

Řešení úloh 5. série – str. 2 • Řešení úloh 6. série – str. 8

Téma 1: Pojdte pane, budeme si hrát – str. 17

Téma 2: Volební systémy – str. 18 • Téma 3: Kosmický kulečník – str. 18

Doc.^{MM}Petr Šimůnek: Simulace dráhy Io a Měsíce – str. 19

Téma 4: Komprese mapových dat – str. 21

Téma 5: Rozpustilá rozpustnost – str. 23 • Mgr.^{MM}Tereza Hladíková a

Doc.^{MM}Klára Stefanová: Gumový medvídek poněkolkáté – str. 24

Seriál: Neplatné zachování – str. 30

Časopis MĚM a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Naši milí čtenáři,

22. ročník semináře M&M skončil, není to však důvod ke smutku, je tady zase další :-).

Nejlepším řešitelem tohoto roku se stal s přehledem Doc.^{MM}Petr Šimůnek se 126,7 body. Jako druhá se umístila Doc.^{MM}Klára Stefanová a jako třetí Doc.^{MM}Jan Pokorný. Gratulujeme nejen jim, ale i dalším 68 řešitelům, jejichž zájem o vědu nás tento rok těšil.

Ocenění za nejlepší příspěvek k tématku získal Doc.^{MM}Jan Pokorný za svůj článek Většinový systém a jak ho opravit. V blízké době ho čeká tradiční odměna, dort upečený organizátory M&M, který bude organizátory osobně doručen a slavnostně předán.

V tomto čísle se tedy můžete pokochat posledními vzorovými řešeními a závěrečným shrnutím tématék.

Zdraví

vaši organizátoři

Řešení úloh 5. série

Úloha 5.1 – Platové dilema

(2b)

Zadání:

Představte si skupinku státních zástupců, kteří by rádi zjistili, jaký je jejich průměrný plat, ale přitom žádný z nich nechce výši toho svého prozradit. Poradíte jim, jak jejich průměrný plat zjistit, aniž by se některý z nich dozvěděl výši platu někoho dalšího? Právníci nemají k dispozici žádný materiál, mohou využívat jen své hlavy.

Řešení:

Pojďme se zamyslet nad řešeními podle počtu právníků. Pro jediného právníka je úloha zjevně vyřešena. Pro dva právníky úloha nemá řešení, jelikož z průměru a znalosti svého platu si může každý právník dopočítat výši platu toho druhého.

Podívejme se tedy na možná řešení pro tři a více právníků. Úplně správná řešení neumožňují, aby některý z právníků získal horní či dolní odhad na výši platu někoho z ostatních právníků.

Asi nejjednodušší řešení obsahovalo posílání náhodného čísla od jednoho právníka přes všechny ostatní. První právník si vymyslí přirozené číslo řádově vyšší, než je jeho vlastní plat, nebo náhodné celé číslo.¹ Toto číslo si zapamatuje a nikomu jinému jej nesdělí. Poté k němu přičte vlastní plat a výsledek pošle dalšímu právníkovi. Další právníci pak již pouze přičtou svůj plat k přičítanému číslu a pošlou jej dále. Od výsledného čísla pak první právník odečte původní náhodné číslo a výsledek vydělí počtem právníků (což je veřejná informace). V případě zvolení nedostatečně velkého čísla by každý právník získal poměrně dobrý horní odhad

¹Pokud by se u platů předpokládaly velmi vysoké rozdíly, je výběr čísla zvláště důležitý.

na aritmetický průměr platů právníků před sebou. Speciálně by druhý právník v pořadí získal dobrý horní odhad na plat prvního právníka. Toto řešení bylo nastíněno ve vzorovém řešení podobné úlohy ve 21. ročníku, kdo tedy pozorně četl vzorové řešení, měl výhodu.

V dalším řešení si počet právníků označme jako n . Každý právník vytvoří sadu $n - 1$ celých čísel, která v součtu dávají jeho plat. Poté každé z těchto čísel řekne jinému kolegovi. Každý právník pak sečte všechna čísla, která obdržel, a výsledek sdělí všem ostatním. Sečtením zveřejněných výsledků a vydělením svým počtem získají právníci požadovaný průměrný plat. Tato metoda měla více možných variant, ať už to byl jiný počet předávaných čísel či že součet čísel nedával plat přímo, ale jeho k -násobek, který je pro všechny stejný.

Všimněme si, že na rozdíl od předchozího řešení je tato metoda odolná vůči spiknutí několika právníků s cílem zjistit plat jiného. U předchozího řešení k získání platu jednoho právníka stačí, aby se spikli jeho sousedé. Zde je však potřeba, aby se proti danému jedinci spikli všichni ostatní právníci (v alternativní variantě řešení všichni, kdo dostali od daného právníka nějaké číslo).

Naopak ani jedna z uvedených metod není imunní vůči podvodníkovi, který použije jiné číslo, než je jeho vlastní plat. Takový podvodník pak jako jediný dokáže dopočítat opravdovou výši průměrného platu. Je však nutno poznamenat, že si podvodník v takovém případě nemůže být jistý, zda je opravdu jediný, kdo podváděl.

Anet

Úloha 5.2 – Neposedný míček (4b)

Zadání:

V homogenním gravitačním poli máme svislou pružinku s tuhostí k , na které je upevněna miska o hmotnosti m_1 . Na misku, která je v klidu v rovnovážné poloze, hodíme míček o hmotnosti m_2 . Z jaké výšky ho musíme pustit, aby se po odskoku a rozkývání misky na ni vrátil v okamžiku, kdy prochází miska rovnovážnou polohou směrem nahoru? Jak vysoko poté vyskočí? Jaké musí být podmínky pro hmotnosti m_1 a m_2 ? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné a trvají zanedbatelně krátkou dobu.

Řešení:

Nejdříve si podrobně rozebereme situaci. Po puštění míčku na misku z výšky h_0 dopadne míček s rychlostí v_2 na nehybnou misku ($v_1 = 0$). V tomto případě můžeme předpokládat, že se při odrazu zachovávají součty hybnosti a energie míčku a misky. Miska se rozpožhuje rychlostí u_1 a míček se odrazí rychlostí u_2 (uvažujeme kladné znaménko rychlosti směrem dolů). Poté začne miska kmitat kolem rovnovážné polohy. Pokud se míček odrazí nahoru, po jisté chvíli se vrátí na misku, která by měla procházet rovnovážnou polohou. V tomto okamžiku má míček rychlost stejnou jako po odrazu, akorát míří opačným směrem. Pro rychlost misky platí totéž.

Rychlosti u_1 a u_2 spočítáme pomocí zákonů zachování energie a hybnosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \\ m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2.\end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned}v_2^2 &= \frac{m_1}{m_2}u_1^2 + u_2^2 \\ v_2 &= \frac{m_1}{m_2}u_1 + u_2.\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme u_2 a dosadíme do první:

$$v_2^2 = \frac{m_1}{m_2}u_1^2 + v_2^2 - 2\frac{m_1}{m_2}u_1v_2 + \frac{m_1^2}{m_2^2}u_1^2.$$

Po úpravách získáme

$$u_1 = v_2 \frac{2m_2}{m_1 + m_2},$$

a po vyjádření u_2 dostaneme

$$u_2 = v_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.$$

Aby se míček po odskoku pohyboval nahoru, musí být rychlost u_2 záporná, a tedy $m_2 < m_1$. Pro rychlost míčku platí $u(t) = u_2 + gt$. Čas, za který bude mít jeho rychlost hodnotu $-u_2$, je tedy

$$t = -\frac{2u_2}{g}.$$

(Tento čas je kladný, protože je u_2 záporná.) Po dosazení za u_2 získáme

$$t = \frac{2v_2}{g} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Když míček pouštíme z klidu z výšky h_0 , bude mít při nárazu rychlost $v_2 = \sqrt{2gh_0}$. Výsledný čas tedy je

$$t = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Zároveň se čas t musí rovnat době, za kterou se miska dostane zpět do rovnovážné polohy a bude se pohybovat směrem nahoru. To bude za lichý násobek půlperiod:

$$t = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} (2n - 1),$$

kde $n = 1, 2, 3, \dots$. Porovnáním časů a vyjádřením získáme výšku h_0 :

$$h_0 = \frac{\pi^2 g m_1 (2n + 1)^2}{8k} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \right)^2.$$

Nyní nám zbývá vyřešit, do jaké výšky se míček odrazí po druhém odrazu. K tomu nám pomůže zajímavý fyzikální náhled. Při druhé srážce má miska rychlost $-u_1$ a míček $-u_2$. V mechanice platí symetrie vůči zrcadlení času: Pokud obrátíme směr času, fyzikální zákony budou stejné. Pokud obrátíme čas u první srážky, rychlost dopadající misky bude $-u_1$ a dopadajícího míčku $-u_2$. Rychlost odražené misky bude nulová a rychlost odraženého míčku bude $-v_2$. Díky tomu víme, že rychlost odraženého míčku při druhé srážce je $-v_2$. S touto rychlostí míček vystoupá do výšky h_0 .

Viktor

Úloha 5.3 – Rozklad funkce (4b)

Zadání:

Nechť f je funkce definovaná na celé reálné přímce. Je známo, že se pak dá zapsat jako součet dvou funkcí, z nichž jedna je sudá (má graf symetrický podle osy y) a druhá je lichá (má graf středově symetrický podle počátku). Dá se funkce f zapsat jako součet dvou funkcí, z nichž každá má graf osově symetrický podle nějaké (ne nutně stejné) přímky?

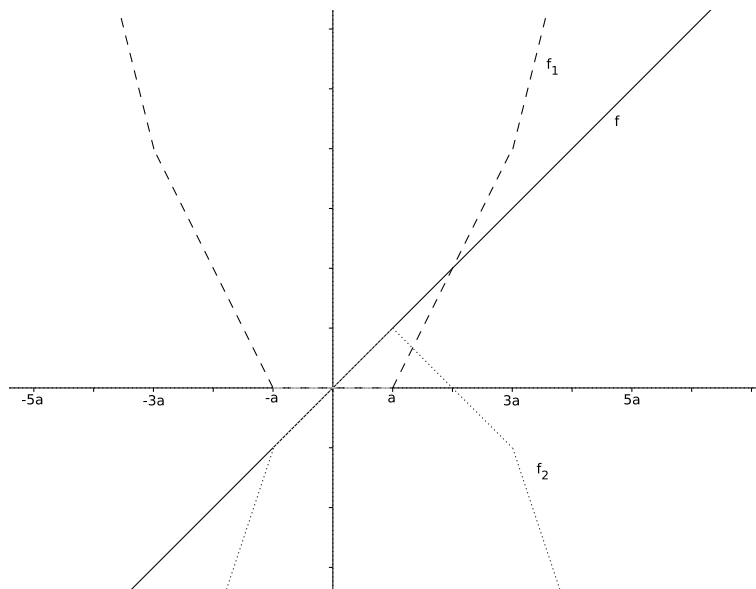
Řešení:

Každou funkci f skutečně můžeme zapsat jako součet dvou funkcí f_1 a f_2 , z nichž jedna je symetrická podle osy y (tedy sudá) a druhá je symetrická podle přímky $y = a$ (přímky rovnoběžné s osou y ve vzdálenosti a). Obě funkce budeme konstruovat postupně na intervalech

$$[-a, a], [a, 3a], [-3a, -a], [3a, 5a], \dots, [-2n - 1, -2n + 1], [2n - 1, 2n + 1], \dots$$

Zvolíme $f_1(x) = 0$ pro všechna x z $[-a, a]$. Funkci f_2 na tomto intervalu zvolíme jako $f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x)$ tak, aby platila rovnost $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$.

Funkci $f_2(x)$ definujeme na intervalu $[a, 3a]$ tak, aby byl její graf symetrický podle osy $y = a$, tedy položíme $f_2(x) = f_2(2a - x)$. Tato definice je korektní, protože pro všechna x z $[a, 3a]$ leží $2a - x$ v $[-a, a]$, na kterém již hodnotu funkce f_2 známe. Funkci f_1 na $[a, 3a]$ zvolíme jako $f_1(x) = f(x) - f_2(x)$.



Obrázek 1: Rozklad funkce $f(x) = x$ na funkci f_1 symetrickou podle osy y a funkci f_2 symetrickou podle přímky $y = a$.

Nyní pokračujeme na druhé straně osy y , konkrétně na intervalu $[-3a, -a]$. Tam definujeme funkci f_1 tak, aby byla symetrická podle osy y , tj. jako $f_1(x) = f_1(-x)$, a f_2 definujeme jako $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. Pokračujeme stejným způsobem na intervalu $[3a, 5a]$ (definujeme opět f_2 , aby byla symetrická podle osy $y = a$) atd., až jsou funkce f_1 a f_2 definované na celé reálné přímce.

Na Obrázku 1 jsou znázorněny funkce f_1 (čárkovaně) a f_2 (tečkovaně) pro funkci $f(x) = x$.

Poznámka: Místo počáteční volby $f_1(x) = 0$ na intervalu $[-a, a]$ bychom mohli zvolit jakoukoli sudou funkci a dále pokračovat obdobně. Rozklad proto není jednoznačný.

