Studentský matematicko-fyzikální časopis

M&M

Ročník XXIII / Číslo 3

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milí řešitelé,
děkujeme vám za vaše řešení, obzvláště nás potěšily příspěvky k tématkům. Výběr z nich otiskujeme v tomto čísle. Jsme rádi, že příspěvky posunuly řešení tématek o krůček dál.

S mnohými z vás jsme se potkali na právě proběhlém předvánočním víkendovém setkání. Byl to moc příjemný víkend s úžasnou atmosférou. Doufáme, že s těmi z vás, kdo jste na setkání nebyli, se uvidíme na některé z příštích akcí, například na Jednom dni s informatikou (1. 2.) či fyzikou (16. 2.) nebo na našem jarním soustředění.

Teď nás však čekají především Vánoce. Ať už je strávíte s našimi úlohami nebo s bramborovým salátem, přejeme vám z celého srdce, aby to byl příjemně strávený čas.

Vaši organizátoři

Zadání úloh

Termín odeslání třetí série: 17. 1. 2017

„Utíkej, Jájo!“ Zakřičel na mě Jonáš a jen se za ním zaprášilo. Ohlédla jsem se a se zděšením jsem ho rychle následovala. Kdo by se taky nerozhodl vzít nohy na ramena, když na něj ze křoví civí obrovský tygr. Běželi jsme bez přemýšlení pořád dál prodírajíce se hustým porostem. V krku jsem měla už úplně sucho a nohy se mi začínaly pomalu podlamovat. Náhle Jonáš zastavil tak prudce, že jsem do něj nabourala a povalila ho na zem. Oba jsme se udýchaně zvedli. Když jsem se rozhlédla, pochopila jsem, že nemáme kam pokračovat. Všechno kolem bylo neprostupně zarostlé. Z plácku, na kterém jsme stáli, vedla jen jedna cesta – ta, kterou jsme přišli. Pomyšlení na to, že bychom se měli vrátit stejnou cestou, nás moc nelákalo. Jonáš tedy otevřel batoh a začal hledat něco, co by nám pomohlo. Zatímco se prohraboval v batohu, začala jsem uvažovat o tom, jak najít cestu ven z džungle.

Úloha 3.1 – Odklízení cest (5b)

V džungli je mnoho rozcestí a pěšinek mezi nimi. Bohužel jsou cestičky zarostlé a Jonášovi s Jájou bude nějakou dobu trvat je opět zprůchodnit. Jája má mapku, která obsahuje informace o tom, jak dlouho jim bude trvat jednotlivé cestičky prosekat. Některá rozcestí jsou navíc označená, neboť by skrz ně mohla vést cesta ven z džungle. Na jednom takovém rozcestí aktuálně Jája s Jonášem stojí. Potřebovali by zjistit, kolik času budou muset strávit čištěním cest, než bude možné se dostat na všechna označená rozcestí. Čas potřebný na opětovné proběhnutí již jednou zprůchodněné cesty můžeme zanedbat. Také můžete předpokládat, že všechny cesty jsou průchozí v obou směrech a jejich prosekání bude trvat stejně dlouho nezávisle na tom, ze které strany postupujete.

Pro tento problém zatím nikdo neumí najít optimální řešení výrazně rychleji než zkoušením všech možností, kterých je opravdu hodně. Zkus ale najít algoritmus, který se k optimálnímu řešení přiblíží i v rozumném čase – třeba takový, jehož řešení bude v nejhorším případě dvojnásobkem optima a stihne ho nalézt v čase $\mathcal{O}(n^4)$, kde n je počet všech rozcestí na mapě.[1]

Pokud ti problém pořád přijde moc složitý, část bodů dostaneš i za řešení, které předpokládá, že Jonáš s Jájou potřebují navštívit všechna rozcestí.

Jonáš v batohu našel svůj starý kapesní nůž. „Tímhle bychom se nikam neprosekali," řekl a hodil nůž zpět do batohu. Já jsem měla o něco větší štěstí a vytáhla jsem z batohu vysílačku. „Pamatuješ si, s kým se máme spojit, abychom si přivolali pomoc?" zeptala jsem se Jonáše. „Zmáčkni trojku, Jájo, jsem si tím naprosto jistý!" Jenomže zrovna tohle tlačítko nefungovalo. Když jsem však zmáčkla několik různých čísel za sebou, tak se na displeji děly zajímavé věci.

Úloha 3.2 – Displej (4b)

Máme vysílačku se sedmisegmentovým displejem, který dokáže zobrazit jedinou číslici, a s tlačítky 0, 1, …, 9. Přijdeme ke zhasnuté vysílačce a můžeme libovolně mačkat tlačítka. Každé zmáčknutí vždy změní všechny segmenty příslušné číslice na opačný stav: zhasnutý segment se rozsvítí a ten, co svítil, naopak zhasne. Po prvním zmáčknutí bude tedy na displeji svítit číslice z tlačítka. Pokud bychom jej zmáčkli znovu, displej se vrátí do původního, zhasnutého stavu. Další příklad je na Obrázku 1.

