie stále znát ne příliš mnoho jiných mafiánů.

[6] Souvislost mafie je počet mafiánů, které musíme zatknout, aby si někteří dva mafiáni nemohli vyměňovat zprávy přes nezatčené mafiány.

Prozradíme, že lze splnit obě podmínky zároveň a že to souvisí s takzvanými expandery. Expander je graf, který má velikou „souvislost“ (minimální počet vrcholů které je potřeba odstranit, aby graf přestal být souvislý) a malý průměr. Takové grafy se dají zkonstruovat například tím, že vezmeme v jistém smyslu náhodný graf. Může se tedy hodit ve vašem řešení využívat náhodu a ukázat, že vaše řešení bude pravděpodobně dobré.

Jako vždy, budeme rádi, pokud si vymyslíte vlastní problém, který by mafiáni mohli řešit, a pošlete nám jeho řešení. Výše zmíněné problémy berte jen jako inspiraci.

Pokud vám něco není jasné, máte otázky, nebo mi chcete ohledně tématka napsat, můžete tak učinit e-mailem na adresu `jakub.tetek+mam@matfyz.cz`.

Kuba

Mafiánské stromy (10b)

Mgr.[MM] *Jonáš Havelka*

Pro různé výpočty v grafu se mohou hodit stejné, anebo podobné struktury, které si mohou mafiáni předpřipravit, aby následné výpočty probíhaly rychleji. Takové struktury vznikají, pokud si někteří mafiáni „přestanou“ psát. Tito mafiáni si mohou psát i nadále, takže v některých případech můžeme kombinovat i více takových struktur. V algoritmu se ale často vyplatí, že mafiáni vědí, kam mají dopisy poslat.

K první takové struktuře nás vede hned 2. navrhnutá úloha ze zadání[7]. Grafem s nejméně hranami je strom[8] obsahující všechny vrcholy (neboli kostra grafu), ten má totiž o jednu méně hran než vrcholů a pro každý souvislý graf musí platit, že všechny vrcholy (kromě prvního) jsou se zbytkem spojeny pomocí jedné hrany. Méně než $n-1$ hran mít tedy mafiáni nemohou[9].

Konstrukce stromů

Strom sestavíme tak, aby z kořene[10] ke každému členu byla co nejkratší cesta. Tedy jeden předem zvolený mafián pošle dopis všem svým „známým“. Každý z mafiánů po prvním přijetí rozešle dopis všem mafiánům, které zná, a zapamatuje si, odkud dopis přišel – tím směrem leží kořen. Když dopis dostane podruhé, znamená to, že i odesílatel dostal dopis ve stejnou chvíli, tudíž si nemusejí psát a tato hrana nebude ve stromu obsažena. Potřetí už dopis nedostane, protože všichni

[7] Mafiáni by chtěli co nejvíce omezit počet dopisů, které pošlou. Rozhodli se proto, že si spolu někteří mafiáni přestanou dopisovat. Najděte co nejvíce dvojic, které si spolu mohou přestat dopisovat tak, aby stále mezi libovolnou dvojicí mafiánů existovala cesta.

[8] Strom = souvislý graf bez kružnic. Kružnice (někdy též cyklus) = množina hran s vrcholy tvořící (topologickou) kružnici. Tedy z každého vrcholu vychází 2 hrany a oba směry, kterými se můžeš vydat z jednoho vrcholu kružnice, tě zavedou na kterýkoliv vrchol, aniž bys šel po jedné hraně dvakrát.

[9] Písmeno n označuje počet vrcholů.

[10] Kořen = jeden (pevně zvolený) vrchol stromu. List = vrchol stromu, který je spojen pouze s jedním dalším vrcholem a není kořenem.

jeho sousedi už dopis dostali od něho. Ještě se může stát, že dostane dopis od více známých najednou, to má pak stejně daleko ke kořenu přes všechny, tedy kromě jednoho si s nimi nemusí psát, tedy pošle jim nějaký „ukončovací“ dopis, který vyjádří, že se k němu dostává dopis jinudy. Tím odstraníme všechny kružnice a dostaneme strom.