Pepa

Úloha 5.4 – N -hlavá saň (4b)

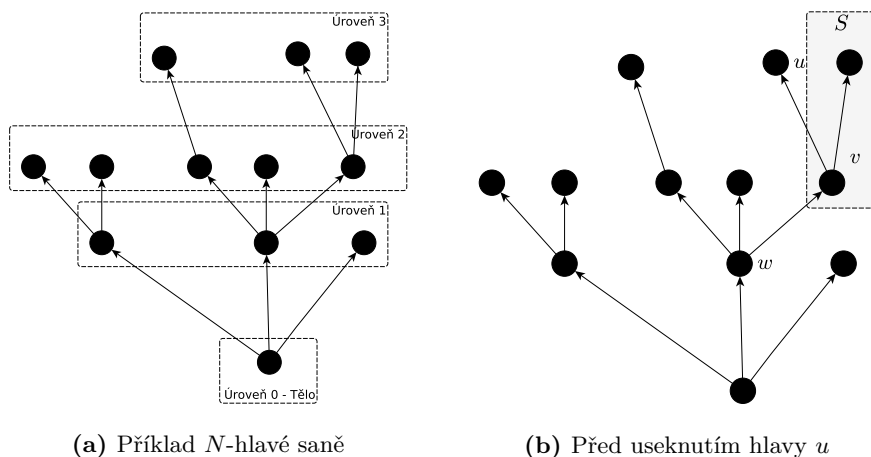
Zadání:

Chytrý Honza se rozhodl zachránit zakletou matfyzičku, kterou unesla strašlivá N -hlavá saň a hlídá ji ve svém doupěti pod Malostranským náměstím. Honza nechce nic ponechat náhodě, a tak si připravuje taktiku, jak saň porazit. Taková N -hlavá saň se skládá ze dvou základních částí – krků a uzlů. Každý krk vždy spojuje dva uzly. Nejdůležitějším uzlem je tělo. Z toho vyrůstá několik krků, na konci každého je uzel, ze kterého může vyrůst několik krků atd. (viz Obrázek 2a). Každý uzel

má úroveň, podle toho, jak daleko je od těla, tedy tělo je na úrovni nula, uzly spojené s krkem jsou na úrovni jedna, uzly, které jsou dva krky daleko od těla jsou na úrovni dva a tak dále.

Honza chce saň zabít tím, že jí postupně usekne všechny hlavy (to jsou uzly, ze kterých nevede žádný krk do vyšší úrovně). Jakmile sani zbývá jen tělo, zemře. V každém kroku si Honza vybere jednu hlavu a usekne ji. Ale ouha, sani hlavy dorůstají. Předpokládejme, že v K -tém kroku usekne Honza hlavu u , označíme si v uzel, ze kterého vede krk do u a S budeme říkat celé struktuře krků a uzlů, která vyrůstá z v (včetně v , ale bez u). Ještě si označíme w ten jediný uzel spojený krkem s v takový, že w je na nižší úrovni než v . Potom saň sice přijde o hlavu u , ale zároveň z w vyroste K nových kopií S . Usekne-li Honza hlavu, která vyrůstá přímo z těla, pak sani nic nedoroste. Příklad, jak může takové useknutí hlavy proběhnout, je na Obrázku 2b a 3. Krom dorůstání může hlava vzniknout z libovolného uzlu, který přišel o všechny krky vedoucí do vyšší úrovně.

Ukažte, že Chytrý Honza dokáže zabít každou N -hlavou saň.

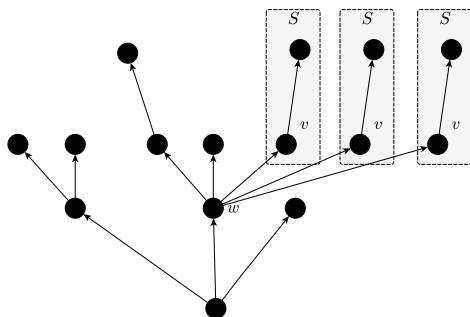


Obrázek 2: Saň

Řešení:

Počet krků, které vyrůstají z uzlu v a zároveň vedou do vyšší úrovně saně, si označíme d_v , tomuto číslu budeme říkat stupeň v . Jinak řečeno, z uzlu v vede jeden krk do nižší úrovně (kromě případu, kdy je v tělo) a d_v krků do vyšší úrovně; uzly na nejvyšší úrovni mají stupeň nula. Nyní si popíšeme jednu z možných taktik, která Honzovi zaručí vítězství.

V jednom kole se Honza podívá na všechny uzly na předposlední úrovni a vybere si ty, které mají nejvyšší stupeň. Každému z těchto uzlů pak usekne libovolnou hlavu, která je na něj připojena. Sani doroste několik (přesněji řečeno K v K -tém kroku) kopií každého takového uzlu, všechny už ale budou mít stupeň



Obrázek 3: Po useknutí hlavy u sani vyrostly nové hlavy

menší o jedna. Po každém kole se tedy Honzovi podaří snížit maximální stupeň na předposlední úrovni o jedna – tento postup se zastaví ve chvíli, kdy všechny uzly na předposlední úrovni mají stupeň nula. To ale znamená, že jsme zničili poslední úroveň saně. Teď už stačí jen opakovat tento postup ničení nejvyšší úrovně, dokud sani nezbude pouhé tělo.

Povšimněte si, že v důkazu jsme nepotřebovali vědět, kolik hlav sani dorůstá, stačilo nám pouze, že je to v každém kroku nějaký konečný počet. Možná ještě podivuhodnější vlastností tohoto problému je, že vůbec nezávisí ani na Honzově taktice. Ať už bude hlavy sekát v jakémkoli pořadí, po konečném počtu kroků sani zbude jen tělo. Dokázat toto silnější tvrzení je ale v jistém smyslu těžké (což se dá dokonce dokázat, i tento důkaz je nicméně těžký :-), zájemcům doporučujeme vyhledat na internetu heslo Hydra Game.

Vášek

Řešení úloh 6. série

Úloha 6.1 – Černá a bílá čísla (3b)

Zadání:

Každé přirozené číslo² obarvíme černě, nebo bíle tak, že součet každé různobarevné dvojice je černý, zatímco součin je bílý.

a) *Jakou barvu má součin dvou bílých čísel?*

b) *Charakterizujte všechna vyhovující obarvení.*

²Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Řešení:

Tuto úlohu se nepodařilo úplně vyřešit nikomu. Velká část z vás si úlohu převdla na konkrétní případ (popřípadě více konkrétních příkladů typu sudá čísla budou bílá a pak nám platí, že sudé vynásobeno sudým je sudé, čili také bílé), nicméně úlohu je třeba vyřešit pro všechna taková obarvení. Tedy buď poté z konkrétních příkladů platně dokázat obecné pravidlo nebo postupovat sporem jako v následujícím řešení.

Několika z vás se podařilo vyřešit první část, ale druhou neměl správně nikdo. Nejvíce se asi přiblížil Mgr.^{MM}Lukáš Belza, který se snažil ukázat obecný postup konstrukce obarvení pomocí konkrétních obarvení.

Nejdříve část a). Součin dvou bílých čísel bude také bílý. Rozdělme obarvení na dva případy – buď jsou všechna čísla bílá, nebo existuje alespoň jedno černé číslo.

Pokud jsou všechna čísla bílá, pak i násobek dvou bílých čísel bude číslo bílé. Pokud existuje alespoň jedno černé číslo (označme si ho c), tak řešíme sporem. Pripustíme, že existuje dvojice bílých čísel b_1 a b_2 taková, že její součin je číslo černé.

Podívejme se nyní na barvu čísla $(c + b_1) \cdot b_2$. Podle pravidel obarvení je součet v závorce černé číslo, tedy celý součin bude číslo bílé. Nyní roznásobme:

$$(c + b_1) \cdot b_2 = c \cdot b_1 + b_1 \cdot b_2.$$

Ovšem první součin je číslo bílé a druhý součin číslo černé, tedy jejich součet bude podle pravidla pro součet různobarevných čísel černý. Tedy máme spor. Součin dvou bílých čísel bude tedy vždy bílý.

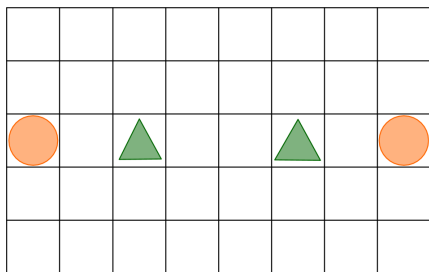
Nyní část b). Obarvení můžeme charakterizovat podle nejmenšího bílého čísla, protože čísla budou bílá právě tehdy, pokud jsou přirozenými násobky nejmenšího bílého čísla b_0 .

Lehce si ověříme, že všechny násobky b_0 jsou bílé, protože podle podmínek obarvení součin černého a bílého čísla je bílý a podle předchozího bodu i součin dvou bílých čísel je bílý. Nyní dokážeme sporem, že žádné jiné číslo nemůže být bílé.

Pripustíme, že existuje číslo x takové, že je bílé a přitom není násobkem b_0 . Označme b_n nejmenší bílé číslo větší než x . Poté nutně platí, že $b_n - x < b_0$, tedy rozdíl $b_n - x$ je číslo černé.

Potom platí, že $x + (b_n - x)$ je součet bílého a černého čísla, tedy jedná se o číslo černé, ale zároveň $x + (b_n - x) = b_n$, tedy jedná se o bílé číslo a nastává spor.

Proto nemůže existovat jiné bílé číslo, než násobky b_0 .



Obrázek 4: Počáteční rozestavení lišek a myslivců.

Úloha 6.2 – Honba za liškou (3b)

Zadání:

V lese o velikosti 40 polí stojí 2 myslivci (trojúhelníky) a před nimi prchají 2 lišky (kolečka), viz Obrázek 4. Lišky jsou velmi rychlé a chytré. Aby byl hon úspěšný, myslivci je musí chytit. Každý z myslivců se tedy v každém tahu posune o právě jedno pole vodorovně či svisle, v pohybu po úhlopříčce jim brání pravidelně vysazený les. V tu chvíli přestává být pozice lišek bezpečná, proto se každá z nich posune o právě jedno pole podle stejných pravidel jako myslivci. Nyní hon pokračuje opět pohybem myslivců a dál se pohyb lišek a myslivců pravidelně střídá. Liška je ulovena myslivcem, pokud se myslivce přesune na pole, na kterém právě stojí liška. Přesune-li se liška na pole, na kterém právě stojí myslivce, je též ulovena. Ulovená liška vypadává ze hry. Lišky mohou být uloveny postupně.

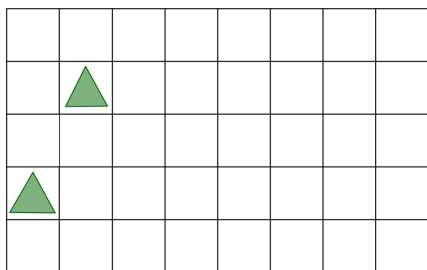
Poženou se myslivci za liškami donekonečna? Nebo lišky nakonec podlehnou myslivcům, ať se budou snažit sebevíc? Zjistěte, zda existuje pro lišky neprohrávající nebo pro myslivce vyhrávající strategie a popište ji.

Řešení:

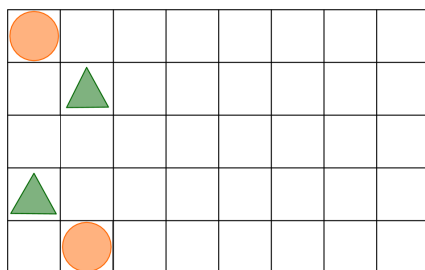
Lišky budeme chytat postupně. Vybereme si libovolně jednu z nich a dokud ji nechytíme, budeme druhou lišku zcela ignorovat. Myslivce nejdřív přesuneme do úvodní lovecké pozice (viz Obrázek 5a).

Všimněme si, že pokud se liška nachází v pozici, ze které může ustoupit pouze vpravo, pak je pro ni tato pozice prohrávající. Myslivci se totiž v odpověď posunou též doprava a protože hrací deska je omezená, dojde nejdéle po šesti krocích k tomu, že liška nemůže ustoupit tak, aby nebyla chycena.

Pokud se liška po rozestavení do úvodní lovecké pozice nachází ve stejném sloupci jako jeden z myslivců, pak se buď nachází vedle některého z nich (v tom případě ji ulovíme), nebo na jednom z míst znázorněných na Obrázku 5b. Pokud se nachází v horní pozici z Obrázku 5b, přesuneme oba myslivce nahoru a tím zvítězíme – liška již nemůže udělat tah jinam, než na pole myslivců nebo pole, s nimiž myslivci sousedí. Pokud se nachází ve spodní pozici z Obrázku 5b, přesuneme oba myslivce dolů, čímž lišku dostaneme do pozice, z níž může prchat pouze doprava – tím jsme zvítězili.



(a) Úvodní lovecká pozice

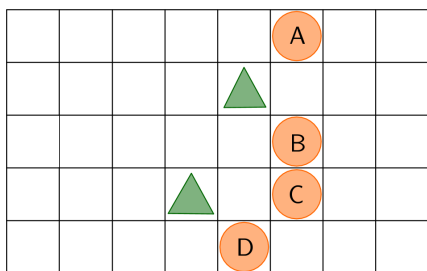


(b) Krajní případy

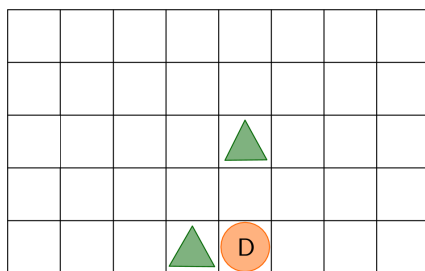
Obrázek 5: Lov na lišku

Nyní budeme předpokládat, že liška se nenachází ve stejném sloupci jako nějaký z myslivců. Pokud se liška po svém tahu nenachází ani v sousedním sloupci, přesuneme oba myslivce směrem doprava. Ve chvíli, kdy se liška po svém tahu ocitne v sousedním sloupci nebo ve sloupci myslivce, který je více vpravo, rozlišíme následující možnosti:

1. Liška se nachází na sousedním poli vedle jednoho z myslivců. Pak ji dalším tahem ulovíme.
2. Liška se nachází v pozici A na Obrázku 6a. Pak pohneme oběma myslivci směrem nahoru.
3. Liška se nachází v pozici D na Obrázku 6a. Pak pohneme oběma myslivci směrem dolů.
4. Ve všech ostatních případech pohneme myslivci směrem vpravo.