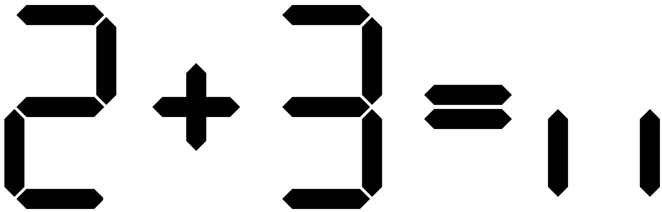
a) Vysílačka je bohužel už stará a jedno tlačítko se jí rozbilo. Dokážeš zobrazit na displeji číslici z rozbitého tlačítka pomocí těch ostatních? Je nějaké tlačítko nepostradatelné?

b) Ukaž, že je možné za použití všech tlačítek na displeji zobrazit libovolný obrazec, tedy rozsvítit libovolnou podmnožinu segmentů displeje. S jakou nejmenší skupinou funkčních tlačítek to je možné?

Za každou část úlohy můžeš získat dva body.

Ačkoliv se nám na displeji nakonec přece jen objevila trojka, nikomu jsme se nedovolali. Nezbývalo nám tedy než se opatrně a potichu začít vracet po stejné cestě. Než jsme došli k první křižovatce, tak jsme našlapovali lehce jako kočka a ani jsme nedutali. Jonáš nakonec bez dlouhého přemýšlení rozhodl, kterou cestou se vydáme tentokrát. Náš strach nás pomalu začal opouštět a opět nás zcela pohltila touha po objevování, se kterou jsme sem přijeli. Po chvíli jsme se začali blížit

[1] To jest, algoritmus smí provést řádově nejvýš n^4 (elementárních) kroků. Může provést např. $42n^4$ kroků nebo $5n^4+3n^2+\log n$ kroků nebo n^2 kroků, ale už ne například n^5 kroků. Podrobněji se o měření efektivity algoritmů můžete dočíst v jedné z programátorských kuchařek: `http://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/slozitost/`



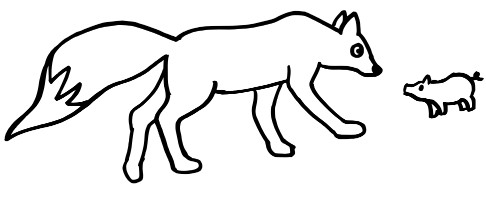
Obrázek 1: Po zmáčknutí tlačítek s číslicemi 2 a 3 bude na displeji zobrazený útvar v pravé části obrázku.

k tmavé postavě. Byli jsme velmi opatrní. Nechtěli jsme se dostat do nějakých problémů. Schovali jsme se do křoví a člověka potichu pozorovali. Směrem k nám šel muž a nesl v rukou cosi kulatého zabaleného v kůži. Muselo to být opravdu těžké, protože se pod tou věcí hodně prohýbal a občas si ji s heknutím nadhodil.

Úloha 3.3 – Vážení (3b)

Popište, co bude ukazovat displej digitální tenzometrické váhy, když se na ni postaví mužík s těžkým kulovým závažím v rukou a zdvihne jej pomalu nad hlavu. Co budeme pozorovat, když závaží upustí a během pádu znovu chytí u kolen?

Chybějící parametry a jejich vliv na průběh děje odhadněte na základě skutečného světa, případně si pomozte experimentem. Můžete také popsat možný rozsah očekávaných výsledků pozorování. Nezapomeňte vaše úvahy náležitě zdůvodnit a závěry vysvětlit.



Mužík vypadal celkem přátelsky, tak jsme se rozhodli ho pozdravit.

Když jsme se vynořili ze křoví, vypadal poněkud vyděšeně. „Dobrý muži, nebojte se nás, my jen hledáme pomoc, ztratili jsme se a nevíme, kde hledat své přátele,“ začal mu objasňovat Jonáš. „Já jsem Jonáš a tohle je Jája,“ pokračoval. „Tak to jste natrefili na toho správného člověka, jmenuji se Moudrý jasný rozum a znám tady celou džungli velmi dobře,“ usmál se muž. „Pomohu vám, když mi na oplátku pomůžete vyřešit tuhle hádanku.“ Položil svůj náklad, vytáhl z kapsy papír a ukázal nám ho. „Řešení mi pomůže otevřít pokladnu po mém zesnulém otci, ale já na to už několik týdnů nedokážu přijít.“

Úloha 3.4 – Sumy a čtverce (5b)

a) Součet čtyř reálných čísel je 8 a součet jejich druhých mocnin je 16. Jaká je největší možná hodnota největšího čísla? Tedy pro reálná a, b, c, d platí: $a + b + c + d = 8$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$. Najdi největší možnou hodnotu čísla a.

b) Součet pěti reálných čísel je 8 a součet jejich druhých mocnin je 16. Jaká je tentokrát největší možná hodnota největšího čísla?

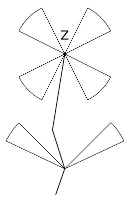
„To bude hračka,“ řekl Jonáš, vytáhl z kapsy papír a tužku a po chvíli měl hotovo. „Hurá, mnohokrát vám děkuji, moc jste mi pomohli,“ radoval se Moudrý jasný rozum. „Svoji část dohody dodržím, ale až zítra. Brzy bude tma a v noci bývá v džungli nebezpečno. Pojďte, přespíte se mnou v mém přístřešku a ráno se vydáme na cestu za vašimi přáteli.“

Oba jsme s Jonášem byli po dnešním napínavém dni natolik unavení, že jsme nic nenamítali a mužíka beze slov následovali.

Řešení úloh 1. série

Úloha 1.1 – Květina jedním tahem (3b)

Zadání:
Květinu na obrázku lze jedním tahem nakreslit 3072 způsoby, začneme-li kreslit v bodě označeném Z (ve středu okvětních lístků). Vysvětlete, jak jsme k tomuto číslu došli.