Úlohy na sčítání

Stromy se skvěle hodí, pokud chceme sečíst hodnoty, které mají u sebe různí mafiáni. Když se vrátíme k druhému návrhu ze zadání, zjistíme, že úkolem nebylo takové seskupení vytvořit, ale spočítat, kolik hran můžeme smazat. Každý mafián si pamatuje, s kolika lidmi si přestal psát, a tyto hodnoty musíme sečíst. Začneme od listů. Mafiáni v listech pošlou svůj počet směrem ke kořenu, a když mafián dostane počet od všech mafiánů dále od kořene, než je sám, pošle jejich součet sečtený se svým počtem opět ke kořenu. V kořeni pak vyjde součet všech ukončených vztahů, bohužel však z obou stran, tedy počet ještě musíme vydělit dvěma.

Speciálním případem je, když každý mafián bude mít číslo 1. Součet n-krát jedné je samozřejmě roven n, tedy sečtením jedniček dostanu počet mafiánů (nedělím dvěma, každého přičtu právě 1). Nebo můžeme mafiánům určit hodnotu 1, nebo -1, podle toho, jestli hlasují pro, nebo proti nějakému návrhu. Toto hlasování je rychlé, ale veřejné. Tajný přenos ve stromě neučiníme, jelikož do a z listů jde informace přes jednoho člověka, tedy nelze poslat klíč pro zašifrování.

Dále můžeme listům dát číslo 1 a ostatním 0, čímž vypočítáme počet listů. To se nám může hodit, pokud chce kořen rozeslat něco tak, aby to viděli všichni, nemuselo se to vracet a nemuseli to kopírovat jiní.

Úlohy na měření vzdálenosti

Jedinou vzdálenost, kterou určíme přesně, je vzdálenost mezi kořenem a nejvzdálenějším listem. Tentokrát ale můžeme poslat dopisy jakékoliv, protože bude záležet jen na čase, za jaký se dopis dostane z listu do kořene. Z listů vyjdou první dopisy. Každý další mafián vždy počká, až přijde dopis od všech mafiánů dále od kořene. Pak pošle dopis dál. Ve chvíli, kdy přijde poslední dopis do kořene, odečteme počet dnů, a tak dostaneme požadovanou vzdálenost. Nejvzdálenější nikde nečekal.

Jinou vzdálenost mezi dvěma body nejde přesně určit, jelikož velká část hran byla zapomenuta. Můžeme však alespoň učinit horní a dolní odhad vzdálenosti dvou nejvzdálenějších mafiánů. Určitě nebude delší než dvojnásobek největší vzdálenosti list–kořen, jelikož nejhůře může jít z listu do kořenu a odtud bude rozeslán až do zbylých listů. Nejméně pak největší vzdálenosti list–kořen, jelikož z kořenu do tohoto listu kratší cesta neexistuje.

Časová složitost je všude maximálně list–kořen, jelikož výpočet jde právě touto cestou, dokonce i u konstrukce stromu. Délka textu pak v některých případech (prázdné dopisy) bude v podstatě nulová, u jiných nepřekročí počet členů × délka informace jednoho člena, jelikož každý pošle jen jeden dopis. Jelikož největší vzdálenost mezi mafiány byla odhadnuta mezi maximální vzdáleností list–kořen a jejím dvojnásobkem, v asymptotické složitosti je jedno, kam kořen umístíme.