(a) Možné pozice vůči myslivcům



(b) Pozice D po pohybu myslivců

Obrázek 6: Lov na lišku

Pokud se liška nacházela v pozici A, pak po přesunu myslivců může utíkat vpravo nebo dolů. Přesune-li se dolů, dostává se vůči myslivcům do pozice B. Pokud se liška nacházela v pozici B, pak po přesunu myslivců může utíkat pouze vpravo – tato pozice je tedy pro lišku prohrávající. Pokud se liška nacházela

v pozici C, pak po přesunu myslivců může utíkat vpravo (čímž se dostane opět do pozice C) nebo dolů (čímž se dostane do pozice D). Pokud se liška nacházela v pozici D, pak po přesunu myslivců může utíkat pouze vpravo – tato pozice je tedy pro lišku prohrávající (viz Obrázek 6b).

Poté co první lišku ulovíme, postavíme opět myslivce do úvodní lovecké pozice a lov zopakujeme pro druhou lišku.

Honza

Úloha 6.3 – Klávesnice podruhé (4b)

Zadání:

*Vzpomínáte si, jak se tehdy rozbila klávesnice vašeho notebooku? Museli jste použít softwarovou klávesnici v podobě obdélníkové tabulky znaků, na které jste psali pomocí kurzoru, kterým jste pohybovali šípkami (spolu s **Enterem** jediné funkční klávesy) (viz Úloha 4 v čísle 22.4³). Klávesnice byla tenkrát tak hloupě navržená, že jste psaním strávili dlouhé hodiny. Zkušenost to byla natolik traumatizující, že jste se rozhodli navrhnout si vlastní klávesnici, na které půjde psát i dlouhé texty rychle.*

*Chcete tedy navrhnout klávesnici o rozměru 8×8 znaků tak, aby nejmenší nutný počet stisků šipek a **Enteru** k napsání zadaného textu⁴ byl co nejmenší. Klávesnice rozlišuje velká a malá písmena (tedy L a l jsou dva různé znaky), mezera a interpunkční znaménka (tečka, čárka, vykřičník, otazník) jsou také plnohodnotné znaky, odrádkování ignorujte (tj. chovejte se k textu jako by byl napsaný celý na jedné řádce). Počet bodů, které za řešení obdržíte, se bude odvíjet od toho, kolik je třeba stisků kláves k napsání textu na vaši klávesnici (čím méně, tím lépe). Dále můžete dostat až dva body za vysvětlení toho, jak jste vaši klávesnici vytvořili.*

Řešení:

Tato úloha na první pohled nepůjde v rozumném čase vyřešit dokonale. V textu je celkem 45 různých znaků, tabulka má 64 polí, máme tedy $45^{64} \doteq 6,39 \cdot 10^{105}$ možností, jak ji sestavit. Všechny je vyzkoušet nezvládneme (při velmi optimistické rychlosti zkoušení 3000 tabulek za sekundu by program na jednom počítači běžel přes 10^{93} let), budeme proto prostor všech tabulek prohledávat nějakou nekompletní metodou a spokojíme se s řešením, které bude dostatečně dobré. (Jak poznáme dostatečně dobré řešení? Hodí se třeba srovnání s výsledky ostatních řešitelů. K této úloze bohužel průběžně aktualizovaná výsledková listina k dispozici nebyla. Snad příště.)

Jedna možnost, jak úlohu řešit, je zvolit si nějakou tabulku k a vyzkoušet všechny tabulky ve vzdálenosti 1 od k . Řekneme například, že dvě tabulky jsou ve vzdálenosti n , pokud se liší právě na n pozicích. Také bychom mohli uvažovat třeba počet prohození dvou pozic, kterými je možno změnit jednu tabulku na

³Do úlohy se nám bohužel vloudila chyba, neboť slovo **ahoj** v příkladu lze napsat na *osm* stisků, ne na pět. Všem se moc omlouváme za zmatení.

⁴Text je k dispozici na následující adrese: https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/22-6-3-klavesnice_vstupni-text.txt

druhou, nebo kombinaci těchto operací. Do dalšího kroku pak vybereme jako k tu tabulku, pro kterou je hodnota optimalizované funkce f (v našem případě počet stisků kláves nutný pro napsání daného textu) nejlepší. To opakujeme, dokud se nedostaneme do stavu, kdy jsou všechny sousední nenavštívené tabulky horší než k . Této metodě se říká *hillclimbing*. Proč, to je nejlépe vidět při maximalizaci funkce definované na dvourozměrném prostoru (rovině). Tehdy její graf vytváří krajinu s pohořími, na které naše k šplhá (nebo spíš $f(k)$; k se pohybuje stále v původní rovině). Když dojde na vrchol, nemá kam jít dál. A tady se ukazuje největší slabina této metody – co když jsme vylezli na kopec, který není nejvyšší? Našli jsme pouze *lokální optimum* a už jej nedokážeme opustit.

Doc.^{MM}Jan Pokorný používal podobnou metodu, nazývanou *stochastický hillclimbing*. Místo prozkoumávání všech okolních tabulek si vždy vybral jednu náhodně (a přesunul se na ni jen pokud byla lepší než stávající tabulka). Je vidět, že změna neodstraní problém s lokálními optimy, s trochou štěstí však může urychlit výpočet a jednodušeji se programuje.

Jak se z lokálního optima dostat? Asi nejjednodušší způsob je zapamatovat si aktuální nejlepší nalezenou tabulku a spustit výpočet znovu s jinou náhodnou počáteční tabulkou. Tím ale zbytečně ztrácíme „nastoupané metry“ – možná skočíme z druhého nejvyššího vrcholu Krkonoš někam do Polabí.

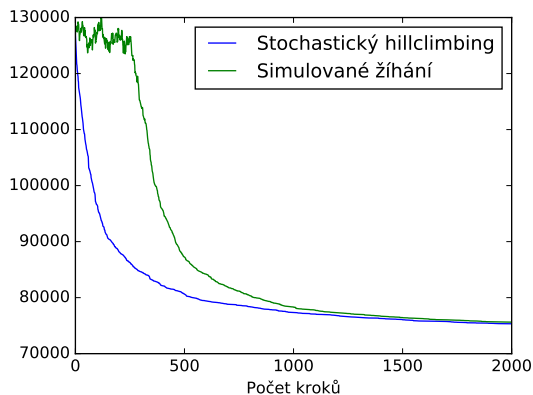
Oblíbená metoda nazývaná *simulované žihání* je inspirována postupem zpracování kovů, při kterém se materiál nejprve zahřeje na vysokou („žihací“) teplotu a následně se nechá zchladnout. Při vysoké teplotě mají atomy vyšší energii, snáze se přeskupují, kov je měkký. Během chladnutí pak postupně utvářejí krystalickou mřížku, která může být pravidelnější a pevnější než původní. Simulované žihání je podobné stochastickému hillclimbingu, pouze s určitou pravděpodobností P přijmeme novou tabulku do dalšího kroku, i pokud je horší než stávající. Díky tomu máme šanci přelézat nízké kopečky a dostat se až k horám. Pravděpodobnost P bude klesat s klesajícím parametrem T (teplotou). Pro stávající klávesnici k a náhodně vybranou sousední k' je pravděpodobnost přechodu z k na k' za teploty T

$$P(k, k', T) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } f(k) > f(k'), \\ \exp\left(\frac{f(k) - f(k')}{T}\right) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Teplota T by měla v průběhu výpočtu klesat z nějaké hodně vysoké hodnoty až k 0, například ji můžeme v každém kroku vynásobit 0,95.

Ale šedivá je teorie. Když porovnáme průběh optimalizace pomocí stochastického hillclimbingu a simulovaného žihání (Obrázek 7), zjistíme, že se stochastický hillclimbing do mělkých lokálních optim nedostává a simulované žihání za vysoké teploty jen zbytečně ztrácí čas. Na tuto úlohu se tedy asi příliš nehodí.

Vidět graf optimalizované funkce v průběhu výpočtu je často užitečné. Můžeme tak o výpočtu získat lepší představu a například zjistit, jestli má cenu pouštět jej s delším časovým limitem či s jinými parametry.



Obrázek 7: Porovnání průběhu optimalizace. Dvacetkrát jsme vygenerovali počáteční tabulku a na ni pokaždé postupně spustili obě metody. Zobrazena je průměrná hodnota f po určitém počtu kroků.

A konečně na obrázku 8 jsou konkrétní zkonstruované klávesnice. Dosažené skóre 68762 odpovídá přibližně 2,94 stiskům na napsání jednoho znaku, což je pravděpodobně dost blízko globálního optima.

WODhvmFH	wAUMEyOH	H0njhPCD
yj si IU	IvroCbLA	J.Sabu m
LuenleuA	f tcidaW	T edpro.
qtamortd	nea n.hP	LoluitcI
gisrcasp	glisur j	Vres eng
S~elne N	bupmteST	FfqvmauN
Tft uicQ	JqvN dVF	RQui.l E
RwPb.VEJ	csQaloDR	WngWUAMy

Obrázek 8: Zkonstruované klávesnice. Zleva skóre 79257 (Doc.^{MM}Petr Šimůnek, ručně), 69902 (Doc.^{MM}Jan Pokorný, stochastický hillclimbing) a 68762 (simulované žihání; program v jazyce Python, kterým jsme klávesnici našli, si můžete stáhnout z adresy https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/22-6-3-klavesnice_program.py).

Existuje mnoho dalších metod, kterými se podobné úlohy dají řešit, zmiňme například oblíbené evoluční algoritmy či particle swarm optimization. Žádná metoda však není univerzální⁵, a tak je optimalizace většinou provázána experimentováním a laděním konstant.

Matěj

⁵O tom pojednává tzv. „No free lunch“ theorem: https://en.wikipedia.org/wiki/No_free_lunch_in_search_and_optimization



Úloha 6.4 – Albertovy družice (4b)

Zadání:

Určování polohy pomocí GPS je založeno na přesném měření času v družicích. Aby bylo určování přesné, je potřeba brát v úvahu i relativistické jevy, a to dilataci času. Odvodte, jak se změní frekvence signálu vysílaného družicí v důsledku obecné teorie relativity (tedy změny potenciálu gravitačního pole). Změní se frekvence i kvůli jinému jevu? Vysvětlete.

Řešení:

Všetky komunikačné technológie na diaľku používajú elektromagnetické žiarenie. To je tvorené fotónmi. Fotóny majú vlastnú energiu fotónu danú vzťahom

$$E_f = hf,$$

kde h je Planckova konštanta a f frekvencia vlnenia. Táto energia fotónu je rovná kinetickej energii fotónu. Fotón nemá pokojovú hmotnosť, ale pohybovú ľahko vypočítame pomocou vzťahu

$$E_f = m_f c^2,$$

kde c je rýchlosť svetla.

Kvôli pohybovej hmotnosti pôsobí na fotón gravitačné pole. Pre potenciálnu energiu pri fotóne platí, že sa pridá alebo odoberie z energie fotónu. V newtonovskej fyzike pre ňu platia vzťahy

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= -\Delta E_f, \\ \Delta E_p &= \int_{r_1}^{r_2} F dr,\end{aligned}$$

kde F je gravitačná sila pôsobiaca na fotón. Našu hľadanú hodnotu $\Delta f/f$ dostaneme nasledujúcimi úpravami. Pri úpravách zanedbáme zmenu hmotnosti fotónu a dostaneme:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\Delta E_f}{h}, \\ \Delta f &= - \int_{R_z+l}^{R_z} \frac{GM_z m_f}{hr^2} dr, \\ \frac{\Delta f}{f} &= - \int_{R_z+l}^{R_z} \frac{GM_z}{c^2 r^2} dr, \\ \frac{\Delta f}{f} &= - \frac{GM_z}{c^2} \int_{R_z+l}^{R_z} \frac{1}{r^2} dr, \\ \frac{\Delta f}{f} &= \frac{GM_z}{c^2} \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z+l} \right),\end{aligned}$$

kde G je gravitačná konštanta, R_z polomer Zeme, l vzdialenosť družice od povrchu Zeme a M_z hmotnosť Zeme.

GPS satelity sú na dráhe približne 20 000 km nad Zemským povrchom. Závisí od polohy prístroja na Zemi a pohybe satelitu po jeho obežnej dráhe ako sa bude meniť ich vzájomná vzdialenosť. Pri zmene ich vzájomnej vzdialenosti sa prejaví Dopplerov posuvný jav. Tento posun bude aj posuvný do červena alebo do modra, gravitačný posun bude iba do modra v našom prípade.

Pre hodnoty $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, $M_z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$, $R_z = 6371 \text{km}$ a $l = 20\,000 \text{km}$ dostaneme výsledok $\Delta f/f \approx 5,3 \cdot 10^{-10}$. Pokiaľ by sme všetko počítali presne podľa obcej teórie relativity, výsledok by bol v prvom priblížení zhodný s našim výsledkom.

Kubo

Řešení témat

Téma 1 – Pojdte pane, budeme si hrát

K tématku došel příspěvek od Doc.^{MM}Petra Šimůnka, ve kterém se ohlíží za svým rozбором hry a shrnuje zjištěné poznatky. Tento příspěvek můžete jako obvykle najít na našich internetových stránkách. Co všechno se tedy za celý rok podařilo zjistit?