Řešení:
Nejprve musíme nakreslit všechny okvětní lístky a až poté stonek, protože po nakreslení stonku se již nedokážeme vrátit k nakreslení okvětních lístků. Lístky můžeme kreslit v libovolném pořadí, což dává 4! možností. Každý z lístků lze nakreslit dvěma směry – 2^4 možností. Okvětní lístky je tedy možné nakreslit $4! \cdot 2^4$ způsoby. Pak nakreslíme stonek až k listům. Ty můžeme opět kreslit v libovolném pořadí (2! možností) a dvěma směry – 2^2 možností. Nakonec kreslení zakončíme zbytkem stonku. Způsobů, jak nakreslit květinu se začátkem v bodě Z, je tedy $4! \cdot 2^4 \cdot 2! \cdot 2^2 = 3072$.

Kristý

Úloha 1.2 – Třídění kotoučů (4b)

Zadání:

Příběh o Hanojských věžích nejspíše znáte. Málokdo ale ví, že existuje druhý podobný klášter. Na vysoké tyči je tam navléknuto 64 různě velkých kotoučů v náhodném pořadí. Mniši si každý den vyberou jeden z kotoučů, pak ten kotouč i s všemi nad ním vezmou, otočí jejich pořadí a vrátí je na tyč. Do kolika dnů zvládnou mniši tímto způsobem kotouče uspořádat tak, aby vespod byl největší kotouč a nikde neležel větší kotouč na menším? Zajímá nás horní odhad na potřebný počet dnů. Část bodů dostane i horší řešení. Naopak velice dobrá řešení mohou získat bonusové body navíc.

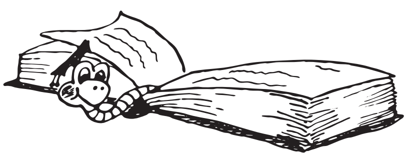
Řešení:

Na první pohled si můžeme všimnout, že kotouče můžeme setřídit tak, že vždy dostaneme největší kotouč, který zatím není na správném místě, nahoru, a pak ho můžeme dalším otočením dostat na správné místo. Takto nad každým kotoučem strávíme nejvýše dva kroky a setřídit všechny kotouče nám tedy bude trvat nejdéle $2n$ kroků. S tímto postupem tedy budou mniši potřebovat na setřídění kotoučů 128 dní.

Většina z vás šla dál a všimli jste si, že když nám zbývá poslední nesetříděný kotouč, tak ho už není třeba třídit, čímž ušetříme dva kroky. To nám dává řešení v $2n - 2$ krocích, tedy za 126 dní. Dále si někteří z vás správně všimli, že poslední dva kotouče jdou vždy setřídit nejvýše jedním krokem. Tím dostaneme řešení v $2n - 3$ krocích, tedy za 125 dní. Rozborem případů jsme mohli obdobně zjistit optimální řešení pro posledních k kotoučů. Pokud $\mathrm{OPT}(k)$ je počet kroků použitých optimálním řešením pro k kotoučů, tak můžeme dostat řešení používající $2(n-k) + \mathrm{OPT}(k)$ kroků tak, že nejdříve setřídíme $n - k$ největších kotoučů algoritmem, který jsme si popsali, a na posledních k kotoučů použijeme optimální řešení. Plný počet bodů jste mohli získat už pro $k = 5$, tedy pokud vaše řešení vyžadovalo 123 dní.

Zlepšit se dá i multiplikativní konstanta. Kdyby vás zajímalo jak, tak si můžete přečíst článek jménem „Bounds for Sorting by Prefix Reversal“[2] od Billa Gatese. Pokud by vás zajímalo optimální řešení pro konkrétní instanci problému a ne pouze omezení shora, tak vězte, že tento problém je NP-těžký. Důkaz si můžete přečíst v článku jménem „Pancake Flipping Is Hard“[3].

Kuba

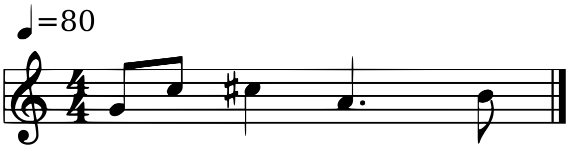


[2] `https://people.eecs.berkeley.edu/~christos/papers/GP79.pdf`
[3] `https://arxiv.org/abs/1111.0434`

Úloha 1.3 – Hudební virtuóz (4b)

Zadání:

Riki chce svému kamarádovi zahrát na theremin písničku (notový zápis na obrázku). Nástroj je však pokažený a hraje nepřetržitě jeden tón, komorní a. Může ale měnit intenzitu zvuku. Napadlo jej, že když se bude s thereminem pohybovat, uslyší kamarád jiný tón. Jak konkrétně by se musel pohybovat, aby kamarád slyšel kýženou písničku? Jako bonus se zkuste zamyslet, co by musel udělat, kdyby v notovém zápisu byly pomlky.



