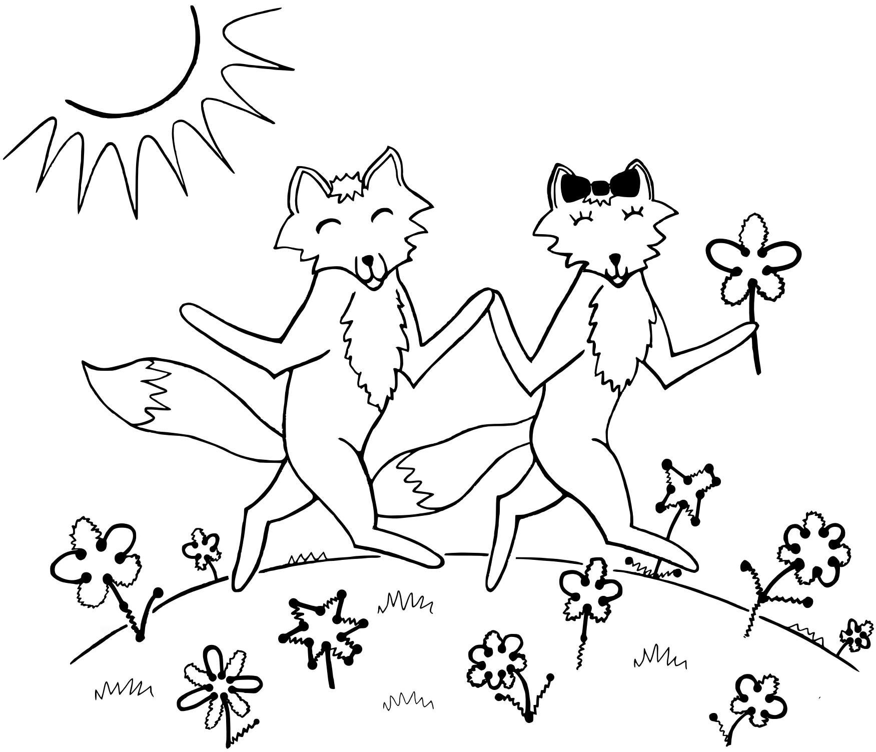
Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXIII / Číslo 7



Řešení úloh 5. série – str. 2

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí řešitelé,

je tady další, sedmé, číslo časopisu M&M, ve kterém naleznete vzorová řešení úloh páté série. Dále vás chceme upozornit na některé nadcházející prima akce: V úterý 8. června se koná Vědohraní, den plný zábavy s Fyzikou, dále 24.–25. 6. bude Robotický den, kde je možno soutěžit nebo si poslechnout zajímavé přednášky. Sami, nebo s celým týmem, se můžete přihlásit do soutěže Matfyz FEAT – Fyzikální Experimenty ATraktivně – uzávěrka přihlášek je 16. června. Tradiční přednášková noc na Gymnáziu Botičská v Praze bude 2. června.

Krásné prožití jarních dnů přejí

Organizátoři

Řešení úloh 5. série

Úloha 5.1 – Sčítací posloupnost (5b)

Zadání:

Postupně tvoříme posloupnost následujícím způsobem:

Začínáme se dvěma jedničkami. Mezi ně přidáme dvojku. Poté přidáme číslo 3 mezi všechna čísla, jejichž součet je 3. To samé opakujeme s dalšími čísly. Číslo n přidáme mezi všechna sousedící čísla v posloupnosti, jejichž součet je roven n. Po přidání čísla 5 tedy bude posloupnost vypadat následovně:

$$1, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 1.$$

Zjistěte, jak se dá charakterizovat počet výskytů čísla n (poté, co bylo do posloupnosti přidáno).

Řešení:

Počet výskytů čísla $n > 1$ je roven počtu čísel nesoudělných s n, která jsou menší než n. Dokážeme to tak, že si uvědomíme, že před přidáním jsou každá dvě sousední čísla nesoudělná a každá uspořádaná dvojice sousedních čísel je unikátní.