Víme, že naše hra vždy musí skončit (to jsme zjistili pomocí úvah o nesoudělnosti a o největším společném děliteli již zahraných čísel), délka hry však může být libovolně dlouhá (např. snadno vyrobíme hru končící po tisíci tazích – jednoduše budeme barvit čísla v pořadí 1000, 999, . . . , 2, 1). Těmito otázkami se zabývali např. Dr.^{MM}Marian Poljak či Doc.^{MM}Dominik Krasula.

Dále známe ideální strategii pro několik her začínajících konkrétními tahy – třeba pro hry začínající tahy 4,5 nebo 4,6. Pro mnoho konkrétních her víme, zda je vyhraje první, nebo druhý hráč (samozřejmě za předpokladu, že oba hrají ideálně). Za rozbor mnohých konkrétních her vděčíme Doc.^{MM}Petru Šimůnkovi, který napsal počítačový program umožňující obecně počítat výsledek hry, známe-li několik počátečních tahů (program ale není všespásný – jen pro některé hry nám vypočítá správnou odpověď v rozumném čase).

Nejsilnější teoretický výsledek je opět od Doc.^{MM}Petra Šimůnka. Ten si pomocí techniky zvané *kradení strategie* uvědomil, že první hráč má vyhrávající strategii a mezi první tahy vedoucí k výhře patří vybarvení libovolného prvočísla většího než 3. V krátkosti zde nastíníme postup důkazu.

Jestliže jsme hru začali vybarvením prvočísla, další vybarvené číslo s ním bude nesoudělné a proto nám po tahu soupeře zbude na tabuli pouze konečně mnoho čísel. Největší z nich si nazvěme m . Číslo m splňuje důležitou vlastnost, platí totiž, že pokud nyní vybarvíme kterékoli menší číslo, m vždy bude mezi čísly, jež po našem tahu smažeme, a naopak po vybarvení m nebudeme mazat žádné další číslo (toto tvrzení zde nebudeme dokazovat). Dále budeme pro spor předpokládat, že druhý hráč má vyhrávající strategii. To znamená, že pokud vybarvíme číslo m , protihráč může odpovědět vybarvením čísla v , kterým nás dostane do prohrané pozice. Pokud bychom ale my místo m vybarvili v , dostali jsme soupeře do té stejné pozice, o které už víme, že je prohraná. „Ukradli“ jsme tedy soupeři jeho vyhrávající strategii, ten ji proto nemůže mít, máme ji tedy my.

Povšimněte si, že jsme sice dokázali, že první hráč má vyhrávající strategii, důkaz nám ale nedává žádný návod, jaké tahy máme volit, abychom s jistotou vyhráli; pouze víme, že takový tah vždy existuje. Zkuste také vymyslet, proč naše úvahy neplatí v případě, kdy bychom jako první číslo škrtnli 2 nebo 3.

Nakonec děkuji všem, kteří nám poslali své příspěvky k tématku. Určitě vás zajímá, co všechno se o naší hře ví. Je známa pod jménem *Sylver Coinage* a na internetu naleznete některé její další známé vlastnosti. Nečekejte však konečné odpovědi, mnohé otázky týkající se této hry jsou stále otevřené. :-)

Vašek

Téma 2 – Volební systémy

V průběhu roku jste posílali mnoho zajímavých článků, které nás posunuly dále v porozumění volebním systémům a tomu, jak ovlivňují rozdělení moci ve státě. Zjistili jsme, že různé volební systémy mají odlišné vlastnosti a ve výsledku mají tendenci vést k jinému rozložení politického spektra. Viděli jsme, že většinový systém vede k tomu, že se moc rozdělí mezi dvě velké strany, ale zároveň zaručuje pro daný okrsek lokálního reprezentanta v parlamentu. Na druhou stranu D'Hondtova metoda a Hagenbach-Bischoffova kvóta mají tendenci způsobovat rozložení křesel mezi více menších stran. Článek Doc.^{MM}Jana Pokorného v minulém čísle ukázal, že velmi důležitou roli hraje i způsob rozdělení státu na volební okrsky. Přišli jste i s úplně novými návrhy, jak hlasovat ve volbách a počítat hlasy. Ze všech bych ráda připomněla možnost více hlasů s nemožností volit vícekrát jednoho kandidáta či možnost udělení záporného hlasu z článku Doc.^{MM}Petra Šimůnka.

Na závěr ročníku jsme dostali do redakce ještě příspěvek od Doc.^{MM}Kláry Stefanové. Klára zareagovala na podnět z posledního článku a srovnala Hagenbach-Bischoffovu kvótu a D'Hondtovu metodu v případě, kdy bereme stát jako jeden velký okrsek. Ukázalo se, že rozdíly v počtu dosažených hlasů byly v tomto případě minimální.

Vidíme tedy, že rozdíly mezi jednotlivými metodami se ukazují více ve chvíli, kdy je stát rozdělený na menší volební celky. Zároveň si však musíme uvědomit, že díky rozdělení státu na menší volební okrsky mají možnost významněji ovlivnit výsledky voleb například i méně osídlené venkovské oblasti, díky čemuž se zajistí rovnoměrnější rozdělení veřejných peněz a politického zájmu mezi regiony.

Pro výběr optimálního volebního systému je tedy důležité uvážit, jaké vlastnosti jsou pro nás klíčové. Ve chvíli, kdy nemáme motivaci podnikat snahy o reformu současného systému, je dobré alespoň uvážit jeho vlastnosti při našem přístupu k hlasování.

Anet

Téma 3 – Kosmický kulečník

V tématku jste se celý rok mohli zabývat tím, co by se stalo s naším životem nebo obecněji se Sluneční soustavou po zmizení některého z jejích těles. Zřejmě největší vliv na Zemi by mělo zmizení Měsíce kvůli jeho blízkosti a Jupitera kvůli jeho hmotnosti. Těmito dvěma tělesy se také většina z vás zabývala.

Obsáhlý článek o zmizení Měsíce poslal Bc.^{MM}Jakub Suchánek. Zabýval se v něm mimo jiné změnami slapových sil a vlivem na rotaci a oběžnou dráhu Země. Zmínil změnu sklonu rotační osy Země, který má vliv na tzv. Milankovičovy cykly a průměrnou teplotu na Zemi.

V pátém čísle si můžete přečíst článek od Bc.^{MM}Marca Souzy de Joode o zmizení Jupiteru, v němž rozebírá mnoho následků zmizení, avšak nespočítal přesné dráhy jeho měsíců po zmizení. Správné řešení poslal Doc.^{MM}Petr Šimůnek na základě textu ze čtvrtého čísla. Několik řešitelů mylně předpokládalo, že po zmizení Jupitera se tělesa vázaná a stabilizovaná jeho gravitačním polem zřítí do Slunce.

K tomu však nedojde kvůli zákonu zachování momentu hybnosti. Po zmizení Jupitera se tato tělesa pohybují převážně pod vlivem gravitačního pole Slunce po elipsách, parabolách nebo hyperbolách (viz čtvrté číslo). Aby spadly do Slunce, musel by jejich vektor rychlosti mířit do blízkosti Slunce (nebo od něj) tak, aby jejich oběžná dráha protala povrch Slunce. Nesmíme také zapomenout, že při oběhu kolem Jupitera mají jeho měsíce nějakou rychlost (např. Io má průměrnou oběžnou rychlost 17,334 km/s), která se vektorově sečte s rychlostí oběhu Jupitera (průměrně 13,050 km/s).

Doc.^{MM}Petr Šimůnek vytvořil simulaci v Excelu, která počítá a zobrazuje dráhy našeho Měsíce po zmizení Země a měsíce Io po zmizení Jupiteru⁶.

Viktor

Simulace dráhy Io a Měsíce (5,5b)

Doc.^{MM}Petr Šimůnek

Pozn. red.: Otiskujeme jen zkrácenou verzi článku.

Začneme s přehledem parametrů, které budeme potřebovat k výpočtu dráhy Měsíce po zmizení Země (počítáme případ, kdy se rychlosti Měsíce a Země sečtou rovnoběžně):

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg},$$

$$m = 7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg},$$

$$r = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$v = 3,081 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\alpha = 90^\circ,$$

kde G je gravitační konstanta, M je v našem případě hmotnost Slunce, m je hmotnost Měsíce, r je vzájemná vzdálenost Slunce a Měsíce, v je relativní rychlost Měsíce po zmizení Země vzhledem ke Slunci a α je úhel, který svírá vektor rychlosti Měsíce a přímkou mezi Sluncem a Měsícem.

⁶Soubor se simulací naleznete na stránkách tématka: <http://mam.mff.cuni.cz/media/tema/22/tema3/petr-simunek-simulace.xlsx>

Nejprve musíme spočítat E^7 :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{Mm}{r} \approx -3,033 \cdot 10^{-31} \text{ J}$$

$$L = mrv \sin \alpha \approx 3,387 \cdot 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2L^2}{G^2 M^2 m^3} \cdot E + 1} \approx 0,070$$

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} \approx 1,600 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Nyní známe všechny parametry dráhy. Na stránkách tématka je ke stáhnutí tabulka v Excelu, kde lze dosadit vstupní hodnoty a dostaneme odpověď pro libovolné těleso – dole se tam vykreslují dráhy, ale pozor, osy nejsou přesně v měřítku, je potřeba vždy graf roztáhnout tak, aby měl správně roztažené osy (o všech funkcích a jak na to na konci příspěvku, který se nachází na webu).

Na prvním listu jsou nejprve naše dvě tělesa. Rychlosti zde jsou už sečtené a třetí těleso si můžeme libovolně navolit, navíc zde jsou grafy těchto drah (tvořené 360 body). Jsou tu trochu problémy s hyperbolickými a parabolickými dráhami. V grafech je pět bodů navíc, jeden uprostřed nahrazuje Slunce a čtyři zde jsou po stranách, protože Excel má takovou „super“ funkci, že si mění měřítko os. Takto je pouze potřeba, aby tyto čtyři body tvořily takový čtverec stojící na jednom z vrcholů. Na dalších listech pak máme Io a Měsíc samostatně. Hlavní věc zde je, že si můžeme hrát s jednotlivými úhly⁸ (můžeme samozřejmě editovat všechny údaje, dokonce i gravitační konstantu, takže můžeme tvořit i nějaké fiktivní systémy). Poté se nám vykreslí dráha původní a nově vzniklá (pozn.: ohniska jsou vždy umístěna na x -ovou osu. Pokud není zadáný úhel měsíce 0° nebo 180° , tak dochází k posunu ohnisek z původní osy, původní dráhy se však vždy (pokud měsíc neodletěl) kříží v místě odpoutání).

Jinak těleso odpoutáváme v periheliu, jelikož zde je to nejvýhodnější (*Pozn. red.: pro největší změnu*). Pokud bychom zvýšili rychlost v aféliu, tak bychom se dostali dál od Slunce. Toto používají rakety, když chtějí dosáhnout orbity podobné kružnici: tak provádí zážeh na vrcholu dráhy. My však nechceme kruhové dráhy, ale nějaké extrémy, a proto odpoutáváme měsíce v periheliu planety.

Jinak od planety můžeme střílet měsíce libovolnými směry v okruhu 360° . Je zajímavé, že když vystřelíme měsíc pod nějakým úhlem „od planety“, tak se poté může perihélium naopak přiblížit k planetě. Což se může jevit divné, ale my víme, že po jednom oběhu se musí těleso opět nacházet na stejném místě a jelikož těleso letí v tom místě „nahoru“, (úhel mezi průvodičem a pohybem planety je rovněž zachován), tak muselo těleso přiletět „zespodu“, tudíž bylo blíže k planetě.

⁷Veličiny E , L , ϵ a p jsou popsány ve čtvrtém čísle časopisu.

⁸ve sloupci G

Téma 4 – Komprese mapových dat

K tématku přišlo řešení od Doc.^{MM}Petra Šimůnka. Ten v něm poukazuje na některá drobná vylepšení, která je možné udělat pro zlepšení komprese. První z nich je, že nebudeme udávat u sektorů počet bodů v nich, ale pouze počet podsektorů a takto v každé vrstvě vždy jen počet prvků vrstvy o jedna nižší. Tím se žádná informace neztratí a čísla se zmenší. Druhé vylepšení spočívá v tom, že dělení na sektory a podsektory neděláme z celého možného světa, ale pouze z oblastí, kde máme nějaké body. Tímto ušetříme spoustu prázdných sektorů a podsektorů, pokud máme ukládat mapu malého území.

Současně k příspěvku přikládá vylepšenou tabulku pro výpočet dělení na sektory a podsektory, kterou spolu s dokumentací můžete najít na našem webu⁹.



Závěrečné shrnutí tématu

V tématu jsme poměrně zevrubně probrali ukládání do stromové hierarchie se čtvercovými sektory a to včetně různých optimalizací a měření efektivity ukládání. Otevřené zůstaly problémy, zda jsou i jiné způsoby jak ukládat data kromě dělení na sektory a zda nám pomohou jiné souřadné soustavy (UTM, polární). Otevřené jsou také otázky, zda nám pomohou obdélníkové sektory a jak je to se ztrátou přesnosti. Na tyto dvě otázky nyní odpovíme.