Řešení:

Fyzikálním základem této úlohy je Dopplerův jev, na to jste přišli všichni a našli jste si v učebnici fyziky nebo na wikipedii příslušné vzorce. Když se zdroj zvuku (rychlost zvuku je v_z) o frekvenci f_0 pohybuje směrem od vás rychlostí v, frekvence zvuku se snižuje

$$f = f_0 \cdot \frac{v_z}{v_z + v}\,,$$

a pokud se zdroj přibližuje, pak se frekvence zvyšuje

$$f = f_0 \cdot \frac{v_z}{v_z - v}\,.$$

Pokud bychom brali rychlost přibližování jako kladnou a vzdalování jako zápornou, stačí nám druhý ze vzorců. Abychom ale mohli úlohu vyřešit, musíme si vyjasnit ještě dvě věci: jak funguje theremin a co přesně znamená ten notový zápis.

Theremin[4] je elektronický hudební nástroj, vynalezený už v roce 1919 Lvem Sergejevičem Těrmenem. Je tvořen dvěma oscilačními obvody, jeden z nich má pevnou frekvenci oscilací, frekvenci druhého můžeme měnit pomocí změn kapacity antény k němu připojené. Rozdíl oscilačních frekvencí obou obvodů, zázněj, je pak veden do zesilovače připojeného ke druhé anténě. Theremin se ovládá pouze pohybem rukou v okolí antén – vzdálenost rukou od antény ovlivňuje vlastnosti zvuku. První anténa ovládá výšku tónu – tu máme rozbitou, takže dokážeme hrát pouze komorní a, a druhá ovládá hlasitost zvuku – ta nám funguje.

Nad osnovou máme udáno, že čtvrťová nota rovná se osmdesát. To udává tempo – v jedné minutě máme 80 dob, tedy 80 čtvrťových not.[5] Z toho vypočteme, že čtvrťová nota trvá 0,75 s, osminová 0,375 s a čtvrťová s tečkou 1,125 s (tečka

[4] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Theremin`
[5] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Tempo`

znamená prodloužení doby noty o její polovinu)[6]. Samotný notový zápis nám říká, které konkrétní tóny potřebujeme zahrát, tedy **g**, **c**, **cis**, **a** a nakonec **h**.

Teď už máme základní údaje a můžeme spočítat, jakou rychlostí se musí Riki pohybovat, aby hrál jednotlivé tóny. Stačí si najít jejich frekvence ($f_a = 440\,\mathrm{Hz}$, $f_g = 392\,\mathrm{Hz}$, $f_c = 523{,}26\,\mathrm{Hz}$, $f_{cis} = 554\,\mathrm{Hz}$ a $f_h = 493{,}88\,\mathrm{Hz}$)[7], a dosadit do výše uvedených vzorců. Dostaneme: $v_a = 0\,\mathrm{m/s}$, $v_g = -42{,}0\,\mathrm{m/s}$, $v_c = 54{,}6\,\mathrm{m/s}$, $v_{cis} = 70{,}6\,\mathrm{m/s}$ a $v_h = 37{,}4\,\mathrm{m/s}$. Vidíme, že se musíme pohybovat opravdu vysokými rychlostmi, 70 m/s už je 250 km/h. Ani nemluvíme o zrychleních nutných k přechodu z jedné rychlosti na druhou. Největší rozdíl máme mezi **g** a **c**, kde musíme změnit rychlost o skoro 100 m/s, a to prakticky skokově. Pokud by změna trvala ještě akceptovatelnou desetinu sekundy, byl by Riki s thereminem vystaven zrychlení $1\,000\,\mathrm{m/s^2}$ tedy 100 G. Pro člověka už je 20 G smrtelných[8], malí tvorové údajně zvládnou vyvinout zrychlení až 100 G[9]. Tak hodně štěstí, snad to přežije Riki i theremin.

Dalším krokem je určit, jak dlouho je potřeba se tou kterou rychlostí pohybovat. Většina z vás zkrátka použila doby trvání jednotlivých tonů podle notového zápisu. To je celkem rozumné přiblížení a Rikiho kamarád by si nejspíš ničeho nevšiml. Pokud bychom ale chtěli být přesní, měli bychom uvážit i změny v době trvání zvuku. Jednoduše si problém představíme tak, že když se nám mění frekvence zvuku, tak se mění i perioda kmitu.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{a} \quad f = f_0 \cdot \frac{v_z}{v_z + v} \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = T \cdot \frac{v_z}{v_z + v}$$

Počet kmitů se ale nemění, takže se musí změnit doba trvání zvuku.

$$t_0 = t \cdot \frac{v_z}{v_z + v}$$

[6] `http://www.musicart.cz/ex/edu/hn1/files/assets/basic-html/page23.html`
[7] `http://www.fi.muni.cz/usr/jkucera/pv109/2001/xuher/xuher.html`
[8] `http://fyziologie.lf2.cuni.cz/hampl/teach_mat/extremy/extr_st2.htm`
[9] `http://phys.org/news/2016-01-tiniest-chameleons-powerful-tongue-lashings.html`, `http://www.sciencefocus.com/qa/whats-highest-g-force-insect-can-survive`

Nejprve hrajeme osminovou **g**, pohybujeme se rychlostí $v_g = 42\,\mathrm{m/s}$ směrem od posluchače, délka tónu pro posluchače má být $t_g = 0{,}38\,\mathrm{s}$. Pak doba, po kterou musí Riki tón hrát, je $t_{g0} = 0{,}33\,\mathrm{s}$. Následuje osminová **c**, kterou musí Riki hrát $t_{c0} = 0{,}45\,\mathrm{s}$, čtvrťová **cis** po dobu $t_{cis0} = 0{,}94\,\mathrm{s}$, čtvrťová **a** s tečkou, tady se Riki po dobu 1,13 s nepohybuje, a nakonec osminová **h**, kterou musí Riki hrát po dobu $t_{h0} = 0{,}42\,\mathrm{s}$. Jak vidíme, změny délky tónů jsou skutečně malé, a hudební znalec by možná rozpoznal špatnou délku tónu **cis**, kde už rozdíl činí dvě desetiny sekundy. Reálně potřebujeme časy jen s přesností na desetiny sekundy, v hudební nauce se ale používají nedesetinné zlomky, tak jsem tady nechala zbytečně větší přesnost, konzistentní se zadáním.