Budeme tvrdit, že posloupnost má po n krocích výpočtu nějakou vlastnost V. Ukážeme, že kdyby po n krocích výpočtu vlastnost V neměla, tak by ji bývala neměla už po $n-1$ krocích výpočtu. A tak se dostaneme až k tomu, že danou vlastnost by musela nemít už na začátku, což ale ověříme, že není pravda.

Vezměme tedy dvojici sousedních čísel a, b v $(n-1)$-ním kroku (kde a leží vlevo od b). Pokud platí $a+b = n$, tak se mezi tato čísla v n-tém kroku vloží n. Po tomto kroku vypadá posloupnost následovně: $(\dots, a, n, b, \dots)$. Nyní se podíváme, jak by posloupnost vypadala, kdyby a a b byla soudělná. Předpokládejme, že $a > b$ (pro $b < a$ provedeme důkaz analogicky). Pak a muselo vzniknout jako $b+x$, pro nějaké $x < a$. To znamená, že $x = a - b$, takže i x je dělitelné všemi společnými děliteli čísel a a b. To znamená, že dvě sousední soudělná čísla byla v posloupnosti už v předchozím kroku. Takto můžeme pokračovat dál, ale jednou musíme dospět k původní posloupnosti $(1,1)$, což je spor, neboť 1 a 1 jsou nesoudělná[1].

Stejným zpětným postupem je jasné, že každá uspořádaná dvojice (a,b) se může v posloupnosti objevit jen jednou, jinak by se nějaká jiná objevila dvakrát už dříve, ale posloupnost $1,1$ obsahuje jen jednu dvojici. Také se v některém kroku při tvorbě posloupnosti musí objevit všechny uspořádané dvojice nesoudělných čísel (a,b), protože kdyby tam nějaká chyběla, v předchozím kroku by chyběla dvojice $(b,a-b)$ a na začátku žádná dvojice nesoudělných čísel nechybí ($(1,1)$ je jediná taková dvojice).

Dohromady máme, že číslo n se objeví přesně tolikrát, kolik existuje uspořádaných dvojic (a,b) takových, že a a b jsou nesoudělná a že $a+b=n$. Těch je ale přesně tolik, co přirozených čísel a takových, že $a<n$ a a je nesoudělné s n (tedy počet přirozených čísel nesoudělných s n, která jsou menší než n).

Poznámky: Počet čísel nesoudělných s n, která jsou menší nebo rovna n, se obvykle označuje $\varphi(n)$ a říká se mu Eulerova funkce[2]. Někteří řešitelé (a organizátoři) si nejdříve posloupnost naprogramovali a pak uhádli, o jakou posloupnost se jedná. Hodila se jim k tomu online encyklopedie celočíselných posloupností (OEIS[3]), kde je Eulerova funkce uvedena jako A000010 (tedy 10. nejdůležitější posloupnost na světě :-)). Postup, kterým získáváme stále menší dvojice soudělných čísel, je v podstatě známý Euklidův algoritmus[4]. Řešitelka Mgr.$^{\text{MM}}$Beáta Hroncová si všimla, že čísla v posloupnosti odpovídají jmenovatelům tzv. Fareyových zlomků. Pomocí jejich vlastností se dá také přijít k řešení úlohy[5].

Anet a Pepa

Úloha 5.2 – Pseudoatom (3b)

Zadání:

Mějme v blízkosti elektron a pozitron. Ty na krátký čas (přibližně 0,1 ns) vytvoří pseudoatom. Obě částice mají shodnou hmotnost m a opačný náboj e, resp. $-e$. Pohybují se po kruhové trajektorii okolo společného hmotného středu o poloměru r. Určete tento poloměr a vazebnou energii, t.j. energii nutnou pro oddálení částic do nekonečna. Řešte teoreticky pomocí Bohrova modelu atomu a číselně pro základní kvantový stav (tedy stav s nejnižší energií). Proč tento „atom“ není běžný při pozemských podmínkách?