Ač to možná není na první pohled patrné, tak naše sektory ve skutečnosti nejsou čtvercové. Vliv na to má různé uvažování zeměpisné šířky a délky. Zeměpisnou šířku definujeme jako úhel mezi rovinou rovníku a spojnicí daného bodu se středem Země, rovnoběžky jsou tedy kružnice rovnoběžné s rovníkem stejnoměrně vzdálené od sebe po povrchu Země. Zeměpisnou délku uvažujeme jako úhel mezi rovinou nultého poledníku a rovinou určenou póly a daným bodem. Poledníky tedy nejsou rovnoběžné, jsou to půlkružnice místo kružnic a potkávají se na pólech. Toto uspořádání umísťuje místa s největším zkreslením na póly, což se hodí nejen pro výpočty, ale i pro vytváření map. Protože ale poledníky nejsou

⁹ https://mam.mff.cuni.cz/media/reseni/2016-08/2016-08-10-18%3A33_22-7-t4-petr-simunek.xlsx

rovnoběžně, přibližně čtvercové sektory jsou pouze v okolí rovníku, v našich zeměpisných šířkách je poměr mezi délkovým a šířkovým stupněm přibližně 3:5. Ve skutečnosti tedy vytváříme spíše obdélníkovou než čtvercovou mřížku.

Ačkoli na to byla několikrát položena návodná otázka, nikdo se nezabýval tématem přesnosti dat. V zadaných datech byla čísla zadána ve stupních s přesností na sedm desetinných míst. Pokud se podíváme na to, kolik to je v našich zeměpisných šířkách, vyjde nám přesnost okolo 1 cm v zeměpisné šířce a 7 mm v zeměpisné délce. Tato přesnost je ještě obhajitelná, ale pokud bychom při generování přidali ještě dvě desetinná čísla, tak se nikdo nebude pozastavovat nad tím, že mapujeme na desetiny milimetru, což je na velkých územích naprosto zbytečné a dosáhnout takové přesnosti na velkých vzdálenostech také velmi náročné. Pokud bychom vytvářeli mapu pro mobilní telefony, tak vzhledem k přesnosti GPS přijímačů a praktickým potřebám navigace bychom mohli čísla o řád zkrátit, protože přesnost v desítkách centimetrů je pro zobrazení na mapě stále dostačující, a ušetřili bychom tím poměrně mnoho dat. Proto se při myšlenkách nad komprimací dat hodí uvažovat, zda potřebujeme data opravdu všechna a v dané přesnosti, nebo zda můžeme něco zahodit při stále uspokojivé kvalitě.

Další zdroje informací

Pro uložení a práci s prostorovými daty existují různé datové struktury, můžete si přečíst například o kd-stromech¹⁰, R-stromech¹¹ či quadtree¹².

Pokud by vás zajímaly formáty, které se skutečně používají, můžete zkusit prozkoumat následující.

- *Garmin IMG*¹³ Formát zaměřený primárně na co nejefektivnější uložení dat s ohledem na vykreslování mapy. Formát není oficiálně dokumentovaný, dokumentace vznikla prozkoumáním vytvořených map.
- *OsmAnd OBF*¹⁴ Formát využívající ProtocolBuffer¹⁵ pro konkrétní binární reprezentaci dat, oficiálně dokumentovaný, orientovaný na zobrazování mapy a vyhledávání míst a tras v ní.
- *OSM PBF*¹⁶ Formát pro uložení dat z OSM, opět využívá ProtocolBuffer, zaměřen na efektivní uložení všech informací, které se v OSM používají, určen pro další zpracování.

Zkuste v nich najít některé nápady, co se vyskytly v tomto tématku. Dokumentace k formátům je bohužel pouze v angličtině, pokud byste měli s nějakou částí problém, napište mi a zkusím vám s ní pomoci.

Jethro

¹⁰<http://phoenix.inf.upol.cz/~konecnja/vyuka/2013/ALS1files/new/05b.pdf>

¹¹<https://cs.wikipedia.org/wiki/R-strom>

¹²<https://en.wikipedia.org/wiki/Quadtree>

¹³http://www.pinns.co.uk/osm/docs/expl_img2015.pdf

¹⁴<https://github.com/osmandapp/OsmAnd-resources/blob/master/protos/OBF.proto>

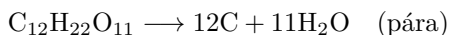
¹⁵<https://developers.google.com/protocol-buffers/docs/proto3>

¹⁶http://wiki.openstreetmap.org/wiki/PBF_Format

Téma 5 – Rozpuštělá rozpustnost

Koncem školního roku dorazily ještě dva velmi kvalitní příspěvky zabývající se rozpouštěním gumového medvídky. Mgr.^{MM}Tereza Hladíková se zaměřila na využití kyseliny sírové a následně ještě spolu s Doc.^{MM}Klárkou Stefanovou shrnuly jejich experimentální poznatky a zkusily odhalit chemickou podstatu pozorovaných reakcí.

Mgr.^{MM}Tereza Hladíková se ve svém příspěvku inspirovala pokusem s kyselinou sírovou a sacharózou. Předpokládala pak, že gumový medvídek, jehož hlavní složkou je cukr (v různých podobách), bude reagovat obdobně. Rozebrala vlastnosti hlavních složek gumových medvídků a následně zkoušela odhalit, k jakým chemickým reakcím dochází při smíchání glukózy a kyseliny sírové. Pozorovala také, že cukerný roztok (cukr ve vodě) reaguje s kyselinou sírovou rychleji než samotný cukr. Výsledkem jejího pátrání po chemické podstatě experimentu jsou následující reakce:



Samozřejmě provedla také experiment s gumovým medvídkem v hlavní roli. Přibližně po půl hodině od naložení medvídků do 96% kyseliny sírové se z nich začala uvolňovat nahnědlá barva. Postupem času dále černali, jejich povrch změkkl a vytvořil se hustý sliz. Exponát však nijak nezapáchal. Po deseti hodinách se medvídek nacházel v homogenně vypadající viskózní černé tekutině a samotní medvídci byli pokryti černou vrstvou.

První reakce (zuhelnatění) tedy patrně probíhala v obou případech, tj. při reakci sacharózy i gumových medvídků s kyselinou sírovou. Jelikož však Tereza nezaznamenala uvolňování tepla ani zápach způsobený SO_2 , je otázkou, zda u medvídků docházelo i k dalším dvěma reakcím.

Tereza tedy ve svém příspěvku ukázala, že kyselina sírová není až tak univerzální rozpouštědlo, jak by se na první pohled mohlo zdát. Celý článek můžete najít na našich webových stránkách.

V posledním příspěvku k našemu tématu Rozpuštělá rozpustnost spojila Mgr.^{MM}Tereza Hladíková své síly s Doc.^{MM}Klárkou Stefanovou a zabývaly se rozbořením reakcí gumového medvídky s dříve experimentálně testovanými rozpouštědly.

Za celý ročník jsme se v tématu Rozpuštělá rozpustnost dostali ke dvěma různým podtématům, přičemž obě byla řešena experimentálně i teoreticky. Nejprve jsme se zabývali faktory ovlivňujícími míru a rychlost rozpouštění v domácnosti běžně dostupných látek. Poté jsme se dostali ke gumovým medvídkům. Přestože je gumový medvídek z velké části tvořen cukrovými složkami, které jsou dobře

rozpustné nejen ve vodných roztocích, ukázalo se, že není vůbec jednoduché najít pro něj vhodné rozpouštědlo. Například namočení medvídka do 96% kyseliny sírové na 10 hodin stačilo pouze na jeho částečné zuhelnatění, zatímco dvoudenní louhování v 15% kyselině chlorovodíkové bylo dostatečné na zahlazení stop po medvídkově životě. Přestože se k tomuto tématu sešlo několik zajímavých a obohacujících příspěvků, mnoho otázek zůstalo stále nezodpovězeno. Více informací a jednotlivé příspěvky můžete najít na našich webových stránkách.

Peta

Gumový medvídek poněkolkáté (8b)

Mgr.^{MM} Tereza Hladíková a Doc.^{MM} Klára Stefanová

Pozn. red.: Z praktických důvodů jsme vynechali všechny odkazy na zdroje (téměř všechny zdroje jsou totiž elektronické). Kompletní článek, včetně zdrojů, je na stránkách tématka.

Obě dvě jsme se ve svých předchozích článcích zabývaly rozpouštěním gumového medvídka v různých chemikáliích. V tomto článku bychom se chtěly hlouběji zabývat chemickou podstatou toho, co se s medvídkem děje či neděje v nádobě a proč.

Složení gumových medvídků

Složení gumových medvídků se mění podle výrobce, ale určité komponenty bude slušně vychovaný medvídek obsahovat vždycky. Mezi ně patří: glukózový sirup, ovocná šťáva z koncentrátu, želatina, dextróza, kyselina citrónová. Dále se zmíníme o rozdílu mezi invertním cukrem a klasickou sacharózou.

Glukózový sirup a dextróza

Pod oběma těmito názvy se skrývá určitá forma glukózy.

Jako dextróza bývala glukóza označována v minulosti. Toto označení vychází z faktu, že v přírodě se vyskytuje pouze D-glukóza, tedy taková, která stáčí rovinu polarizovaného světla doprava. Toto označení se ještě stále užívá v lékařských publikacích. Většinou už tímto názvem není označována L-glukóza, která je pro člověka nestravitelná.

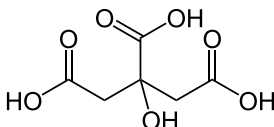
Glukózový sirup je zkrácené označení glukózo-fruktózového sirupu. Jedná se o sirupovou směs glukózy a fruktózy v poměru 40:60. *Pozn. red.: Poměr jednotlivých cukrů závisí na typu sirupu. Většinou převládá fruktóza, ale může se do mírné převahy dostat i glukóza.* V potravinářském průmyslu se používá jako sladidlo, které nahrazuje sacharózu. Mezi jeho hlavní výhody patří nižší výrobní cena v porovnání se sacharózou, avšak jeho sladkost je oproti kuchyňskému cukru přibližně dvojnásobná. Naopak velkou nevýhodou je přítomnost volné fruktózy, která snáze vytváří energetické zásoby v podobě „špeků“.

Želatina

Želatina se získává vyvářením šlach, kůží a kostí zvířat. V dnešní době se nejčastěji používá hovězí a vepřové kůže a kosti. Z chemického hlediska je želatina kolagen, bílkovina, která se skládá z 18 aminokyselin. *Pozn. red.: Tím je míněno, že se v kolagenu nachází 18 „druhů“ aminokyselin, celkový počet aminokyselin v kolagenu je samozřejmě mnohem větší.*

Kyselina citrónová

Kyselina citronová patří mezi slabší karboxylové kyseliny. Nalezneme ji především v citrusových plodech (odtud taky triviální název). Velmi hojně se užívá v potravinářském průmyslu jako konzervant díky své schopnosti regulovat kyselost či zásaditost potraviny, do které je vpraven. Omezuje tak např. případný růst plísní. Na etiketě ji můžeme naléznout pod zkratkou E330.



Obrázek 9: Kyselina citrónová

Invertní cukr vs. sacharóza

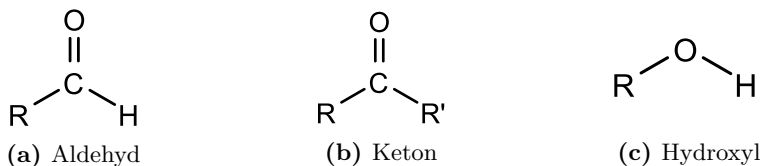
Sacharóza je disacharid, který potkáme ve většině kuchyní pod názvem moučkový cukr/cukr krupice/krytal. V našich končinách se kuchyňský cukr vyrábí z cukrové řepy. Skládá se z jedné molekuly D-glukózy a jedné molekuly D-fruktózy, které jsou mezi sebou spojeny poloacetátovou vazbou. *Pozn. red.: Správně jde o acetátovou vazbu.* Oproti tomu invertní cukr je ekvimolární směs D-glukózy a D-fruktózy. Připravuje se hydrolýzou sacharózy. *Pozn. red.: Sacharózu nelze hydrolyzovat zcela. Při maximální možné hydrolýze nám v roztoku zůstane 5 % sacharózy.* Obě tyto látky jsou v potravinářství používány jako sladidla. Invertní cukr je však sladší než sacharóza, protože obsahuje monosacharidy, které mají oproti disacharidům sladší chuť. *Pozn. red.: Toto tvrzení obecně neplatí. Fruktóza je sladší než sacharóza, ale sladivost glukózy je na 50–70 % sladivosti sacharózy. Navíc směs invertovaná z 50 % je sladší než „zcela“ invertovaný cukr.*

Sacharidy

Sacharidy jsou organické sloučeniny, které patří do skupiny polyhydroxyderivátů karbonylových sloučenin. Tento složitý název skupiny nám říká, že každá molekula sacharidu bude obsahovat alespoň jednu ketonovou nebo aldehydickou funkční skupinu (molekuly obsahující ketonovou nebo aldehydickou funkční skupinu nazýváme karbonylovými). Slovem polyhydroxyderivát rozumíme fakt, že se v molekule nachází větší množství hydroxylových funkčních skupin, o kterých nejčastěji mluvíme v souvislosti s alkoholy a fenoly.

Sacharidy dělíme podle počtu cukerných jednotek na monosacharidy, oligosacharidy (2–10 cukerných jednotek) a polysacharidy (>10 cukerných jednotek). Cukerné jednotky jsou v oligo- a polysacharidech spojeny poloacetátovou (*Pozn. red.: acetátovou*) vazbou. Organismy sacharidy využívají jako zdroje energie, zásobní látku nebo stavební látku či jako součást složitějších molekul. Monosacharidy a disacharidy jsou charakteristické svou sladkou chutí, a proto je člověk velmi často využívá jako sladidla.

V naší práci se budeme věnovat především monosacharidům. Ty v lidském těle slouží jako zdroj energie. Z hlediska chemického jsou oněmi cukernými jednotkami, které slouží i ke stavbě složitějších sacharidů. Podle toho, jakou obsahují funkční skupinu, je dělíme na aldózy (aldehydická funkční skupina) a ketózy (ketonová funkční skupina). Dále je můžeme dělit podle počtu uhlíků, které tvoří jejich řetězec.