Poslední věc, kterou musíme spočítat, jsou dráhy, které Riki při jednotlivých tónech urazí. Tahle písnička totiž obnáší hodně přibližování, a proto je potřeba zjistit, jak daleko od svého kamaráda musí Riki začít. Ale to už je opravdu triviální, dráhy budou postupně $-14{,}03\,\mathrm{m}$, $+24{,}35\,\mathrm{m}$, $+66{,}65\,\mathrm{m}$, $0\,\mathrm{m}$ a $+15{,}75\,\mathrm{m}$. Riki tedy musí začít minimálně ve vzdálenosti 92,72 m od kamaráda.

Tím bychom měli pohyb popsaný, ještě si vše shrneme v tabulce.

tón	f [Hz]	v [m/s]	t[s]	s[m]
g	392	−42,0	0,33	−14,03
c	532,26	+54,6	0,45	+24,35
cis	554	+70,6	0,94	+66,65
a	440	0	1,13	0
h	493,88	+37,4	0,42	+15,75

Zbývá nám jen bonusový problém – jak vyřešit pomlky. Triviálním řešením je snížit hlasitost thereminu na nulu, tedy ho vypnout. To můžeme, protože anténa ovládající amplitudu zvuku nám funguje. Tohle řešení napadlo jen pár řešitelů. Někteří řešitelé navrhovali, aby se Riki pohyboval takovou rychlostí, aby posunul frekvenci zvuku mimo slyšitelnou oblast. Jak našla Dr.MM Anna Mlezivová, lidé slyší zvuky o frekvencích od 16 Hz do 20 kHz a lišky od 51 Hz do 48 kHz. Jiní řešitelé navrhovali Rikimu pohybovat se rychlostí zvuku, což ovšem není správné řešení. Pokud se Riki pohybuje rychlostí zvuku k posluchači, tak k němu dorazí ve stejnou dobu, jako zvuk který vydává, ale do té doby uslyší, co Riki hrál předtím, takže se nedá mluvit o pomlce. Pokud by se Riki pohyboval rychlostí zvuku směrem od kamaráda, dojde jen ke snížení frekvence na polovinu, takže opět žádná pomlka.

Zuzka

Úloha 1.4 – Krychle (4b)

Zadání:
Můžeme na hrany krychle umístit čísla $1, 2, \ldots, 12$ *(každé právě jednou) tak, aby byl součet čísel na hranách vycházejících z každého vrcholu stejný? Změnila by se odpověď, pokud bychom místo jednoho z čísel museli umístit číslo 13?*

Řešení:
Nejdříve dokážeme, že čísla jedna až dvanáct na krychli umístit nelze. Pro spor předpokládejme, že to lze. Nechť krychle má vrcholy A, B, …, H a pro vrchol v si součet na hranách vycházejících z v označíme jako S_v.

Nyní se podívejme na součet $S = S_A + S_B + \ldots + S_H$. Z pohledu vrcholů dostaneme, že $S = 8s$, jelikož součet na hranách vycházejících z každého vrcholu je stejný (to je ono s) a máme osm vrcholů. Z pohledu hran ale dostaneme $S = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 12)$, jelikož každá hrana do S přispěje v právě dvou vrcholech a na hranách jsou přesně čísla 1, 2, …, 12.

Dáme-li oba vztahy dohromady, zjistíme, že musí platit

$$2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 12) = 8s, \tag{$*$}$$

kde s je onen součet na hranách vycházejících z libovolného vrcholu. Pokud vztah $(*)$ upravíme, dostaneme:

$$78 = 4s,$$

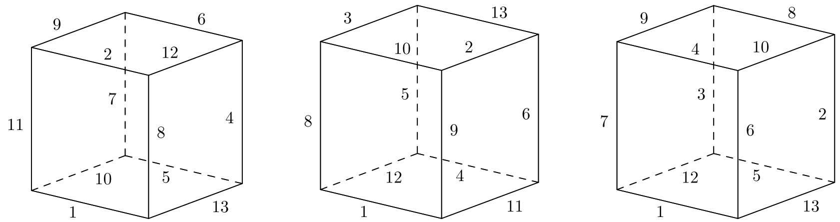
což znamená, že $s = 19{,}5$. To je ale nemožné, jelikož čísla na hranách jsou celá, a tedy nemohou dát neceločíselný součet. Čísla jedna až dvanáct proto není možné na krychli umístit.