Řešení:

Aby mohly elektron a pozitron kolem sebe obíhat, musí se rovnat dostředivá síla

$$F_d = \frac{mv^2}{r}$$

[1] Dvě čísla jsou nesoudělná, právě když je jejich největší společný dělitel jedna.
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_totient_function`
[3] `https://oeis.org`, posloupnost $\varphi(n)$ v ní najdete na adrese `https://oeis.org/A000010`
[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm`
[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence`

a elektrostatická síla

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{4r^2},$$

kde $2r$ je vzdálenost částic. Také musí platit Bohrova kvantovací podmínka, která říká, že celkový moment hybnosti soustavy musí být celočíselný násobek redukované Planckovy konstanty. Matematicky ji můžeme zapsat rovnicí

$$L = n\frac{h}{2\pi},$$

kde L je moment hybnosti, n je přirozené číslo a h je Planckova konstanta. V našem případě je moment hybnosti $L = 2mvr$ (nesmíme zapomenout započítat moment hybnosti obou částic). Vyjádřením v a dosazením do rovnosti $F_d = F_e$ získáme vztah pro poloměr

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2.$$

Po dosazení dostaneme pro základní stav ($n = 1$, jak později uvidíme)

$$r_1 = 5{,}3 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} = 0{,}53\,\text{Å}.$$

Celková energie soustavy je součet kinetické energie obou částic a jejich vzájemné potenciální energie

$$E = 2\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{4r},$$

což jsme získali dosazením v vyjádřené z rovnosti $F_d = F_e$. Možné hodnoty energie získáme dosazením r_n za r:

$$E_n = -\frac{-me^4}{16\epsilon_0 h^2}\frac{1}{n^2}.$$

Nejnižší energii má stav s $n = 1$:

$$E_1 = -6{,}8\,\mathrm{eV}.$$

Záporné znaménko značí, že jde o vázaný stav a musíme tedy dodat energii, abychom částice oddělili na nekonečnou vzdálenost, a měly tedy nulovou energii. Tato záporně vzatá energie se nazývá vazebná energie.

Systém, kdy kolem sebe obíhá elektron a pozitron, se nazývá pozitronium. V pozemských podmínkách však není příliš častý, protože částice a antičástice spolu rychle anihilují a vytvoří několik fotonů o celkové energii $2mc^2 = 1{,}022\,\mathrm{MeV}$. Poločas rozpadu závisí na tom, jestli mají částice souhlasný či nesouhlasný spin, avšak dosahuje maximálně 140 ns.

Viktor

Úloha 5.3 – Buchty (3b)

Zadání:
Komárodlak má obdélníkový pekáč s $m \times n$ buchtami, každá je buď maková, nebo tvarohová. Komárodlak si všimnul, že v každém řádku i v každém sloupci je lichý počet makových buchet.

1. *Dokažte, že buď jsou m i n obě sudá, nebo obě lichá.*
2. *Kolik existuje pro pekáč o daných rozměrech rozmístění buchet takových, že splňují podmínku v zadání?*

Řešení:
Nejprve si uvědomme, že součet lichého počtu lichých čísel je lichý, zatímco sudého počtu lichých čísel sudý (dokazatelné např. indukcí přes počet sčítanců). S uvážením lichého počtu makových buchet v každém řádku i každém sloupci lze pak celkový počet makových buchet na pekáči vypočítat buďto jejich vysčítáním přes řádky (součet m lichých čísel) nebo přes sloupce (součet n lichých čísel). Mají-li se tyto dva součty rovnat, dle předchozího musí být m i n obě sudá nebo obě lichá.

Pro druhou část nejprve libovolně vyplňme tabulku vyjma posledního sloupce a řádku. Zbývající nevyplněné políčko v každém řádku, resp. sloupci, lze zjevně vždy jednoznačně doplnit vhodnou buchtou na splnění podmínky lichého počtu makových buchet. Totéž platí i pro zbylé rohové políčko, neboť počty makových buchet doplněných do posledního sloupce a do posledního řádku mají stejnou paritu (důkaz podobně jako v první části, jen s uvážením, že v některých řádcích a sloupcích redukované tabulky mohl být makových buchet sudý počet). Počet vyhovujících kombinací je tedy roven počtu možných obarvení tabulky $(m-1) \times (n-1)$, což je $2^{(m-1)(n-1)}$.