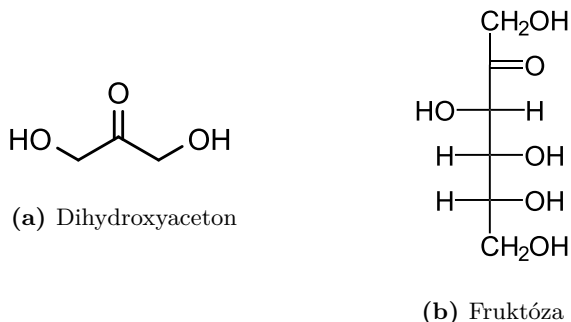


Obrázek 10: Funkční skupiny s kyslíkem objevující se v sacharidech

Ketózy

Ketózy jsou monosacharidy obsahující jednu ketonovou skupinu v cukernaté jednotce. Nejjednodušší ketózou je dihydroxyaceton. Jedná se o tzv. ketotriózu. Nejznámější ketózou je fruktóza, která je obsažena i v gumových medvídčích.

Fruktóza je často označována jako ovocný cukr. Nalezneme ji v ovoci bohatém na vlákninu. Její nadměrná konzumace může mít negativní účinky na lidské zdraví (obezita, snížená citlivost buněk na inzulín vedoucí k diabetu II. typu).

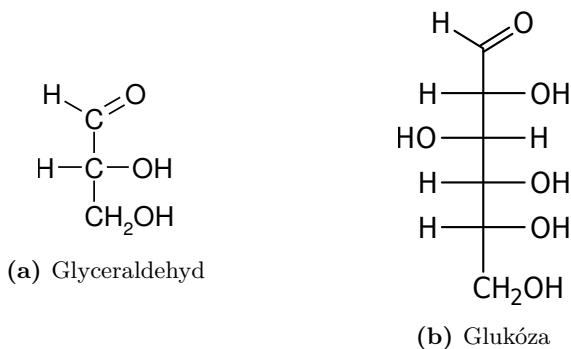


Obrázek 11: Příklady ketóz

Aldózy

Aldózy jsou monosacharidy obsahující jednu aldehydickou skupinu v cukernaté jednotce. Nejjednodušší aldóza je glyceraldehyd. Jedná se o tzv. aldotriózu. Za neznámější aldózu je považována glukóza, kterou může také nalézt v gumových medvídčích.

Glukóza bývá velmi často označována jako hroznový cukr. Vyskytuje se v každé zelené rostlině, protože je jedním z produktů fotosyntézy. Pro člověka je glukóza základním zdrojem energie a některé buňky nejsou ani schopné získávat energii z jiných zdrojů. Pokud je její množství v krvi vyšší, mluvíme o tzv. hypoglykémii, která je jedním z příznaků diabetu. *Pozn. red.: Správně jde o hyperglykémii, hypoglykémie je naopak nedostatek glukózy v krvi.*



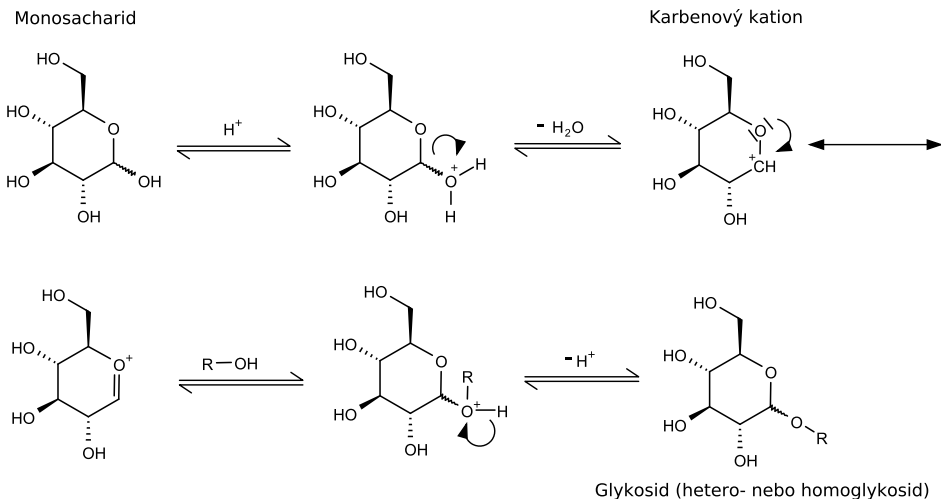
Obrázek 12: Příklady aldóz

Reakce

Primárně budeme uvažovat reakce dvou monosacharidů: glukózy a fruktózy, které tvoří podstatnou část gumového medvídka a jsou podstatně reaktivnější než kolagen (želatina).

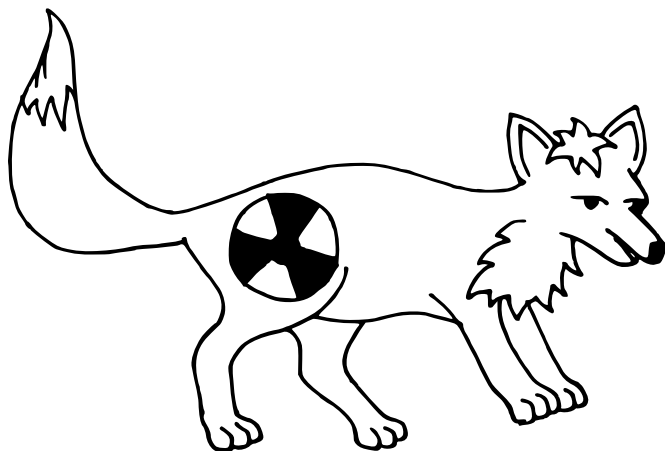
Kyseliny

Tereza Hladíková použila ve svém experimentu kyselinu sírovou a Klára Stefanová kyselinu chlorovodíkovou. Shodly jsme se, že reakce medvídka se v našich případech budou lišit kvůli tomu, že jsme použily jiné látky a diametrálně odlišné koncentrace (H_2SO_4 96 % a HCl 15 %). U kyseliny sírové bude docházet k reakcím, které popisovala Tereza Hladíková ve svém příspěvku. Tedy dojde k rozkladu monosacharidů na uhlík a vodu. Uhlík pak dále bude reagovat s kyselinou a bude vznikat oxid uhličitý, oxid siřičitý a voda. U kyseliny chlorovodíkové bude reakce probíhat trochu jinak. Domníváme se, že bude docházet k reakci poloacetalových hydroxylů za vzniku glykosidů. *Pozn. red.: Pokud by docházelo ke vzniku glykosidů, jak je možné, že se medvídek v HCl rozloží?* Tento princip můžete vidět na Obrázku 13.



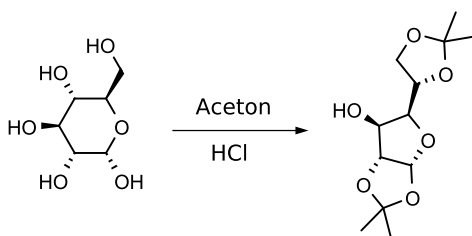
Obrázek 13: Reakce poloacetátových hydroxyylů

Dále se domníváme, že v obou případech bude docházet i k reakci želatiny s kyselinami, protože kyseliny jsou jedny z látek, které mohou denaturovat bílkovinu. Výsledná barva směsi bude u kyseliny chlorovodíkové odpovídat barvě, kterou měl medvídek, protože barviva by neměla s kyselinou reagovat. *Pozn. red: Barvivo se v kyselině rozpustí, ale již s ní dále nereaguje, proto má výsledný roztok barvu pigmentu a ne jinou.* U kyseliny sírové bude barvu ovlivňovat vznikající uhlík, který celou směs zabarví do černa.



Aceton

Aceton může být v chemických reakcích jak nukleofilním, tak elektrofilním činidlem, což ho činí velmi univerzálním, co se reakcí v organické chemii týče, což dokládá i jeho široké zastoupení v organických syntézách. O acetonu mluvíme i v souvislosti s cukrovkou, nemocí způsobenou špatným metabolismem glukózy, protože vzniká v těle při neléčené cukrovce. V tomto případě však aceton nevzniká z glukózy, ale z tuků, které se rozkládají místo ní. Pokud se pokusíme nalézt reakci acetonu a glukózy, jsme částečně úspěšní. Náš úspěch je pouze částečný, protože při reakci je ještě přítomna kyselina chlorovodíková. Naše domněnka ohledně jejího vlivu na reakci je následující. Kyselina je v reakci přítomná kvůli tomu, že umožňuje protonovat reaktanty, a tak umožní reakci. Nelze ji však v pravém slova smyslu označit za katalyzátor, protože do reakce vstupuje. Podobná reakce by se dle našeho soudu mohla opakovat i v případě fruktózy. Z tohoto důvodu se domníváme, že samotné monosacharidy s acetonem nereagují.



Obrázek 14: Reakce glukózy za přítomnosti acetonu a kyseliny chlorovodíkové

Toluen a xylén

Toluen a xylén patří do skupiny aromatických uhlovodíků, které se též nazývají areny. Tyto uhlovodíky obsahují ve své struktuře alespoň jedno benzenové jádro. V benzenovém jádru dochází k neustálé rezonanci π elektronů a ta způsobuje jakousi delokalizaci těchto elektronů, která je podstatou aromaticity molekuly.

Toluen a xylén se velmi často používají jako organická rozpouštědla. V obou případech se jedná o nepolární molekuly, tedy takové, u kterých nenalezneme parciální náboj. K tomuto jevu (*Pozn. red.: polarizaci vazeb*) dochází, když jsou elektronegativity prvků účastnících se vazeb rozdílné natolik, že jeden z atomů si k sobě stáhne elektronový pár tvořící vazbu. Naopak v glukóze a fruktóze nalezneme takovýchto vazeb hned několik, proto obě tyto molekuly považujeme za polární. Vzhledem k tomu, že v chemii platí pravidlo, že podobné se rozpouští v podobném, nebude se ani jeden z monosacharidů v arenech rozpouštět.

Dále je zapotřebí vysvětlit, která látka reagovala s toluenem a umožnila vzniknout látce, která následně způsobila v reakci s vodou bílý povlak na medvídkovi. Prvně můžeme vyloučit oba cukry, které v medvídkách nalezneme, protože se cho-

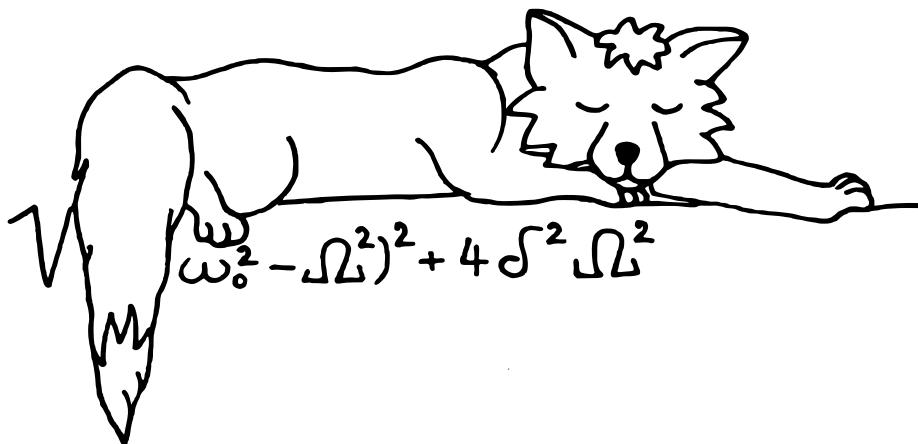
vají jako polární látky. Další významnou součástí medvídků je želatina. Ta je tvořena bílkovinou kolagenem. Tato bílkovina je považována za nerozpustnou. *Pozn. red.: Nerozpustnou v čem?* Dalším potenciálním adeptem na rozpuštění by mohla být kyselina citronová. Ta patří mezi hydroxykyseliny, tedy takové karboxylové kyseliny, které ve své struktuře obsahují hydroxylovou skupinu, na které můžeme nalézt parciální náboj, který způsobuje polaritu molekuly a tedy její neschopnost být rozpuštěna nepolárním rozpouštědlem. *Pozn. red.: To, že látka obsahuje jednu OH skupinu, ještě neznamená, že nemůže reagovat s nepolárními rozpouštědly. Vždy záleží, jak vypadá celá molekula, např. cholesterol. Kyselina citrónová se však bude řadit mezi polární látky.* Námi hledanou látku nejsme schopni nalézt, což nás velice rmoutí.

Seriál: Neplatné zachování

Minule jste dostali za úkol zamyslet se nad symetriemi, které neplatí zcela, nebo neplatí vůbec. Řešení jsme obdrželi jen od Doc.^{MM}Petra Šimůnka, který z wiki-pedie opsal dostupný seznam.

Už v minulém díle jsme zmínili, že zákon zachování **hmotnosti** platí jen ve speciálních případech (při nerelativistických rychlostech a bez chemických či jaderných přeměn). Velkou skupinou nedokonalých zákonů zachování jsou zachování různých vlastností elementárních částic při jejich přeměnách, které jsou porušeny slabou jadernou interakcí: **baryonové číslo** (počet baryonů), **leptonové číslo** (počet leptonů), **podivnost** (počet strange kvarků, obdobně i pro jiné vůně), **izospin a průmět izospinu**. Silná jaderná interakce porušuje zachování izospinu, ale ne jeho průmětu.

U některých z nich bychom možná i čekali, že platit budou, a ve spoustě situací s jejich platností můžeme počítat – odhalily je až nesrovnalosti v některých oblastech moderní fyziky.