Teď se podívejme, jak může nahrazení nějakého čísla číslem 13 celou situaci změnit. Nahraďme tedy nějaké číslo $x \in \{1, \ldots, 12\}$ třinácti. Nyní můžeme použít stejnou úvahu jako pro čísla jedna až dvanáct, jen s tím rozdílem, že ve vztahu $(*)$ bude levá strana větší o $2 \cdot (13 - x)$. Dostaneme tedy

$$91 - x = 4s.$$

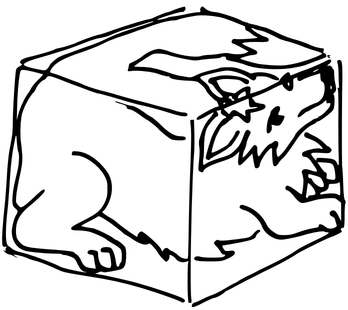
Součet $91 - x$ musí být dělitelný čtyřmi, jinak opět dostaneme, že s není celé. Jediná možná x jsou proto čísla 3, 7 a 11, pro která je s rovno 22, 21, resp. 20.

V tuto chvíli udělali mnozí z vás chybu a prohlásili, že jelikož je pro tato x hodnota s celé číslo, lze na krychli čísla jedna až dvanáct, kde číslo x nahradíme třinácti, umístit. *To je ale chybná úvaha!* To, že je s celé číslo, ještě nestačí. Kdybychom například na hrany krychle umisťovali jedenáct čísel čtyři a jedno číslo 44, pak by bylo $s = 22$, ale stejného součtu ve všech vrcholech nikdy nedosáhneme. Jde totiž jen o *nutnou podmínku* – pokud čísla na krychli lze umístit, pak je s celočíselné, neboli pokud není s celočíselné, pak čísla na krychli umístit nelze. Ale nemusí platit, že pokud je s celočíselné, pak čísla na krychli umístit lze – to by byla i *postačující podmínka*. Rozdíl mezi nutnou a postačující podmínkou je



Obrázek 2: Příklady rozmístění čísel na krychli při nahrazení čísla 3, 7, 11 (zleva).

dobře vidět na následujícím příkladu: Máme číslo x a zajímá nás, kdy je dělitelné čtyřmi. *Postačující podmínkou* je, že je x dělitelné osmi – je-li x dělitelné osmi, pak je určitě i dělitelné čtyřmi. Existují ale čísla, která jsou dělitelná čtyřmi, ale ne osmi. *Nutnou podmínkou* je, že x je dělitelné dvěma – pokud je x dělitelné čtyřmi, pak musí být dělitelné i dvěma, tedy pokud není dělitelné dvěma, pak ani není dělitelné čtyřmi. Ale jistě existují čísla, která jsou dělitelná dvěma, ale ne čtyřmi.



Chceme-li tedy tvrdit, že pro $x = 3, 7, 11$ lze čísla na krychli umístit, musíme to ještě nějak dokázat. Nejsnazší způsob je prostě nějaké takové rozmístění najít. Možností, jak to udělat, je mnoho. Můžeme si například všimnout, že možných trojic čísel, které dají součet s, je poměrně málo („velká“ čísla jako 13 či 12 nemohou být ve stejné trojici, atd.) a každá taková trojice odpovídá rozmístění čísel na hranách vycházejících z jednoho vrcholu. Snadno dokážeme vybrat některé trojice, které musíme v rozmístění použít (například využijeme to, že ve správném rozmístění se každé číslo vyskytne v právě dvou trojicích). Z těch poté dopočítáme, jak má vypadat celé rozmístění. Nebo si můžeme napsat program, který takové rozmístění najde za nás (pokud existuje). Ani není třeba to dělat chytře, neboť všech možných rozmístění čísel na hrany krychle (včetně těch, které nemají stejný součet ve vrcholech) je necelých 500 miliónů.

Nakonec – příklady rozmístění čísel na krychli splňujících naše podmínky jsou na Obrázku 2.

$\mathcal{O}(N)$*dra*

Řešení témat

Téma 1 – Sluneční hodiny

Otiskujeme řešení Doc.$^{\mathsf{MM}}$Petra Šimůnka, který se ve svém článku zaměřil na nedostatky slunečních hodin. Vcelku podrobně rozepsal hned několik důvodů vedoucích k nepřesnostem – tedy k rozdílům v čase na našich hodinkách a tím, který ukazují sluneční hodiny. Mimo jiné zmínil, že slunce není bodový zdroj, což rozostří stín vrhaný ukazatelem – šla by tato nepřesnost kompenzovat např. změnou rozměrů ciferníku a je vůbec ve srovnání s jinými chybami podstatná? Dále Petr uvádí, že pokud bychom Slunce fotili v průběhu jednoho roku vždy v určitou hodinu a tyto body proložili křivkou byl by její tvar podobný číslici 8 – jedná se o tzv. analemu, v souvislosti s tímto přikládám odkaz na web `www.analemma.com`, kde si můžete stáhnout program, který vám tuto křivku vykreslí, jak by vypadala třeba i na jiných planetách. Zkusme si tedy téma slunečních hodin zobecnit – jak by vypadaly třeba měsíční hodiny, v čem by jejich návrh mohl být jednodušší a má vůbec smysl je konstruovat vzhledem k jasnosti Měsíce?

Sluneční hodiny (4b)

Doc.$^{\mathsf{MM}}$Petr Šimůnek

V článku bych se chtěl především věnovat nepřesnostem a nedostatkům slunečních hodin.