Evžen

Úloha 5.4 – Rozdělení balíčku (3b)

Zadání:
Mám balíček n karet, každá karta je buď červená, nebo černá. Počty červených a černých karet nemusí být stejné. Balíček zamíchám a rozložím do řady. Chci určit, zda a kde můžu řadu rozdělit tak, aby vlevo od rozdělení bylo právě tolik červených karet, kolik je černých karet vpravo od rozdělení. Rychleji proveditelná řešení budou hodnocena lépe.
Bonusový úkol: *Nevím, kolik karet mám, a místo rozložení do řady se na ně budu postupně koukat. Kolik nejméně bitů informace si potřebuji pamatovat v momentě, kdy jsem viděl už N karet, abych uměl reagovat jak na $(N+1)$-ní kartu, tak na informaci, že to již byly všechny karty? V prvním případě si chci nějak spočítat nové informace k zapamatování (staré pak zapomenu), v druhém chci odpovědět*

počtem karet, které je potřeba ze začátku balíčku odebrat, aby v odebrané části bylo tolik červených karet, kolik bude černých ve zbytku.

Řešení:
Možná poměrně překvapivě, řešením je, že balíček chceme rozdělit na pozici odpovídající počtu černých karet v celém balíčku. Proč tomu tak je? Podívejme se rovnou na verzi, kdy karty dostáváme postupně. Správnost našeho postupu budeme dokazovat indukcí podle počtu karet.

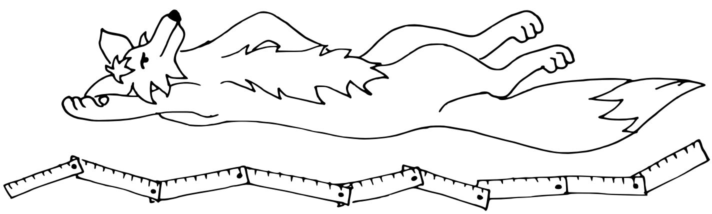
Na začátku jsme žádné karty neviděli a náš algoritmus balíček rozdělí na pozici nula, což je správně. Nyní indukční krok. Pokud nám přijde červená karta, tak se dostala vpravo od rozdělení, což nijak neovlivní to, kde chceme balíček rozdělit. Pokud nám přijde černá karta, máme vpravo od rozdělení o jednu černou kartu víc, než je počet červených nalevo od rozdělení. Pokud posuneme pozici rozdělení balíčku o jedna doprava, mohou nastat dvě situace. První možností je, že jsme přesunuli na levou část červenou kartu, čímž jsme vyrovnali počty karet. Druhou možností je, že jsme přesunuli černou kartu. V tom případě bude na pravé straně o černou kartu méně, čímž jsme opět vyrovnali počet červených karet nalevo od rozdělení a počet černých karet napravo od rozdělení.

Pokud přišla červená karta, nechali jsme původní pozici rozdělení balíčku, pokud přišla černá karta, tak jsme pozici rozdělení posunuli o jedna vpravo. Řešením je tedy opravdu počet černých karet, z čehož jde i vidět, že řešení vždy existuje.

Nikdy nebudeme chtít ukládat číslo větší, než N. K uložení si tak velkého čísla budeme potřebovat $\mathcal{O}(\log N)$ bitů paměti.

Bonusová verze této úlohy (tedy ta, kde karty přichází postupně) je pěknou ukázkou takzvaných online algoritmů. Ty na rozdíl od běžných (offline) algoritmů nemají na začátku k dispozici celý vstup, ale dostávají ho postupně a nemají možnost si ho zapamatovat celý. Je možná až překvapivé, kolik problémů se dá řešit online – jedním z takových byla i tato úložka. Když nějaký problém nelze vyřešit online, tak lze často najít alespoň přibližné řešení – pokud máme nějakou míru, jak je dané řešení problému dobré, tak lze často najít online algoritmus, který dá řešení nejvýše konstanta-krát horší, než je optimum. Takové algoritmy mají i tu výhodu, že potřebují méně paměti a jsou často rychlejší než jejich offline verze. V praxi nám často stačí řešení přibližné, což je důvodem, proč se online algoritmy často používají, když je potřeba zpracovávat hodně dat – třeba při zpracovávání DNA.