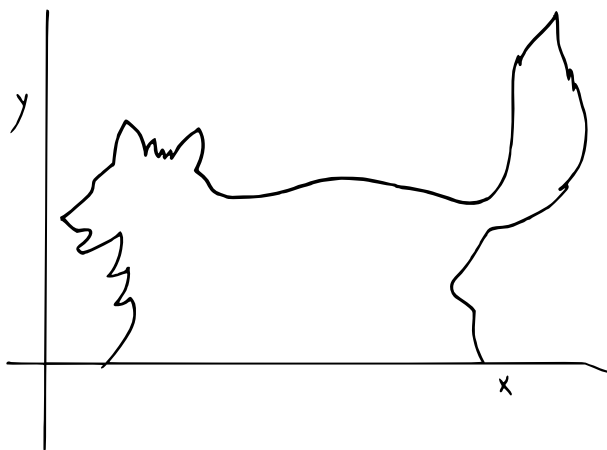


CPT

Probrali jsme už většinu geometrických zobrazení, ale zatím jsme nemluvili o inverzi, v tomto kontextu se používá i označení parita, přestože parita funkce je něco jiného. Grupa příslušná inverzi je vždy cyklická a má dva prvky – identitu a inverzi. Úplně tady nesedí teorém Noetherové, protože nemáme žádné spojité Lieovy grupy. Přesto se s inverzemi spojují určité zákony zachování.

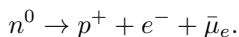
Začneme s **paritou prostoru**, tedy symetrií vůči výměně x za $-x$, označujeme ji P . Pokud tato symetrie platí (operátor parity \hat{P} komutuje s Hamiltoniánem), pak se zachovává parita vlnové funkce.¹⁷ Na první pohled taková symetrie vypadá v pořádku, jenže neplatí. Paritu prostoru porušují slabé jaderné interakce, konkrétně to bylo dokázáno roku 1957 na *beta-rozpadu* (objevitelé Jang Čen-Ning a Li Čeng-Tao obdrželi Nobelovu cenu).

Jak to zjistili? Použili k tomu kombinaci pravých a axiálních vektorů. Pravý vektor se při libovolném otočení chová stejně jako prostor a při inverzi mění znaménko. Právé vektory jsou například rychlost, intenzita elektrického pole, síla, ... Pro nás bude důležitý směr emise elektronů \vec{v} (takže vlastně jejich rychlost, bude nás ale zajímat jen její směr, ne velikost). Axiální vektory se také při otočení transformují jako prostor, ale při inverzi znaménko nemění. Patří mezi ně všechny vektory, které mají něco společného s reálnou či virtuální rotací, například úhlová rychlost nebo magnetická indukce. V našem případě spin \vec{s} . Pokud skalárně vynásobíme pravý vektor s axiálním, dostaneme něco jako skalár, jen bude při inverzi měnit znaménko. Takové veličině říkáme pseudoskalár. Pokud je tedy v experimentu generováno nějaké rozdělení veličiny x (závislost počtu pozorovaných případů na hodnotě x), mělo by být symetrické okolo nuly.



¹⁷Pokud je vlnová funkce sudá, zůstane po aplikování inverze sudou, a pokud je lichá, zůstane lichou.

Beta rozpad je rozpad neutronu v atomovém jádře na proton, elektron a elektronové antineutrino¹⁸



Zajímá nás počáteční průmět spinu jádra \vec{s} a směr rychlosti vyletujícího elektronu \vec{v} . Průmět spinu jádra známe, protože jsme spiny všech jader v našem vzorku zorientovali vnějším magnetickým polem tam, kam chceme. Rozdělení znaménka veličiny $x = \vec{s} \cdot \vec{v}$ je pak totožné s rozdělením směru rychlosti vyletujícího elektronu – zajímá nás složka rychlosti po směru průmětu spinu jádra, anebo proti, protože ta určuje skalární součin. Jenže ve směru spinu jádra vyletuje víc elektronů než proti. Prostor tedy není symetrický vůči inverzi.

Vůči **inverzi času** (značíme T) svět symetrický také není, to vidíme dnes a denně. Čas zkrátka nemůžeme otočit nazpět. Rozlitá voda se zpět do sklenice nenalije, rozbité vajíčko se neslepí, plyn vypuštěný z lahve se do ní nevrátí, . . . Tyto makroskopické jevy souvisí s entropií. *Entropie S* je míra neuspořádanosti systému, dá se určit třeba z počtu w možných mikroskopických realizací daného stavu jako

$$S = k_B \ln w,$$

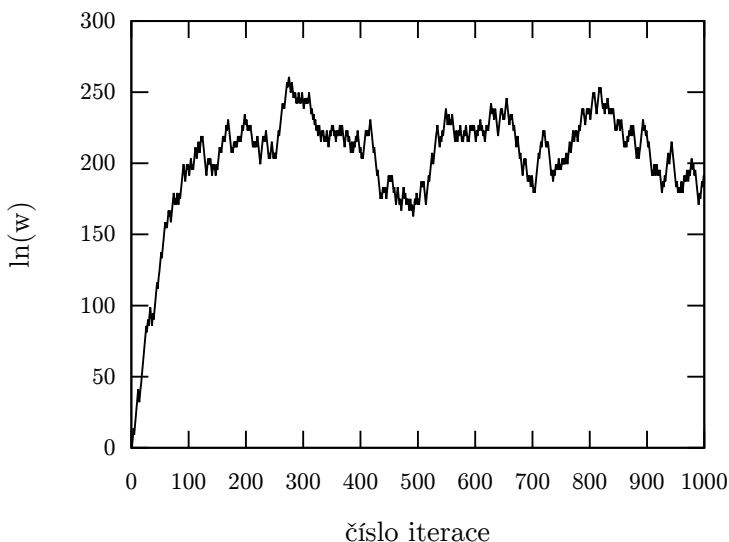
kde k_B je Boltzmannova konstanta. Mikroskopická realizace je konkrétní obsazení stavů konkrétními „částicemi“. Například máme-li makroskopický stav skládající se ze dvou rozlišitelných částic ve stavu 1 a jedné ve stavu 2, možná mikroskopická realizace je třeba částice A a B ve stavu 1 a částice C ve stavu 2.

Podle druhého zákona termodynamiky entropie pro vesmír jako celek nikdy neklesá. Můžeme ji sice někde lokálně snížit (například tak, že si uklidíme v pokoji) ale vždy je to za cenu alespoň stejně velkého zvýšení entropie někde jinde (a určitého množství práce). Jsou děje, které mohou probíhat oběma směry, těm říkáme vratné, a ostatním nevratné. Při vratných dějích se entropie systému zachovává.

Požadavek růstu (nebo alespoň neklesání) entropie se dá odvodit čistě statisticky. Představme si systém n objektů, třeba tří, které mohou každý nabývat N stavů, třeba dvou (házení třemi mincemi). Jako dokonale uspořádaný vidíme ten systém, kde jsou všechny objekty ve stejném stavu (na všech mincích padla hlava nebo na všech orel). Zvýšením entropie pak je, když se objekty rozprostřou mezi stavy rovnoměrněji, než předtím.

Provedeme pokus, kdy začneme s nějakým hodem mincí a náhodně jednu z nich otočíme. Jaká je pravděpodobnost zvýšení a snížení entropie? Ze stavu s nejnižší entropií, tedy třeba tři orlů, vznikne náhodnou fluktuací, tedy otočením jedné z mincí, vždy stav o vyšší entropii. Ze stavu s vyšší entropií, třeba dva orli a jedna panna, vznikne v jedné třetině případů stav s nižší entropií (tři orli) a ve dvou třetinách ekvivalentní případ dvou panen a jednoho orla (protože v našem případě už se entropie zvýšit nedá). Pokud si těch objektů vezmeme mnohem víc, náhodná fluktuace stav změni mnohem méně (Obrázek 15).

¹⁸ Antičástice značíme pruhem nad značkou částice.



Obrázek 15: Příklad průběhu entropie fluktuujícího systému sta mincí v čase.

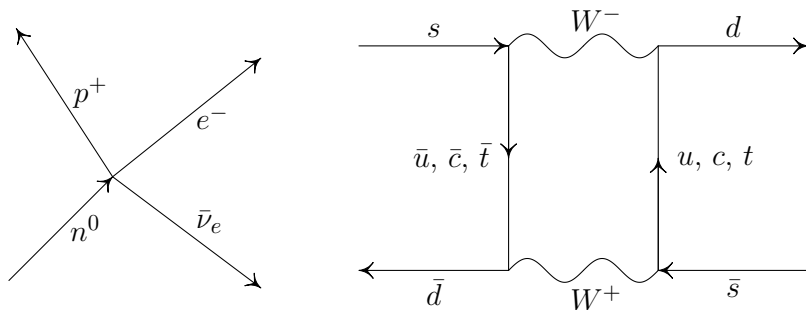
S nesymetrií času souvisí i spontánní porušení symetrie. Pokud systém donutíme vybrat si jeden z mnoha možných stavů, třeba ochlazením zmagnetizujeme kus kovu, zůstane zmagnetizovaný i nějakou dobu po ohřátí. Časem se může postupně odmagnetizovat vlivem náhodných fluktuací. Spontánní magnetizace je ale děj, který nikdy neproběhne „pozpátku“.

Dalším časově nesymetrickým jevem je *kolaps vlnové funkce*. Každá částice je popsána vlnovou funkcí a dokud jí nepostavíme do cesty něco, co nastavení některé z jejích vlastností (třeba spinu), bude v určité superpozici několika dovolených stavů. Při měření vlnová funkce zkolabuje do některého konkrétního stavu, protože, jak už víme, změřit můžeme jen vlastní čísla příslušných operátorů.

Spousta rovnic, třeba pohybové rovnice nebo většina vztahů platných v mikrosvětě, ale časově symetrická je. V teorii relativity se čas bere jako souřadnice rovnocenná k prostorovým. Zkratka někdy inverze času funguje.

Poslední z velké trojice inverzí je **nábojové sdružení**, čili symetrie vůči výměně částic za antičástice, značená C . Kdyby byly fyzikální zákony naprosto stejné pro hmotu i antihmotu, očekávali bychom ve vesmíru celkový poměr blízký jedné – v některé části by byla spíš hmotu, v jiné antihmotu. Protože ale nepozorujeme nic, co by naznačovalo přítomnost takových oblastí, můžeme předpokládat, že antihmotu je vzácná všude a tato symetrie neplatí.

Fyzici se snaží symetrii světa zachránit alespoň tak, že jednotlivé symetrie slučují. Když nefunguje obrácení času ani nábojové sdružení, což takhle vyměnit částice za antičástice a k tomu obrátit čas? Takovému konstruktu se říká **CT-symetrie**. Ale ani CT-symetrie neplatí dokonale a vždy.



Obrázek 16: Vlevo je schéma rozpadu neutronu (beta-rozpad), v tomto diagramu představuje směr zleva doprava prostorové souřadnice a směr zdola nahoru plynutí času. Antičástice se pohybují proti směru času. Vpravo je Feynmanův diagram přeměny neutrálního K^0 mezonu na jeho antičástici. Interakce probíhá zleva doprava. Písmenem W jsou značeny intermediální bosony slabé jaderné interakce.

CP-symetrie, tedy záměna částic a antičástic spolu s inverzí prostoru, také nefunguje. Porušuje ho slabá jaderná interakce, jak bylo objeveno u rozpadu K^0 mezonu (Obr. 16, vpravo). Tento mezon se skládá z kvarku s a antikvarku \bar{d} , přeměnou řízenou slabou jadernou interakcí se může přesmyknout na vlastní antičástici $\bar{s}d$. Opačný přesmyk ale nemá stejnou pravděpodobnost. To je ale v rozporu s CP symetrií, podle níž by přesmyk $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$ měl být stejně pravděpodobný jako $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$.

Neplatnost sjednocení všech tří symetrií, **CPT**, zatím prokázána nebyla. Nové experimenty částicové fyziky tuto symetrii spíše potvrzují. Platnost sjednocené symetrie CPT má ale své důsledky pro nižší symetrie: Jestliže v nějakém systému například platí CP symetrie, pak musí platit i zbytek, tedy inverze času, aby zůstala zachována celková symetrie CPT.

S postupným objevováním neplatnosti těchto symetrií šlo vytváření standardního modelu. Dnes máme tři rodiny kvarků. Nejprve se ale předpokládala jen jedna rodina (jen kvarky up a down). Bylo odvozeno, že jedna rodina kvarků nemůže porušit symetrii P. Když byla objevena neplatnost inverze prostoru, začala se hledat druhá rodina kvarků a skutečně se našla (charm a strange). Dvě rodiny nemohou porušit CP-symetrii. Díky objevu neplatnosti CP symetrie byla nalezena i poslední známá rodina kvarků (true a beauty). Tři rodiny už nemohou porušit CPT. Pokud by se zjistilo, že CPT neplatí, je na čase hledat další kvarky, a naopak, pokud by se našly další kvarky, je na čase hledat vyšší sjednocení symetrií.

Chiralita

Letošní seriál uzavřeme poznámkou o nesymetrii života. Existují látky, které stáčí rovinu polarizovaného světla. Pokud polarizované světlo projde dráhu d roztokem této látky o koncentraci c , bude pak jeho rovina polarizace stočená o úhel $\varphi(c,d)$. Takové látky označujeme jako *chirální*. Od každé takové látky existují dvě varianty – *enantiomery*, jeden stáčí rovinu polarizovaného světla doleva a druhý doprava. Molekuly enantiomeru jsou si navzájem zrcadlovými obrazy, jako levá a pravá ruka.