Posun poledne

Poledne (kdy je Slunce nejvýše) není každý den přesně ve 12:00, ale může se lišit až o několik minut od času 12:00. Jelikož dráha Země není kruh, ale elipsa. To znamená že Země mění rychlost svého oběhu (relativní ke Slunci), NE rychlost rotace, ta zůstává konstantní. Rychlostí mám konkrétně namysli to, že v přísluní je rychlost $30\,287\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a naopak v odsluní $29\,291\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. To znamená to, že přísluním se pohybuje Země rychleji a urazí za den větší úhel (mám na mysli úhel stará pozice Země, Slunce, nová pozice Země) než by měla, naopak v odsluní je tento úhel menší a chyba (tj. náskok jaký Země získala v přísluní[10]) se eliminuje (platí druhý Keplerův zákon). Hodnota Slunečního poledne a pravého poledne se tak může lišit až o několik minut. Ve spojení s tím, že Slunce je na obzoru v zimě níže a v létě výše, tak vykonává po obloze pohyb (když si každý den uděláme na obloze tečku na místě, kde je Slunce v poledne, dostaneme k tvaru podobný osmičce, pokud by byla dráha kruhová jednalo by se o svislou čáru).

[10] V přísluní se Země nachází 4. 1. a v odsluní 4. 7.

Ostrost stínu

Jde o to, že Slunce není bodový zdroj světla, tudíž když se podíváme na stín, neuvidíme ostrý přechod, ale bude zde stín obklopen polostíny (v různých místech polostínů bude rovněž různá intenzita světla) a nebo pouze polostín. Nemůžeme tedy přesně určit, kde se ukazatel nachází.

Náklon Země během ročních období

Země obíhá Slunce pod úhlem přibližně 23,5 °, to má za následek to, že nejvyšší úhel, který Slunce nabírá se může lišit až 47 °, což je docela dost, to má samozřejmě vliv na délku stínu a také pravděpodobně bude mít vliv na rozmazání stínu, které bude závise na vzdálenosti konkrétního bodu tyče a jeho vzdálenosti od místa jeho obrazu.

Dostupnost

Toto je poměrně zjevná poznámka, ale když budou mraky tak nic neuvidíme, pokud budeme za polárním kruhem a bude polární noc, tak toho asi také moc neuvidíme.

Budoucnost

V budoucnu se rotace Země zpomalí, což bude znamenat, že se bude muset změnit 24 hodinový systém nebo upravit sluneční hodiny. Tak jako tak budete moci staré sluneční hodiny vyhodit. Také sluneční hodiny asi nebudou ten nejlepší typ hodin, co si vezmete do vesmírné lodě nebo na jinou planetu.

Shrnutí

Sluneční hodiny mají spoustu nedostatků a nepřesností, ale když vezmeme v potaz, že už zde jsou pravděpodobně přes sedm tisíc let a byly překonány poměrně nedávno, tak jejich přesnost stále obdivuhodná a nějaký ten nedostatek je podle mě skoro až zanedbatelný. A pokud podle nich nechcete řídit starty raket, tak si myslím, že účelu poslouží. Navíc se jedná o pěkný architektonický prvek.

Téma 2 – Časosběr

Milí řešitelé tématka Časosběr, dorazilo nám celkem šest videí od pěti řešitelů. Jsem rád, že jste se uchýlili i k jiným dějům, než je známý západ/východ slunce. Ve vašich řešeních jsme doposud měli příležitost zhlédnout růst krystalu, tání ledu, růst pšenice a západ slunce. Tématko však ještě nekončí, takže pokud vás napadá jiný zajímavý pomalý děj, je čas jej zachytit kamerou a vytvořit zrychlené (časosběrné nebo anglicky timelapse) video.

Vaše řešení se musela vypořádat hned s několika problémy, někteří je zvládli skvěle, někteří celkem dobře. Hlavní problém vidím bezesporu v časové náročnosti pořizování záznamu, který může trvat hodinu nebo i několik dní. Nejdelší časový úsek zaznamenal příspěvek o růstu pšenice. V tomto případě se jedná spíše o sérii fotografií, která by ještě snesla dodatečnou stabilizaci obrazu a vyvážení světlosti jednotlivých fotografií. Každopádně výsledek je ve videu velmi dobře patrný. K tématu tání ledu se sešla hned dvě velmi vydařená videa, jedno z nich bohužel nezachycuje tání až do konce. Velmi mě zaujal nápad natočit růst krystalu pod mikroskopem. Na tomto videu se mi nejvíc líbí jeho originalita, vytkl bych snad jen titulky zabírající polovinu celkového času videa.

Příspěvky všech řešitelů si můžete prohlédnout na našem YouTube kanálu[11].

Všem řešitelům tohoto tématka bych chtěl poděkovat a těším se na další příspěvky od dalších (nebo i stejných) řešitelů. Jako náměty na další videa vám může posloužit třeba vysychání (odpařování), stékání medu/šamponu po stěnách průhledné nádoby, zasněžení vaší střechy/dvora, spánek nebo pohyb vašeho domácího mazlíčka v kleci, postupné mizení pěny nebo bublinek v točených nápojích, záznam pečení cukroví přes sklo trouby nebo pohled do hrnce během vaření, osychání rozkrojeného jablka a cokoliv dalšího, co vás napadne.

Když už máte zajímavý nápad, tak je třeba se v první řadě vypořádat s technickými problémy spojenými s pořízením videa. Výsledek by měl být zřetelný a ideálně příjemný pro lidské oko. Souběžně s videem odevzdáváte článek, ve kterém bych chtěl, abyste se podělili o nápady, jak tyto technické problémy zvládnout. Na základě pořízeného videa zkuste v článku (nebo výstižně ve videu) rozebrat pozorovaný jev. Nechte například stékat med po stěnách sklenice za různých teplot a vypozorujte závislost viskozity medu na teplotě. Dále můžete namířit kameru na oblohu a zaznamenat dráhy jednotlivých letadel. Potom zkuste zjistit, jaké letové dráhy nebo koridory se nacházejí nad vaší hlavou. (Můžete poslat i analýzu k vašemu již odeslanému videu.) Přeji vám spoustu zajímavých nápadů a těším se na další videa.