Výsledková listina 1. čísla

				Úlohy							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t1**	**t3**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\text{MM}}$J. Havelka	2	34,6	3,8	3,0	2,3	2,5		10,0	21,6	21,6
2.	Bc.$^{\text{MM}}$J. Löffelmann	4	11,1	3,0	2,8	2,3	3,0			11,1	11,1
3.	Mgr.$^{\text{MM}}$M. Bukvaj	2	24,0	4,0	2,5	2,0	2,5			11,0	11,0
4.	Mgr.$^{\text{MM}}$Z. Urbanová	4	39,2	4,0	0,7	2,0	4,0			10,7	10,7
5.	Mgr.$^{\text{MM}}$K. Čížková	4	43,1	4,0	2,5	2,0	2,0			10,5	10,5
6.	Mgr.$^{\text{MM}}$K. Rosická	3	45,2	4,0	2,7	2,0				8,7	8,7
7.	Mgr.$^{\text{MM}}$J. Domes	3	24,9	3,6	2,7	2,0				8,3	8,3
8.	E. Vítková	2	8,0	3,0	2,0	2,0	1,0			8,0	8,0
9.–10.	J. Ponic	4	7,7	3,8	2,0	1,9				7,7	7,7
	Mgr.$^{\text{MM}}$B. Požár	4	38,6	3,0	2,7	2,0				7,7	7,7
11.	Mgr.$^{\text{MM}}$O. Buček	4	47,8	3,1	2,5	2,0				7,6	7,6
12.	Mgr.$^{\text{MM}}$J. Růžička	3	29,7	3,1	2,5	1,9				7,5	7,5
13.	Mgr.$^{\text{MM}}$J. Suchánek	4	42,2	2,1		2,0	3,0			7,1	7,1
14.	D. Saracino	4	6,7	2,2	2,5	2,0	0,0			6,7	6,7
15.	P. Trembulaková	4	6,5		0,5	2,0		4,0		6,5	6,5
16.–18.	M. Kalousková	2	6,0	3,0	1,0	2,0				6,0	6,0
	Bc.$^{\text{MM}}$F. Kmječ	2	13,4			2,0	4,0			6,0	6,0
	A. Trojanová	3	6,0	1,0	1,0	2,0	2,0			6,0	6,0
19.–20.	Dr.$^{\text{MM}}$K. Balej	3	53,2	4,0		1,9				5,9	5,9
	Mgr.$^{\text{MM}}$B. Hroncová	3	44,7	3,2	2,7					5,9	5,9
21.	A. Foglarová	3	5,6	3,6		2,0				5,6	5,6
22.–24.	Bc.$^{\text{MM}}$O. Gonzor	1	19,7			2,0	3,5			5,5	5,5
	Mgr.$^{\text{MM}}$L. Kundratová	3	48,2	3,5		2,0				5,5	5,5
	Mgr.$^{\text{MM}}$A. Neubauerová	4	22,5	3,5		2,0				5,5	5,5
25.	Bc.$^{\text{MM}}$V. Procházka	4	14,3	0,5	2,8	2,0				5,3	5,3
26.	Doc.$^{\text{MM}}$A. Mlezivová	4	110,7	3,2		2,0				5,2	5,2
27.	Mgr.$^{\text{MM}}$R. Olšák	3	26,9	3,1		2,0				5,1	5,1
28.–29.	Dr.$^{\text{MM}}$F. Čermák	4	56,7	3,0		2,0				5,0	5,0
	Dr.$^{\text{MM}}$L. Vincenová	4	50,5	3,0		2,0				5,0	5,0
30.–31.	Mgr.$^{\text{MM}}$L. Bujnovská	4	22,9	2,5		2,3				4,8	4,8
	Bc.$^{\text{MM}}$T. Poláková	4	11,1	2,5		2,3				4,8	4,8
32.	Mgr.$^{\text{MM}}$M. Holubička	2	26,8		2,5	2,0				4,5	4,5

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
33.	A. Hollmannová	1	4,0	1,0	0,5	0,0	2,5			4,0	4,0
34.	M. Boček		3,9	2,0		1,9				3,9	3,9
35.	K. Tauchmanová	4	3,5			2,0	1,5			3,5	3,5
36.	M. Kripner	3	3,2	3,2						3,2	3,2
37.	R. Wágner	4	3,0		1,0	2,0				3,0	3,0
38.–39.	J. Kaifer	2	2,5		1,0	0,0	1,5			2,5	2,5
	Š. Sulanová	2	2,5	0,0	0,5	2,0				2,5	2,5
40.	K. Levíčková		2,0			2,0				2,0	2,0
41.	M. Bučková	1	1,9			1,9				1,9	1,9

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Kontakty:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`