Pokud nějakou chirální látku syntetizujeme, vyrobíme stejné množství obou enantiomerů. Vznikne *racemická směs*, která rovinu polarizovaného světla nestáčí. U biomolekul se ale vyskytuje vždy jen jeden z enantiomerů. Potkáváme výhradně pravotočivé cukry a levotočivé aminokyseliny. Zrcadlový obraz těchto molekul už nemá správnou biologickou funkci. Roztok přírodního cukru stáčí rovinu polarizovaného světla doprava. Když se pokusíme nakrmit bakterie syntetickým cukrem, tedy racemickou směsí, brzy začne roztok stáčet rovinu polarizovaného světla doleva, protože bakterie ten pravotočivý zkonsumují.

Jakmile vznikne život, tedy něco, co dokáže replikovat molekuly, na kterých je to založeno, začnou právě tyto molekuly převládat. Na začátku mohly vzniknout všechny varianty života a ta naše byla z nějakého důvodu preferovaná. Stačilo by velmi slabé zvýhodnění, o něco maličko vyšší koncentrace jednoho enantiomeru než druhého, aby forma života založená na té výhodnější chemii vyhrála.

Velmi slabé zvýhodnění pravotočivých cukrů a levotočivých aminokyselin doopravdy existuje. Plyne z mísení slabé jaderné interakce s elektromagnetickou. Podle posledních výpočtů je ale slabé příliš. Takže kdo ví, možná že je život opravdu jen náhoda.

Více k teorii grup ve fyzice se můžete dočíst zde:

1. Pavel Cejnar: Symetrie v mikrosvětě (www.ucjf.troja.mff.cuni.cz/cejnar/publikace/symetrie.pdf)
2. Klíma a Velický: Kvantová mechanika
3. Blog Hynka Bílý: Kvantová koroptev (koroptew.blogspot.com/2011/01/smercasu-i.html)
4. Karel Vacek: Život a symetrie (dml.cz/dmlcz/138711)
5. Lee Smolin: Fyzika v potížích (www.matrix-2001.cz/clanek-detail/3574-moderni-fyzika-a-sjednoceni-castic-i-sil-aneb-fyzika-v-potizich-1)

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Úlohy							\sum_0	\sum_1
				r1	r2	r3	r4	s	t1	t2		
24.	Mgr. ^{MM} B. Požár	2	20,1								0	14,1
25.	Mgr. ^{MM} J. Vala	2	21,5								0	13,5
26.	Mgr. ^{MM} D. Jurdová	4	23,0								0	13,0
27.	Mgr. ^{MM} P. Turinský	3	25,5								0	12,5
28.	Mgr. ^{MM} L. Vincenová	2	37,1		2,0						2,0	12,1
29.	Mgr. ^{MM} S. Rosecká	4	20,0								0	12,0
30.	Bc. ^{MM} P. Hudec	2	11,5								0	11,5
31.	Bc. ^{MM} M. Zika	4	13,7								0	10,7
32.	Bc. ^{MM} P. Petráš	4	10,4								0	10,4
33.–34.	Bc. ^{MM} L. Kopfová	1	19,0								0	10,0
	Mgr. ^{MM} Z. Svobodová	4	38,0								0	10,0
35.	T. Špalková	3	9,6								0	9,6
36.	T. Večeřa	1	8,9								0	8,9
37.–38.	Mgr. ^{MM} J. Dittrich	4	47,1								0	8,1
	Bc. ^{MM} A. Kostelecká	4	10,1								0	8,1
39.	A. Jandová	1	8,0								0	8,0
40.	Bc. ^{MM} F. Zajíc	3	12,0								0	7,0
41.	K. Čížková	2	6,5	1,5	1,0						2,5	6,5
42.–43.	T. Piskovský	1	6,4								0	6,4
	Z. Sýkora	1	6,4								0	6,4
44.	Bc. ^{MM} E. Mlynářčiková	3	17,2								0	6,2
45.	J. Růžička	1	6,0								0	6,0
46.	M. Koval	1	5,9								0	5,9
47.	M. Horváth		4,6								0	4,6
48.	Mgr. ^{MM} P. Šťastný	3	36,2								0	4,2
49.	A. Šámal	2	6,6								0	3,6
50.–51.	Mgr. ^{MM} M. Doležalová	4	31,5								0	3,5
	F. Chocholatý	1	3,5								0	3,5
52.	M. Šedová	2	3,2								0	3,2
53.	D. Štípková	3	3,1								0	3,1
54.–55.	L. Hrubčík		3,0								0	3,0
	A. Neubauerová	2	8,0								0	3,0
56.–57.	A. Andrášková	3	2,6								0	2,6
	K. Řezáčová	1	2,6								0	2,6
58.	T. Pálková		2,3								0	2,3
59.	J. Bartoš	1	2,1								0	2,1
60.–62.	M. Machalová	3	2,0								0	2,0
	K. Moudrá	3	2,0								0	2,0
	J. Pospíšil	2	2,0								0	2,0
63.–64.	A. Štrpka	1	1,6								0	1,6
	K. Tulingerová	1	1,6								0	1,6
65.	N. Petruny	2	1,3								0	1,3
66.	S. Burešová	2	8,0								0	1,0
67.	M. Miček	1	0,6								0	0,6
68.	V. Hudec	2	0,5	0,5	0,0						0,5	0,5
69.–70.	M. Balla	1	0,1								0	0,1
	Bc. ^{MM} J. Paidar	2	19,1								0	0,1
71.	J. Marek		0,0								0	0

Sloupec \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Výsledková listina 22. ročníku

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Číslo					\sum_1	
				3	4	5	6	7		8
1.	Doc. ^{MM} P. Šimůnek	3.	142,7	16,6	33,7	19,3	27,0	15,6	14,5	126,7
2.	Doc. ^{MM} K. Stefanová	4.	106,6	14,7	22,3	17,2	14,4	2,0	11,0	81,6
3.	Doc. ^{MM} J. Pokorný	4.	101,0	2,8	4,5	5,0	24,0	9,7	7,0	53,0
4.	Mgr. ^{MM} L. Belza	4.	49,6	13,7	7,3	10,1	9,5	4,0	5,0	49,6
5.	Doc. ^{MM} D. Krasula	3.	143,4	4,0	24,4	5,5	5,5	2,0	0	41,4
6.	Dr. ^{MM} J. Václavěk	4.	68,3	9,6	6,8	5,1	16,8	0	0	38,3
7.	Mgr. ^{MM} T. Hladíková	2.	35,6	6,1	0	0	0	10,0	19,5	35,6
8.	Dr. ^{MM} T. Domes	3.	77,4	11,9	10,1	5,0	0,9	6,5	0	34,4
9.	Dr. ^{MM} A. Mlezivová	2.	55,5	6,8	9,2	3,0	5,5	1,0	4,0	29,5
10.	Dr. ^{MM} M. Poljak	4.	63,0	22,0	3,0	0	0	0	0	25,0
11.	Mgr. ^{MM} L. Kundratová	1.	24,3	7,0	0	2,6	8,5	4,7	1,5	24,3
12.	Mgr. ^{MM} D. Žáček	3.	33,9	3,6	4,3	0	15,0	0	0	22,9
13.	Mgr. ^{MM} D. Chytilová	2.	20,8	6,2	8,9	3,7	0	2,0	0	20,8
14.	Doc. ^{MM} P. Souček	4.	110,7	13,2	3,2	4,3	0	0	0	20,7
15.	Bc. ^{MM} M. Souza de Joode	Z8.	19,8	13,1	4,2	2,0	0,5	0	0	19,8
16.	Bc. ^{MM} J. Pallová	1.	19,3	13,8	0	0	5,5	0	0	19,3
17.	Bc. ^{MM} O. Buček	2.	18,3	5,8	0	3,0	0	7,5	2,0	18,3
18.	Mgr. ^{MM} F. Čermák	2.	35,6	0	9,6	0	4,0	4,0	0	17,6
19.	Mgr. ^{MM} S. Lukeš	3.	39,2	3,2	0	2,0	6,5	5,5	0	17,2
20.	Bc. ^{MM} J. Domes	1.	16,6	11,6	0	0	0	5,0	0	16,6
21.	Mgr. ^{MM} O. Knopp	2.	26,6	5,5	0	2,1	0	8,0	0	15,6
22.	Bc. ^{MM} J. Suchánek	2.	15,2	0	0	0	8,0	7,2	0	15,2
23.	Bc. ^{MM} J. Gocník	4.	15,1	9,6	0	0	5,5	0	0	15,1
24.	Mgr. ^{MM} B. Požár	2.	20,1	6,5	0	2,1	3,5	2,0	0	14,1
25.	Mgr. ^{MM} J. Vala	2.	21,5	0	3,0	0	8,5	2,0	0	13,5
26.	Mgr. ^{MM} D. Jurdová	4.	23,0	3,0	10,0	0	0	0	0	13,0
27.	Mgr. ^{MM} P. Turinský	3.	25,5	3,5	0	0	5,0	4,0	0	12,5
28.	Mgr. ^{MM} L. Vincenová	2.	37,1	5,2	2,9	0	0	2,0	2,0	12,1
29.	Mgr. ^{MM} S. Rosecká	4.	20,0	4,0	8,0	0	0	0	0	12,0
30.	Bc. ^{MM} P. Hudec	2.	11,5	11,5	0	0	0	0	0	11,5
31.	Bc. ^{MM} M. Zika	4.	13,7	5,2	4,0	1,5	0	0	0	10,7
32.	Bc. ^{MM} P. Petráš	4.	10,4	10,4	0	0	0	0	0	10,4
33.-34.	Bc. ^{MM} L. Kopfová	1.	19,0	0	0	0	10,0	0	0	10,0
	Mgr. ^{MM} Z. Svobodová	4.	38,0	0	0	0	10,0	0	0	10,0
35.	T. Špalková	3.	9,6	9,6	0	0	0	0	0	9,6
36.	T. Večeřa	1.	8,9	2,4	6,5	0	0	0	0	8,9
37.-38.	Mgr. ^{MM} J. Dittrich	4.	47,1	1,0	2,8	4,3	0	0	0	8,1
	Bc. ^{MM} A. Kostecká	4.	10,1	5,6	0	2,5	0	0	0	8,1
39.	A. Jandová	1.	8,0	6,8	1,2	0	0	0	0	8,0
40.	Bc. ^{MM} F. Zajíc	3.	12,0	3,0	0	0	0	4,0	0	7,0
41.	K. Čížková	2.	6,5	0	0	0	0	4,0	2,5	6,5
42.-43.	T. Piskovský	1.	6,4	4,4	0	2,0	0	0	0	6,4
	Z. Sýkora	1.	6,4	4,4	0	2,0	0	0	0	6,4
44.	Bc. ^{MM} E. Mlynářčiková	3.	17,2	4,6	1,6	0	0	0	0	6,2
45.	J. Růžička	1.	6,0	0	0	0	0	6,0	0	6,0
46.	M. Koval	1.	5,9	5,9	0	0	0	0	0	5,9
47.	M. Horváth		4,6	4,6	0	0	0	0	0	4,6
48.	Mgr. ^{MM} P. Štastný	3.	36,2	0	0	4,2	0	0	0	4,2
49.	A. Šámal	2.	6,6	3,6	0	0	0	0	0	3,6
50.-51.	Mgr. ^{MM} M. Doležalová	4.	31,5	3,5	0	0	0	0	0	3,5

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Číslo						\sum_1
				3	4	5	6	7	8	
	F. Chocholatý	1.	3,5	3,5	0	0	0	0	0	3,5
52.	M. Šedová	2.	3,2	3,2	0	0	0	0	0	3,2
53.	D. Štípková	3.	3,1	1,0	0	2,1	0	0	0	3,1
54.-55.	L. Hrubčík		3,0	0	0	3,0	0	0	0	3,0
	A. Neubauerová	2.	8,0	0	0	3,0	0	0	0	3,0
56.-57.	A. Andrýsková	3.	2,6	2,6	0	0	0	0	0	2,6
	K. Řezáčová	1.	2,6	2,6	0	0	0	0	0	2,6
58.	T. Pálková		2,3	1,6	0,7	0	0	0	0	2,3
59.	J. Bartoš	1.	2,1	2,1	0	0	0	0	0	2,1
60.-62.	M. Machalová	3.	2,0	0	0	0	0	2,0	0	2,0
	K. Moudrá	3.	2,0	2,0	0	0	0	0	0	2,0
	J. Pospíšil	2.	2,0	2,0	0	0	0	0	0	2,0
63.-64.	A. Štrpka	1.	1,6	1,6	0	0	0	0	0	1,6
	K. Tulingerová	1.	1,6	1,6	0	0	0	0	0	1,6
65.	N. Petruny	2.	1,3	1,3	0,0	0	0	0	0	1,3
66.	S. Burešová	2.	8,0	1,0	0	0	0	0	0	1,0
67.	M. Miček	1.	0,6	0,4	0,1	0,1	0,0	0	0	0,6
68.	V. Hudec	2.	0,5	0	0	0	0	0	0,5	0,5
69.-70.	M. Balla	1.	0,1	0,1	0	0	0	0	0	0,1
	Bc. ^{MM} J. Paidar	2.	19,1	0	0,1	0	0	0	0	0,1
71.	J. Marek		0,0	0,0	0	0	0	0	0	0,0

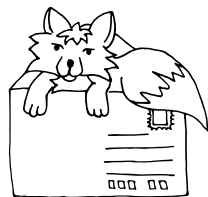
Sloupec \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz

WWW: <http://mam.matfyz.cz>



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy v Praze. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence Creative Commons Attribution 3.0. Dílo smíte šířit a upravovat. Máte povinnost uvést autora. Autory textů jsou, pokud není uvedeno jinak, organizátoři M&M.