Béďa

[11] `https://www.youtube.com/user/KSMaM`

Výsledková listina 1. čísla

				Úlohy							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r4**	**t1**	**t2**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Bc.^{MM}K. Vnuková	2	16,7	3,2	0,5	5,0	2,5		5,5	16,7	16,7
2.	Bc.^{MM}V. Pavlíček	1	15,5	2,9	2,0	4,7	2,2		3,7	15,5	15,5
3.–4.	Bc.^{MM}M. Holubička	1	14,0	3,0	3,0		2,0		6,0	14,0	14,0
	Dr.^{MM}A. Mlezivová	3	69,5	3,0	3,0	4,5	3,5			14,0	14,0
5.	Mgr.^{MM}P. Turinský	4	39,0	3,0	3,5	4,0	3,0			13,5	13,5
6.–7.	Bc.^{MM}M. Bukvaj	1	13,0	2,7	3,0	3,5	3,8			13,0	13,0
	Bc.^{MM}B. Hroncová	2	13,0	3,0			3,5		6,5	13,0	13,0
8.	Bc.^{MM}K. Rosická	2	12,5	3,2	3,0	3,0	3,3			12,5	12,5
9.	Mgr.^{MM}J. Suchánek	3	26,9	3,0		4,7	4,0			11,7	11,7
10.	Doc.^{MM}P. Šimůnek	4	154,2	1,5	1,0	2,0	3,0	4,0		11,5	11,5
11.	Mgr.^{MM}B. Požár	3	30,9	3,2	2,0	2,6	3,0			10,8	10,8
12.	Bc.^{MM}K. Čížková	3	16,8	3,0	3,3		4,0			10,3	10,3
13.–14.	Mgr.^{MM}T. Hladíková	3	45,1	3,2	4,2	2,1				9,5	9,5
	Z. Lüköová	2	9,5	3,0	2,0	1,0	3,5			9,5	9,5
15.	K. Balej	2	9,3	3,0	3,0		3,3			9,3	9,3
16.	Mgr.^{MM}O. Buček	3	27,1	3,0		3,5	2,3			8,8	8,8
17.	T. Drobil	2	8,7	3,2		2,5	3,0			8,7	8,7
18.–19.	R. Olšák	2	8,5	3,0	3,0		2,5			8,5	8,5
	V. Procházka	3	8,5	3,0		3,5	2,0			8,5	8,5
20.	T. Kulichová	2	8,2	3,0	3,0		2,2			8,2	8,2
21.	Mgr.^{MM}D. Chytilová	3	28,8	2,7	3,0		2,3			8,0	8,0
22.	Mgr.^{MM}O. Knopp	3	34,3	3,2		4,5				7,7	7,7
23.	J. Heller	4	7,5	3,0					4,5	7,5	7,5
24.	L. Šajnarová	3	7,3	3,0	3,0		1,3			7,3	7,3
25.–26.	Bc.^{MM}L. Bujnovská	3	12,0	3,0			4,0			7,0	7,0
	J. Pelc	3	7,0	3,0			4,0			7,0	7,0
27.	Mgr.^{MM}L. Kopfová	2	25,7	3,2			3,5			6,7	6,7
28.	Mgr.^{MM}J. Pallová	2	25,8	3,0			3,5			6,5	6,5
29.–31.	Mgr.^{MM}F. Čermák	3	41,9	3,0			3,3			6,3	6,3
	T. Dolák	4	6,3	2,8			3,5			6,3	6,3
	Mgr.^{MM}J. Paidar	3	25,4	2,7			3,6			6,3	6,3
32.	J. Šrejbr	1	6,2	3,0	0,5		2,7			6,2	6,2
33.–34.	A. Mírková	2	6,0	3,0		2,5	0,5			6,0	6,0
	Bc.^{MM}A. Neubauerová	3	14,0	3,0	3,0					6,0	6,0
35.	O. Gonzor	Z9	5,7	2,7	0,5	2,5				5,7	5,7
36.	Bc.^{MM}J. Růžička	2	11,5	2,7			2,8			5,5	5,5

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	r4	t1	t2	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	Mgr.$^{\text{MM}}$L. Kundratová	2	32,7	2,4	1,0		2,0			5,4	5,4
38.	Mgr.$^{\text{MM}}$L. Vincenová	3	42,0	3,0			1,9			4,9	4,9
39.	Bc.$^{\text{MM}}$F. Zajíc	4	15,7	2,7	1,0		0,0			3,7	3,7
40.	Mgr.$^{\text{MM}}$S. Lukeš	4	42,4	3,2						3,2	3,2
41.–43.	D. Daubner	2	3,0	3,0						3,0	3,0
	P. Martínek	2	3,0	3,0	0,0					3,0	3,0
	M. Picek	2	3,0	3,0						3,0	3,0
44.–45.	M. Machalová	4	4,7	2,7						2,7	2,7
	M. Sejkorová	2	2,7	2,7						2,7	2,7

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
WWW: `http://mam.matfyz.cz`

matfyz