Kuba



Výsledková listina 5. čísla

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	r4	k	$\sum_0$	$\sum_1$
				Úlohy						
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$K. Balej	2	38,8		2,3	1,4	3,0		6,7	38,8
2.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$P. Turinský	4	64,1	2,0		1,7	3,0		6,7	38,6
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$A. Mlezivová	3	93,0		1,0	3,0			4,0	37,5
4.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$B. Hroncová	2	34,3	4,0	0,5	2,9			7,4	34,3
5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$O. Knopp	3	55,3						0	28,7
6.–7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$K. Rosická	2	28,5						0	28,5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$Z. Urbanová	3	28,5						0	28,5
8.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$T. Domes	4	105,8	5,0		3,0	4,0		12,0	28,4
9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$K. Čížková	3	32,1	3,0					3,0	25,6
10.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$R. Olšák	2	21,8						0	21,8
11.–12.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$M. Holubička	1	21,3	1,0					1,0	21,3
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$V. Pavlíček	1	21,3						0	21,3
13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$O. Buček	3	39,2	5,0		1,5	3,1		9,6	20,9
14.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Suchánek	3	35,1						0	19,9
15.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$D. Krasula	4	161,1					12,0	12,0	17,7
16.–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Paidar	3	35,8						0	16,7
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$K. Vnuková	2	16,7						0	16,7
18.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$P. Šimůnek	4	159,0						0	16,3
19.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Růžička	2	22,2						0	16,2
20.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$F. Čermák	3	51,7						0	16,1
21.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Kundratová	2	42,7						0	15,4
22.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$R. Luc	4	19,0						0	15,0
23.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$O. Gonzor	Z9	14,2				3,0		3,0	14,2
24.–25.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$L. Bujnovská	3	18,1						0	13,1
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$Z. Lüköová	2	13,1						0	13,1
26.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$M. Bukvaj	1	13,0						0	13,0
27.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$T. Hladíková	3	48,4						0	12,8
28.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Kopfová	2	31,7						0	12,7
29.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$B. Požár	3	30,9						0	10,8
30.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$T. Kulichová	2	10,2						0	10,2
31.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$J. Pallová	2	28,8						0	9,5
32.–34.	F. Bialas	4	9,0						0	9,0
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$A. Neubauerová	3	17,0						0	9,0
	V. Procházka	3	9,0						0	9,0
35.	T. Drobil	2	8,7						0	8,7
36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$L. Vincenová	3	45,5						0	8,4

				Úlohy						
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**k**	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$D. Chytilová	3	28,8						0	8,0
38.	J. Heller	4	7,5						0	7,5
39.	L. Šajnarová	3	7,3						0	7,3
40.	J. Pelc	3	7,0						0	7,0
41.	J. Šrejbr	1	6,7						0	6,7
42.	T. Dolák	4	6,3						0	6,3
43.	A. Mírková	2	6,0						0	6,0
44.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$F. Zajíc	4	16,7						0	4,7
45.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$S. Lukeš	4	42,4						0	3,2
46.	P. Martínek	2	3,1						0	3,1
47.–48.	D. Daubner	2	3,0						0	3,0
	M. Picek	2	3,0						0	3,0
49.	T. Poláková	3	2,8						0	2,8
50.–51.	M. Machalová	4	4,7						0	2,7
	M. Sejkorová	2	2,7						0	2,7
52.	A. Šebestíková	2	2,0						0	2,0
53.	J. Hrazdil	3	1,7						0	1,7
54.	F. Kmječ	1	1,5						0	1,5
55.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$J. Vala	3	22,5						0	1,0
56.	L. Kubacki	4	0,0						0	0

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.matfyz.cz`